МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

проф. Олемской А.И., к. ф.-м. н. Кохан С.В.,
студ. Вайленко А. С.

Временной ряд представляет последовательность численных данных анализируемой величины, значения которой берутся в последовательные моменты времени, разделенные достаточно малым интервалом. Временные ряды представляют основной инструмент исследования эволюции сложных систем в физике, биологии, метеорологии, экономике, социологии и других научных направлениях и их приложениях. Наиболее популярный пример временного ряда дают обменные курсы различных валют (см. рис. 1).

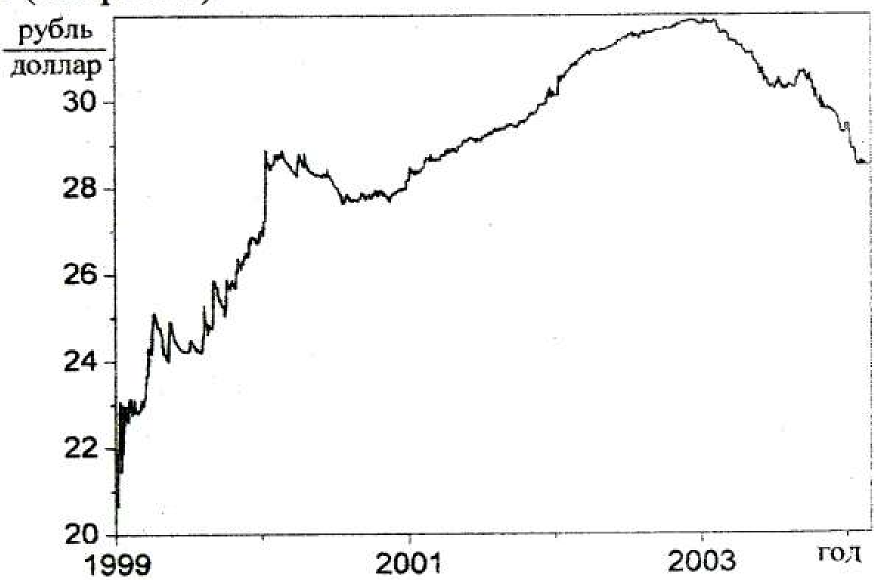

Рис. 1. Колебания обменного курса рубля к доллару

Из этого примера видно, что невозможно предсказать точное изменение исследуемой величины со временем. Поэтому можно говорить только о статистическом исследовании временных рядов, которое позволяет предсказать вероятности различных сценариев их поведения. Такая задача существенно упрощается, если учесть, что большинство рядов имеют самоподобный характер: если взять какой-либо малый фрагмент и увеличить его до размеров всего ряда, то распределение случайной переменной не меняет своего характера.

Геометрическим образом самоподобного временного ряда является фрактальное множество, размерность которого меньше топологической размерности пространства, которое содержит это множество. Например, кривая Коха, показанная на рис. 2, имеет размерность $\ln 4 / \ln 3 = 1.263$, которая находится в интервале между значением 1, отвечающим обычной линии, и величиной 2, соответствующей плоскости. В том случае, если фрактальное множество имеет не одну размерность, а целый спектр, то такой объект называется мультифракталом.

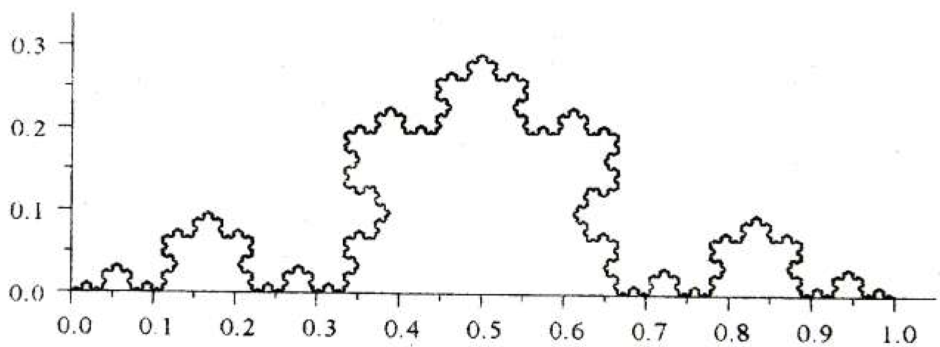

Рис. 2. Кривая Коха

Предлагаемая работа посвящена анализу нестационарных временных рядов, представленных как мультифрактальные объекты. Процедура обработки данного ряда сводится к следующим этапам:

1) вычитая из значений x_k среднюю величину, вводим суммарную флуктуацию для конечного отрезка временного ряда;

2) делим полный временной интервал на $N_s \equiv \operatorname{int}(N/s)$ сегментов, каждый из которых содержит s значений $x_{(\nu-1)s+1}, \dots, x_{\nu s}$, где $\nu = 1, \dots, N_s$ - номер сегмента. В результате такого деления на конце интервала остается сегмент, содержащий количество точек, которое меньше N_s;
3) подбирая полином $y_\nu(i)$, который наилучшим образом ложится на точки $x_{(\nu-1)s+1}, \dots, x_{\nu s}$ ν-го интервала (например, с помощью метода наименьших квадратов), находим дисперсию на интервале ν для прямого и обратного отсчета интервалов;
4) по интервалам, отсчитанным в обоих направлениях, проводим усреднение дисперсии, деформированной показателем q;
5) используя логарифмические оси, находим показатель Херста $h(q)$, отвечающий скейлинговому соотношению $F_q \sim s^{h(q)}$;
6) через показатель Херста $h(q)$ находим выражения для спектральной функции $f(\alpha)$, показателя Гёльдера $\alpha(q)$ и мультифрактальной размерности $D(q)$:

$$f(\alpha) = 1 + q(\alpha)\left[\alpha - h(q(\alpha))\right],$$

$$\alpha(q) = h(q) + q\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}q},$$

$$D(q) = \frac{1}{q-1}\left[qh(q) - 1\right].$$