ТЕОРЕМА ПРО ДОБУТОК ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

проф. Черняк Л.М., доц. Зимак Ю.А.,
вед. інж. Хмаренко А.М.

Будь-яка термодинамічна замкнута система характеризується певною кількістю параметрів – характеризаторів системи. Одні з них легко виміряти на досліді, а інші майже недоступні безпосереднім вимірюванням. Пропоноване узагальнення теореми про добуток частинних похідних дозволяє знаходити взаємозв'язок між будь-якою кількістю параметрів, які характеризують вибрану систему. А це дає можливість за відомими залежностями між вимірюваними на досліді параметрами знаходити інші параметри.

ТЕОРЕМА: Якщо рівняння $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, зв'язує n змінних, то виконується рівність:

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial x_4} \cdot ... \cdot \frac{\partial x_n}{\partial x_1} = (-1)^n .$$

Доведення приводиться в статті, яка здана до друку.

Теорема має широке застосування. Наприклад, у курсі фізики для виведенні термодинамічних функцій стану.

Для прикладу одержимо одне з рівнянь стану газу.

Відповідно до об'єднаного закону термодинаміки

$$dQ = TdS = PdV + dU ,$$

де Q – кількість теплоти; T – абсолютна температура; S – ентропія; P – тиск; V – об'єм газу; U – внутрішня енергія.

Звідки внутрішня енергія

$$dU = TdS - PdV \tag{1}$$

Рівність (1) можна розглядати, як повний **диференціал** функції U.

Тоді величини T й P повинні бути частинними похідними: перша при сталому V, а друга при сталому S тобто

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V; \quad -P = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S.$$

Продиференціюємо останні дві рівності ще раз по тим змінним, які вважали до цього сталими:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_s = \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V}; \quad \left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V = -\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V}.$$

Праві частини рівні за модулями, тому:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V. \tag{2}$$

Щоб одержати різні рівняння стану газу, ми будемо розглядати рівняння (2), як функцію від трьох змінних, уважаючи четверте змінне фіксованим (ізопроцесси!). Наприклад: $f_1(T,.V,.S) = 0$ або $f_2(T,.V,.P) = 0$

Застосуємо до функції $f_1(T,.V,.S) = 0$ теорему про добуток частинних похідних.

Маємо:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = -1^3. \tag{3}$$

З рівняння (2) підставимо значення $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S$ в добуток частинних похідних (3):

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = -1.$$

Перегрупуємо похідні

$$\left(\frac{\partial P}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_T = 1 \text{ або } \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_T = 1.$$

Звідки остаточно одержуємо:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T. \qquad (4)$$

Рівність (4) являє собою одне з основних рівнянь термодинаміки.

З теореми про частинні похідні легко знаходяться і інші термодинамічні залежності, що дозволяє обчислити термодинамічні параметри V, P, T, S, J, Φ та інші за відомими співвідношеннями між вимірюваними на досліді термодинамічними величинами. Останнє має широке застосування на тільки в термодинаміці, але в теорії газового і рідинного станів.

1. Смирнов В.И. Курс высшей математики. – Т.1-4. – М-Л.: ОГИЗ, 1948 и последующие годы изданий.
2. Млодзеєвський. Курс теоретичної фізики. Термодинаміка. – К: Радянська школа, 1954. – 204с.
3. Левич В.Г. Курс теоретической физики. – Т.1. – М.: Физматгиз, 1962. – 696с.