

## ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ КИНЕТИКА ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

А. И. Олемской, А. В. Хоменко

Сумский государственный университет  
244007, Сумы, Украина

Поступила в редакцию 17 апреля 1996 г.

В рамках модели Лоренца исследуется кинетика фазовых переходов первого и второго рода, представляемых параметром порядка, сопряженным полем и управляющим параметром. Рассмотрены возможные предельные случаи соотношений между отвечающими им временами релаксации. Проведено аналитическое и численное исследование фазовых портретов в различных кинетических режимах. Показано, что благодаря критическому возрастанию времен релаксации параметра порядка и сопряженного поля реализуется колебательное поведение, если затравочное время релаксации управляющего параметра намного превышает его значения для других степеней свободы. В противоположном случае все фазовые траектории быстро сбегаются к универсальному участку, названному в [6] «руслом большой реки».

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время заметно возрос интерес к кинетике фазовых переходов (см. обзоры [1, 2] и имеющиеся там ссылки). Основной предпосылкой, позволившей существенно продвинуться в описании пространственно-временной эволюции системы в ходе фазового перехода, является скейлинговая гипотеза, впервые использованная в критической области [3]. Однако, если в последней масштаб изменения координаты ограничивается корреляционной длиной  $\xi \rightarrow \infty$ , при описании эволюции новой фазы ее роль играет либо характерный размер  $L$  антифазного домена — при описании «лифшицевской пены» [4], либо критический размер  $R_c$  выделений — в картине коалесценции [5]. В рамках гипотезы масштабной инвариантности структурный фактор  $S(r, t)$  (в случае коалесценции — вероятность распределения  $P(R, t)$  по размерам выделений  $R$ ) представляется универсальным образом в зависимости от координаты  $r$  и радиуса выделений  $R$ , измеренных в соответствующих масштабах. Условие масштабной инвариантности позволяет фиксировать временную зависимость величин  $L(t), R_c(t)$  и установить асимптотики коррелятора  $S(r/L(t))$  при  $r \ll L$  и  $r \gg L$  [1, 2] (в задаче Лифшица–Слезова [5] удастся найти не только асимптотики распределения  $P(R/R_c(t))$ , но и его аналитический вид). Оказалось, что вид зависимостей  $S(r/L), P(R/R_c)$  не чувствителен к выбору микроскопических параметров (типа потенциала межатомного взаимодействия), а целиком определяется условием сохранения параметра порядка и размерностями  $d, n$  физического пространства и пространства параметра порядка (для моделей Изинга и Гейзенберга соответственно  $n = 1$  и  $n = \infty$ ). Например, коротковолновая асимптотика ( $kL \gg 1$ ) пространственного фурье-образа коррелятора  $S(r, t)$  имеет в случае сохраняющегося параметра порядка вид обобщенного закона Порода  $S(k, t) \propto L^{-n} k^{-(d+n)}$ , характеризующего наличие резких границ раздела [1]. При  $t \rightarrow \infty$  размер домена определяется соотношением  $L^{c+d-1} \propto t$ , где  $c = 2$  для сохраняющегося

параметра порядка и  $c = 0$  для несохраняющегося, а критический радиус коагулирующей системы  $R_c^d \propto t$  [1, 2].

Приведенные данные показывают, что известная универсальность феноменологической картины фазового перехода присуща не только термодинамическому поведению, но и кинетическому (точнее, динамическому). В недавней работе [6] было обнаружено еще одно проявление универсальности кинетической картины фазового перехода. Авторы работы [6] исходили из того факта, что в ходе фазового перехода параметр порядка  $\eta(t)$  может изменяться неавтономным образом. Так, если оказываются существенными стрикционные эффекты, упорядочение среды сопровождается появлением поля деформации, которая, как известно, играет роль вторичного эффекта, связанного с появлением самоогласованного поля, сопряженного параметру порядка<sup>1)</sup>. Обычно принимается, что оба указанных поля успевают следовать за изменением параметра порядка. Выполнение этого условия предполагает, что время релаксации  $\tau_h$  сопряженного поля  $h(t)$  намного меньше соответствующего значения  $\tau_\eta$  для параметра порядка ( $\tau_h \ll \tau_\eta$ ). Тогда нетрудно показать, что стрикционный эффект сводится к появлению дальнедействующего поля, перенормирующего величину термодинамического потенциала. При определенных условиях эта перенормировка сказывается таким образом, что происходит замедление (и даже остановка) фазового перехода [6]. Это обстоятельство можно трактовать как проявление своеобразного принципа Ле-Шателье, отражающего наличие отрицательной обратной связи между параметром порядка и сопряженным полем.

Обнаруженная авторами работы [6] универсальность кинетической картины фазового перехода проявляется, если предположить, что поведение системы определяется не только параметром порядка, но и другой термодинамической степенью свободы  $T$ , характерное время релаксации  $\tau_T$  которой соизмеримо с соответствующим значением  $\tau_\eta$  для параметра порядка. В этой связи в [6] рассмотрен еще один механизм проявления принципа Ле-Шателье — за счет нагревания области, прилегающей к выделению фазы, образованной в результате резкого охлаждения системы ниже точки фазового перехода первого рода. При этом роль управляющего параметра  $T$  играет локальное значение температуры в области выделений фазы. На основе эвристических соображений в [6] получена система нелинейных дифференциальных уравнений для определения зависимостей  $\eta(t)$  и  $T(t)$ . Исследование их фазового портрета  $\eta(T)$  и вида самих временных зависимостей  $\eta(t), T(t)$  показывает, что все фазовые траектории разбиваются на два участка. На первом величины  $\eta$  и  $T$  сравнительно быстро эволюционируют со временем, и он не сказывается существенным образом на кинетическом поведении системы. Последнее определяется медленным изменением величин  $\eta(t)$  и  $T(t)$  на втором участке, положение которого определяется близостью к сепаратрисе и образно названо в [6] «руслом большой реки». Таким образом, в представлении фазового портрета универсальность кинетики фазового перехода проявляется как наличие некой сепаратрисной области (в пределе — линии), положение которой не зависит от микроскопических деталей поведения системы.

Обращает на себя внимание то обстоятельство, что аргументация работы [6] основана на специфических модельных соображениях, хотя ее выводы носят, на наш взгляд,

<sup>1)</sup> Если параметр порядка отвечает спонтанной намагниченности, то сопряженное поле сводится к магнитной индукции. Для упорядочивающихся твердых растворов, где параметр порядка определяет дальний порядок в чередовании атомов разного сорта, сопряженное поле равно разности химических потенциалов компонент.

более общий характер. В этой связи представляется актуальной постановка данной задачи в рамках, не ограниченных узкими модельными соображениями. Предлагаемая работа предпринята с целью такого исследования.

Исходной посылкой нашего подхода является синергетическая концепция фазового перехода, в рамках которой он реализуется в результате взаимно согласованного поведения трех степеней свободы: параметра порядка  $\eta(t)$ , сопряженного поля  $h(t)$  и управляющего параметра  $T(t)$  [7]. Как уже отмечалось, первая пара указанных переменных связана отрицательной обратной связью. Основой синергетического подхода является то обстоятельство, что положительная обратная связь между второй парой,  $\eta(t)$  и  $T(t)$ , может привести к самоорганизации системы, которая и является причиной фазового перехода.

С математической точки зрения наиболее простая схема описания самоорганизующейся системы представляется известной схемой Лоренца [7]. Она представляет три дифференциальных уравнения, выражающих скорости  $\dot{\eta}$ ,  $\dot{h}$ ,  $\dot{T}$  изменения величин  $\eta$ ,  $h$ ,  $T$  через их значения. Характерная особенность этих выражений состоит в том, что все они содержат диссипативные слагаемые, величины которых обратно пропорциональны соответствующим временам релаксации  $\tau_{\eta}$ ,  $\tau_h$ ,  $\tau_T$ . Обычно при исследовании термодинамики фазового перехода принимается адиабатическое приближение  $\tau_h, \tau_T \ll \tau_{\eta}$ , означающее, что в ходе своей эволюции сопряженное поле  $h(t)$  и управляющий параметр  $T(t)$  изменяются настолько быстро, что успевают следовать за медленным изменением параметра порядка  $\eta(t)$  [7]. При этом эволюция системы описывается (единственным) уравнением Ландау–Халатникова, в котором роль свободной энергии играет синергетический потенциал. В результате синергетический подход сводится к стандартной феноменологической схеме фазового перехода. Различие состоит в том, что в стохастических системах процесс самоорганизации происходит в высокотемпературной области, а в термодинамических — в низкотемпературной. Кроме того, если для последних температура среды совпадает с ее значением для термостата, то при синергетических фазовых переходах отрицательная обратная связь между параметром порядка и сопряженным полем, отражающая принцип Ле-Шателье, понижает стационарное значение управляющего параметра по сравнению с его величиной, фиксируемой внешним воздействием.

Нетрудно видеть, что для описания кинетических особенностей фазового перехода, найденных на основе модельных соображений [6], в рамках синергетического подхода следует ослабить стандартный принцип соподчинения [7], принимая, что наибольшим временем релаксации обладает не одна, а две гидродинамические степени свободы. В результате кинетика фазового перехода представляется системой двух дифференциальных уравнений. Основная наша задача состоит в исследовании возможных сценариев течения фазовых переходов второго (разд. 2) и первого (разд. 3) родов. Существенным преимуществом использованного синергетического подхода является то обстоятельство, что он позволяет, не обращаясь к узким модельным соображениям, учесть действие обобщенного принципа Ле-Шателье. В этом смысле полученные ниже результаты носят достаточно общий характер. Что касается использования системы Лоренца, то известно, что она выделена в синергетике как одна из простейших схем, позволяющих учесть эффект самоорганизации. В частности оказалось, что гамильтониан, воспроизводящий недиссипативные слагаемые уравнений Лоренца, имеет простейший вид фрелиховского типа [8].

## 2. ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД ВТОРОГО РОДА

Ограничимся для простоты случаем несохраняющегося параметра порядка, для которого отсутствует координатная зависимость. Тогда исходная система уравнений Лоренца имеет вид [7]

$$\dot{\eta} = -\eta/\tau_\eta + g_\eta h, \quad (1)$$

$$\dot{h} = -h/\tau_h + g_h \eta T, \quad (2)$$

$$\dot{T} = (T_0 - T)/\tau_T - g_T \eta h. \quad (3)$$

Здесь точка означает дифференцирование по времени  $t$ ;  $\tau_\eta, \tau_h, \tau_T$  — времена релаксации параметра порядка  $\eta(t)$ , сопряженного поля  $h(t)$  и управляющего параметра  $T(t)$ ;  $g_\eta, g_h, g_T$  — положительные константы связи,  $T_0$  — температура термостата. Характерная особенность системы (1)–(3) состоит в линейности правой части уравнения (1) для параметра порядка и соответствующей нелинейности уравнений (2), (3). Первые слагаемые описывают релаксацию системы к стационарным значениям  $\eta = 0, h = 0, T = T_0$ , вторые — связь между различными гидродинамическими модами. Отрицательный знак перед нелинейным слагаемым в (3) отражает действие отмеченного выше принципа Ле-Шателье, знак «плюс» перед  $\eta T$  в (2) отражает положительную обратную связь между  $\eta(t)$  и  $T(t)$ , являющуюся причиной самоорганизации.

При выполнении соотношений  $\tau_h, \tau_T \ll \tau_\eta$  можно пренебречь флуктуациями величин  $h(t) \approx h(\eta(t))$ ,  $T(t) \approx T(\eta(t))$ , полагая в (2), (3)  $\dot{h} = 0, \dot{T} = 0$ . В результате получаем равенства, выражающие сопряженное поле и управляющий параметр через параметр порядка:

$$h = A_h T_0 \eta (1 + \eta^2/\eta_m^2)^{-1}, \quad (4)$$

$$T = T_0 (1 + \eta^2/\eta_m^2)^{-1}, \quad (5)$$

где

$$\eta_m^{-2} \equiv A_T A_h, \quad A_i \equiv \tau_i g_i, \quad i = \eta, h, T. \quad (6)$$

При  $\eta \ll \eta_m$  соотношение (4) носит линейный вид, характеризуемый восприимчивостью  $\chi = (A_h T_0)^{-1}$ . При возрастании параметра порядка до значения  $\eta = \eta_m$  зависимость  $h(\eta)$  выходит на насыщение, а при  $\eta > \eta_m$  убывает, что не имеет физического смысла. Отсюда следует, что постоянная  $\eta_m$ , определенная равенствами (6), имеет смысл максимального значения параметра порядка. Что касается равенства (5), то оно описывает уменьшение управляющего параметра от максимального значения  $T_0$  при  $\eta = 0$  до минимальной величины  $T_0/2$  при  $\eta = \eta_m$ . Очевидно, убывающий характер зависимости  $T(\eta)$  является проявлением принципа Ле-Шателье.

Подставляя (4) в (1), приходим к уравнению типа Ландау–Халатникова

$$\tau_\eta \dot{\eta} = -\partial V / \partial \eta, \quad (7)$$

где синергетический потенциал  $V$  имеет вид

$$V = \frac{\eta^2}{2} \left\{ 1 - \frac{T_0}{T_c} \left( \frac{\eta}{\eta_m} \right)^{-2} \ln \left[ 1 + \left( \frac{\eta}{\eta_m} \right)^2 \right] \right\}, \quad (8)$$

$$T_c \equiv (A_\eta A_h)^{-1}. \quad (9)$$

Если температура термостата  $T_0$  меньше критического значения  $T_c$ , определенного равенством (9), то зависимость  $V(\eta)$  имеет монотонно возрастающий вид с минимумом в точке  $\eta_0 = 0$ . При этом система не упорядочивается. В закритической области  $T_0 > T_c$  синергетический потенциал приобретает минимум при ненулевом значении параметра порядка<sup>2)</sup>

$$\eta_0 = \eta_m \sqrt{\theta - 1}, \quad \theta \equiv T_0/T_c. \quad (10)$$

Это означает, что при резком переходе системы в область, характеризуемую значением безразмерной температуры термостата  $\theta > 1$ , она за время

$$\tau = \tau_\eta (\theta - 1)^{-1} \quad (11)$$

приобретает стационарное значение параметра порядка (10). При этом зависимость  $\eta(t)$  имеет обычный дебаевский вид

$$\eta = \eta_0 (1 - e^{-t/\tau}). \quad (12)$$

### 2.1. Случай $\tau_h \ll \tau_\eta, \tau_T$

Как и выше, в (2) можно положить  $\dot{h} = 0$ , что дает связь

$$h = A_h T \eta. \quad (13)$$

Учитывая ее в оставшихся уравнениях (1), (3) и используя масштабы  $\eta_m, T_c, \tau_\eta$  для изменения параметра порядка и управляющего параметра во времени, приходим к системе

$$\dot{\eta} = -\eta(1 - T), \quad (14)$$

$$\dot{T} = \tau^{-1} [\theta - T(1 + \eta^2)]. \quad (15)$$

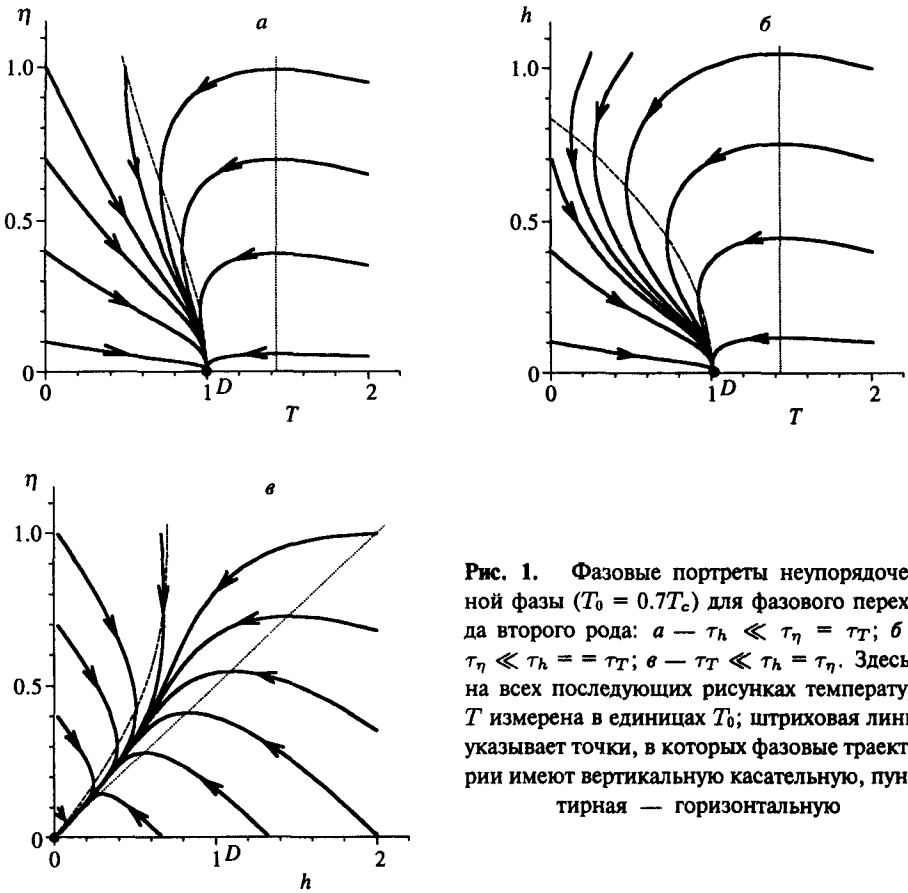
Ее поведение задается параметрами

$$\theta \equiv T_0/T_c, \quad \tau \equiv \tau_T/\tau_\eta, \quad (16)$$

первый из которых определяет степень возбуждения системы, а второй — соотношение характерных времен релаксации управляющего параметра и параметра порядка. В пределе  $\tau \ll 1$  правая часть в (15) приобретает настолько большие значения, что слева можно положить  $\dot{T} = 0$ , и после подстановки полученной зависимости (5) в (14) мы приходим к рассмотренному выше адиабатическому приближению, представляемому равенствами (7)–(9).

В общем случае стандартный анализ [9] системы (14), (15) показывает, что ее фазовый портрет характеризуется наличием двух особых точек,  $D(T_0, 0)$  и  $O(T_c, \eta_0)$ , с координатами соответственно  $T = T_0, \eta = 0$  и  $T = T_c, \eta = \eta_0$ , где  $\eta_0$  определено равенством (10). Им отвечают показатели Ляпунова

<sup>2)</sup> Поскольку величина  $\eta_0$  ограничена условием  $\eta_0 \leq \eta_m$ , то параметр возбуждения  $\theta$  ограничен сверху значением  $\theta_m = 2$ .



**Рис. 1.** Фазовые портреты неупорядоченной фазы ( $T_0 = 0.7T_c$ ) для фазового перехода второго рода: *a* —  $\tau_h \ll \tau_\eta = \tau_T$ ; *б* —  $\tau_\eta \ll \tau_h = \tau_T$ ; *в* —  $\tau_T \ll \tau_h = \tau_\eta$ . Здесь и на всех последующих рисунках температура  $T$  измерена в единицах  $T_0$ ; штриховая линия указывает точки, в которых фазовые траектории имеют вертикальную касательную, пунктирная — горизонтальную

$$\lambda_D = \frac{1}{2} [(\theta - 1) - \tau^{-1}] \left\{ 1 \pm \sqrt{1 + 4\tau^{-1}(\theta - 1) [(\theta - 1) - \tau^{-1}]^{-2}} \right\}, \quad (17)$$

$$\lambda_O = -\frac{\theta}{2\tau} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - 8\tau \frac{\theta - 1}{\theta^2}} \right]. \quad (18)$$

Отсюда видно, что в предкритической области ( $\theta < 1$ ) точка  $D$  представляет устойчивый узел, а точка  $O$  не реализуется. Это означает, что с течением времени система эволюционирует в отвечающую точке  $D$  стационарное неупорядоченное состояние согласно фазовому портрету, приведенному на рис. 1а. Рост параметра  $\tau = \tau_T/\tau_\eta$  приводит к закручиванию траекторий вокруг точки  $D$ , т.е. с ростом инерционности изменения управляющего параметра по сравнению с параметром порядка проявляется тенденция к возникновению колебательного режима.

Как видно из фазового портрета, приведенного на рис. 2, эта тенденция реализуется в полной мере при переходе в закритическую область  $\theta > 1$ , где точка  $D$  трансформируется в седло и появляется дополнительная точка  $O$ . При значениях параметра  $\tau$ , ограниченных сверху величиной

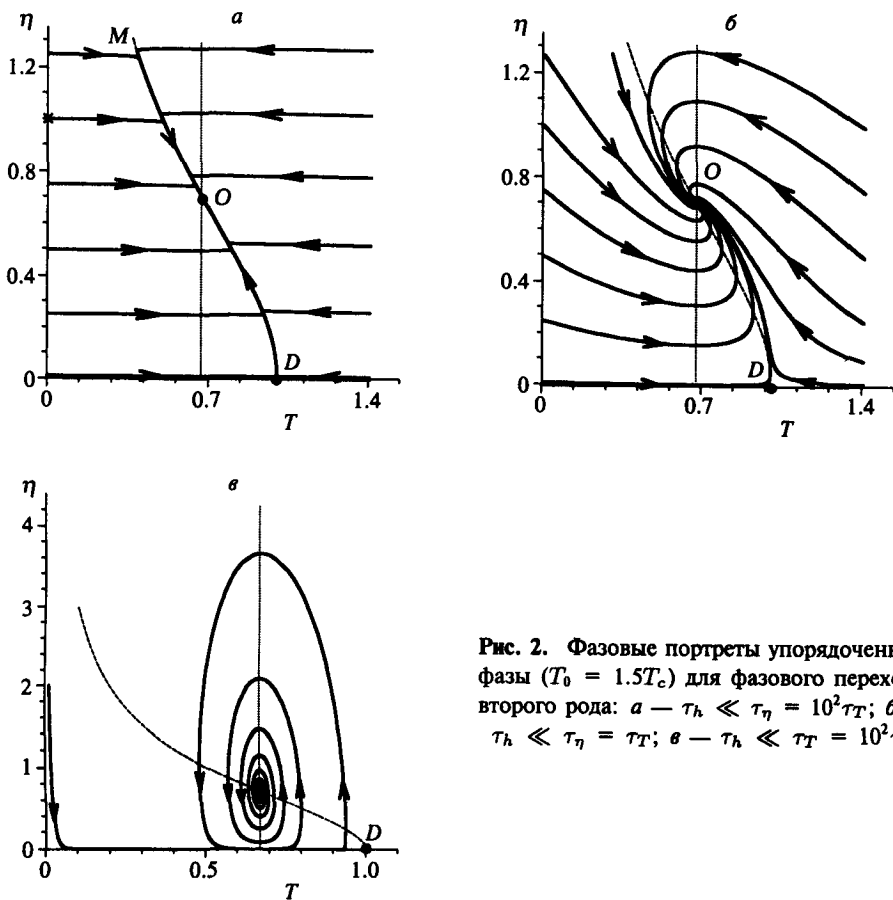


Рис. 2. Фазовые портреты упорядоченной фазы ( $T_0 = 1.5T_c$ ) для фазового перехода второго рода: *a* —  $\tau_h \ll \tau_\eta = 10^2 \tau_T$ ; *b* —  $\tau_h \ll \tau_\eta = \tau_T$ ; *в* —  $\tau_h \ll \tau_\eta = 10^2 \tau_T$

$$\tau_c = \theta^2 / 8(\theta - 1), \tag{19}$$

последняя представляет устойчивый узел, а с его ростом до значений  $\tau > \tau_c$  — устойчивый фокус.

Таким образом, в закритической области  $1 < \theta \leq 2$  при  $\tau_\eta \ll \tau_T$  возникает колебательный режим (см. рис. 2в), характеризуемый частотой

$$\omega = \frac{\theta}{2\tau_T} \sqrt{8\tau\theta^{-2}(\theta - 1) - 1} \tag{20}$$

и коэффициентом затухания

$$\alpha = \theta / 2\tau_T. \tag{21}$$

С ростом температуры в интервале  $1 < \theta < 2$  величины  $\omega, \alpha$  возрастают, а критическое отношение времен релаксации (19) убывает. Иными словами, возбуждение системы способствует, как и следовало ожидать, появлению затухающих колебаний. Однако,

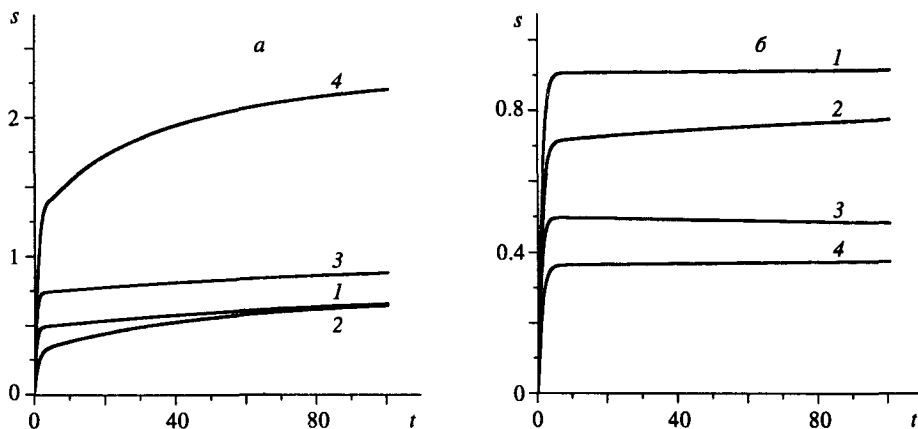


Рис. 3. Временная зависимость пути  $s$ , пройденного конфигуративной точкой по фазовой траектории:  $a$  — фазовый переход второго рода (кривая 1 отвечает фазовому портрету на рис. 2а, 2 — рис. 4а, 3 — рис. 5а, 4 — рис. 5б);  $b$  — фазовый переход первого рода (кривая 1 отвечает фазовому портрету на рис. 7а, 2 — рис. 8а, 3 — рис. 9а, 4 — рис. 9б). Начало отсчета  $s$  отмечено крестиками на соответствующих рисунках

как видно из рис. 2, в наибольшей степени проявлению колебательного режима способствует рост параметра  $\tau = \tau_T / \tau_\eta \gg 1$ .

Обратный предел  $\tau_T \ll \tau_\eta$  отвечает адиабатическому приближению, представляющему стандартную картину фазового перехода. Согласно рис. 2, уменьшение параметра  $\tau \rightarrow 0$  приводит к выделению на фазовом портрете системы участка  $MOD$ , к которому сбегаются со временем все траектории. Как видно из временных зависимостей, приведенных на рис. 3а, конфигуративная точка быстро движется по траектории, расположенной за пределами участка  $MOD$ , а с попаданием на него существенно замедляется, причем эффект замедления сказывается тем сильнее, чем меньше параметр неадиабатичности  $\tau$ . Очевидно, указанный участок  $MOD$  отвечает притягивающему множеству, названному в [6] «руслом большой реки». Универсальность кинетической картины фазового перехода проявляется в том, что независимо от начальных условий при  $\tau \rightarrow 0$  система быстро достигает участка  $MOD$ , положение которого не зависит от микроскопических деталей ее строения, и затем медленно эволюционирует по этой универсальной траектории.

## 2.2. Случай $\tau_\eta \ll \tau_h, \tau_T$

Полагая в (1)  $\dot{\eta} = 0$ , находим связь

$$\eta = A_\eta h, \quad (22)$$

подстановка которой в (2), (3) дает систему

$$\dot{h} = -h(1 - T), \quad (23)$$

$$\dot{T} = \tau^{-1} [\theta - (T + h^2)], \quad (24)$$

где величины  $h, T, t$  измерены в единицах  $h_m, T_c, \tau_h$  и введены характерные параметры



$$\tau \equiv \tau_T / \tau_h, \quad h_m \equiv \eta_m / A_\eta = 1 / A_\eta \sqrt{A_h A_T}. \quad (25)$$

Подобно первому случаю, фазовый портрет определяется наличием особых точек  $D(T_0, 0)$ ,  $O(T_c, h_0)$ , где величина

$$h_0 = h_m \sqrt{\theta - 1}, \quad (26)$$

определяет стационарное значение сопряженного поля. Показатели Ляпунова имеют вид

$$\lambda_D = \frac{1}{2} [(\theta - 1) - \tau^{-1}] \left\{ 1 \pm \sqrt{1 + 4\tau^{-1} \frac{\theta - 1}{[(\theta - 1) - \tau^{-1}]^2}} \right\}, \quad (27)$$

$$\lambda_O = -\frac{1}{2\tau} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - 8\tau(\theta - 1)} \right]. \quad (28)$$

Как и выше, точка  $D$  при  $\theta < 1$  представляет притягивающий узел, а при  $\theta > 1$  — седло. Точка  $O$  реализуется только в упорядоченной области  $\theta > 1$ , где она является притягивающим узлом при малых значениях параметра  $\tau$  и устойчивым фокусом, если величина  $\tau$  превышает критическое значение

$$\tau_c = \frac{1}{8(\theta - 1)}. \quad (29)$$

Соответствующие значения для частоты колебаний и декремента затухания имеют вид

$$\omega = \frac{1}{2\tau_T} \sqrt{8\tau(\theta - 1) - 1}, \quad (30)$$

$$\alpha = 1/2\tau_T. \quad (31)$$

С ростом температуры  $\theta$  величина  $\tau_c$  уменьшается, частота  $\omega$  растет, а значение  $\alpha$  остается неизменным.

Проведенный анализ и вид фазовых портретов на рис. 4 показывают, что, как и в предыдущем случае, при больших значениях параметра  $\tau$  системе присущ режим затухающих колебаний (рис. 4б), а с уменьшением величины  $\tau$  до значений  $\tau \ll 1$  достигается диссипативный режим релаксации (рис. 4а). Подобным же образом в адиабатическом пределе  $\tau \rightarrow 0$  проявляется универсальность кинетического поведения, состоящая в выделении участка  $MOD$  на рис. 4а, на котором система медленно эволюционирует к стационарной точке  $O$ .

### 2.3. Случай $\tau_T \ll \tau_\eta, \tau_h$

Полагая в (3)  $\dot{T} = 0$ , находим

$$T = T_0 - A_T \eta h, \quad (32)$$

и уравнения (1), (2) принимают вид

$$\dot{\eta} = -\eta + h, \quad (33)$$

$$\dot{h} = \tau^{-1} [\theta \eta - h(1 + \eta^2)], \quad (34)$$

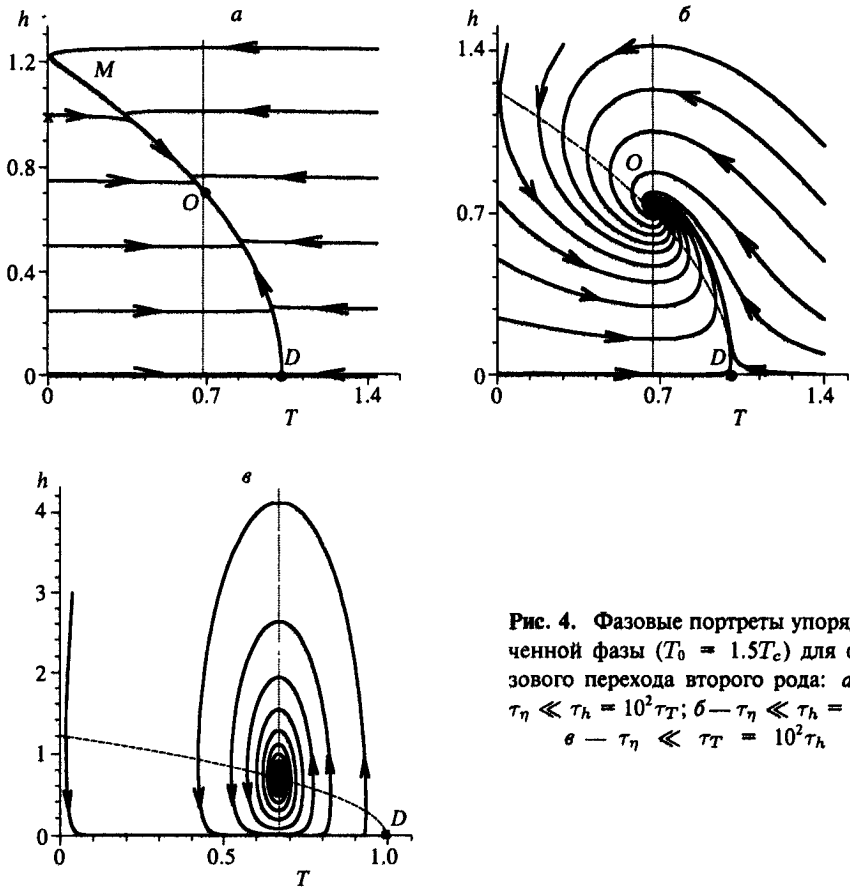


Рис. 4. Фазовые портреты упорядоченной фазы ( $T_0 = 1.5T_c$ ) для фазового перехода второго рода: а —  $\tau_\eta \ll \tau_h = 10^2 \tau_T$ ; б —  $\tau_\eta \ll \tau_h = \tau_T$ ; в —  $\tau_\eta \ll \tau_T = 10^2 \tau_h$

где величины  $\eta, h, t$  измерены в единицах  $\eta_m, h_m, \tau_\eta$  и введено отношение времен релаксации

$$\tau \equiv \tau_h / \tau_\eta. \tag{35}$$

Фазовый портрет системы имеет особые точки  $D(0, 0)$  и  $O(h_m \sqrt{\theta - 1}, \eta_m \sqrt{\theta - 1})$  (рис. 5), вторая из которых реализуется только в упорядоченной области  $\theta > 1$ . Соответствующие показатели Ляпунова имеют вид

$$\lambda_D = -\frac{1}{2}(1 + \tau^{-1}) \left[ 1 \pm \sqrt{1 + 4\tau^{-1}(1 + \tau^{-1})^{-2}(\theta - 1)} \right], \tag{36}$$

$$\lambda_O = -\frac{1 + \tau^{-1}\theta}{2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - 8\tau \frac{\theta - 1}{(\theta + \tau)^2}} \right]. \tag{37}$$

При  $\theta < 1$  точка  $D$  представляет устойчивый узел, а с переходом в закритическую область  $\theta > 1$  трансформируется в седло. Точка  $O$ , характеризующая упорядоченную фазу, при значениях параметра  $\tau$ , принадлежащих интервалу  $(\tau_-, \tau_+)$ , где

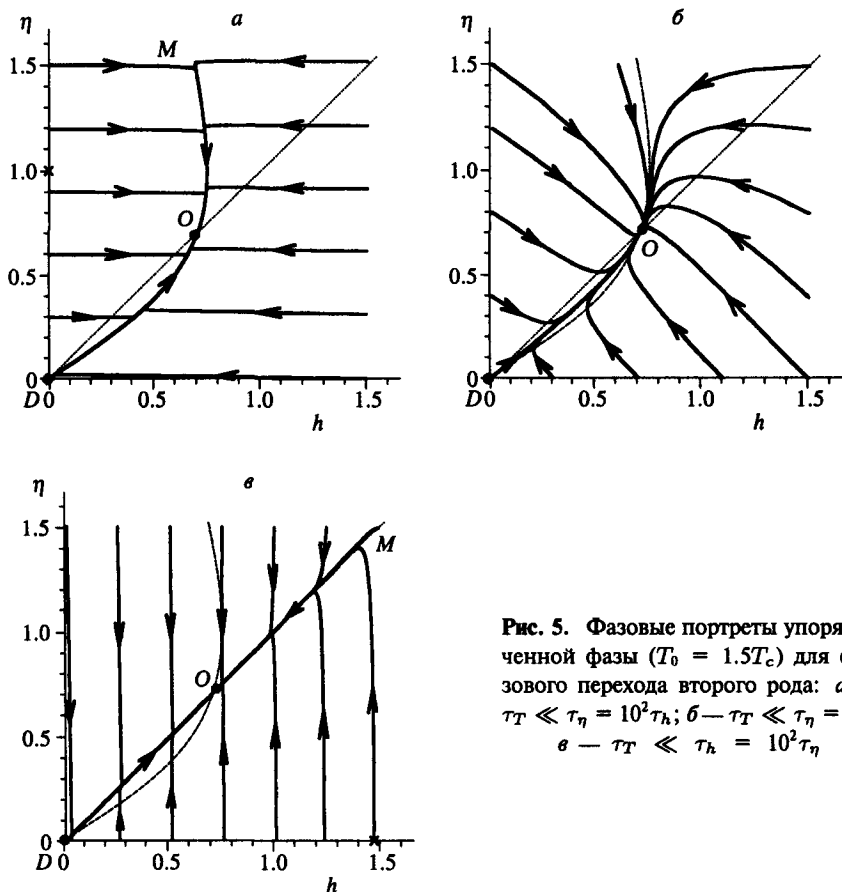


Рис. 5. Фазовые портреты упорядоченной фазы ( $T_0 = 1.5T_c$ ) для фазового перехода второго рода: а —  $\tau_T \ll \tau_\eta = 10^2 \tau_h$ ; б —  $\tau_T \ll \tau_\eta = \tau_h$ ; в —  $\tau_T \ll \tau_h = 10^2 \tau_\eta$

$$\tau_{\pm} = (3\theta - 4) \pm \sqrt{8(\theta - 1)(\theta - 2)}, \tag{38}$$

представляет притягивающий фокус, а вне его — притягивающий узел. Характерные величины частоты

$$\omega = \frac{1}{2\tau_h} \sqrt{8\tau(\theta - 1) - (\tau + \theta)^2} \tag{39}$$

и коэффициента затухания

$$\alpha = (\tau + \theta) / 2\tau_h \tag{40}$$

являются соизмеримыми при всех значениях  $\theta, \tau$ . Поэтому в отличие от рассмотренных выше случаев здесь колебательный режим практически не проявляется.

Согласно фазовым портретам, показанным на рис. 5, универсальность кинетического поведения системы проявляется как при  $\tau_h \ll \tau_\eta$ , так и при  $\tau_h \gg \tau_\eta$ . В первом случае выход на универсальный участок происходит за счет быстрого изменения сопряженного поля  $h(t)$  при практически неизменном параметре порядка  $\eta(t) \approx \text{const}$

(рис. 5а), а во втором наблюдается обратная картина — параметр порядка изменяется очень быстро, а сопряженное поле почти не меняется (рис. 5б). В промежуточной области  $\tau_\eta \sim \tau_h$  универсальность проявляется только при малых начальных значениях  $h(0)$  и  $\eta(0)$ :  $h(0) \ll h_0$ ,  $\eta(0) \ll \eta_0$  (рис. 5б). Обращает на себя внимание тот факт, что в отличие от ранее рассмотренных случаев универсальный участок фазовых траекторий имеет не убывающий, а нарастающий характер.

### 3. ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД ПЕРВОГО РОДА

Наиболее простым образом переход от изложенного выше случая фазового перехода второго рода к первому достигается заменой постоянного времени релаксации  $\tau_\eta$  в (1) зависимостью [7]

$$\frac{1}{\tau_\eta} = \frac{1}{\tau_0} \left[ 1 + \frac{\kappa}{1 + (\eta/\eta_\tau)^2} \right], \quad (41)$$

характеризуемой положительными константами  $\tau_0, \kappa, \eta_\tau$ . Тогда в рамках адиабатического приближения  $\tau_h, \tau_T \ll \tau_0$  система Лоренца (1)–(3) сводится к уравнению (7), в котором проведено переобозначение  $\tau_\eta$  на  $\tau_0$ , а синергетический потенциал (8) принимает вид

$$V = \frac{\eta^2}{2} \left\{ 1 - \frac{T_0}{T_{c0}} \left( \frac{\eta}{\eta_m} \right)^{-2} \ln \left[ 1 + \left( \frac{\eta}{\eta_m} \right)^2 \right] \right\} + \frac{\kappa \eta_\tau^2}{2} \ln \left[ 1 + \left( \frac{\eta}{\eta_\tau} \right)^2 \right], \quad (42)$$

где  $T_{c0} \equiv (\tau_0 \tau_h g_\eta g_h)^{-1}$ . При малых значениях  $T_0$  зависимость  $V(\eta)$  имеет монотонно возрастающий вид с минимумом в точке  $\eta = 0$ . При значении

$$T_c^0 = T_{c0} \left[ 1 + \frac{\eta_\tau^2}{\eta_m^2} (\kappa - 1) + 2 \frac{\eta_\tau}{\eta_m} \sqrt{\kappa \left( 1 - \frac{\eta_\tau^2}{\eta_m^2} \right)} \right] \quad (43)$$

появляется плато, которое при  $T_0 > T_c^0$  трансформируется в минимум, отвечающий значению параметра порядка  $\eta_0 \neq 0$ , и максимум, разделяющий минимумы упорядоченной и неупорядоченной фаз. С дальнейшим ростом температуры  $T_0$  минимум упорядоченной фазы углубляется, а высота межфазного барьера убывает, принимая нулевое значение при критическом значении

$$T_c = T_{c0}(1 + \kappa). \quad (44)$$

Стационарное значение параметра порядка имеет вид

$$\eta_0 = \eta_{00} \sqrt{\sqrt{1 + \left( \frac{\eta_m \eta_\tau}{\eta_{00}^2} \right)^2 \frac{T_0 - T_c}{T_{c0}}} - 1} \approx \frac{\eta_m \eta_\tau}{\eta_{00}} \sqrt{\frac{T_0 - T_c}{2T_{c0}}}, \quad (45)$$

где второе равенство выписано для случая  $T_0 - T_c \ll T_{c0}$ ,

$$\eta_{00}^2 \equiv \frac{1}{2} \left[ \left( 1 - \frac{T_0}{T_{c0}} \right) \eta_m^2 + (1 + \kappa) \eta_\tau^2 \right]. \quad (46)$$

При  $T_0 > T_c$  зависимость  $V(\eta)$  имеет тот же вид, что и для фазового перехода второго рода (см. разд. 2). Укажем, что энергетический барьер, присущий фазовому переходу первого рода, проявляется лишь в том случае, когда параметр  $\alpha \equiv \eta_r/\eta_m$  не превышает единицы.

Измеряя далее величины  $\eta, h, T$  в единицах  $\eta_m, h_m, T_c$  (см. (6), (25), (9)), рассмотрим, как и для фазового перехода второго рода, различные предельные соотношения времен релаксации  $\tau_0, \tau_h, \tau_T$ , при этом в исходном уравнении (1) эффективное время релаксации  $\tau_\eta$  задается равенством (41).

### 3.1. Случай $\tau_h \ll \tau_0, \tau_T$

Полагая в (2)  $\dot{h} = 0$ , находим связь (13) в виде  $h = T\eta$ . Ее подстановка в уравнение (1) приводит к выражению (время измерено в единицах  $\tau_0$ )

$$\dot{\eta} = -\eta \left[ (1 - T) + \frac{\kappa}{1 + \eta^2/\alpha^2} \right], \tag{47}$$

отличающемся от (14) наличием последнего слагаемого. Второе уравнение, следующее из (3), имеет тот же вид (15), что и выше.

Фазовый портрет системы (47), (15) имеет три особые точки  $D(\theta, 0), O(T_-, \eta_-), S(T_+, \eta_+)$ , где характерные значения  $T_\pm, \eta_\pm$  определяются равенствами

$$T_\pm = \frac{(1 - \beta^2) \pm \sqrt{(1 - \beta^2)^2 - \theta(1 - \alpha^2)}}{1 - \alpha^2}, \tag{48}$$

$$\eta_\pm = \sqrt{(\theta - T_\pm)/T_\pm}; \tag{49}$$

$$\beta^2 \equiv \frac{1}{2} [(1 - \theta) + \alpha^2(1 + \kappa)], \quad \alpha \equiv \frac{\eta_r}{\eta_m}, \quad \theta \equiv \frac{T_0}{T_{c0}}. \tag{50}$$

Здесь введен параметр  $\beta \equiv \eta_{00}/\eta_m$ , в котором величина  $\eta_{00}$  означает характерное значение параметра порядка (46). Точке  $D$  отвечает показатель Ляпунова, отличающийся от выражения (17) заменой разности  $\theta - 1$  на  $\theta - \theta_c$ , где в соответствии с (44) величина  $\theta_c = 1 + \kappa$  определяет точку спинодали. Поэтому, как и для фазового перехода второго рода, при  $\theta < \theta_c$  точка  $D$  представляет устойчивый узел, а при  $\theta > \theta_c$  — седло. Показатели Ляпунова точек  $O(T_-, \eta_-), S(T_+, \eta_+)$  выражаются через их координаты (48), (49) равенствами

$$\begin{aligned} \lambda_\pm &= \lambda_0 \left( 1 \pm \sqrt{1 + \Delta} \right), \\ \lambda_0 &= \frac{\theta - T_\pm}{\kappa \alpha^2 T_\pm} (T_\pm - 1)^2 - \frac{\theta}{2\tau T_\pm}, \\ \lambda_0^2 \Delta &= \frac{2}{\tau} (\theta - T_\pm) \left[ \frac{\theta (1 - T_\pm)^2}{\alpha^2 \kappa T_\pm^2} - 1 \right]. \end{aligned} \tag{51}$$

В интервале  $T_c^0 < T < T_c$  реализации фазового перехода первого рода точка  $S$  является седлом, а  $O$  — притягивающим узлом или фокусом.

Приведенные данные показывают, что с ростом температуры термостата  $T_0$  фазовый портрет системы изменяется следующим образом (рис. 6). При  $T_0 < T_c^0$ , когда зависимость (42) имеет монотонно возрастающий вид, точки  $S$  и  $O$  не реализуются, а  $D$

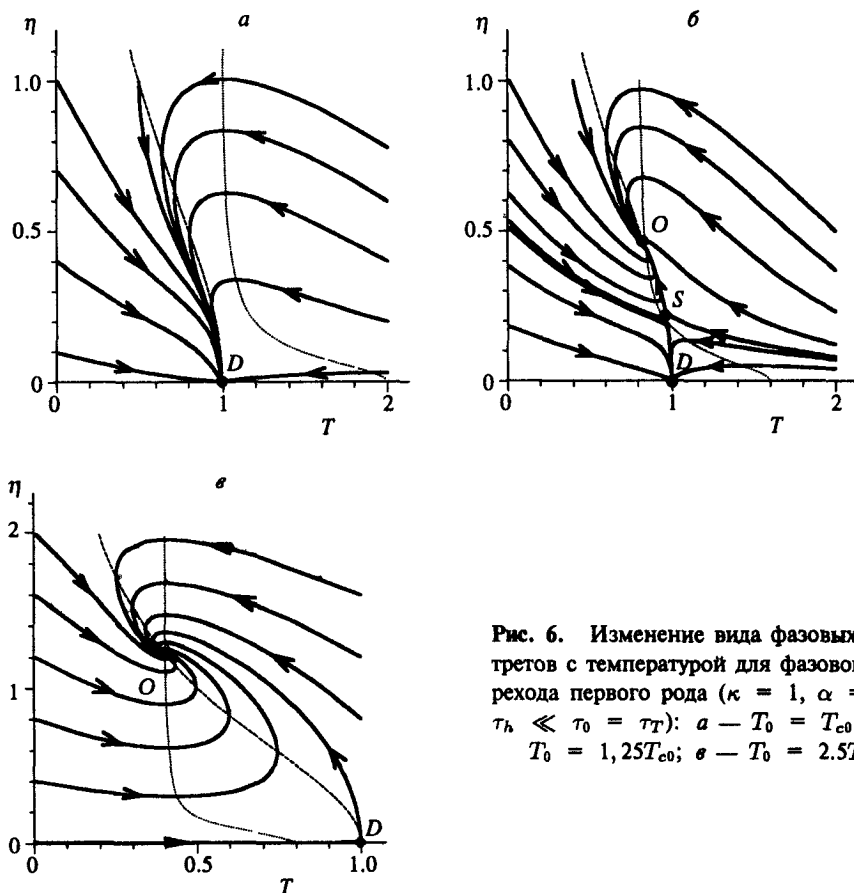


Рис. 6. Изменение вида фазовых портретов с температурой для фазового перехода первого рода ( $\kappa = 1$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $\tau_h \ll \tau_0 = \tau_T$ ): а —  $T_0 = T_{c0}$ ; б —  $T_0 = 1,25T_{c0}$ ; в —  $T_0 = 2,5T_{c0}$

представляет устойчивый узел, отвечающий неупорядоченной фазе. При этом портрет имеет вид, присущий фазовому переходу второго рода (см. рис. 1а). С превышением характерной температуры (43) в системе происходит бифуркация, состоящая в появлении седла  $S$  и устойчивого узла/фокуса  $O$ , определяемых координатами (48), (49). При повышении температуры термостата  $T_0$  седло, отвечающее энергетическому барьеру на зависимости  $V(\eta)$ , приближается к узлу  $D$  и в точке  $T_c$  поглощает его. Дальнейшее повышение температуры дает картину, отвечающую упорядоченной фазе для фазового перехода второго рода.

На рис. 7 показано, каким образом изменяется фазовый портрет упорядоченной фазы ( $T_c^0 < T_0 < T_c$ ) с увеличением отношения времен релаксации  $\tau = \tau_T/\tau_0$ . Сравнивая с рис. 2, видим, что в окрестности точки  $O$  поведение является практически таким же, как и для фазового перехода второго рода: в адиабатическом пределе  $\tau_T \ll \tau_0$  траектории быстро сбегаются к универсальному участку  $MOS$  (рис. 7а), а в противоположном пределе  $\tau_T \gg \tau_0$  проявляется режим затухающих колебаний (рис. 7в). Единственное отличие состоит в появлении сепаратрисы в области малых значений параметра порядка, которое отражает наличие барьера на зависимости  $V(\eta)$ . Исследование временных

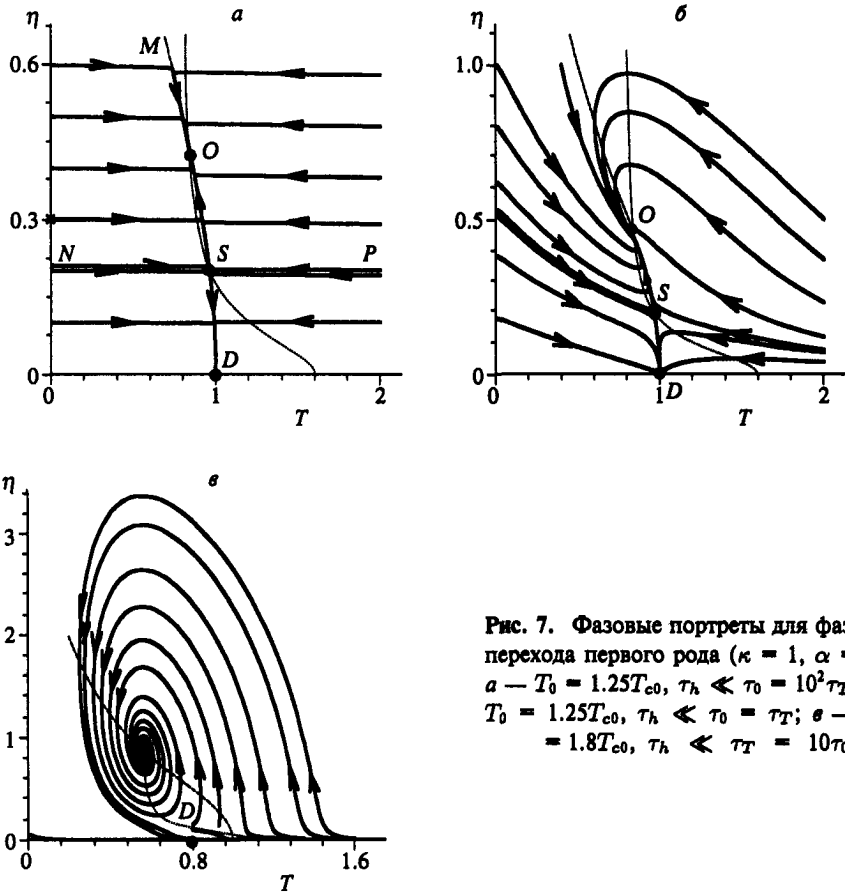


Рис. 7. Фазовые портреты для фазового перехода первого рода ( $\kappa = 1, \alpha = 0.1$ ):  
 а —  $T_0 = 1.25T_{c0}, \tau_h \ll \tau_0 = 10^2 \tau_T$ ; б —  
 $T_0 = 1.25T_{c0}, \tau_h \ll \tau_0 = \tau_T$ ; в —  $T_0 =$   
 $= 1.8T_{c0}, \tau_h \ll \tau_T = 10\tau_0$

зависимостей пути  $s$ , пройденного точкой по траектории, показывает (см. рис. 3б), что здесь, как и в случае фазового перехода второго рода, происходит замедление в области «русла большой реки»  $MOS$ , отвечающей окрестности минимума упорядоченной фазы на зависимости  $V(\eta)$ .

Найденные особенности кинетического поведения системы могут быть представлены на основе рассмотрения зависимости  $V(\eta, T)$  синергетического потенциала от величин  $\eta$  и  $T$ , параметризующих поведение системы. При этом следует исходить из того факта, что в ходе своей эволюции она проводит основное время в окрестности экстремумов зависимости  $V(\eta, T)$ . Поскольку время релаксации вдоль каждой из осей  $\eta, T$  обратно пропорционально кривизне зависимости  $V(\eta, T)$  вдоль соответствующей оси<sup>3)</sup>, то условие  $\tau_T \ll \tau_0$  означает, что зависимость  $V(\eta, T)$  изменяется намного быстрее вдоль оси  $T$ , чем вдоль  $\eta$ . В результате оказывается, что поверхность функции  $V(\eta, T)$

<sup>3)</sup> Это следует из того факта, что указанная кривизна обратно пропорциональна соответствующей восприимчивости, которая в свою очередь пропорциональна отвечающему ей времени релаксации [10].

имеет узкий желоб вдоль универсальной траектории, определяемой зависимостью  $T(\eta)$  вида (5). Как видно из рис. 7а, в него система быстро скатывается вдоль оси  $T$ , отвечающей большой кривизне. Именно наличие этого желоба обеспечивает универсальный характер кинетического поведения, поскольку вблизи экстремумов зависимость  $V(\eta, T)$  всегда имеет вид параболы:

$$V \approx V(\eta_e, T_e) + \frac{\chi_\eta^{-1}}{2} (\eta - \eta_e)^2 + \frac{\chi_T^{-1}}{2} (T - T_e)^2, \quad (52)$$

где значения  $\eta_e, T_e$  определяют положение экстремума, а восприимчивости  $\chi_\eta, \chi_T$  — его кривизну.

В связи со сказанным может показаться, что в пределе  $\tau_0 \ll \tau_T$ , противоположном адиабатическому, зависимость  $V(\eta, T)$  также должна приобретать желоб, и становится непонятной природа режима затухающих колебаний, представленного на рис. 7в. Однако следует помнить, что вблизи точки минимума зависимости  $V(\eta, T)$  восприимчивости  $\chi_\eta, \chi_T$  в равенстве (52) связаны с временами релаксации  $\tau_\eta, \tau_T$  различными соотношениями:  $\chi_T \propto \tau_T$ ,  $\chi_\eta \propto \tau_0 |\theta - \theta_c|^{-1}$ . Поскольку  $|\theta - \theta_c| \ll 1$ , то несмотря на малость  $\tau_0$  кривизна  $\chi_\eta^{-1} \propto \tau_0^{-1} |\theta - \theta_c|$  параболы (52) вдоль оси  $\eta$  оказывается сравнимой с кривизной  $\chi_T^{-1} \propto \tau_T^{-1}$  зависимости  $V(\eta, T)$  вдоль оси  $T$ . Иными словами, в пределе  $\tau_0 \ll \tau_T$  зависимость  $V(\eta, T)$  имеет вблизи минимума упорядоченной фазы вид параболоида с кривизнами, имеющими малые (и соизмеримые) значения вдоль осей  $\eta, T$ . В результате конфигуративная точка, скатываясь в минимум, может совершать вращения по поверхности этого параболоида. Очевидно, такое вращение и представляет затухающие колебания, показанные на рис. 7в.

Следует иметь в виду, что описанное критическое возрастание восприимчивости  $\chi_\eta$  в соотношении (52) носит существенно термодинамический характер [11] и не проявляется вблизи максимума зависимости  $V(\eta, T)$ . Именно по этой причине не происходит закручивания сепаратрисы в пределе  $\tau_0 \ll \tau_T$  (см. рис. 7в).

Укажем в заключение этого раздела, что несмотря на громоздкость выражений (51) они позволяют найти аналитическое выражение для критического значения  $\tau_c$  отношения времен релаксации  $\tau = \tau_T/\tau_0$ , начиная с которого точка  $O(T_-, \eta_-)$  трансформируется из узла в фокус (см. (19)). Однако ввиду чрезвычайной громоздкости мы его не приводим.

### 3.2. Случай $\tau_0 \ll \tau_\lambda, \tau_T$

С аналитической точки зрения, данный случай представляется наиболее трудоемким, поскольку подстановка эффективного времени релаксации (41) в исходное уравнение (1), где следует положить  $\dot{\eta} = 0$ , приводит не к линейной связи (22), а к кубическому уравнению (см. [10, 11]). Его решение удобно записать в виде

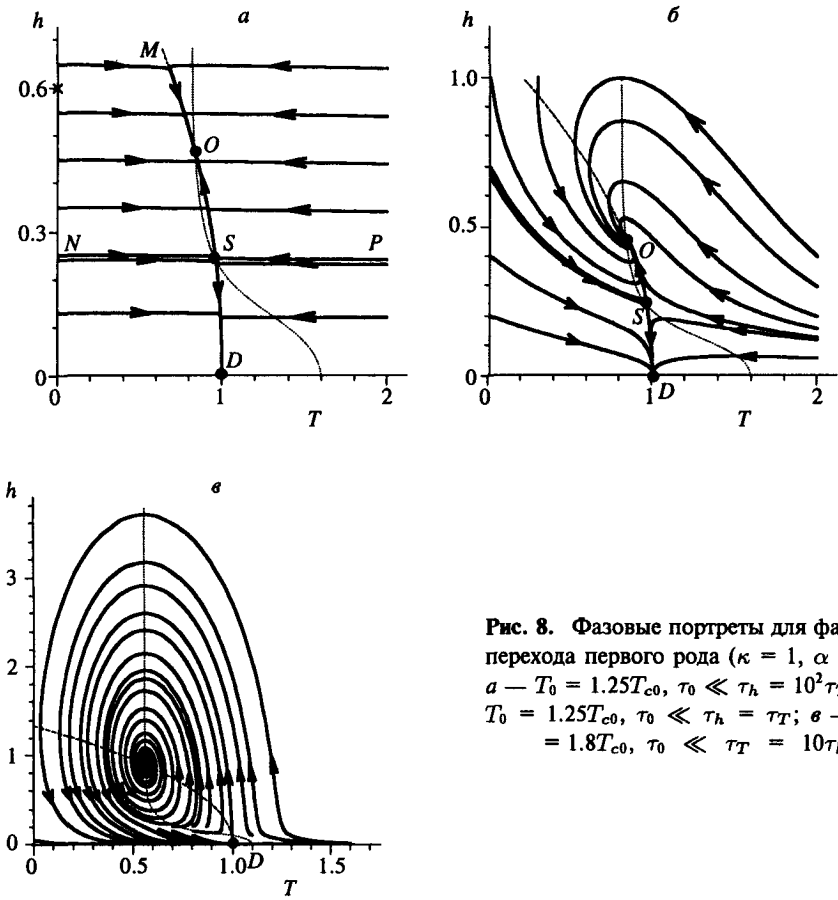
$$3\eta = h + \eta_+(h) + \eta_-(h), \quad (53)$$

где введены функции

$$\eta_\pm(h) = \left\{ h (h^2 + h_1^2) \pm 3\alpha \sqrt{3 [(h^2 + h_2^2)^2 + h_3^4]} \right\}^{1/3} \quad (54)$$

и постоянные  $h_1, h_2, h_3$ , определенные равенствами





**Рис. 8.** Фазовые портреты для фазового перехода первого рода ( $\kappa = 1, \alpha = 0.1$ ):  
 а —  $T_0 = 1.25T_{c0}, \tau_0 \ll \tau_h = 10^2 \tau_T$ ; б —  
 $T_0 = 1.25T_{c0}, \tau_0 \ll \tau_h = \tau_T$ ; в —  $T_0 =$   
 $= 1.8T_{c0}, \tau_0 \ll \tau_T = 10\tau_h$

$$\begin{aligned}
 h_1^2 &\equiv \frac{9}{2}\alpha^2(2 - \kappa), & h_2^2 &\equiv \frac{1}{8}\alpha^2 [36(2 - \kappa) - (8 - \kappa)^2], \\
 h_3^2 &\equiv \frac{1}{8}\alpha^2 \sqrt{\kappa(8 - \kappa)^3}, & \alpha &\equiv \frac{\eta_\tau}{\eta_m}.
 \end{aligned}
 \tag{55}$$

Подстановка связи (53) в уравнения (2), (3) приводит их к виду (ср. с (23), (24))

$$\dot{h} = -h + \frac{1}{3}T [h + \eta_+(h) + \eta_-(h)], \tag{56}$$

$$\tau \dot{T} = (\theta - T) - \frac{1}{3}h [h + \eta_+(h) + \eta_-(h)], \tag{57}$$

где время измерено в единицах  $\tau_h$  и введено отношение времен релаксации  $\tau \equiv \tau_T/\tau_h$ .

Хотя аналитически здесь не удается найти ни особых точек, ни отвечающих им показателей Ляпунова, численное исследование фазового портрета (рис. 8) показывает, что поведение системы совпадает с исследованным в предыдущем разделе. По сравнению с соответствующим портретом фазового перехода второго рода (см. рис. 4) можно

отметить, как и в п. 3.1, появление сепаратрисы в области значений  $T, h$ , отвечающих энергетическому барьеру, разделяющему упорядоченную и неупорядоченную фазы.

Рассуждая по аналогии с предыдущим случаем, нетрудно видеть, что при  $\tau_T \ll \tau_h$ , когда максимальным образом проявляется универсальность кинетического поведения системы (рис. 8а), зависимость  $V(h, T)$  имеет узкий желоб вдоль универсального участка траекторий. Наличие режима затухающих колебаний в противоположном пределе  $\tau_T \gg \tau_h$  (рис. 8в) указывает на критическое возрастание восприимчивости  $\chi_h \propto \tau_h |\theta - \theta_c|^{-1}$ , отвечающей сопряженному полю. Очевидно, исходной причиной этого возрастания является критический рост восприимчивости  $\chi_\eta \propto \tau_0 |\theta - \theta_c|^{-1}$ , отвечающей параметру порядка. Наличие жесткой функциональной связи (53) между величинами  $\eta(t)$  и  $h(t)$  (для фазового перехода второго рода она принимает линейный вид (22)) и обеспечивает рост восприимчивости, отвечающий сопряженному полю.

### 3.3. Случай $\tau_T \ll \tau_0, \tau_h$

Полагая в (3)  $\dot{T} = 0$ , получаем связь (32) в безразмерном виде

$$T = \theta - \eta h.$$

Ее подстановка в (2) дает уравнение (34), а (1) принимает вид (ср. с (33))

$$\dot{\eta} = -\eta \left[ 1 + \frac{\kappa}{1 + \eta^2/\alpha^2} \right] + h. \quad (58)$$

Система уравнений (34), (58) имеет, как для фазового перехода второго рода, особую точку  $D(0, 0)$ , для которой показатель Ляпунова определяется равенством (36), где вместо  $1 + \tau^{-1}$ ,  $\theta - 1$  следует подставить  $\theta_c + \tau^{-1}$ ,  $\theta - \theta_c$ ,  $\theta_c \equiv 1 + \kappa$ . При  $\theta < \theta_c$  эта точка является устойчивым узлом, а при  $\theta > \theta_c$  — седлом.

Численное определение фазового портрета приводит к картине, показанной на рис. 9. Из сравнения с соответствующим портретом для фазового перехода второго рода (см. рис. 5) видно, что, как и выше, единственное усложнение состоит в появлении дополнительной сепаратрисы в области малых значений  $h, \eta$ .

При исследовании фазового перехода второго рода в п. 2.3 отмечалось, что отличительной особенностью данного случая является то обстоятельство, что универсальность кинетического поведения системы проявляется не только в пределе  $\tau_h \ll \tau_0$  (рис. 9а), но и в противоположном случае  $\tau_h \gg \tau_0$  (рис. 9в), где, казалось бы, можно ожидать появления колебаний. Это связано с тем обстоятельством, что кривизны парабол вдоль осей  $h, \eta$  определяются соответствующими значениями  $\chi_h^{-1} \propto \tau_h^{-1} |\theta - \theta_c|$ ,  $\chi_\eta^{-1} \propto \tau_0^{-1} |\theta - \theta_c|$  обратных восприимчивостей, которые одинаковым образом изменяются с температурой. Поэтому несмотря на температурную зависимость восприимчивостей  $\chi_h, \chi_\eta$  при  $\tau_h \gg \tau_0$  сохраняется соотношение  $\chi_h^{-1} \ll \chi_\eta^{-1}$  означающее, что кривизна зависимости  $V(\eta, h)$  вдоль оси  $h$  намного меньше, чем вдоль  $\eta$ . Поэтому на рис. 9в траектории, по которым конфигуративная точка быстро скатывается в «русло большой реки», направлены практически вдоль оси  $\eta$ .

## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное исследование показывает, что система уравнений Лоренца (1)–(3) позволяет представить основные особенности фазового перехода. Термодинамическое

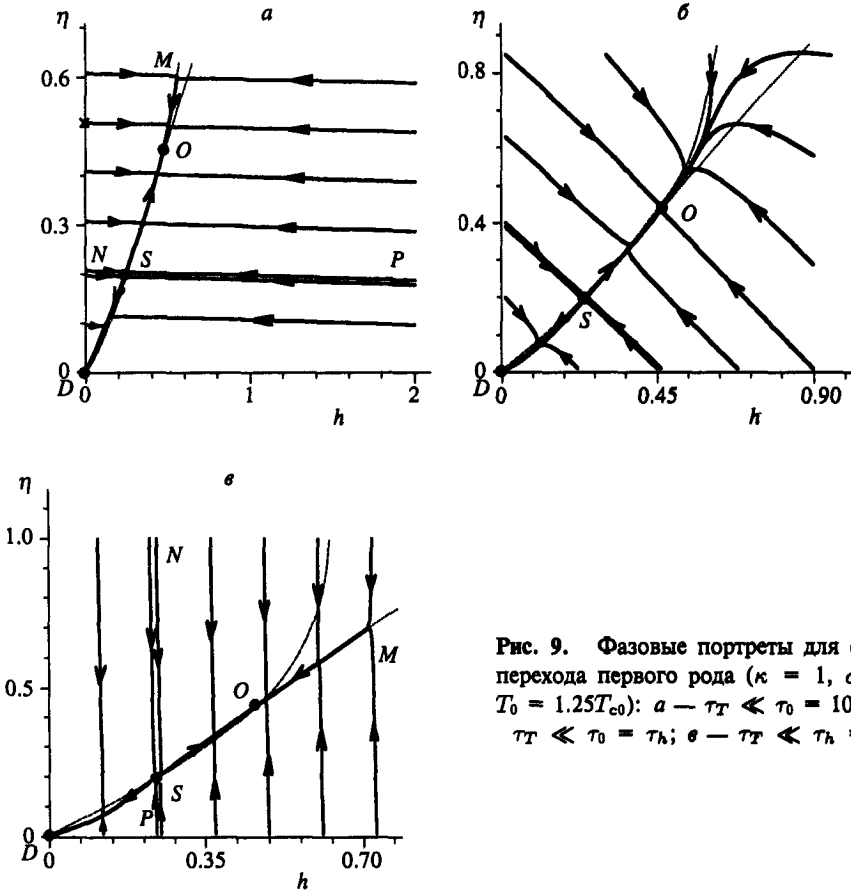


Рис. 9. Фазовые портреты для фазового перехода первого рода ( $\kappa = 1, \alpha = 0.1, T_0 = 1.25T_{c0}$ ): а —  $\tau_T < \tau_0 = 10^2\tau_h$ ; б —  $\tau_T < \tau_0 = \tau_h$ ; в —  $\tau_T < \tau_h = 10^2\tau_0$

описание достигается использованием зависимости  $V(\eta)$  синергетического потенциала от параметра порядка. В случае фазового перехода второго рода эта зависимость имеет вид (8), и ее характер определяется управляющим параметром  $\theta \equiv T_0/T_c$ : при  $\theta < 1$  имеем монотонно возрастающую зависимость  $V(\eta)$  с минимумом в точке  $\eta_0 = 0$ , а при  $\theta > 1$  минимум отвечает упорядоченной фазе, характеризуемой параметром порядка (10). Переход к случаю фазового перехода первого рода достигается, если положить, что время релаксации параметра порядка приобретает зависимость от его величины  $\eta$  согласно равенству (41). Тогда функция  $V(\eta)$  имеет вид (42), где в сравнении с (8) введены два новых параметра,  $\kappa$  и  $\eta_\tau$ . Согласно (44), первый из них определяет перенормировку критического значения управляющего параметра, а величина второго задает отношение  $\alpha \equiv \eta_\tau/\eta_m$ . Зависимость  $V(\eta)$  имеет присущий фазовому переходу первого рода энергетический барьер, разделяющий минимумы упорядоченной и неупорядоченной фаз, только при условии  $\alpha < 1$ . В этом случае в интервале  $(T_c^0, T_c)$ , определяемом равенствами (43), (44), фазовый переход протекает по механизму первого рода, а при  $T_0 > T_c$  — второго. Равновесное значение параметра порядка определяется равенствами (45), (46).

Как уже отмечалось во Введении, существенное отличие синергетических фазовых переходов от термодинамических состоит в том, что стационарное значение управляющего параметра, отвечающее температуре среды  $T^0$ , не совпадает со значением  $T_0$ , фиксируемым термостатом. Для фазового перехода второго рода это значение сводится к критической температуре  $T_c$ , определяемой равенством (9). Такая же ситуация реализуется для фазового перехода первого рода при  $T_0 \geq T_c$ , а в интервале  $T_c^0 < T_0 < T_c$  реализуется температура  $T_+$  (см. (48)), отвечающая максимуму зависимости  $V(\eta)$ . Поскольку величины  $T_c$  и  $T_+$  представляют минимальные значения управляющего параметра, начиная с которых происходит упорядочение, то указанный факт означает, что отрицательная обратная связь между параметром порядка и сопряженным полем, отражаемая последним слагаемым в (3), приводит к настолько большому понижению величины управляющего параметра, что оно только на пределе обеспечивает упорядочение среды. Интересно отметить, что если в области  $T_0 \geq T_c$  температура среды  $T^0 = T_c$  не зависит от температуры термостата  $T_0$ , то для фазового перехода первого рода с увеличением  $T_0$  от  $T_c^0$  до  $T_c$  величина  $T^0$  плавно возрастает от минимального значения

$$T_{min}^0 = T_{c0} \left[ 1 + \alpha \sqrt{\kappa / (1 - \alpha^2)} \right]$$

до максимального

$$T_{max}^0 = T_c.$$

Поскольку в актуальной области параметров  $\alpha$  и  $\kappa$ , ограниченной значением  $\kappa_{min} = \alpha^2 / (1 - \alpha^2)$ , минимальная температура среды  $T_{min}^0$  меньше минимального значения  $T_c^0$  температуры термостата, то в интервале  $(T_c^0, T_c)$  температура среды  $T^0$  всегда меньше ее значения  $T_0$  для термостата. В точке  $T_0 = T_c$  они сравниваются, а при  $T_0 > T_c$  опять  $T_0 > T^0 \equiv T_c$ .

Кинетическая картина фазового перехода представляется фазовыми портретами, показанными на рис. 1, 2, 4–9 и временной зависимостью пути, пройденного точкой по траектории (рис. 3). В случае фазового перехода второго рода (рис. 1, 2, 4, 5) фазовый портрет имеет при  $T_0 < T_c$  притягивающий узел  $D$ , отвечающий неупорядоченной фазе; при  $T_0 > T_c$  он трансформируется в седло и появляется дополнительный узел/фокус  $O$ , соответствующий упорядоченной фазе. В отличие от этого на фазовом портрете перехода первого рода (рис. 6–9) при  $T_0 = T_c^0$  происходит бифуркация, в результате которой появляются седло  $S$ , отвечающее энергетическому барьеру на зависимости  $V(\eta)$ , и притягивающий узел/фокус  $O$ , соответствующий упорядоченной фазе; при этом притягивающий узел  $D$  неупорядоченной фазы остается неизменным. С ростом управляющего параметра в интервале  $(T_c^0, T_c)$  седло  $S$  смещается к узлу  $D$ , поглощая его в точке  $T_c$ , а узел/фокус  $O$  смещается в сторону возрастания параметра порядка и сопряженного поля.

Тип особой точки  $O$ , отвечающей упорядоченной фазе, зависит от соотношения времен релаксации  $\tau_\eta, \tau_h, \tau_T$ <sup>4)</sup>. Очевидно, при их несоизмеримости можно выделить шесть характерных режимов:

- а)  $\tau_h \ll \tau_T \ll \tau_\eta$ , б)  $\tau_\eta \ll \tau_T \ll \tau_h$ , в)  $\tau_T \ll \tau_h \ll \tau_\eta$ , г)  $\tau_T \ll \tau_\eta \ll \tau_h$ ;  
 д)  $\tau_h \ll \tau_\eta \ll \tau_T$ , е)  $\tau_\eta \ll \tau_h \ll \tau_T$ . (59)

<sup>4)</sup> Для фазового перехода первого рода под величиной  $\tau_\eta$  следует понимать время релаксации  $\tau_0$ , входящее в зависимость (41).

Как показывает проведенный анализ, в случаях а–г точка  $O$  является притягивающим узлом, и по истечении короткого времени траектория системы выходит на универсальный участок («русло большой реки»), положение которого определяется внешними условиями (величиной  $T_0$ ). В этом и состоит обнаруженная в [6] универсальность кинетической картины фазового перехода. Как видно из приведенных фазовых портретов, «русло большой реки» расположено в параметрическом пространстве  $\eta, h, T$  таким образом, что при проектировании на плоскости  $T, \eta$  и  $T, h$  оно имеет вид монотонно убывающей кривой типа  $MOD$  на рис. 2а (фазовый переход второго рода) или  $MOS$  на рис. 7а (фазовый переход первого рода). Проекция на плоскость  $h, \eta$  близка к биссектрисе (см. рис. 5а, 9а). Кроме того, в случае фазового перехода первого рода появляется универсальный участок  $NSP$ , отвечающий переходу системы через энергетический барьер (рис. 6–9). Из приведенных фазовых портретов можно видеть, что при указанной несоизмеримости времен релаксации в режимах а–г выход на универсальный участок происходит по почти прямолинейным траекториям, практически параллельным осям, соответствующим наименьшим временам релаксации. Так, в режиме а) точка сначала очень быстро движется по прямой, параллельной оси  $h$ , затем переходит на участок, параллельный оси  $T$ , и движется по нему со скоростью в  $\tau_T/\tau_h$  меньшей, чем перед этим, но превышающей скорость последующего движения по универсальному участку в  $\tau_\eta/\tau_T$  раз. После этого происходит выход на универсальный участок.

При соотношении времен релаксации, отвечающем случаям д, е, система испытывает затухающие колебания в плоскости, соответствующей двум наибольшим их значениям. Характерно, что для обоих этих случаев наибольшее значение имеет время  $\tau_T$ , отвечающее управляющему параметру. Как отмечалось в п. 3.1, причиной возникновения колебаний является критическое возрастание времен  $\tau_\eta$  и  $\tau_h$  согласно соотношению типа (11). Вблизи критической точки  $\theta_c$  оно обеспечивает соизмеримость величин  $\tau_\eta|\theta - \theta_c|^{-1}$ ,  $\tau_T$  (в случае д) и  $\tau_h|\theta - \theta_c|^{-1}$ ,  $\tau_T$  (в случае е), в результате чего связь между соответствующими параметрами  $\eta, T$  и  $h, T$  принимает резонансный характер. Что касается эволюции вдоль осей  $h$  и  $\eta$ , отвечающих в случаях д, е наименьшим временам, то она сохраняет тот же характер, что и при выходе на универсальный режим — система со скоростью, в  $\tau_T/\tau_h$  (случай д) и  $\tau_T/\tau_\eta$  (случай е) раз большей, чем частота колебаний, переходит в соответствующую плоскость по перпендикулярной оси.

Подобно анализу, проведенному для частного случая  $\tau_h \ll \tau_0, \tau_T$  в п. 3.1, описанные особенности кинетического поведения могут быть представлены на основе анализа зависимости  $V(\eta, h, T)$  синергетического потенциала от полного набора параметров  $\eta, h, T$ . Поскольку основной вклад в универсальное поведение системы дают окрестности экстремумов этой зависимости, характеризующиеся координатами  $\eta_e, h_e, T_e$ , то в квадратичном приближении можно записать

$$V \approx V(\eta_e, h_e, T_e) + \frac{\chi_\eta^{-1}}{2} (\eta - \eta_e)^2 + \frac{\chi_h^{-1}}{2} (h - h_e)^2 + \frac{\chi_T^{-1}}{2} (T - T_e)^2, \quad (60)$$

где  $\chi_\eta, \chi_h, \chi_T$  — восприимчивости, определяющие кривизну зависимости  $V(\eta, h, T)$  вдоль соответствующих осей. Так как они пропорциональны отвечающим им эффективным временам релаксации типа (11), то имеют место следующие соотношения

$$\chi_\eta \propto \tau_\eta |\theta - \theta_c|^{-1}, \quad \chi_h \propto \tau_h |\theta - \theta_c|^{-1}, \quad \chi_T \propto \tau_T. \quad (61)$$

Характерно, что величины  $\chi_\eta, \chi_h$ , отвечающие параметру порядка и сопряженному полю, неограниченно возрастают вблизи критической точки  $\theta_c$ , а значение  $\chi_T$ , отвечаю-

щее управляющему параметру, не зависит от температуры. Поэтому для трехмерного параболоида (60) иерархия времен релаксации (59) не всегда обеспечивает несоизмеримость кривизн параболоида (60) вдоль различных осей. В частности, в критической области могут реализоваться соотношения

$$\begin{aligned} \text{а) } \chi_h^{-1} \gg \chi_T^{-1} \gg \chi_\eta^{-1}, \quad \text{б) } \chi_\eta^{-1} \gg \chi_T^{-1} \gg \chi_h^{-1}, \quad \text{в) } \chi_T^{-1} \gg \chi_h^{-1} \gg \chi_\eta^{-1}, \\ \text{г) } \chi_T^{-1} \gg \chi_\eta^{-1} \gg \chi_h^{-1}; \quad \text{д) } \chi_h^{-1} \gg \chi_\eta^{-1} \sim \chi_T^{-1}, \quad \text{е) } \chi_\eta^{-1} \gg \chi_h^{-1} \sim \chi_T^{-1}, \end{aligned} \quad (62)$$

и в режимах д, е кривизны параболы (60) становятся попарно соизмеримыми. Это означает, что вблизи минимума упорядоченной фазы зависимость  $V(\eta, h, T)$  приобретает в плоскостях  $T, \eta$  и  $T, h$  вид параболоида вращения с кривизной, имеющей намного меньшее значение, чем вдоль перпендикулярных осей (соответственно  $h$  и  $\eta$ ). В результате конфигуративная точка не только скатывается к минимуму этого параболоида, но и совершает вращение по его поверхности. Это вращение и отвечает найденным выше затухающим колебаниям в плоскостях  $T, \eta$  (случай д) и  $T, h$  (случай е).

Отметим, что указанное выше критическое уменьшение кривизны сказывается только вблизи минимума упорядоченной фазы и не имеет места в окрестности энергетического барьера. Поэтому на фазовых портретах, приведенных на рис. 7в, 8в, несмотря на закручивание траекторий вблизи точки  $O$ , в окрестности седла  $S$  сепаратриса с изменением отношения времен релаксации свой вид не меняет.

Что касается режимов а–г, то здесь критическое поведение системы не нарушает иерархичность (62) в соотношении кривизн  $\chi^{-1}$ , обусловленную неравенствами (59) между временами релаксации  $\tau$ , и система быстро переходит в универсальный режим поведения. Так, например, в режиме а, где наибольшей является кривизна  $\chi_h^{-1}$ , а наименьшей  $\chi_\eta^{-1}$ , конфигуративная точка очень быстро скатывается по поверхности зависимости  $V(\eta, h, T)$  вдоль оси  $h$ , менее быстро — вдоль  $T$  и затем плавно движется по универсальному участку траектории. Иными словами, в режимах а–г поверхность зависимости  $V(\eta, h, T)$  имеет вид узкого желоба, дно которого отвечает универсальной траектории. То обстоятельство, что она не параллельна оси, отвечающей наименьшей кривизне  $\chi^{-1}$ , означает зависимость от соответствующего параметра экстремальных значений вдоль других осей. Например, в режиме а экстремальные значения сопряженного поля  $h_e(\eta)$  и управляющего параметра  $T_e(\eta)$  за время  $\tau_T$  приобретают функциональную зависимость (4), (5) от параметра порядка.

Как известно [12], замечательное свойство системы Лоренца состоит в том, что она описывает режим странного аттрактора, в котором универсальная траектория представляет фрактальное множество, характеризуемое дробной размерностью (см. [13]). Легко заметить, что обнаруженные в режимах д, е двумерные затухающие колебания отвечают срезам странного аттрактора плоскостями  $T, \eta$  и  $T, h$  (но не сводятся к ним). Для перехода от этих колебаний в режим странного аттрактора следует включить движение вдоль перпендикулярной оси ( $h$  — в режиме д и  $\eta$  — в режиме е). Как видно из соотношений (59), это может быть достигнуто только в случае соизмеримости времен релаксации:  $\tau_h \sim \tau_\eta$ . Таким образом, переход в режим странного аттрактора следует ожидать при выполнении условий

$$\tau_h \sim \tau_\eta \ll \tau_T, \quad \chi_h \sim \chi_\eta \sim \chi_T. \quad (63)$$

При изменении отношения  $\tau \equiv \tau_h/\tau_\eta$ , в пределе  $\tau \ll 1$  странный аттрактор вырождается в колебания в плоскости  $T, \eta$ , а в противоположном пределе  $\tau \gg 1$  они переходят

в плоскость  $T, h$ . Если же уменьшать отношение  $\tau_T/\tau_{\eta, h}$ , то уменьшается частота колебаний в соответствующей плоскости.

Обсудим в заключение характер принятых приближений. Прежде всего следует иметь в виду, что использованная система Лоренца описывает фазовые переходы, индуцированные шумом, при которых упорядочение возникает в результате возрастания интенсивности шума, обусловленного стохастическим действием внешней среды (термостата) [14]. Примером такого рода превращений могут служить фазовые переходы, связанные с ростом давления, которое приобретает характер управляющего параметра (см. [15]). В равновесных термодинамических системах роль интенсивности шума играет температура (см. [2]), в связи с чем везде выше под величиной управляющего параметра подразумевалось ее значение  $T$ . Однако следует иметь в виду, что в термодинамических системах упорядочение происходит не при больших величинах управляющего параметра, а при малых [11]. Поэтому применительно к таким системам управляющий параметр отвечает не самой температуре, а ее обратному значению. Укажем в этой связи, что при выводе термодинамических соотношений на основе распределения Гиббса изначально появляется именно обратная температура (см. [11]).

Другим существенным ограничением использованного подхода является то обстоятельство, что мы исследовали пространственно-однородные системы, хотя в случае сохраняющегося параметра порядка в ходе фазового перехода всегда образуется неоднородная структура [1, 2]. При этом следует выделять два принципиально различных режима поведения — бинадальный и спинодальный. В термодинамических системах первый отвечает за критической области температур, второй — подкритической. Переход между ними представляет потерю эргодичности стохастической системы в бинадальной области, связанную с появлением резких межфазных (антифазных) границ [16].

Нетрудно видеть, что в спинодальной области, где координатная зависимость параметров системы является плавной, ее учет не вызывает особых затруднений. Действительно, если перейти из координатного представления в волновое, то оказывается достаточным ввести в затравочные времена релаксации множителя  $(1 + \xi^2 \mathbf{k}^2)^{-1}$ , зависящие от волнового вектора  $\mathbf{k}$ , где  $\xi$  — корреляционная длина, отвечающая данному параметру. В бинадальной области кроме  $\xi$  появляются дополнительные масштабы  $L$ , характеризующие макроструктуру (см. Введение), и ситуация намного усложняется [1, 2]. Ее рассмотрение представляет отдельную задачу.

Выражаем благодарность Государственному комитету по науке и технике Украины (гранты 2.2/205, 2.3/82) за поддержку работы. Мы признательны также участникам семинаров по синергетике при Московском государственном университете и Институте физики Национальной академии наук Украины за обсуждение работы.

## Литература

1. A. J. Bray, Adv. Phys. **43**, 357 (1994).
2. А. И. Олемской, И. В. Коплык, УФН **165**, 1105 (1995).
3. А. З. Паташинский, В. Л. Покровский, *Флуктуационная теория фазовых переходов*, Наука, Москва (1982).
4. И. М. Лифшиц, ЖЭТФ **42**, 1354 (1962).
5. И. М. Лифшиц, В. В. Слезов, ЖЭТФ **35**, 479 (1958).

6. А. С. Зельцер, Т. К. Соболева, А. Э. Филиппов, ЖЭТФ **108**, 356 (1995).
7. Г. Хакен, *Синергетика*, Мир, Москва (1980).
8. А. И. Олемской, В. А. Петрунин, Изв. вузов, *Физика*, № 1, 82 (1987).
9. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, *Теория колебаний*, Наука, Москва (1981).
10. А. А. Кацнельсон, А. И. Олемской, *Микроскопическая теория неоднородных структур*, Изд-во МГУ, Москва (1987).
11. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, ч. 1, Наука, Москва (1976).
12. Г. Хакен, *Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах*, Мир, Москва (1985).
13. А. И. Olemskoi, in *Physics Reviews*, ed. by I. M. Khalatnikov, Gordon and Breach, London (1996), Vol. **18**, P. 1, p. 1; А. И. Олемской, А. Я. Флат, УФН **163**, № 12, 1 (1993).
14. В. Хорстхемке, Р. Лефевр, *Индукцированные шумом переходы*, Мир, Москва (1987).
15. А. И. Олемской, И. А. Скляр, УФН **162**, № 6, 29 (1992).
16. А. И. Олемской, Е. А. Торопов, И. А. Скляр, ЖЭТФ **100**, 987 (1991).