середній розмір зерна не повинен залежати від товщини, що експериментально досягти не завжди вдається. У зв'язку з тим у рамках теорії МШ отримані асимптотичні вирази для питомого опору та ТКО полікристалічних плівок для різних граничних випадків значень приведеної товщини ($k<<1$, $k>>1$) та параметра зерномежевого розсіювання ($\alpha<<1$, $\alpha>>1$), які можна використовувати як функцію точки при обробці експериментальних результатів у реальних плівкових зразках. На основі цих формул запропонована методика і проведено розрахунок значення коефіцієнта розсіювання R при постійному значенні λ. Так для плівок Ni в інтервалі товщин 50-150 нм R складає 0,37-0,40, для плівок Cu товщиною 55-135 нм коефіцієнт розсіювання електронів на межах зерен —0,35-0,40.

Література.

1. Mayadas A.F., Shatzkes M. Electrical-Resistivity Model for Polycrystalline Films: the Case of Arbitrary Reflection on External Surface // Phys.Rev.B.-1970.-V.11.№4. – P.1382-1389.
2. Tellier C.R., Tosser A.J. Size effects in thin films.- Amsterdam-Oxford-New-York: Elsevier Scientific Publ. Company.- 1982.- 310 p.

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕГРЕССИЙ

Долгих В. Н. (Украинская академия банковского дела)

При статистическом моделировании приходится иметь дело со стохастическими зависимостями между величинами, когда каждому фиксированному значению независимой переменной x соответствует множество значений зависимой переменной y. Функциональная зависимость между условным математическим ожиданием зависимой переменной y и независимой переменной x, называется уравнением регрессии y на x. Как правило, в распоряжении исследователя имеется лишь выборка, состоящая из n пар наблюдений (x_i, y_i) (i=1,2,...,n).

Построение выборочного уравнения регрессии, являющегося оценкой неизвестного теоретического уравнения, состоит из трёх этапов:

1. Выбор вида уравнения (этап спецификации). Обычно уравнение регрессии задаётся в виде $\hat{y} = f(x, b_0, b_1, ..., b_m)$, где $b_0, \ldots, b_m$ – подлежащие определению параметры.
2. Оценка неизвестных параметров (этап параметризации).
3. Анализ качества уравнения (этап верификации).

Наиболее распространённым методом оценки параметров является метод наименьших квадратов (МНК), заключающийся в минимизации суммы квадратов отклонений e_i фактических значений y_i от вычисленных по функции регрессии $\hat{y}_i = f(x_i, b_0, b_1, ..., b_m)$:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - f(x_i, b_0, b_1, ..., b_m) \right]^2 = Q(b_0, b_1, ..., b_m) \to \min \qquad (1)$$

Приравнивая нулю частные производные функции Q по параметрам b_j, получаем систему уравнений для их определения. Если функция f линейна относительно параметров: $\hat{y} = \sum_{j=0}^{m} b_j \varphi_j(x)$, где $\varphi_j(x)$ – линейно независимые функции, то и система уравнений для их определения также линейна. Например, для линейного уравнения $\hat{y} = a + bx$ система и её решение имеют вид

$$\begin{cases} na + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases} \Rightarrow$$

$$b=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2},\quad a=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i-b\sum_{i=1}^{n}x_i\right).$$

(2)

Если же уравнение регрессии нелинейно относительно параметров, например показательное $\hat{y}=ae^{bx}$ или степенное $\hat{y}=ax^b$, то и система уравнений для их определения также нелинейна и её решение представляет значительные трудности. Обычно показательное и степенное уравнения рекомендуется [1 - 3] логарифмированием сводить к линейным, например показательное уравнение после логарифмирования примет вид: $\hat{y}_*=a_*+bx$, где $\hat{y}_*=\ln\hat{y}$, $a_*=\ln a$. Параметры a_*, b можно вычислить по формулам (2), заменив y_i на $\ln y_i$. Однако, такое преобразование приводит к тому, что минимизируется не сумма (1), а сумма $\sum_{i=1}^{n}(\ln y_i-\ln\hat{y}_i)^2=\sum_{i=1}^{n}\ln^2(y_i/\hat{y}_i)$. В результате оценки параметров получаются смещёнными. Для иллюстрации сказанного рассмотрим пример. Для каждого значения $x_i = 0{,}4i$ ($i= 0,1,\ldots,5$) расположим по две “экспериментальные” точки на равных расстояниях $e_i = \pm\ 0{,}9$ от “теоретической” кривой $y=e^x$. Значения параметров показательного уравнения $\hat{y}=ae^{bx}$, полученные в результате логарифмического преобразования, a=0,5805, b=1,3424 значительно отличаются от “теоретических” a=b=1. Соответствующие кривые приведены на рис. 1. Этот же результат получается и при построении экспоненциальной линии тренда в программе Excel.

Для получения несмещённых оценок предлагается использовать нелинейный метод наименьших квадратов (НМНК), заключающийся в непосредственной минимизации суммы (1), например при помощи средства *Сервис* $\Rightarrow$ *Поиск решения* программы Excel. В результате минимизации получены следующие оценки параметров: a=1,000003, b=0,999998.

Предлагаемый подход может быть применён и для оценки параметров других уравнений регрессий, в том числе и линейных.

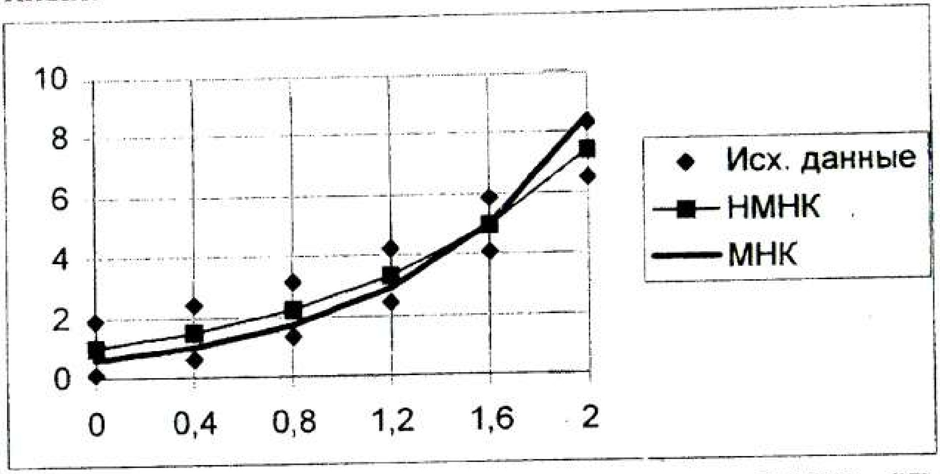

Рис. 1. Экспоненциальные кривые, найденные по МНК и НМНК

ЛИТЕРАТУРА

1. Лук'яненко І. Г., Краснікова Л. І. Економетрика: Підручник. – К.: Тов. "Знання",КОО, 1998. –494 с.
2. Наконечний С. І., Терещенко Т. О., Романюк Т. П. Економетрія: Підручник. – Вид. 2-ге. – К.: КНЕУ 2000. – 296 с.
3. Толбатов Ю. А. Економетрика: Учбовий посібник. – К., Четверта хвиля, 1997. – 320 с.

ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРАМИ

Мартиненко О.В., Голод Т.В. (Сумський державний університет ім. А.С. Макаренко)

Розв'язування задач з параметрами забезпечує узагальнення і систематизацію отриманих знань, формує в учнів уміння досліджувати різного роду функції, сприяє засвоєнню їх властивостей, розвиває гнучкість та критичність мислення. Але, як показує досвід, саме вони становлять найбільшу трудність для учнів як у логічному, так і в технічному плані.

Задачі з параметрами вимагають вдумливого і всебічного дослідження, оскільки потрібно знайти всі можливі значення параметра, при яких вони мають розв'язок. Спроба негайно