

## ТЕОРІЯ ПЕРІОДИЧНОЇ МНОЖИНИ ГРАНИЧНИХ ЦИКЛІВ, ЩО НАРОДЖУЮТЬСЯ ВНАСЛІДОК БІФУРКАЦІЇ ХОПФА

**О.І. Олемської\*, І.О. Шуда\*\***

\*Інститут прикладної фізики НАН України, м. Суми

\*\*Сумський державний університет,  
вул.. Р-Корсакова, 2, м. Суми, 40007

*У рамках формалізму Гамільтона показано, що в ході еволюції системи біфуркація Хопфа приводить до обертання фазової площини, яка містить фазові цикли. Така площина описана за аналогією з посудиною, що обертається і містить надтекучий  $He^4$ . Показано, що у рамках такого уявлення кут обертання, який швидко змінюється, зводиться до фази комплексного параметра порядку, квадрат модуля якого визначає дія. Відповідно векторний потенціал калібровочного поля визначає відносну швидкість руху внутрішньої частини граничного циклу за відношенням до зовнішньої області. З фізичної точки зору це означає, що самоорганізація системи повністю пригнічує зовнішнє періодичне поле з частотою  $\omega_0$ , яке обмежене нижньою границею  $\omega_{c1}$ , тоді як в інтервалі  $\omega_{c1} < \omega_0 < \omega_{c2}$  це поле приводить до серії резонансів координати і імпульси яких змінюються в періодично розподілених періодичних циклах.*

### ВСТУП

Добре відомо, що концепція фазових переходів визначає одну з фундаментальних ідей сучасної фізики. Відповідна картина базується на схемі Ландау, відповідно до якої термодинамічна система, що знаходиться під дією повільно змінюваного зовнішнього впливу, відчуває стрибкоподібне різке перетворення термодинамічного стану, якщо його потенціал набуває одного або декількох додаткових мінімумів просторового стану [1]. З математичної точки зору таке фазове перетворення визначає простішу біфуркацію, яка виражається у подвоєнні числа стаціонарних станів.

Як відомо, термодинамічний фазовий перехід визначає частинний випадок процесу самоорганізації, у ході якого параметр порядку, спряжене йому поле і управляючий параметр змінюються самоузгодженим чином [2]. Можна сказати, що узагальнення термодинамічної картини до синергетичної зумовлено розширенням набору параметрів стану від єдиного до трьох раніше вказаних. Тому можна сподіватись, що таке узагальнення дозволить описати не тільки найпростішу біфуркацію типу Ландау, але й складнішу біфуркацію Хопфа, при якій народжується континуальний граничний цикл, а не дискретна множина [3].

Як показав попередній розгляд [4] використання повного набору універсальних деформацій у рамках синергетичної схеми не приводить до граничного циклу, тоді як вихід за рамки теорії самоорганізації дозволив знайти граничний цикл типу, показаного на рис. 1 [5]. У зв'язку з цим виникає питання: у чому фізична причина, завдяки якій схема самоорганізації не може визначити самоорганізацію Хопфа?

Робота, що пропонується, присвячена відповіді на це питання. Виявляється, що основна причина у тому, що опис граничного циклу потребує використання як потенціалу, так і сили поля, спряженого параметра порядку, тоді як стандартна синергетична схема використовує тільки сили цього поля. Слідуючи [6], ми показуємо у частині 1, що швидке обертання конфігураційної точки фазової площини індукує

калібровочне поле, потенціал якого зводиться до відносної швидкості руху зовнішньої і внутрішньої областей граничного циклу. Така картина дозволяє нам дослідити у частині 2 фазову площину, що обертається і містить набір граничних циклів, використовуючи аналогію з посудиною, яка обертається і містить надтекучий  $He^4$  [7,8].

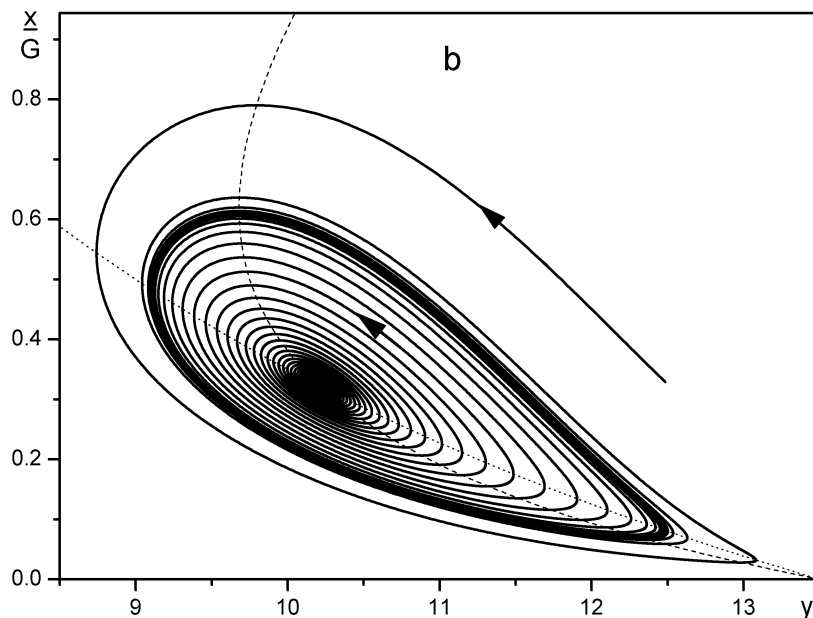


Рисунок 1 – Граничний цикл, що відповідає нестандартним рівнянням самоорганізації  $\dot{x} = x[y - (1 + rx) - (A - 1)/(1 + px)]$ ,  $\dot{y} = A - y(1 + x)$  при  $A = 14$ ,  $r = 5$ ,  $p = 2$  [5]

У розділі 3 ми приходимо до висновку, що процес самоорганізації системи повністю пригнічує зовнішнє періодичне поле з частотою  $\omega_0$ , яке обмежене нижньою границею  $\omega_{c1}$ , тоді як в інтервалі  $\omega_{c1} < \omega_0 < \omega_{c2}$  це поле приводить до серії резонансів координати і імпульси яких змінюються у періодично розподілених періодичних циклах. В кінці, з перевищенням верхньої межі  $\omega_{c2}$  система поводить ся таким чином, що не проявляється процес її самоорганізації – координати і імпульси відчують коливання з частотою  $\omega_0$ .

### 1 КАНОНІЧНЕ ВИЗНАЧЕННЯ БІФУРКАЦІЇ ХОПФА

Розглянемо гамільтонову динаміку, яка визначається формулами:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad \{q_i\} = q, Q, \quad \{p_i\} = p, P \quad (1)$$

для швидких і повільних координат  $q, Q$  і спряжених імпульсів  $p, P$  (у подальшому, крапка над символом означає похідну за часом). Відповідний гамільтоніан

$$H(q, p; Q, P) = H_s(Q, P) + H_f(q, p; Q) \quad (2)$$

розділяється на повільний  $H_s(Q, P)$  і швидкий доданки  $H_f(p, q; Q)$ , останній з яких залежить також і від повільної координати.

У згоді із стандартною схемою [9] слід перейти від швидких змінних  $q, p$  до канонічних спряжених величин, які являють швидко змінний кут  $\varphi$  і повільно змінну дію  $\eta^2$ . Цей перехід зберігає незмінним перший член гамільтоніана (2), перетворюючи другий доданок згідно з формулою

$$H_f(\varphi; \eta, Q) = H_f(q, p; Q) + \dot{Q} \frac{\partial \Psi(q; \eta, Q)}{\partial Q}, \quad (3)$$

явна форма якої визначається генеруючою функцією  $\Psi(q; \eta, Q)$ , що задовольняє зв'язки:

$$\frac{\partial \Psi(q; \eta, Q)}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial \Psi(q; \eta, Q)}{\partial Q} = P, \quad \frac{\partial \Psi(q; \eta, Q)}{\partial \eta^2} = \varphi. \quad (4)$$

Завдяки швидким змінам кута  $\varphi$  природно розглянути доданок (3) у вигляді

$$H'(\eta, Q) = \langle H_f(\varphi; \eta, Q) \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_f(\varphi; \eta, Q) d\varphi, \quad (5)$$

усередненим за цими змінами.

Для знаходження слідувачого гамільтоніану слід використати однозначно визначену генеруючу функцію

$$\Phi(\varphi; \eta, Q) \equiv \Psi(q(\varphi; \eta, Q); \eta, Q), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (6)$$

замість багатозначної  $\Psi(q; \eta, Q)$ . Тоді останній множник у рівнянні (3) знаходиться за формулою

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Q} = \frac{\partial \Psi}{\partial Q} + p \frac{\partial q}{\partial Q}, \quad (7)$$

яка визначає правило диференціювання складної функції. Використання цього виразу дозволяє подати доданок (5) у такому вигляді:

$$H'(\eta, Q) = H(\eta, Q) + \dot{Q} \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial Q} - p \frac{\partial q}{\partial Q} \right\rangle, \quad H(\eta, Q) \equiv \langle H_f(q, p; Q) \rangle. \quad (8)$$

У результаті використання канонічних змінних дія-кут приводить до перетворення усередненого гамільтоніану (2) до вигляду:

$$\begin{aligned} H_{ef}(\eta; Q, P) &\equiv \langle H'(\varphi, \eta; P, Q) \rangle \\ &= H(\eta; Q, P) + \dot{Q} \left( \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial Q} \right\rangle - \left\langle p \frac{\partial p}{\partial Q} \right\rangle \right), \end{aligned} \quad (9)$$

де перший член

$$H(\eta; Q, P) \equiv H(\eta, Q) + H_s(Q, P) \quad (10)$$

залежить тільки від повільнозмінних величин.

Для знаходження рівнянь руху повільних змінних слід використовувати умову екстремуму для фіктивної дії [9]

$$S_{ef}\{Q(t), P(t); \eta(t)\} \equiv \int_{t_{in}}^{t_f} [P(t)\dot{Q}(t) - H_{ef}(\eta(t); Q(t), P(t))] dt, \quad (11)$$

форма якої визначається гамільтоніаном (9) (тут  $t_{in}$ ,  $t_f$  визначають початковий і кінцевий моменти часу. Варіювання цього виразу за імпульсом приводить до рівняння руху

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial P_\alpha}, \quad (12)$$

яке зберігає початкову форму (1) (у подальшому ми покладаємо, що повільні змінні визначають векторні величини, що мають компоненти  $Q_\alpha$ ,  $P_\alpha$ ). З іншого боку, варіація дії (11) за повільною координатою приводить до рівняння

$$\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial Q_\alpha} + F_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial P_\beta}, \quad (13)$$

зміна довжини якого у порівнянні з (1) зумовлена діями фіктивного поля з напругою, що подається антисиметричним тензором

$$F_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial A_\beta}{\partial Q_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial Q_\beta} \quad (14)$$

і векторним потенціалом

$$A_\alpha \equiv \left\langle p_\beta \frac{\partial q_\beta}{\partial Q_\alpha} \right\rangle. \quad (15)$$

Як правило, ми використовуємо правило підсумовування за індексами  $\beta$ , які повторюються.

Вище наведені вирази (13)–(15) приводять до принципово важливого висновку: швидка зміна координат, величини яких залежать від повільних змінних, індукує ефективне калібровочне поле [6]. У випадку біфуркації Хопфа, це означає, що еволюція системи відображається обертанням не тільки конфігураційної точки, але і всієї області фазової площини, яка обмежена граничним циклом. Іншими словами, фізична картина біфуркації Хопфа, зводиться до того, що фазова площина поводить не як математичний об'єкт, а як реальний.

## 2 ФІЗИЧНА КАРТИНА ГРАНИЧНОГО ЦИКЛУ

Розглянемо круг фазової площини, яка утворюється осями координат  $q$  і імпульсом  $p$  і обертається з кутовою швидкістю  $\bar{\omega}_0$  та моментом інерції  $I$ . З фізичної точки зору величина  $\bar{\omega}_0$  визначає частоту зовнішнього поля, тоді як величина  $I$  зводиться до повної дії системи, що розглядається. Якщо круг фазової площини обертається як тверде тіло, то фазова точка з координатою  $\vec{r}$  має лінійну швидкість  $\vec{v}_n = [\bar{\omega}_0, \vec{r}]$ .

Згідно з проведеним розглядом, біфуркація Хопфа приводить до народження граничного циклу, який індукує калібровочне поле з векторним потенціалом (15) та напругою (14); у нашому випадку вони зводяться до лінійної та кутової швидкостей  $\vec{w}$  і  $\bar{\omega}_0$  відповідно. Однак ці величини не дорівнюють нормальним компонентам  $\vec{v}_n$  і  $\bar{\omega}_0$  оскільки область, обмежена граничним циклом, обертається відносно фазової площини завдяки дії калібровочного поля. Дійсно, якщо уявити народження граничного циклу як упорядкування, яке описується комплексним параметром  $\phi = \eta e^{i\varphi}$ , тоді градієнт фази  $\vec{v}_s \equiv \nabla \varphi$ , де  $\nabla \equiv \partial / \partial \vec{r}$ ,  $s$  – елементарна дія діє таким чином, щоб компенсувати обертання всередині області обмеженої граничним циклом:  $\vec{w} = \vec{v}_n - \vec{v}_s$ . У результаті відносна швидкість  $\vec{w}$  зводиться до величини, що подовжує градієнт  $\nabla \Rightarrow \nabla - (i/s)\vec{w}$ . Таким чином, на відміну від обертання твердого тіла впорядкування приводить до лінійного співвідношення  $\bar{\omega} = (1/2) \text{rot} \vec{w}$  між кутовою  $\bar{\omega}$  і лінійною  $\vec{w}$  компонентами швидкості обертання.

Добре відомий приклад такої поведінки визначає надтекучий  $He^4$ , що обертається [7, 8]. У цьому випадку густина ефективної енергії фазової площини, яка обертається з граничними циклами, має вигляд [10]

$$E = \Delta E(\eta) + \frac{1}{2} |(-is\nabla - \vec{w})\eta|^2 + \frac{I}{2} \bar{\omega}^2. \quad (16)$$

У рамках феноменологічної схеми густина зміни енергії, що виникає у результаті утворення граничного циклу, визначається розкладом Ландау

$$\Delta E(\eta) = A\eta^2 + \frac{B}{2}\eta^4, \quad (17)$$

форма якого визначається параметрами  $A$ ,  $B$ . Другий член рівняння (16) визначає енергію неоднорідності, яка подається градієнтом, подовженим векторним потенціалом  $\vec{w}$  калібровочного поля. Останній доданок визначає кінетичну енергію обертання фазової площини.

Під дією зовнішнього поля з частотою  $\bar{\omega}_0$  поведінка системи позначається густиною ефективного потенціалу

$$\tilde{E} = E - (I\bar{\omega}_0 + \vec{M})\bar{\omega}_0, \quad (18)$$

величина якого визначена по відношенню до фазової площини, що обертається, рух якої характеризується кутовим моментом  $\vec{M} = I(\bar{\omega} - \bar{\omega}_0)$ . Стаціонарний розподіл параметра порядку  $\eta(\vec{r})$  і відносної швидкості  $\vec{w}(\vec{r})$  задаються умовою екстремуму повної величини ефективного потенціалу

$$E\{\eta(\vec{r}), \vec{w}(\vec{r})\} = \int \tilde{E}(\eta(\vec{r}), \vec{w}(\vec{r})) d\vec{r}, \quad (19)$$

де інтегрування виконується за всією площиною фазової площини. При цьому граничні умови мають вигляд:

- зовні граничного циклу

$$\eta = 0, \quad \nabla \eta = 0, \quad \vec{w} = [\vec{\omega}_0, \vec{r}], \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}_0; \quad (20)$$

- всередині граничного циклу

$$\eta = \eta_0, \quad \nabla \eta = 0, \quad \vec{w} = 0, \quad \vec{\omega} = 0; \quad (21)$$

- на лінії граничного циклу

$$\vec{n}(-is\nabla - \vec{w})\eta = 0. \quad (22)$$

Тут,  $\vec{n}$  – одиничний вектор, перпендикулярний до граничного циклу  $\eta_0 = \sqrt{-A/B}$  – стаціонарне значення параметра порядку, яке визначається умовами мінімуму виразу (17).

Поданий вираз показує, що неупорядкована фаза відповідає зовнішній області граничного циклу, яка характеризується густиною ефективної енергії  $\tilde{E}(0) = -(I/2)\vec{\omega}_0^2$ . Впорядкована фаза є обмеженою цим циклом і відповідає величині  $\tilde{E}(\eta_0) = -(|A|/2)\eta_0^2$ . В результаті умова фазової рівноваги  $\tilde{E}(\eta_0) = \tilde{E}(0)$  дає характерне значення швидкості обертання

$$\omega_c = \sqrt{\frac{|A|\eta_0^2}{I}} = \sqrt{\frac{A^2}{IB}}, \quad (23)$$

яка визначає масштаб енергії  $E_c \equiv I\omega_c^2 = |A|\eta_0^2 = A^2/B$ . Більш того, корисно ввести масштаби довжини  $\lambda, \xi$  і їх відношення  $\kappa = \lambda/\xi$ , які подаються слідуючими виразами:

$$\lambda \equiv \sqrt{\frac{IB}{4|A|}}, \quad \xi \equiv \sqrt{\frac{s^2}{2|A|}}, \quad \kappa \equiv \sqrt{\frac{I}{I_0}}, \quad I_0 \equiv \frac{2s^2}{B}. \quad (24)$$

Тоді, вимірюючи густину енергії  $\tilde{E}$  в одиницях  $E_c$ , параметр порядку  $\eta$  – у масштабі  $\eta_0$ , кутову швидкість  $\vec{\omega}$  – в  $\omega_c$ , лінійні швидкості  $\vec{v}_n$ ,  $\vec{w}$  – в  $2\sqrt{2}\lambda\omega_c$ , кутовий момент  $\vec{M}$  – в  $2\sqrt{2}I\lambda\omega_c$  і відстань  $r$  – в  $\lambda$ , зводимо густину енергії (18) до простого вигляду

$$\tilde{E} = \left| (-i\kappa^{-1}\nabla - \vec{w})\eta^2 \right| - \left( \eta^2 - \frac{1}{2}\eta^4 \right) - \left( \vec{\omega}_0 - \frac{1}{2}\vec{\omega} \right) \vec{\omega}. \quad (25)$$

Підставляючи цю рівність у повну енергію (19) і варіюючи функціонал, що отримуємо, приходимо до такого рівняння руху:

$$\kappa^{-2}\nabla^3\eta = -\left(1 - \vec{w}^2\right)\eta + \eta^3, \quad (26)$$

$$-\text{rot rot}\vec{w} = \eta^2\vec{w}. \quad (27)$$

Як відомо [7, 8], форма розв'язків цих рівнянь визначається параметром  $\kappa$ , який задається двома останніми рівняннями (24). У звичайному випадку фазова площина настільки мала, що реалізується умова  $\kappa \leq 2^{-1/2}$ , у результаті утворюється єдиний граничний цикл, форма і розміри якого визначаються зовнішньою частотою  $\omega_0$  (див. рис.1). Більш цікава ситуація реалізується у випадку, коли фазова площина настільки велика, що реалізується обернена умова  $\kappa > 2^{-1/2}$ . Тоді в інтервалі  $\omega_{c1} < \omega_0 < \omega_{c2}$ , що обмежений граничними швидкостями:

$$\omega_{c1} \equiv \frac{\ln k}{\sqrt{2\kappa}} \omega_c = \frac{|A|}{4s} \left( \frac{I}{I_0} \right)^{-1} \ln \frac{I}{I_0}, \quad (28)$$

$$\omega_{c2} \equiv \sqrt{2\kappa} \omega_c = |A|/s. \quad (29)$$

утворюється змішаний стан, який визначає набір кругових граничних циклів, що періодично розподілені на площі фазової площини, що обертається. Кожен із цих циклів несе в собі елементарну дію  $2\pi s$ , У результаті чого максимальна величина  $N_{\max} = 1/\pi \xi^2$  густина циклів на одиницю площі досягається при  $\omega_0 = \omega_{c2}$ . Зі зменшенням зовнішньої швидкості поблизу верхньої границі ( $0 < \omega_{c2} - \omega_0 \ll \omega_{c2}$ ) густина граничних циклів зменшується відповідно виразу

$$\frac{N}{N_{\max}} = \frac{\omega_0}{\kappa} - \frac{\bar{\eta}^2}{2\kappa^2}, \quad (30)$$

де середнє значення  $\bar{\eta}^2$  пов'язане із швидкістю обертання  $\omega_0$  рівнянням

$$\bar{\eta}^2 = \frac{2\kappa}{\beta(2\kappa^2 - 1)} (\kappa - \omega_0), \quad \beta \equiv \bar{\eta}^4 / (\bar{\eta}^2)^2 = 0.1596. \quad (31)$$

Середня величина швидкості

$$\bar{\omega} = \omega_0 - \bar{\eta}^2 / 2\kappa = \omega_0 - (\kappa - \omega_0) / \beta(2\kappa^2 - 1) \quad (32)$$

менша ніж зовнішнє значення  $\omega_0$  на величину, яка визначає середнє значення поляризації площини

$$\bar{M} = -\bar{\eta}^2 / 2\kappa = -(\kappa - \omega_0) / \beta(2\kappa^2 - 1). \quad (33)$$

Максимальна величина швидкості обертання досягається у центрах граничних циклів, а мінімальна  $\omega_{\min} = \omega_0 - \sqrt{2}(\kappa - \omega_0) / (2\kappa^2 - 1)$  – у центрах трикутників, що утворюються сусідніми циклами (див. рис. 2). Зміна середнього значення ефективної енергії (19), що спричиняється обертанням фазової площини,

$$\bar{E} = I\omega_c^2 \left( \frac{1}{2} + \bar{\omega}^2 - \frac{\bar{\eta}^4}{2} \right) = I\omega_c^2 \left[ \frac{1}{2} + \bar{\omega}^2 - \frac{(\kappa - \bar{\omega})^2}{1 + \beta(2\kappa^2 - 1)} \right] \quad (34)$$

визначає функцію середньої швидкості  $\bar{\omega}$ , диференціювання за якою приводить до рівності (32).

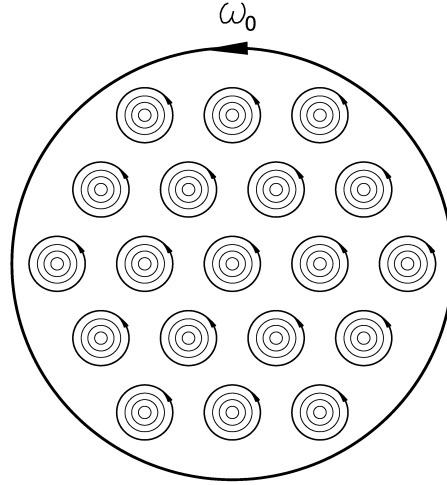


Рисунок 2 – Розподіл граничних циклів на фазовій площині при  $\kappa > 2^{-1/2}$ ,  $\omega_{c1} < \omega_0 < \omega_{c2}$

Поблизу нижнього критичного значення  $\omega_{c1}$  густина граничних циклів  $N = (\kappa/2\pi)\bar{\omega}$  достатньо мала, і їх можна розглядати незалежно. Беручи до уваги, що  $w(r)$  змінюється на відстанях  $r \approx 1$ , а  $\eta(r)$  – при  $r \approx \kappa^{-1} \ll 1$ , не важко помітити, що відносна швидкість визначається рівнянням (27), де  $\eta^2 \approx 1$  і  $\kappa \gg 1$

$$w = -\kappa^{-1}K_1(r), \quad (35)$$

де  $K_1(r)$  – функція Ганкеля уявного аргумента. Відповідно параметр порядку визначається рівнянням (26) з  $w = -1/\kappa r$ :

$$\begin{aligned} \eta &\cong cr \quad \text{при} \quad r \ll \kappa^{-1}, \\ \eta^2 &\cong 1 - (\kappa r)^{-2} \quad \text{при} \quad r \gg \kappa^{-1}, \end{aligned} \quad (36)$$

де  $c$  додатня стала. Відповідно з (35) маємо  $w \approx -1/\kappa r$  при  $r \ll 1$  і  $w \approx -\sqrt{\pi/2\kappa^2}r^{-1/2}e^{-r}$  при  $r \gg 1$ . Залежність  $\bar{\omega}(\omega_0)$  має монотонно зростаючий вигляд: при  $\omega_0 = \omega_{c1}$  вона характеризується вертикальною дотичною, а із зростанням  $\omega_0$  асимптотично наближається до прямої лінії  $\bar{\omega} = \omega_0$ . Ефективна енергія за один граничний цикл складає  $(2\pi/\kappa^2)\ln \kappa$ , а величина  $\omega$  у центрі циклу вдвічі перевищує. Значення  $\omega_{c1}$ .

### 3 ВИСНОВКИ

У рамках формалізму Гамільтона сумісний розгляд повільних і швидких змінних показує, що усереднення за кутом канонічно спряженої дії індукує ефективне калібровочне поле, якщо швидка координата залежить від повільної. Це означає, що в ході еволюції системи біфуркація Хопфа приводить до обертання не тільки конфігураційної



точки, а і всієї області фазової площини, яка обмежена граничним циклом. Іншими словами, фазова площина, яка містить граничні цикли, народжені у результаті біфуркації Хопфа, поводить не як математичний, а як фізичний об'єкт.

Розвинена картина являє основу для дослідження множинного резонансу, який виникає у системі, що самоорганізується під дією періодичного поля.

## SUMMARY

### THEORY OF PERIODICAL SET OF LIMIT CYCLES APPEARING AS A RESULT OF HOPF BIFURCATION

*A.I. Olemskoy\**, *I.A. Shuda\*\**

\* *Institute of Applied Physics of NAS of Ukraine*

\*\* *Sumy State University, R.-Korsakova Str., 2, Sumy, 40007*

*On the base of the Hamiltonian formalism, we show that the Hopf bifurcation arrives, in the course of the system evolution, at creation of revolving region of the phase plane being bounded by the limit cycle. A revolving phase plane with a set of limit cycles is presented in analogy with the revolving vessel containing superfluid  $He^4$ . Within such a representation, fast varying angle is shown to be reduced to the phase of complex order parameter whose module squared plays a role of action. Respectively, the vector potential of the conjugate field is reduced to the relative velocity of motion of the limit cycle interior with respect to its exterior. From the physical point of view, it means that nontrivial self-organized system suppresses entirely external periodical fields with frequencies  $\omega_0$  bounded by a limit  $\omega_{c1}$  within the domain  $\omega_{c1} < \omega_0 < \omega_{c2}$  this field arrives at the resonance series whose coordinates and momenta are varied within the periodically distributed domains.*

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. Ч.1. – М.: Наука, 1995. – 363 с.
2. Олемской А.И., Кацнельсон А.А. Синергетика конденсированной среды. – М.: Эдиториал УРСС, 2003. – 335 с.
3. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла /Пер с англ. – М.: Мир, 1985. – 280 с.
4. Олемской О.И., Шуда І.О., Харченко В.О. Самоорганізація нестійкої системи за сценарієм біфуркації Хопфа // Укр.фіз. журн. – 2006. – Т.51, N 3. – С. 312-320.
5. Шуда І.О. Біфуркація Хопфа в твердотільному одномодовому лазері з керованою добротністю резонатора // Укр.фіз. журн. – 2004. – Т.49, N 8. – С. 767-772.
6. Gozzy E., Thacher W.D. Relation between fast and slow canonical variables // Phys. Rev.D. – 1987. – V.35. – P.2398-2411.
7. Kleinert H. Gauge Fields in Condensed Matter: Superflow and Vortex Lines. – Singapore: World Scientific, 1989. – V.I. – 998 p.
8. Tilley D.R., Tilley J. Superfluidity and superconductivity. – N.Y. etc.: Van Nostrand Reinhold Company, 1974. – 283 p.
9. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Механика. – М.: Наука, 1973. – 208 с.
10. Олемской А.И. Исследование вращающегося  $HeII$  вблизи  $\lambda$ -точки с помощью теории Гинзбурга-Ландау-Абрикосова // Изв. ВУЗов. Физика. – 1984. – N 5. – С. 75 – 81.

**Олемской О.И.**, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач лабораторії ІПФ НАН України, завідувач кафедри фізичної електроніки СумДУ;

**Шуда І.О.**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного аналізу і методів оптимізації СумДУ

*Надійшла до редакції 15 березня 2007 р.*