УДК 535.41+621.372+621.91}

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КОРРЕЛЯЦИОННОГО ОПЕРАТОРА МНОГОМЕРНОГО ПРОЦЕССА ОРНШТЕЙНА–УЛЕНБЕКА

Ю.П. Вирченко, *д-р физ.-мат. наук, профессор,*
А.С. Мазманишвили*, *д-р физ.-мат. наук, профессор*
Институт монокристаллов НАНУ, г. Харьков;
**Сумский государственный университет, г. Сумы*

Настоящая работа посвящена изучению асимптотического поведения собственных чисел корреляционного оператора многомерного комплекснозначного процесса Орнштейна-Уленбека. Получены результаты, описывающие поведение той части спектра корреляционного оператора, которая определяет устойчивость синтезируемой системы, построены аналитические выражения, описывающие конфигурацию нулей соответствующего дисперсионного уравнения, связанного с корреляционной матрицей рассматриваемых случайных процессов.

Ця робота присвячена вивченню асимптотичної поведінки власних чисел кореляційного оператора багатовимірного комплексновизначеного процесу Орнштейна-Уленбека. Отримано результати, що описують поведінку тієї частини спектру кореляційного оператора, яка визначає стійкість системи, що синтезується, та побудовано аналітичні вирази, що описують конфігурацію нулів відповідного дисперсійного рівняння, пов'язаного з кореляційною матрицею розглядуваних випадкових процесів.

ВВЕДЕНИЕ

Синтез систем принятия решений и автоматического управления обязательно содержит этап, рассматривающий устойчивость системы. Свойство устойчивости, в свою очередь, определяется расположением спектра собственных чисел матрицы системы и связанной с ней корреляционной матрицы рассматриваемых случайных процессов. Сложность аналитического решения задачи такого рода быстро возрастает с увеличением размерности системы. Поэтому являются важными такие подходы к решению задачи синтеза, которые хотя и являются асимптотическими, однако дают возможность оценить конфигурацию собственных чисел, выделив тем самым пути к практическому решению задачи синтеза. В работе развит метод, дающий возможность находить указанную конфигурацию собственных чисел.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Определение 1. Пусть D – вещественная симметричная ($d \times d$)-матрица, $x(t)$ и $y(t)$ – два d-мерных, вещественных, статистически эквивалентных и независимых винеровских процесса, $\langle x(t) \otimes x(t') \rangle = \langle y(t) \otimes y(t') \rangle = 0.5D\min(t,t')$. Здесь и далее символ $\langle . \rangle$ обозначает операцию нахождения математического ожидания. Комплекснозначным d-мерным винеровским процессом $w(t)$ будем называть процесс с траекториями вида $w(t) = x(t) + iy(t)$.

Определение 2. Стационарный гауссовский случайный процесс $z(t)$ с траекториями $z(t): R \to C^d$, удовлетворяющими стохастическому дифференциальному уравнению

$$dz(t) = Az(t) \quad dt + dw(t), \tag{1}$$

где A – гурвицева ($d \times d$)-матрица, будем называть d-мерным комплекснозначным процессом Орнштейна-Уленбека (КОУ-процессом). Условная плотность распределения вероятностей перехода из $z(t') = z'$ в $z(t) = z$ равна для КОУ-процесса

$$p(z,z';t,t') = \left[(2\pi)^d \det D(\Delta)\right]^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(z - e^{A\Delta}z'\right) D^{-1}(\Delta)\left(z - e^{A\Delta}z'\right)\right\}, \quad (2)$$

$$\Delta = t - t', \qquad D(\Delta) = \int_0^{\Delta} \exp(A\tau) D \exp(A^+\tau) d\tau ,$$

где A^+ – матрица, эрмитовски сопряженная A. В этой работе будем рассматривать простейший случай, когда $\det D \neq 0$, поэтому $\det D(\Delta) \neq 0$.

Утверждение 1. Корреляционное ядро $K(t,t') = \langle z(t) \otimes z(t') \rangle$ процесса $z(t)$ равно [3]

$$K(t,t') = \vartheta(\Delta)\exp(A\Delta)K + \vartheta(-\Delta)K\exp(-A^+\Delta) , \quad (3)$$

где $\vartheta(\Delta) = \{\vartheta = 0,\ \Delta < 0,\ \vartheta = \frac{1}{2},\ \Delta = 0,\ \vartheta = 1,\ \Delta > 0\}$, матрица K удовлетворяет уравнению $AK + KA^+ = -D.$

В силу гурвицевости A для матрицы K имеем $K = D(\infty)$.

Теорема 1. Пусть $\{\lambda_n\}$ – собственные числа интегрального оператора, определяемого параметром T и ядром (3),

$$\frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(\tau) = \int_0^T d\tau' \quad K(\tau,\tau')\varphi_n(\tau') , \quad (4)$$

где $\{\varphi_n\}$ – соответствующие собственные функции со значениями в C^d. Пусть далее матрица $H(\lambda)$, действующая в пространстве C^d, имеет следующую блочную структуру

$$H(\lambda) = \begin{pmatrix} A + \lambda K & \lambda K^2 \\ -\lambda & A^+ - \lambda K \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Тогда каждое собственное число λ_n является решением уравнения $\Phi(\lambda) \equiv E(\lambda,T) = 0$, где ($d \times d$)-матрица $E(\lambda,T)$ суть правый нижний блок ($2d \times 2d$)-матрицы $\exp(H(\lambda)T)$. Обратно, каждый нуль уравнения $\Phi(\lambda) = 0$ является собственным числом интегрального оператора (4).

Доказательство. В силу того, что $\det D \neq 0$, не существует таких функций $\varphi_n(\tau)$, для которых правая часть (4) тождественно равна нулю, т.е. $\lambda_n \neq \infty$. Уравнение (4) запишем в виде $\varphi_n(\tau) = \lambda_n p(\tau) + \lambda_n K q_n(\tau)$, где

$$p_n(\tau) = \int_0^{\tau} d\tau' \quad \exp(A\tau - A\tau')K\varphi_n(\tau') ,$$

$$q_n(\tau) = \int_{\tau}^{T} d\tau' \quad \exp(A^+\tau' - A^+\tau)\varphi_n(\tau') .$$

Отсюда легко заключить, что задача об определении собственных функций и собственных чисел (4) эквивалентна решению краевой задачи в C^d

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} p_n(\tau) \\ q_n(\tau) \end{pmatrix} = H(\lambda)\begin{pmatrix} p_n(\tau) \\ q_n(\tau) \end{pmatrix}, \qquad p_n(0) = 0, \qquad q_n(T) = 0.$$

Тогда собственные числа $\{\lambda_n\}$ определяются требованиями существования нетривиального решения однородного линейного уравнения в C^d

$$E(\lambda, T) \quad q_n(0) = 0,$$

что и доказывает теорему.

Замечание 1. Доказанная теорема 1 устанавливает только лишь соответствие между нулями функции $\Phi(\lambda) = \det E(\lambda, T)$ и собственными числами оператора (4) без учета их кратности. Вообще говоря, кратность $\kappa_n = d - \operatorname{rank} E(\lambda, T)$ собственного числа λ_n не превосходит кратности κ_n'

соответствующего нуля функции $\Phi(\lambda)$. В отличие от случая $d = 1$ [4,5] нельзя гарантировать простоту спектра $\{\lambda_n\}$. Если для любого n выполняется $\kappa_n = \kappa_n'$, то $\Phi(\lambda)$ пропорциональна детерминанту Фредгольма ядра $K(\tau, \tau')$.

Теорема 2. Аналитическая функция $\Phi(\lambda)$ имеет порядок роста α, меньший единицы,

$$\alpha = \lim_{L\to\infty}\left[\ln \quad \ln \quad \max_{\lambda = L} \Phi(\lambda) / \ln L\right]. \tag{6}$$

Для доказательства теоремы 2 нам потребуется вспомогательные утверждения.

Утверждение 2.1. Имеет место равенство

$$E(\lambda, \tau) = \oint \frac{d\chi}{2\pi i} \exp\left(\chi\tau \quad P^{-1}(\chi) \quad (\chi - A - \lambda K)\right), \tag{7}$$

$$P(\chi) = \chi^2 + \chi(A^+ - A) - AA^+ + \lambda D, \tag{8}$$

при этом контур интегрирования в (7) должен охватывать спектр оператора $H(\lambda)$ на χ-плоскости.

Доказательство. Обозначив через $G(\chi)$ правый нижний блок резольвенты $(\chi - H(\lambda))^{-1}$, получим равенство

$$E(\lambda, \tau) = \oint \frac{d\chi}{2\pi i} \exp(\chi\tau) \quad G(\chi). \tag{9}$$

С другой стороны, обращая в C^d матрицу $(\chi - H(\lambda))$ по $(d \times d)$-блокам, получим из (5) и определения матрицы K:

$$G(\chi) = P^{-1}(\chi) \cdot (\chi - A - \lambda K).$$

Утверждение 2.2. Матричная функция $R_1 = R_1(\lambda)$, определяемая как решение уравнения

$$R_1^2 + R_1(A^+ - A) - A \cdot A^+ + \lambda D = D, \tag{10}$$

существует и является аналитической функцией от λ с конечным набором особенностей.

Доказательство. Согласно алгоритму решения матричных многочленных уравнений [6] $R_1(\lambda)$ представима в виде $U_1 \cdot F_1 \cdot U_1^{-1}$. Здесь F_1 имеет жорданову форму со спектром $\{\chi_0(\lambda)\}$, каждый из элементов которого является одним из корней полинома $\det P(\chi)$; U_1 – произвольная неособенная матрица, оставляющая инвариантными все инвариантные подпространства матрицы $\chi^2 + (A^+ - A)\chi - A \cdot A^+ + \lambda D$ для всех χ из спектра $\{\chi(\lambda)\}$. Таким образом, решение $R_1(\lambda)$ не единственно. Ниже в замечании 2 будет указано, какое из возможных решений выбирается. Здесь заметим, что для любого решения точки неаналитичности матричной функции $R_1(\lambda)$ являются точками неаналитичности элементов χ_k спектра $\{\chi(\lambda)\}$. Набор этих точек для полинома конечен.

Утверждение 2.3. Полином (8) представим в виде

$$P(\chi) = (\chi - R_1)(\chi + R_2), \tag{11}$$

где R_1 и R_2 – аналитические функции λ с конечным набором особенностей.

Доказательство. Необходимо и достаточно, чтобы R_1 и R_2 удовлетворяли уравнениям

$$R_2 - R_1 = A^+ - A, \qquad R_1 R_2 = AA^+ - \lambda D. \tag{12}$$

Тогда R_1 удовлетворяет уравнению (10). Выбрав определенную ветвь решений $R_1 = R_1(\lambda)$, на основании обобщенной теоремы Безу [6] левым делением $P(\chi)$ на $(\chi - R_1)$ получим $(\chi + R_2)$, где R_2 – согласованное с R_1 решение уравнений (12). При этом $R_2(\lambda)$ также имеет конечный набор особенностей.

Утверждение 2.4. Матрицы R_1 и R_2 могут быть подобраны так, что за исключением конечного числа точек на λ-плоскости однозначно разрешимо уравнение

$$SR_1 + R_2 S = I \tag{13}$$

относительно матричной аналитической функции $S = S(\lambda)$.

Доказательство. Согласно сказанному выше при выборе конкретной функции $R_1(\lambda)$ возьмем в качестве её спектра $\{\chi(\lambda)\}$ такое решение уравнения , которое при $\lambda \to \infty$ имеет вид

$$\chi_k(\lambda) = i\sqrt{\lambda}\delta_k^{1/2} + O(1), \tag{14}$$

где δ_k – собственные числа матрицы D и выбрана та ветвь квадратного корня, для которой $\sqrt{\lambda} > 0$, если $\lambda > 0$. Матрицу U для дальнейших построений достаточно выбрать так, чтобы $R_1(0) = A$ и $R_2(0) = A^+$. В остальном выбор матрицы U произволен. Этот произвол выбора не влияет на вид матрицы (11) и, следовательно, матрицы $E(\lambda,\tau)$ (9). Тогда для достаточно малых λ в силу гурвицевости матрицы A спектры операторов R_1 и $-R_2$ не пересекаются. Поэтому для малых λ однозначно разрешимо [6] уравнение (13).

Для построения аналитического продолжения оператора $S = S(\lambda)$ покажем конечность набора Λ тех λ, для которых происходит перекрытие операторов R_1 и $-R_2$. Если λ_0 – граничная точка этого набора, то существует путь γ в плоскости λ, приводящий в точку λ_0 с обходом точек неаналитичности $R_1(\lambda)$ и $R_2(\lambda)$. Из уравнений (12), переходя вдоль пути γ к пределу $\lambda \to \lambda_0$, находим, что производной $dR_2/d\lambda$ в граничной точке не существует, поскольку уравнение для этой производной $R_1(dR_2/d\lambda) + (dR_2/d\lambda)R_2 = -D$ при $\det D \neq 0$ не разрешимо в точке λ_0 из-за перекрытия спектров рассматриваемых операторов R_1 и $-R_2$. Поэтому $\lambda = \lambda_0$ – точка неаналитичности для R_2. Следовательно, набор Λ конечен.

Утверждение 2.5. Матрица $E(\lambda,T)$ имеет представление

$$E(\lambda,T) = S\exp(R_1T)R_1 + R_2\exp(-R_2T)S + +[\exp(-R_2T)S - S\exp(R_1T)](A + \lambda K) .(15)$$

Доказательство. Из (11) и (13) вытекает

$$P(\chi) = S(\chi - R_1)^{-1} - (\chi + R_2)^{-1}S ,$$

тогда вычисление контурного интеграла (7) дает (15).

Доказательство теоремы 2. Из (12) и (14) имеем

$$R_1(\lambda) = i(\lambda D)^{1/2} + O(1), \qquad R_2(\lambda) = i(\lambda D)^{1/2} + O(1), \tag{16}$$

$$S(\lambda) = \frac{1}{2i}\ (\lambda D)^{-1/2} + o(\lambda^{-1}) ,$$

здесь согласно сказанному выше в (14), выбирается такое значение $D^{1/2}$, для которого собственные значения положительны. Поскольку $|\Phi(\lambda)| \leq d!\|E(\lambda,T)\|^d$ и $\|\exp(R_1,T)\| < 1 + d^{-1}\left[\exp(Td\|R_1\|) - 1\right]$, где норма понимается в смысле максимума матричных элементов, то из (6) и (16) можно заключить, что $\alpha \leq 0.5$.

Следствие 1. Целая функция $\Phi(\lambda)$ представима в виде разложения Адамара

$$\Phi(\lambda) = \mathrm{const} \cdot \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \lambda/\mu_n) . \tag{17}$$

Рассмотрим теперь характеристическую функцию функционала $J_{\mathrm{T}}[z]$ от траекторий стационарного процесса, определяемого уравнением (1), $Q(\lambda) = \left\langle \exp\left(iJ_{\mathrm{T}}[z]\right)\right\rangle$, где $J_{\mathrm{T}}[z] = \int_0^T dt\ \ (z(t), z(t))$. Эта характеристическая функция связана с детерминантом Фредгольма ядра $K(\tau,\tau')$.

Теорема 3. Пусть λ_n – собственные числа ядра $K(\tau,\tau')$ с учетом их кратности, тогда $Q(\lambda)$ представима в виде сходящегося разложения

$$\Phi(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2i\lambda / \lambda_n)^{-1} . \qquad (18)$$

Доказательство. Согласно теореме Карунена-Лоэва [7] (в этой работе она сформулирована и доказана для случая вещественных процессов, обобщение её на комплексный случай не вызывает принципиальных затруднений) с вероятностью единица траектории стационарного гауссовского процесса $z(t)$ с корреляционной функцией $K(\tau,\tau')$ представимы в виде сходящегося в среднем квадратичном разложении Фурье, $z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \varphi_n(t)$. Здесь $\{\varphi_n(t)\}$ – собственные функции ядра $K(\tau,\tau')$, а случайные коэффициенты $\{z_n\}$ статистически независимы, при этом каждый из них распределен с плотностью

$$\rho_n(z_n) = \frac{\lambda_n}{2\pi} \exp\left(-\lambda_n \mid z_n \mid^2 / 2\right), \qquad (19)$$

и поскольку и $\ker K = 0$, то $\lambda_n < \infty$. Тогда с вероятностью единица $J_{\mathrm{T}}[z] = \sum_{n=1}^{\infty} | z_n |^2$. Усреднение экспоненты с помощью плотностей (19) дает $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2i\lambda / \lambda_n)^{-1}$ для всех $\lambda \le \lambda_n / 2i$. Сходимость бесконечного произведения следует из сходимости бесконечного произведения в (17) и того факта, что λ_n с точностью до кратности совпадает с μ_n, и $\kappa_{n'} \ge \kappa_n$.

Теорема 4. Для ядра $K(\tau,\tau')$ имеет место $\kappa_{n'} = \kappa_n$.

Замечание 2. Согласно замечанию 1 достаточно доказать, что $\kappa_{n'} \ge \kappa_n$. Кроме того, вместо гурвицевых матриц A достаточно рассмотреть диссипативные матрицы A, т.е. такие, что $\mathrm{Re}(f, Af) < 0$ для $f \in C^d$, поскольку преобразованием подобия, $A \to WAW^{-1}$, произвольную гурвицеву матрицу можно перевести в диссипативную. При этом, с одной стороны, преобразуя $D \to WDW^{+}$ и, следовательно,

$$H(\lambda) \to \begin{pmatrix} W^{-1} & 0 \\ 0 & W^{+} \end{pmatrix} H(\lambda) \begin{pmatrix} W^{-1} & 0 \\ 0 & W^{+} \end{pmatrix} ,$$

получим, что $E(\lambda,T) \to (W^{+})^{-1} E(\lambda,T) W^{+}$ и поэтому функция $\Phi(\lambda)$ остается неизменной. С другой стороны, такое преобразование подобия оставляет неизменной и функцию $Q(\lambda)$, так как в сочетании с преобразованием $C^d \to WC^d$ условная плотность распределения (2), определяющая вероятностную меру КОУ-процесса $z(t)$, переводится сама в себя.

Для доказательства теоремы 4 потребуются следующие ниже определения и вспомогательные утверждения.

Определение 3. Рассмотрим в линейном пространстве пар $[A, D]$ комплексных $(d \otimes d)$-матриц открытый конус Ω таких элементов, из которых A – диссипативна и $D^{+} = D > 0$. Тогда, с целью подчеркнуть зависимость рассматриваемых ниже объектов от элементов из Ω, введем обозначения $\Phi(\lambda) \equiv \Phi(\lambda \mid \omega)$, $Q(\lambda) \equiv Q(\lambda \mid \omega)$, $E(\lambda) \equiv E(\lambda \mid \omega)$.

Определение 4. Для каждого ω существует бесконечная упорядоченная по величине последовательность решений $\lambda_n(\omega)$ уравнения $\Phi(\lambda \mid \omega) = 0$. Пусть на открытом множестве $\Gamma_n \subset \Omega$ кратность решений $\lambda_n(\omega)$, $\omega \subset \Omega_n$ не меняется, тогда, применяя теорему о неявной функции к $\partial^{l-1}\Phi(\lambda \mid \omega)/\partial^{l-1}$, где l – кратность нуля $\lambda_n(\omega)$, построим в Γ_n l-кратно вырожденную функцию $\lambda_n(\omega)$, которая в силу бесконечной дифференцируемости $\Phi(\lambda \mid \omega) = 0$ по λ и по ω также является бесконечно дифференцируемой.

Утверждение 4.1. Пусть матрица M при некотором λ удовлетворяет уравнениям

$$ME(\lambda) \equiv E(\lambda \mid \omega) = 0, \qquad \mathrm{Sp}[M \quad dE(\lambda \mid \omega)] = 0, \tag{20}$$

где $d(.)$ – дифференциал в Ω. Тогда при этом $\lambda M = 0$.

Доказательство. Обозначив через ∇ производную Фреше, имеем $dE = (\nabla, \partial\Omega)_\Omega$, где скалярное произведение в пространстве пар

$$([A_1, D_1],\ [A_2, D_2])_\Omega = \mathrm{Sp}(A_1 A_2^+) + \mathrm{Sp}(D_1 D_2^+).$$

Для каждого λ возьмем в качестве $\partial\omega = [dA, dD]$ такие dA и dD, что $d(AA^+) = \lambda \quad dD$, $dA^+ = dA$, и используем обозначение для такого дифференциала L =L $(\lambda \mid \omega)$. Он является матрицей в C^d. При указанных условиях $dR_1 = dR_2 = dS = 0$ и поэтому L $= L(dA + \lambda dK)$, где

$$L = \exp(-R_2 T)S - S\exp(R_1 T). \tag{21}$$

Из равенства $AK + KA^+ = -D$ в силу диссипативности A имеем

$$dK = -\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty d\tau \quad \exp(A\tau) \quad [dA \quad (A^+ + \lambda K) + \lambda K \quad dA] \quad \exp(A^+\tau)$$

и после преобразований найдем

$$\mathrm{Sp}(ML \cdot (dA + \lambda K)) = \mathrm{Sp}((2ML) - \lambda KN - \lambda NK) \quad dA),$$

где $N = \int_0^\infty d\tau \exp(A^+\tau) ML \exp(A^+\tau)$. Ввиду произвольности dA и $dA^+ = dA$ отсюда получим равенства $2ML = \lambda(KN + NK)$ и $A^+N + NA = ML$, которые вместе могут быть выполнены лишь при $N = 0$, поскольку $(2A^+ - \lambda K)N + N(2A^+ - \lambda K) = 0$ и для $K > 0$ матрица $(2A^+ - \lambda K)$ диссипативна. Из условия $N = 0$ следует $ML = 0$, откуда, в свою очередь, из (20) вытекает $M(SR_1 \exp(R_1 T) + \exp(-R_2 T)R_2 S) = 0$ и, наконец, $M = 0$.

Утверждение 4.2. Пусть существуют λ и ω такие, что для некоторого $l < d$

$$d^k \Phi(\lambda \mid \omega) = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, l-1, \tag{22}$$

тогда эти l равенств несовместимы с условием $\mathrm{rank} \quad E(\lambda \mid \omega) = d - l$.

Доказательство. Из $\Phi(\lambda\mid\omega)=\det E(\lambda\mid\omega)$ и условия $\operatorname{rank}\ E(\lambda\mid\omega)=d-l$ следует, после замены $dE\to \mathrm{L}$,

$$d^l\Phi(\lambda\mid\omega)=\sum_{i_1,\dots,i_l,\ j_1,\dots,j_l}F(i_l,\dots,i_1,\ j_l,\dots j_1)\ \mathrm{L}_{\ i_1j_1}\cdot\ldots\cdot\mathrm{L}_{\ i_lj_l}\,, \tag{23}$$

где $F(i_1,\dots,i_l,\ j_1,\dots j_l)=(-1)^{\Sigma}\det E(i_1,\dots,i_l,\ j_1,\dots j_l)$,
$\Sigma=i_1+\ldots+i_l+j_1+\ldots+j_l$, а $E(i_1,\dots,i_l,j_1,\dots,j_l)$ – матрица, получающаяся из $E(\lambda\mid\omega)$ вычеркиванием строк с номерами $i_1,\dots,i_l$ и строк с номерами $j_1,\dots,j_l$. Суммирование в (23) проводится независимо по всем указанным индексам, полагая при этом $F=0$, если в наборах $(i_1,\dots,i_l)$ и $(j_1,\dots,j_l)$ встречаются повторяющиеся индексы.

Введем теперь для $k=1,\dots,l$ последовательность матриц

$$F^{(k)}_{j_ki_k}(i_1,\dots,i_{k-1};j_1,\dots,j_{k-1})=\sum_{i_{k+1},\dots,i_l,\ j_{k+1},\dots,j_l}\mathrm{L}_{\ i_lj_l}\cdot\ldots\cdot\mathrm{L}_{\ i_{k+1}j_{k+1}}\,.$$

Из разложения минора порядка $(d-l+1)$ матрицы $E(\lambda\mid\omega)$ по минорам порядка $(d-l)$ и на основании определения матриц $F^{(k)}_{j_1,\dots,j_k}(.,.)$ следует тождество

$$\sum_{i_{k+1}}F^{(k)}_{j_k\ i_k}(i_1,\dots,i_{k-1};j_1,\dots,j_{k-1})E_{i_k\ j_k}(\lambda\mid\omega)=0\,, \tag{24}$$

которое означает, что при $k=1,\dots,l$

$$F^{(k)}E(\lambda\mid\omega)=0\,.$$

Учтем теперь, что если в (22) $l>1$, то из $d\Phi(\lambda\mid\omega)=0$ следует $\mathrm{Sp}F^{(1)}\,\mathrm{L}.=0$. Тогда на основании утверждения 4.1 $F^{(1)}=0$. Продолжая этот рекуррентный процесс спуска с использованием (24), придем, наконец, к равенству

$$F^{(1)}_{j_l\ i_l}(i_1,\dots,i_{l-1};j_1,\dots,j_{l-1})=F(i_l,\dots,i_1;j_l,\dots,j_1)=0\,,$$

которое и доказывает, что $\operatorname{rank}\ E(\lambda\mid\omega)<d-l$.

Доказательство теоремы 4. Пусть существует открытое множество $Z\subset\Omega$, такое, что при $\omega\in Z$ имеется по крайней мере одно l-кратно вырожденное собственное значение $\lambda(\omega)\equiv\lambda_n(\omega)$ и, следовательно, функция $\lambda(\omega)$ l-кратно вырождена. Тогда при $\omega\in Z$ выполняется равенство $\Phi(\lambda\mid\omega)=(\lambda-\lambda(\omega))^l\Phi'(\lambda\mid\omega)$ и поэтому при $\lambda=\lambda(\omega)$ справедливо (22). Если при этом $\operatorname{rank}\ E(\lambda\mid\omega)\le d-l$, то, согласно утверждению 4.2 это невозможно, т.е. Z не является открытым множеством. Таким образом, $\kappa_n=\kappa_{n'}$ почти всюду в Ω, поскольку, если бы множества $Z_1\subset\Omega$ с $l>1$, определяемые согласно условию $Z_1=\{\omega:$ существует $\lambda(\omega)$, для которой выполняется (22) $\lambda=\lambda(\omega)$ и $d^l\Phi|_{\lambda=\lambda(\omega)}\neq 0\}$, имели топологическую размерность, совпадающую с топологической размерностью Ω, то они были бы открыты.

Рассмотрим теперь функцию $\Pi(\lambda \mid \omega) = \Phi(\lambda \mid \omega) \cdot Q(i\lambda/2 \mid \omega)$. Согласно (18) эта функция почти всюду равна константе. Используя непрерывность $\Phi(\lambda \mid \omega)$ и $Q(\lambda \mid \omega)$ от ω, заключаем, что Π =const. Поэтому из равенства $\mathrm{const} \cdot \mathrm{Q}(\mathrm{i}\lambda/2|\omega) = \Phi(\lambda|\omega)$ имеем, что $\kappa_n = \kappa_{n'}$ почти всюду на Ω.

Следствие 2. Почти всюду на Ω κ_n =1.

Следствие 3. Функция $\Phi(\lambda \mid \omega)$ отличается от детерминанта Фредгольма ядра $K(\tau,\tau')$ постоянным множителем.

Следствие 4. Пусть $\varepsilon(\lambda)$, $k = 1,2,\ldots,d$ – спектр матрицы $E(\lambda \mid \omega)$. Так как согласно теореме 4 порядок нуля λ_0 функции $\Phi(\lambda \mid \omega) = \prod_k \varepsilon_k(\lambda)$ равняется числу тех функций $\varepsilon_k(\lambda)$, для которых $\varepsilon_k(\lambda_0) = 0$, то $\varepsilon_k(\lambda)$ имеет только простые нули.

Теорема 5. Если $\det D \neq 0$ и спектр матрицы D простой, то спектр $\{\lambda_n\}$ ядра $K(\tau,\tau')$ асимптотически при $\lambda_n \to \infty$ можно представить в виде объединения d серий $\{\lambda_{mk}\}$, $k = 1,\ldots,d$ с учетом кратности, для которых при $m \to \infty$

$$\lambda_{mk}^{1/2} = \delta_k^{-1/2}\left(\frac{\pi m}{T}\right) + O(m^{-1/2}) . \qquad (25)$$

Утверждение 5.1. Пусть $f(\lambda)$ и $f^{(0)}(\lambda)$ – непрерывно дифференцируемые функции и $f(\lambda) = f^{(0)}(\lambda) + O(\lambda^{-1/2})$ при $\lambda \to \infty$. Пусть, кроме того, эти функции удовлетворяют следующим условиям: 1) каждая из них имеет бесконечный набор, образованный неограниченно возрастающей последовательностью простых нулей; 2) расстояние r_k, $k = 1,2,\ldots$, между двумя последовательными нулями каждой из них удовлетворяет ограничению $r_k \geq a > 0$ для некоторого a; 3) существует $\alpha > 0$ такая, что локальные минимумы и максимумы каждой из них на промежутке между двумя последовательными нулями по модулю превосходит α; 4) каждая из них для достаточно больших k удовлетворяет условию $| f'(\mu_k) | \geq b > 0$, $| f^{(0)}{}'(\mu_k) | \geq b > 0$ для некоторого числа b.

Тогда существует такое целое k, что для наборов нулей $\{\mu_m\}$ функции $f(\lambda)$ и $\{\mu_m^{(0)}\}$ функции $f^{(0)}(\lambda)$ справедливо соотношение

$$\mu_{m+k} = \mu^{(o)} + O\left(\left[\mu_m^{(o)}\right]^{-1/2}\right).$$

Доказательство. По выполнении указанных в утверждении условий 3), 4) имеем при достаточно больших m неравенство

$$(b-\beta) \mid \mu_m - \mu_{m'}^{(o)} \mid < \mid f^{(o)}(\mu_m) - f^{(o)}()\mu_{m'}^{(o)} \mid < const \cdot \mu_m^{-1/2} , \qquad \beta < b ,$$

тогда при таких m для μ_m всегда найдется единственный нуль $\mu_{m'}^{(0)}$, наиболее близко к нему расположенный, не являющийся ближайшим в силу 2) для другого нуля функции $f(\lambda)$. Таким образом, при больших m существует взаимно однозначное соответствие между нулями μ_0 и $\mu_0^{(0)}$, при этом $\mu_{m'} = \mu_m + O\left((\mu_m^{(0)})^{-1/2}\right)$. Подобрав конечное целое k, устанавливающее указанное соответствие, получим утверждение 5.1.

Утверждение 5.2. Имеет место асимптотическое равенство

$$\lambda^{-1/2}E(\lambda,T) = \lambda^{-1/2}E_0(\lambda,T) + O(\lambda^{-1/2}), \tag{26}$$

$$E_0(\lambda,T) = -\sqrt{\lambda}D^{-1/2}\left[\sum_{k=1}^{d}\exp(i \quad \operatorname{Im} A_{kk} \quad T)\sin(\sqrt{\lambda\delta_k}T) \quad I_k\right]K,$$

где I_k – собственные ортопроекторы матрицы D, $\Delta^{\pm}(\lambda) = \lambda^{1/2}\delta_k^{1/2} \pm \operatorname{Im} A_{kk}$, A_{kk} – диагональные элементы в базисе собственных векторов матрицы D.

Доказательство. В силу простоты спектра матрицы D и (16) матрицы $\lambda^{-1/2}R_1(\lambda)$ и $\lambda^{-1/2}R_2(\lambda)$ имеют при достаточно больших λ простой спектр. Следовательно,

$$R_1(\lambda) = \sqrt{\lambda}\sum_{k=1}^{d}\vartheta_k(\lambda)I_k(\lambda), \tag{27}$$

$$R_1(\lambda) - S^{-1} = \sqrt{\lambda}\sum_{k=1}^{d}\vartheta_{k'}(\lambda)I_{k'}(\lambda) = -S^{-1}R_2(\lambda)S,$$

где $I_k(\lambda)$ и $I_{k'}(\lambda)$ – одномерные собственные косые проекторы операторов $R_1(\lambda)$ и $R_1(\lambda) - S^{-1}$. Далее, в силу простоты спектра матрицы D справедливо [8]:

$$I_k(\lambda) = I_k + O(\lambda^{-1/2}), \qquad I_{k'}(\lambda) = I_k + O(\lambda^{-1/2}). \tag{28}$$

Заметим теперь, что согласно (15)

$$\lambda^{-1/2}E(\lambda,T) = \sqrt{\lambda}[S\exp(-R_2T) - \exp(R_1T)S]K =$$
$$= -\sqrt{\lambda}S[\exp(R_1T) - \exp((R_1 - S^{-1})T)]K. \tag{29}$$

Из уравнений (12), (13) находим после простых вычислений

$$R_1 = i\sqrt{\lambda}D^{1/2} + R + O(\lambda^{-1/2}),$$
$$R_1 - S^{-1} = -i\sqrt{\lambda}D^{1/2} + R + O(\lambda^{-1/2}), \tag{30}$$
$$RD^{1/2} + D^{1/2}R = D^{1/2}(A - A^{+}).$$

Тогда для спектров матриц R_1 и $R_1 - S^{-1}$ стандартным методом [8] получим асимптотические формулы

$$\theta_k(\lambda) = i\lambda^{-1/2}\Delta_k^{+}(\lambda) + O(\lambda^{-1}), \quad \theta_{k'}(\lambda) = -i\lambda^{-1/2}\Delta_k^{-}(\lambda) + O(\lambda^{-1}), \tag{31}$$

при этом учтено согласно (30) $R_{kk} = i\operatorname{Im} A_{kk}$. Из (27)-(30) следует

Утверждение 5.2. Имеет место асимптотическое равенство

$$\lambda^{-1/2}E(\lambda,T) = \lambda^{-1/2}E_0(\lambda,T) + O\left(\lambda^{-1/2}\right), \tag{26}$$

$$E_0(\lambda,T) = -\sqrt{\lambda}D^{-1/2}\left[\sum_{k=1}^{d}\exp\left(i \quad \mathrm{Im}\,A_{kk}T\right) \quad \sin\left(\sqrt{\lambda\delta_k}T\right) \quad I_k\right]K\,,$$

где I_k – собственные ортопроекторы матрицы D, A_{kk} – диагональные элементы в базисе собственных векторов матрицы D, $\Delta^{\pm}(\lambda) = \lambda^{1/2}\Delta_k^{1/2} \pm \mathrm{Im}\,A_{kk}$.

Доказательство теоремы 5. Решение уравнения $\det E(\lambda,T) = \prod_k \varepsilon_k(\lambda) = 0$ распадается на решения d уравнений $\varepsilon_k(\lambda) = 0$. Каждое из этих уравнений имеет бесконечный набор простых нулей. В силу (26) $\varepsilon_k(\lambda) = \varepsilon_k^{(0)} + O(\lambda^{-1/2})$. Заметим, что функция $\sin(\sqrt{\delta_k\lambda}T)$ отвечает условиям 1) – 4) утверждения 5.1. Тогда этим же условиям удовлетворяют функции $\varepsilon_k^{(0)}(\lambda)$, которые связаны с набором функций $\sin(\sqrt{\delta_k\lambda}T)$ линейным преобразованием, не зависящим от λ, и поэтому квазипериодически зависит от $\sqrt{\lambda}$. В связи с этим выполняется условие 2). Если бы, например, вопреки условию 2) функция $\varepsilon_k^{(0)}(\lambda)$ обладала бесконечной подпоследовательностью сколь угодно близко расположенных друг к другу пар нулей, то эта функция имела бы такую подпоследовательность на интервале в один почти период, что противоречит свойству квазипериодичности. По этой же причине выполняются условия 3), 4). Наконец, функция $\varepsilon_k^{(0)}(\lambda)$ обладает только простыми нулями, так как для любого k каждому нулю λ' функции $\varepsilon_k^{(0)}(\lambda)$ отвечает нулевое собственное значение матрицы $E(\lambda',T)$ с собственным вектором $g_k(\lambda')$. Вектор $Kg_k(\lambda')$ согласно (26), является собственным вектором с нулевым собственным значением матрицы $\sum_k \delta_k^{-1/2}\sin(\sqrt{\delta_k\lambda}T) \quad I_k$, а функция $\sin(\sqrt{\delta_k\lambda}T) \quad I_k$ имеет только простые нули. Таким образом, для каждого k функции $\varepsilon_k(\lambda)$ и $\varepsilon_k^{(0)}(\lambda)$ удовлетворяют всем условиям утверждения 5.1. Тогда согласно Уутверждению 5.1, решения $\{\lambda_{mk}\}$ серии уравнений $\varepsilon_k(\lambda) = 0$ связаны с решениями $\{\lambda_{mk}^{(0)}\}$ серии уравнений $\varepsilon_k^{(0)}(\lambda) = 0$ асимптотическим равенством $\lambda_{m'k} = \lambda_{m'k}^{(0)} + O((\lambda_{mk}^{(0)})^{1/2})$. На основании (26) совокупность решений серии уравнений $\varepsilon_k^{(0)}(\lambda) = 0$ сводится к решению серии уравнений $\sin(\sqrt{\delta_k\lambda}T) = 0$. Отсюда вытекает формула (25).

ВЫВОДЫ

Поведение систем принятия решений и автоматического управления и особенно свойство их устойчивости определяются расположением спектра собственных чисел матрицы системы и связанной с ней корреляционной матрицы рассматриваемых случайных процессов. В работе развит метод, дающий возможность находить указанную конфигурацию собственных чисел. Построены аналитические выражения, описывающие конфигурацию нулей соответствующего дисперсионного уравнения, связанного с корреляционной матрицей рассматриваемых случайных процессов.

SUMMARY

SPECTRAL PROPERTIES OF THE CORRELATION OPERATOR OF THE MULTIDIMENSIONAL ORNSTEIN-UHLENBECK'S PROCESS

Y.P. Virchenko, A.S. Mazmanishvili*
SSI «Institute for Single Crystals», NAS of Ukraine, Kharkov
**Sumy State University,*

The results, which describe the behavior of that part of the spectrum of the correlation operator, which determines the stability of the synthesized system, and construct analytical expressions that describe the configuration of the zeros of the corresponding dispersion equation connected with the correlation matrix of these random processes

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Далецкий Ю.Л. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах / Ю.Л. Далецкий, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
2. Гихман И.Е. Теория случайных процессов/ И.Е. Гихман, А.В. Скороход. – М.: Наука, 1975. – 496 с.
3. Казаков И.Е. Анализ стохастических систем в пространстве состояний/ И.Е. Казаков, С.В. Мальчиков. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
4. Siegert A.J.F. A systematic approach to a class of problems in the theory of noise and other random phenomena / Siegert A.J.F. // Trans. IRE, IT-3. - March 1957. - P. 38--44,.
5. Хелстром К. Квантовая теория проверки гипотез и оценивание.– М.: Мир, 1979. –344 с.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
7. Лоэв М. Теория вероятностей.– М.: Издательство иностранной литературы, 1962.– 719 с.
8. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 739 с.

Поступила в редакцию 28 июля 2009 г.