УДК 519.218

ЙМОВІРНІСНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТА ІМІТАЦІЯ НА ЕОМ ЦИКЛІЧНОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ ІЗ ЦИКЛІЧНИМИ РЕАЛІЗАЦІЯМИ НА БАЗІ МУЛЬТИПЛІКАТИВНОЇ МОДЕЛІ

Н.Р. Дем'янчук,
С.А. Лупенко, *доцент,*
Тернопільський національний технічний університет ім.і Івана Пулюя,
м. Тернопіль

У роботі досліджено ймовірнісні характеристики підкласу циклічних випадкових процесів із циклічними реалізаціями, що утворені шляхом мультиплікативного поєднання детермінованої циклічної функції та стаціонарного випадкового процесу. Зокрема, встановлено, у яких саме ймовірнісних характеристиках цих випадкових процесів спостерігається циклічна структура. Проведено імітацію таких циклічних випадкових процесів на ЕОМ.
Ключові слова: *циклічний випадковий процес із циклічними реалізаціями, мультиплікативна модель, ймовірнісні характеристики, імітаційне моделювання.*

В работе исследованы вероятностные характеристики подкласса циклических случайных процессов с циклическими реализациями, образованные путем мультипликативного сочетания детерминированной циклической функции и стационарного случайного процесса. В частности, установлено, в каких именно вероятностных характеристиках этих случайных процессов имеет место циклическая структура. Проведено имитацию таких циклических случайных процессов на ЭВМ.
Ключевые слова: *циклический случайный процесс с циклическими реализациями, мультипликативная модель, вероятностные характеристики, имитационное моделирование.*

ВСТУП

У задачах проектування та створення багатьох інформаційних систем аналізу, діагностики та прогнозу за сигналами із циклічною просторово-часовою структурою актуальним є розроблення адекватних їм математичних та комп'ютерних моделей. Математичним моделям циклічних явищ та сигналів присвячено багато наукових праць. У рамках детермінованого підходу до математичного моделювання та обробки циклічних сигналів вагомі результати досягнуто із застосуванням періодичної, майже періодичної, квазігармонічної функцій, квазімеандру та методів спектрального аналізу, а також шляхом моделювання механізмів формування циклічних сигналів із використанням теорії диференціальних рівнянь. У рамках теоретико-ймовірнісного підходу застосовуються стаціонарні випадкові процеси, періодично-корельовані та майже періодично-корельовані випадкові процеси, періодичні марковські випадкові процеси та ланцюги, лінійні періодичні випадкові процеси, процеси із незалежними періодичними приростами та періодичні білі шуми [1-5].

У роботах [6, 7] розроблено математичні моделі циклічних сигналів у вигляді циклічних функціональних відношень, зокрема циклічного випадкового процесу та вектора циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів, які враховують циклічність, стохастичність, мінливість та спільність ритму досліджуваних сигналів.

Ця робота присвячена дослідженню ймовірнісних характеристик циклічних випадкових процесів із циклічними реалізаціями, які утворені шляхом мультиплікативного поєднання детермінованої циклічної функції та випадкової величини, а також питанню імітаційного моделювання цього підкласу циклічних випадкових процесів на ЕОМ.

ОСНОВНИЙ РОЗДІЛ

Однією із найпростіших математичних моделей сигналів, які характеризуються стохастичністю та циклічністю їх структури, є мультиплікативне поєднання детермінованої циклічної функції $f(t)=f(t+T(t,n))$ та випадкової величини $A(\omega)$, а саме

$$\xi(\omega,t)=A(\omega)\cdot f(t),\ t\in\mathbf{R},\ \omega\in\mathbf{\Omega}. \qquad (1)$$

Розглянемо ймовірнісні характеристики випадкового процесу (1). Так, математичне сподівання випадкового процесу (1) описується виразом

$$m_{\xi}(t)=f(t)\cdot m_A=f(t+T(t,n))\cdot m_A=m_{\xi}(t+T(t,n)), \qquad (2)$$

де m_A - математичне сподівання випадкової величини $A(\omega)$. Тобто математичне сподівання випадкового процесу (1) є циклічною числовою функцією із функцією ритму $T(t,n)$, яка згідно з роботою [4] задовольняє такі умови.

1. a) $T(t,n) > 0$, якщо $n > 0$ $(T(t,1) < \infty)$;

b) $T(t,n) = 0$, якщо n=0;

c) $T(t,n) < 0$, якщо $n < 0$, $t \in \mathbf{R}$. (3)

2. Для будь-яких $t_1 \in \mathbf{R}$ та $t_2 \in \mathbf{R}$, для яких $t_1<t_2$, для функції $T(t,n)$ виконується строга нерівність

$$T(t_1,n) + t_1 < T(t_2,n) + t_2, \forall n \in \mathbf{Z}. \qquad (4)$$

3. Функція $T(t,n)$ є найменшою за модулем $\left|T(t,n)\right| \le \left|T_\gamma(t,n)\right|$ серед усіх таких функцій $T_\gamma(t,n)$, $\gamma \in \Gamma(+)$, які задовольняють умови (3) та (4).

Тобто математичне сподівання процесу (1) є циклічною функцією.

Дисперсія процесу (1) визначається за формулою

$$D_\xi(t) = f^2(t) \cdot D_A = f^2(t + T(t,n)) \cdot D_A = D_\xi(t + T(t,n)), \qquad (5)$$

де D_A - дисперсія випадкової величини $A(\omega)$. Тобто дисперсія процесу (1) є циклічною функцією.

Одновимірні функція розподілу $F_\xi(x,t)$ та щільність розподілу $p_\xi(x,t)$ визначаються згідно з такими виразами

$$F_\xi(x,t) = F_A(x \cdot f(t)) = F_A(x \cdot f(t + T(t,n))) = F_\xi(x, t + T(t,n)), x,t \in \mathbf{R}, \qquad (6)$$

$$p_\xi(x,t) = p_A(x \cdot f(t)) = p_A(x \cdot f(t + T(t,n))) = p_\xi(x, t + T(t,n)), x,t \in \mathbf{R}, \qquad (7)$$

де $F_A(x)$, $p_A(x)$ - функція розподілу та щільність розподілу випадкової величини $A(\omega)$. Отже, одновимірні функція розподілу та щільність розподілу випадкового процесу (1) є циклічними за аргументом t.

Коваріаційна функція випадкового процесу (1):

$$\begin{gathered} C_\xi(t_1,t_2) = f(t_1) \cdot f(t_2) \cdot a_A^2 = f(t_1 + T(t_1,n)) \cdot f(t_2 + T(t_2,n)) \cdot a_A^2 = \\ = C_\xi(t_1 + T(t_1,n), t_2 + T(t_2,n)). \end{gathered} \qquad (8)$$

У формулі (8) a_A^2 є другим початковим моментом випадкової величини $A(\omega)$.

Кореляційна функція випадкового процесу (1):

$$\begin{gathered} R_\xi(t_1,t_2) = f(t_1) \cdot f(t_2) \cdot D_A = \\ = f(t_1 + T(t_1,n)) \cdot f(t_2 + T(t_2,n)) \cdot D_A = C_\xi(t_1 + T(t_1,n), t_2 + T(t_2,n)). \end{gathered} \qquad (9)$$

Отже, випадковий процес (1) є випадковим процесом із циклічними за сукупністю аргументів коваріаційною та кореляційною функціями.

Розглянемо приклади імітації циклічних випадкових процесів із циклічними реалізаціями, які базуються на мультиплікативній моделі (1) та утворені шляхом дії оператора перетворення шкали [8] на періодичні випадкові процеси із періодичними реалізаціями [9].

На рис. 1 подано графіки декількох реалізацій 2π-періодичних випадкових процесів

$$\xi_{2\pi}(\omega,t) = A(\omega) \cdot \cos(t), t \in [0,\infty)$$

та
$$\tilde{\xi}_{2\pi}(\omega,t) = A(\omega) \cdot (\sin(t) + 0.5 \cdot \cos(2 \cdot t)), t \in [0,\infty)$$

із 2π-періодичними реалізаціями. Відзначимо, що дані випадкові процеси та всі їх реалізації мають однаковий стабільний ритм, оскільки описуються однаковою функцією ритму $T(t,1) = 2 \cdot \pi$, тому вони є строго ритмічно пов'язаними.

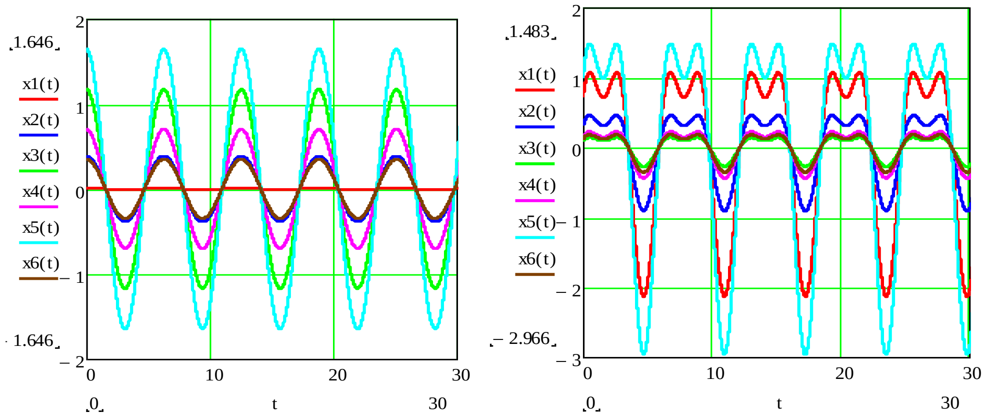


Рисунок 1 - Графіки реалізацій періодичних випадкових процесів $\xi_{2\pi}(\omega,t)$ та $\tilde{\xi}_{2\pi}(\omega,t)$ із періодичними реалізаціями

На рис. 2-5 подано графіки математичних сподівань, дисперсій, коваріаційних та кореляційних функцій періодичних випадкових процесів $\xi_{2\pi}(\omega,t)$ та $\tilde{\xi}_{2\pi}(\omega,t)$ із періодичними реалізаціями.

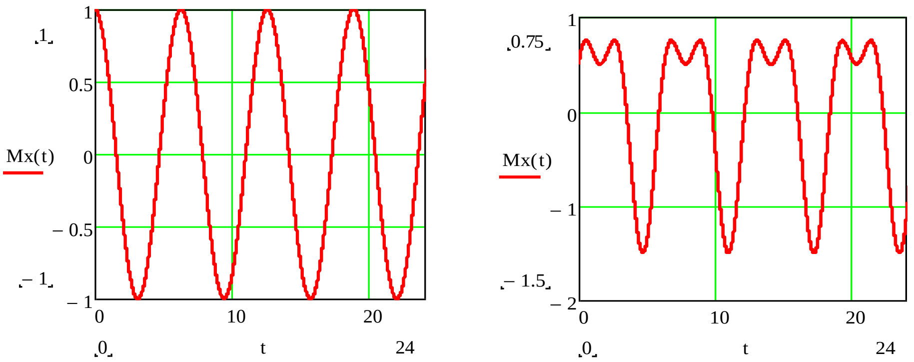


Рисунок 2 - Графіки математичних сподівань періодичних випадкових процесів $\xi_{2\pi}(\omega,t)$ та $\tilde{\xi}_{2\pi}(\omega,t)$

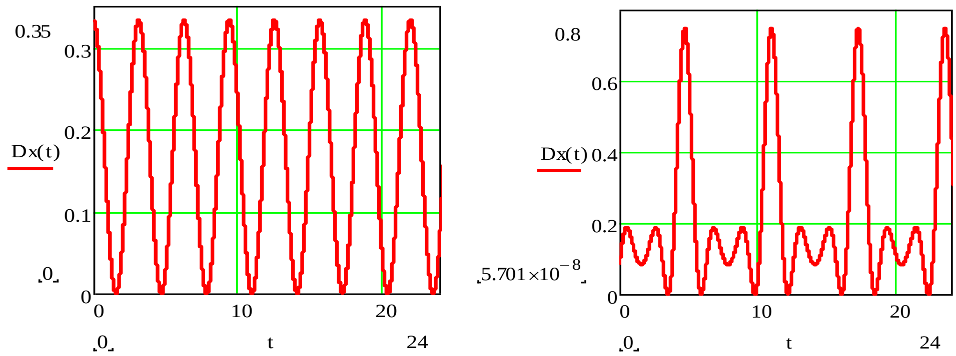


Рисунок 3 - Графіки дисперсій періодичних випадкових процесів
$\xi_{2\pi}(\omega,t)$ та $\tilde{\xi}_{2\pi}(\omega,t)$

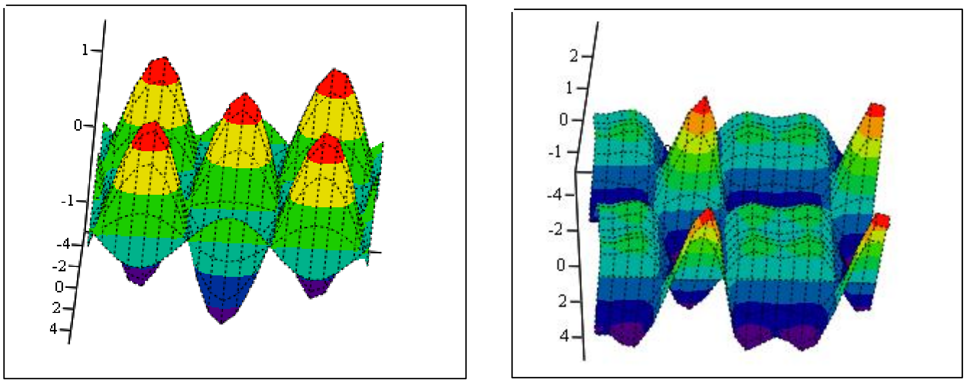
На рис. 6 подано графіки взаємної коваріаційної та кореляційної функцій періодичних випадкових процесів $\xi_{2\pi}(\omega,t)$ та $\tilde{\xi}_{2\pi}(\omega,t)$ із періодичними реалізаціями.

На рис. 7 подано графік функції перетворення шкали $y(t)=t^2+t, t\in[0,\infty)$ випадкових процесів $\xi_{2\pi}(\omega,t)$ та $\tilde{\xi}_{2\pi}(\omega,t)$.

На рис. 8 подано графік реалізацій циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів $\xi(\omega,t)$ та $\tilde{\xi}(\omega,t)$ із циклічними ритмічно пов'язаними реалізаціями, які отримані шляхом дії оператора перетворення шкали із функцією перетворення шкали $y(t)=t^2+t, t\in[0,\infty)$ на процеси $\xi_{2\pi}(\omega,t)$ та $\tilde{\xi}_{2\pi}(\omega,t)$, а саме:

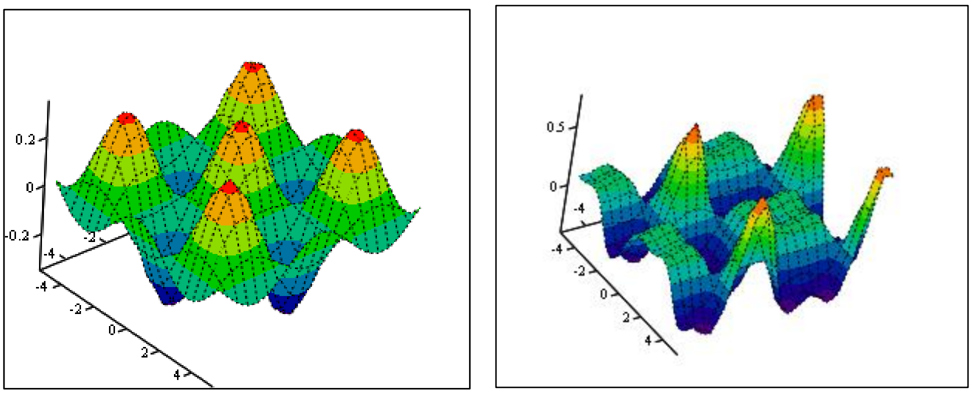
$$\xi(\omega,t) = \xi_{2\pi}(\omega, y(t)) = A(\omega)\cdot\cos(t^2+t),\ t\in[0,\infty),\qquad (10)$$

$$\tilde{\xi}(\omega,t) = \tilde{\xi}_{2\pi}(\omega, y(t)) = A(\omega)\cdot\left(\sin(t^2+t) + 0.5\cdot\cos(2\cdot t^2 + 2\cdot t)\right),\ t\in[0,\infty).\qquad (11)$$



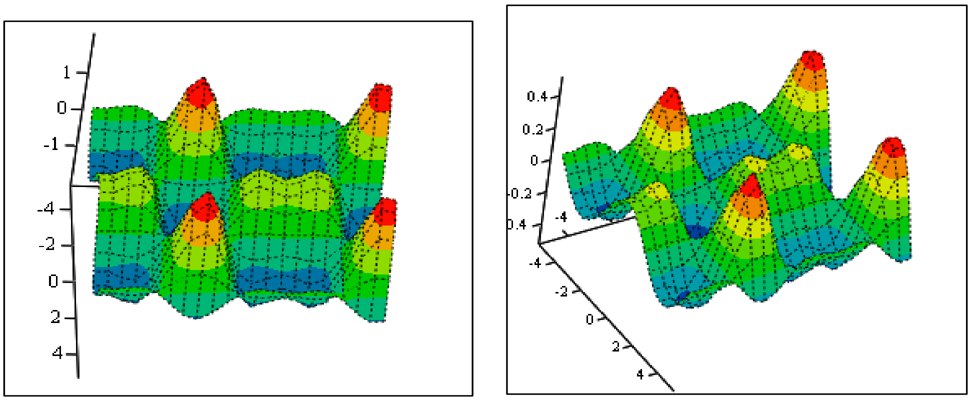
Cx Cx

Рисунок 4 - Графіки коваріаційних функцій періодичних випадкових процесів $\xi_{2\pi}(\omega,t)$ *та* $\tilde{\xi}_{2\pi}(\omega,t)$



Rx Rx

Рисунок 5 - Графіки кореляційних функцій періодичних випадкових процесів $\xi_{2\pi}(\omega,t)$ *та* $\tilde{\xi}_{2\pi}(\omega,t)$



Cxy Rxy

Рисунок 6 - Графіки взаємних коваріаційної та кореляційної функцій періодичних випадкових процесів $\xi_{2\pi}(\omega,t)$ *та* $\tilde{\xi}_{2\pi}(\omega,t)$

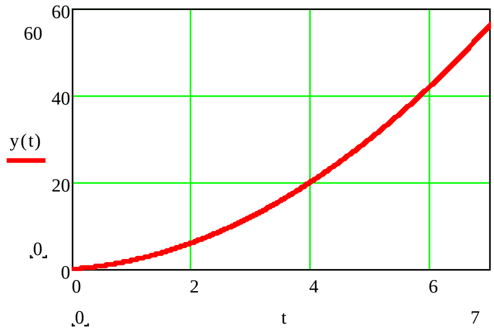


Рисунок 7 - Графік функції перетворення шкали

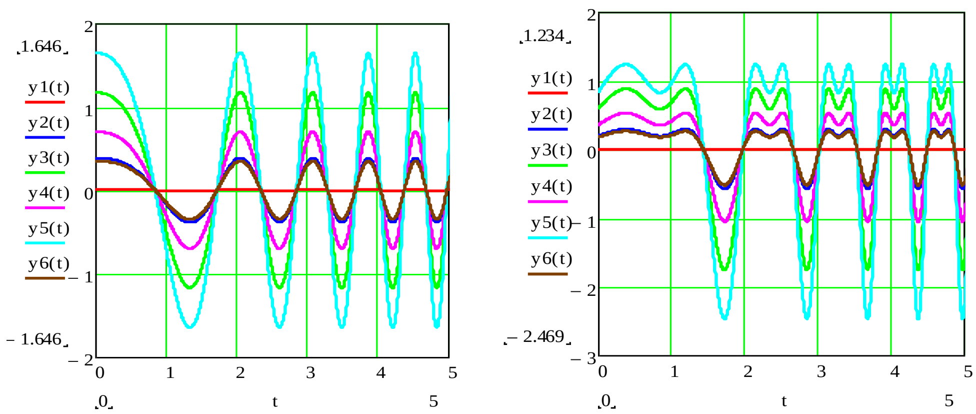


Рисунок 8 - Графіки реалізацій циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів $\xi(\omega,t)$ та $\tilde{\xi}(\omega,t)$ із циклічними ритмічно пов'язаними реалізаціями

На рис. 9 подано графік функції ритму $T(t,1)=\frac{2\cdot t+1}{4}\cdot\sqrt{4\cdot t^2+4\cdot t+4\cdot\pi+1}, t\in[0,\infty)$ та миттєвої кутової частоти $\omega(t)=y'(t)=2\cdot t+1, t\in[0,\infty)$ циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів $\xi(\omega,t)$ та $\tilde{\xi}(\omega,t)$ із циклічними реалізаціями.

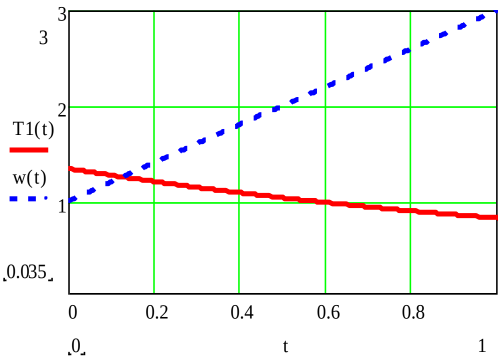


Рисунок 9 - Графік функції ритму $T(t,1)$ та миттєвої кутової частоти $\omega(t)$ циклічних випадкових процесів $\xi(\omega,t)$ та $\tilde{\xi}(\omega,t)$

На рис. 10-17 подано графіки математичних сподівань, дисперсій, перерізів коваріаційних та кореляційних функцій циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів $\xi(\omega,t)$ та $\tilde{\xi}(\omega,t)$ із циклічними реалізаціями.

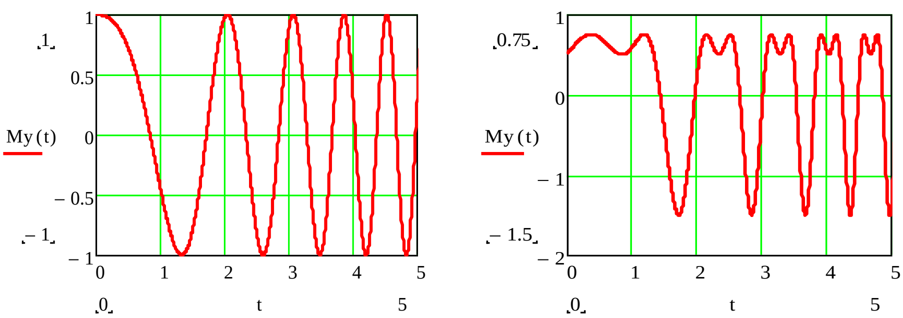


Рисунок 10 - Графіки математичних сподівань циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів $\xi(\omega,t)$ та $\tilde{\xi}(\omega,t)$

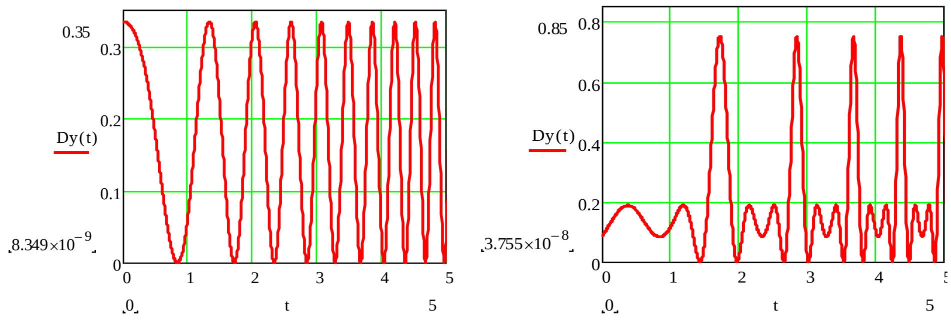


Рисунок 11 - Графіки дисперсій циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів $\xi(\omega,t)$ та $\tilde{\xi}(\omega,t)$

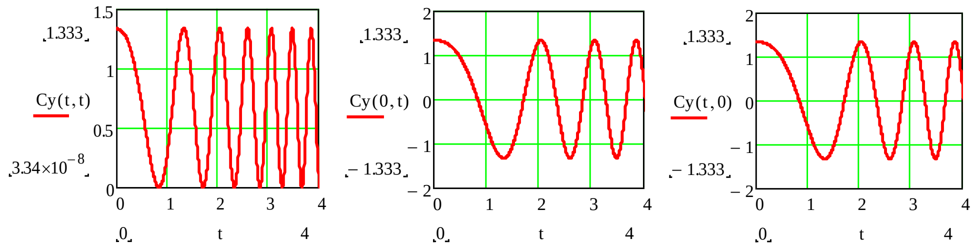


Рисунок 12 - Графіки перерізів коваріаційної функції циклічного випадкового процесу $\xi(\omega,t)$ із циклічними реалізаціями

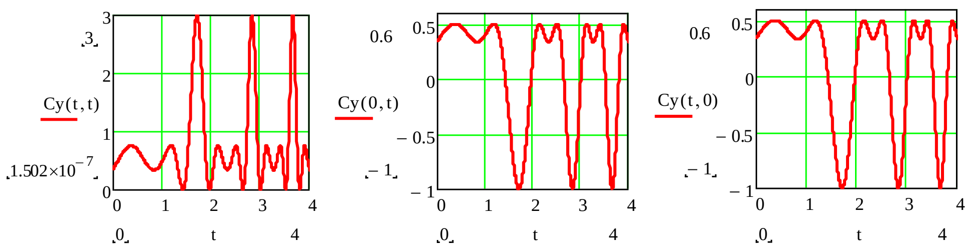


Рисунок 13 - Графіки перерізів коваріаційної функції циклічного випадкового процесу $\tilde{\xi}(\omega,t)$ із циклічними реалізаціями

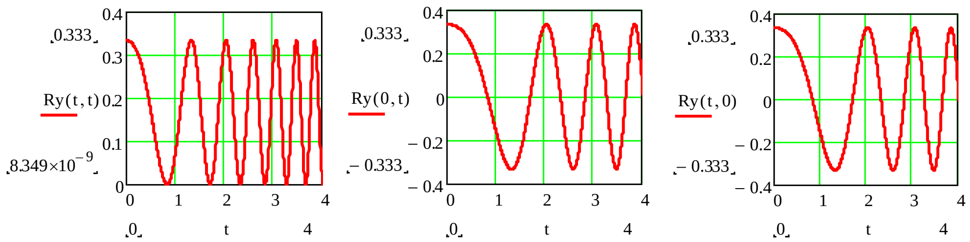


Рисунок 14 - Графіки перерізів кореляційної функції циклічного випадкового процесу $\xi(\omega,t)$ із циклічними реалізаціями

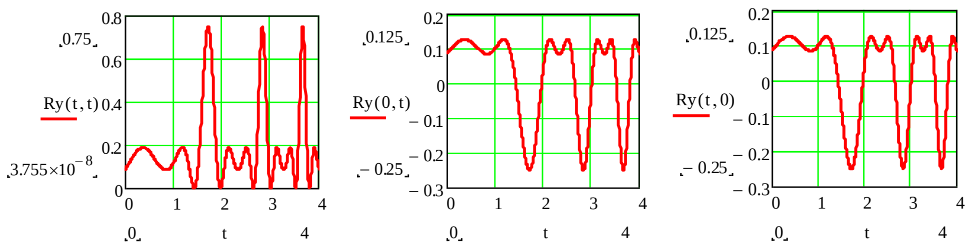


Рисунок 15 - Графіки перерізів кореляційної функції циклічного випадкового процесу $\tilde{\xi}\ \omega, t$ із циклічними реалізаціями

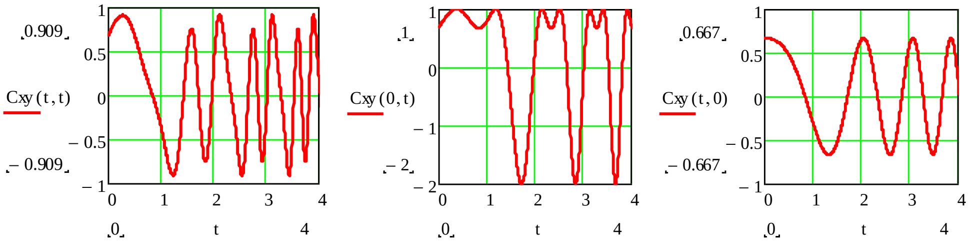


Рисунок 16 - Графіки перерізів взаємної коваріаційної функції циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів $\xi\ \omega, t$ та $\tilde{\xi}\ \omega, t$ із циклічними ритмічно пов'язаними реалізаціями

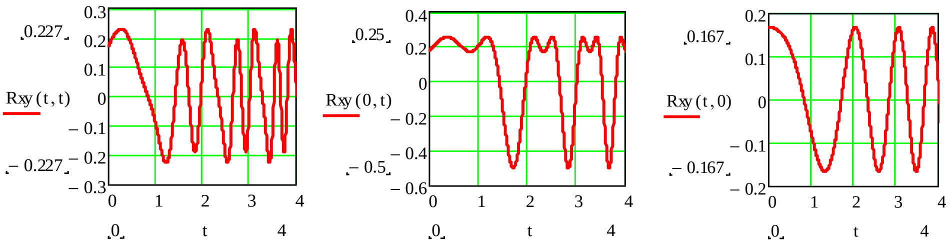


Рисунок 17 - Графіки перерізів взаємної кореляційної функції циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів $\xi\ \omega, t$ та $\tilde{\xi}\ \omega, t$ із циклічними ритмічно пов'язаними реалізаціями

Таким чином, на основі конструкції (1) можна безпосередньо здійснювати імітацію циклічних випадкових процесів із циклічними реалізаціями, що дає змогу використовувати їх для формування стохастичних сигналів циклічної структури для задач тестування інформаційних систем різного призначення.

ВИСНОВКИ

1. Досліджено ймовірнісні характеристики підкласу циклічних випадкових процесів із циклічними реалізаціями, що утворені шляхом мультиплікативного поєднання детермінованої циклічної функції та випадкової величини. Зокрема, встановлено, у яких саме ймовірнісних характеристиках цих випадкових процесів спостерігається циклічна структура.
2. Обґрунтовано метод імітаційного моделювання підкласу циклічних випадкових процесів із циклічним реалізаціями, що утворені шляхом мультиплікативного поєднання детермінованої функції та випадкової величини.
3. Наведено приклади циклічних випадкових процесів із циклічним реалізаціями, зокрема ритмічно пов'язаних процесів, які утворені шляхом мультиплікативного поєднання детермінованої циклічної функції та випадкової величини.

SUMMARY

PROBABILISTIC CHARACTERISTICS AND IMITATION ON THE COMPUTER OF CYCLICAL CASUAL PROCESS WITH CYCLICAL REALISATIONS ON THE BASIS OF MULTIPLICATIVE MODEL

N.R. Demyanchuk, S.A. Lupenko
Ternopil Ivan Pul'uj National Technical University

In work probabilistic characteristics of a subclass of cyclical casual processes with the cyclical realizations, organized by multiplicative a combination of the determined cyclical function and stationary casual process are investigated, in particular, is established in which probabilistic characteristics of these casual processes the cyclical structure takes place. It is spent imitation of such cyclical casual processes on the computer.

Key words: *cyclical casual process with cyclical realizations, multiplicative model, probabilistic characteristics, simulation modelling.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Gardner W.A. Cyclostationarity: Half a century of research / W.A. Gardner, A. Napolitano, L. Paura// Signal Processing. — 2005. — № 86 (2006). — P. 639–697.
2. Ghysels E. On the Periodic Structure of the Business Cycle / E. Ghysels // Cowles Foundation, Yale Universiti. — 1992. — No. 1028.
3. Nematollahi A.R. Discrete time periodically correlated Markov processes / A.R. Nematollahi, A.R. Soltani // Probability and Mathematical Statistics. - 2000. - No. 20 (1). - P. 127–140.

4. Дороговцев А.Я. О корреляционных функциях гауссовских марковских стационарных и периодических процессов в гильбертовом пространстве / А.Я. Дороговцев, Ле Винь Тхуан // Избранные задачи современной теории случайных процессов / Ин-т математики АН УССР. — Киев, 1988. — С. 61–65.
5. Драган Я.П. Енергетична теорія лінійних моделей стохастичних сигналів / Я.П. Драган. — Львів: Центр стратегічних досліджень еко–біотехнічних систем, 1997. — 361 с.
6. Лупенко С.А. Детерминированные и случайные циклические функции как модели колебательных явлений и сигналов: определение и классификация / С.А. Лупенко // Электронное моделирование / Ин–т проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. - Киев, 2006. - Т. 28, № 4. - С. 29–45.
7. Лупенко С. Циклічне функціональне відношення як основа математичного формалізму теорії моделювання та аналізу циклічних сигналів / С. Лупенко // Вісник Тернопільського державного технічного університету. - 2007. - Т. 12, № 3. - С. 183–195.
8. Лупенко С. Оператор перетворення шкали в задачах моделювання та аналізу циклічних сигналів / С. Лупенко // Вісник Тернопільського державного технічного університету. - 2007. - Т. 12, № 4. - С. 141–152.
9. Лупенко С.А. Концептуально-методологічні основи імітаційного моделювання циклічних сигналів на ЕОМ із використанням їх моделі у вигляді циклічного функціонального відношення / С.А. Лупенко, Н.Р. Дем’янчук, А.С. Сверстюк // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. - 2008. - № 2. -С. 101–111.

Надійшла до редакції 23 березня 2011 р.