УДК 621

ПОЛИФАКТОРИАЛЬНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

А.А. Борисенко, *д-р техн. наук, профессор,*
Сумский государственный университет, г. Сумы

В данной работе предлагается полифакториальная система счисления, обобщающая факториальную систему, способная формировать не только перестановки, как факториальная система, а и размещения. Показана ее тесная связь с факториальной системой счисления.
Ключевые слова: *системы, счисления, факториал.*

У цій роботі розглядається поліфакторіальна система числення, яка узагальнює факторіальну систему. Вона може формувати не тільки перестановки, як це виходить у факторіальній системі, а й розміщення. Показаний тісний зв'язок цієї системи з факторіальною системою числення.
Ключові слова: *системи, числення, факторіал.*

ВВЕДЕНИЕ

Системы счисления широко используются в технических приложениях, и среди них особенно широкое применение нашла двоичная система счисления, которая в силу своей простоты составила основу современной вычислительной техники. Однако и другие системы счисления, такие, например, как десятичная, восьмеричная, шестнадцатеричная, находят широкое применение на практике. Все эти и другие подобные им системы счисления относятся к *естественным*, или *однородным*, системам счисления и обладают весами разрядов в виде степеней их основания. Поэтому естественные системы счисления еще называются *степенными* системами. Они отличаются относительной простотой выполнения арифметических и логических операций и минимальной длиной чисел, которые еще называются номерами. Однако в настоящее время существует также другие, более сложные нестепенные системы счисления, такие, например, как *полиадические* системы, в которых веса образуются произведением положительных целых чисел [1]. Среди нестепенных систем счисления особо выделяются обладающие повышенной сложностью *комбинаторные* системы счисления, – фибоначчиевы, факториальные, биномиальные, названные так в силу их возможности формировать комбинаторные объекты [2,3,4,5]. В результате повышенной сложности этих систем счисления они способны еще и обнаруживать ошибки в своей работе, что позволяет их применять как помехоустойчивые коды с естественной избыточностью. Сложность таким системам счисления придает информация, которая содержится в их структурах. Именно эта информация усложняет системы счисления, придает им свойство помехоустойчивости и способность формировать комбинаторные конфигурации.

Наиболее простой из комбинаторных систем счисления является факториальная система, представляющая особую разновидность полиадических систем счисления, в которых веса в разрядах формируются в виде произведений конечных последовательностей натуральных чисел, начиная с 1, названных факториалами. Например, таким факториалом будет произведение пяти первых натуральных чисел 5·4·3·2·1, который обозначается как 5! В этой системе цифры, соответствующие весам разрядов, не должны превышать максимальную цифру в произведении, образующем факториал [3]:

$$F = X_{n-1}(n-1)! + X_{n-2}(n-2)! + \ldots + X_l(n-l)! + \ldots + X_1 1! + X_0 0!\,. \qquad (1)$$

Так, факториальное число 2110 представляется в факториальной системе счисления в виде нумерационной функции $F = 2\cdot 3! + 1\cdot 2! + 1\cdot 1! + 0\cdot 0!$ и с его помощью преобразовывается в десятичное число 15. Обратим внимание, что любое факториальное число в младшем разряде содержит цифру 0, а его максимальное значение кодируется последовательностью максимальных цифр, которые могут входить в его разряды. Для данного примера с четырьмя разрядами максимальное число кодируется последовательностью 3210. Тогда $F = 3\cdot 3! + 2\cdot 2! + 1\cdot 1! + 0\cdot 0! = 23$. Соответственно диапазон факториальных чисел, который по определению учитывает нулевое число, будет равен 24.

Важнейшей особенностью факториальных систем счисления является то, что они способны генерировать перестановки, которые находят широкое применение при решении различных комбинаторных задач, например, в задачах комбинаторной оптимизации [3,4]. Перестановками называются любые последовательности из n элементов без повторений. В рассматриваемых примерах числу 2110 соответствует перестановка 2130, а числу 3210 такая же за видом перестановка 3210. В данном случае перестановка состоит из $n = 4$ элементов, а число всех перестановок равняется 4!=4·3·2·1=24.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Однако на практике встречаются и более сложные задачи, связанные с порождением не только перестановок, а и *размещений,* содержащих без повторений только часть k из n исходных элементов в их последовательностях, частным случаем которых при значении $k = n$ какраз и являются перестановки.

Хорошо известно, что число размещений можно определить как произведение числа сочетаний (биномиального коэффициента) на число перестановок, соответствующее каждому сочетанию. Например, ставится задача найти все возможные размещения трех различных элементов по двум ящикам. Число возможных сочетаний двух элементов из трех, которые можно разместить по одному в двух ящиках, равно 3. Число перестановок из двух объектов, очевидно равно 2!=2. Тогда число возможных размещений будет равно 6. С другой стороны, известно также, что число размещений можно определить как произведение $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ элементов. Следует из того, что первый элемент последовательности, представляющей размещение, выбирается из n элементов, второй из числа $n-1$ и так далее до выбора из числа $k-1$ элементов. В этом случае последовательность будет содержать k элементов. Тогда число размещений из трех элементов по 2 будет равно 3·2=6, что совпадает с предыдущим результатом.

Зная выражение для числа размещений, можно решать и более сложную задачу их порождения в случайном или заданном порядке. Одним из подходов к решению данной задачи может быть разработка позиционной системы счисления по аналогии с факториальной системой, которая бы обобщала факториальную систему счисления и порождала размещения. Разработка такой системы счисления является задачей данной статьи.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Собственно число размещений для заданных значений их параметров k è n и определяет диапазон конкретной системы счисления, которая может перебирать или случайным образом генерировать размещения из этого диапазона. Такая система счисления обобщает факториальную систему счисления, которую в дальнейшем будем называть *полифакториальной*. Ее особенностью является то, что в ней используются *обобщенные* факториалы, представляющие произведения натуральных чисел не с 1 до числа n, как это происходит для обычного факториала, а с числа $n-k+1$:

$$n_k! = n(n-1)\ldots(n-k+1)\,, \qquad (2)$$

где k - число сомножителей в обобщенном факториале. Другими словами обобщенный факториал представляет число размещений длины k из n элементов. Если $k = n$, то число сомножителей в выражении (2) становится равным n, и обобщенный факториал преобразуется в обычный факториал, то есть $n_k! = n_n! = n!$. В то же время $n_k! = n_1! = n$. Практическая разница между этими факториалами состоит в том, что обобщенный факториал подсчитывает размещения для любых значений k, от числа 1 и до величины n, а обычный только для значения $k = n$.

Основываясь на обобщенных факториалах, введем нумерационную функцию для полифакториальной системы счисления, которая будет иметь следующий вид:

$$\begin{gathered} F = X_{k-1}(n-1)_{k-1}! + X_{k-2}(n-2)_{k-2}! + \ldots + X_{k-l}(n-l)_{k-l}! + \ldots \\ + X_{(k-(k-1))}(n-(k-1))_{(k-(k-1))}! + X_{(k-k)}(n-k)_0!; \\ l = 1,\ 2, \ldots, k;\ (n-k)_0! = 1, \end{gathered} \qquad (3)$$

или

$$\begin{gathered} F = X_{k-1}(n-1)_{k-1}! + X_{k-2}(n-2)_{k-2}! + \ldots \\ + X_{k-l}(n-l)_{k-l}! + \ldots + X_1(n-k+1)_1! + X_0 1, \end{gathered} \qquad (4)$$

где $0 \le \tilde{O}_{k-l} \le n-l.$

Очевидно, что при $k = n$, полифакториальная система счисления преобразуется в факториальную систему:

$$F = X_{n-1}(n-1)! + X_{n-2}(n-2)! + \ldots + X_l(n-l)! + \ldots + X_1 1 + X_0 1\,. \qquad (5)$$

Соответственно обобщенный факториал преобразуется в обычный факториал:

$$n_k! = n_n! = n! = n(n-1)\dots 1, \quad k = n. \qquad (6)$$

Рассмотрим пример, поясняющий работу полифакториальной системы счисления. Допустим, что для параметров $n = 7$, $k = 4$ задано полифакториальное число 3023. Тогда, исходя из формул (3,4) получим, что

$$F = 3023 = 3(6 \cdot 5 \cdot 4) + 0(5 \cdot 4) + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 360 + 0 + 8 + 3 = 371.$$

Максимальное значение полифакториального числа для этих параметров будет, очевидно, равно 6543. Введя нумерационную функцию, можно получить соответствующее этому числу десятичное число. Очевидно, что оно будет равно

$$F_{max} = 6543 = 6(6 \cdot 5 \cdot 4) + 5(5 \cdot 4) + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 720 + 100 + 16 + 3 = 839.$$

Если добавить к нему еще одно число, соответствующее нулевому минимальному числу, то получим диапазон (множество) полифакториальных чисел для приведенных параметров k и n :

$$P = F_{\max} + 1 = 839+1=840.$$

С другой стороны, этот диапазон определяется обобщенным факториальным числом

$$n_k! = n(n-1)\dots(n-k+1) = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840.$$

Переход от полифакториальных чисел к перестановкам и обратно происходит по тем же правилам, что и для факториальных чисел. Тогда полученному выше в примере полифакториальному числу будет соответствовать размещение 3046.

Полифакториальные числа можно складывать, вычитать, умножать и делить по тем же правилам, что и факториальные числа. В результате можно проводить условные арифметические операции над размещениями, переходя для этого от размещений к полифакториальным числам и возвращаясь после выполнения требуемых операций к размещениям. Непосредственно над самими размещениями, как и над перестановками, арифметических операций выполнять нельзя. Конечно, можно выполнять арифметические операции не над полифакториальными номерами, а над номерами размещений в степенных системах счисления, например, в двоичной системе. Однако это потребует предварительной их нумерации, для чего следует осуществить преобразование сначала от размещения к полифакториальной системе счисления, а затем от этой системы к обычному номеру в соответствие с формулами (3,4). Такое преобразование трудоемко и потребует большего времени, чем только переход от разбиения к полифакториальному числу, хотя оно позволяет использовать обычную степенную арифметику для операций над разбиениями.

ВЫВОДЫ

Таким образом, в работе построена позиционная система счисления, обобщающая факториальную систему и порождающая в случайном или заданном порядке размещения и в частном случае перестановки. Она дает возможность выполнять над размещениями арифметические операции и при необходимости нумеровать их.

SUMMARY

POLYFACTORIAL NUMBER SYSTEM

A. A. Borysenko,
Sumy State University, Sumy

A polyfactorial number system as generalization of a ordinary factorial system is considered in the paper. It can form not only permutations line the factorial system, but and arrangements. The close connection between the polyfactorial and factorial systems is demonstrated.

Key words: *number system, factorial.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поспєлов Д.А. Арифметичні основи обчислювальних машин дискретної дії: навчальний посібник/ Д.А. Поспєлов. - М.: Вища. школа, 1970. - 308 с.
2. Стахов А.П. Коды золотой пропорции / А.П. Стахов. - М.: Радио и связь, 1984. - 150 с.
3. Рейнгольд Е. Комбінаторні алгоритми. Теорія і практика/ Е. Рейнгольд, Ю. Нивергельт, Н. Део / пер. с англ. - М.: Мир, 1980. - 465 с.
4. Стоян Ю. Г. Решение некоторых многоэкстремальных задач методом сужающихся окрестностей / Ю. Г. Стоян, В. З. Соколовский. - К.: Наук. думка, 1980. - 205 с.
5. Борисенко А.А. Биномиальный счет. Теория и практика: монография. - Сумы: Университетская книга, 2004. – 168 с.

Поступила в редакцию 2 апреля 2011 г