УДК 621.38

# МАТРИЧНЫЕ БИНОМИАЛЬНЫЕ ЧИСЛА С ПРОВЕРКОЙ НА ЧЕТНОСТЬ

***В.В. Петров,*** *аспирант,*
*Сумский государственный университет, г. Сумы*

*В работе предложен метод повышения помехоустойчивости матричных биномиальных чисел, заключающийся в выборе проверочного разряда в конце каждой строки чисел так, что количество единиц в строках остается парной. Это позволило обнаруживать все ошибки единичной кратности, а также часть ошибок большей кратности.*

***Ключевые слова:*** *матричные биномиальные числа с проверкой на четность, свойства чисел, числовые матрицы.*

*У роботі запропоновано метод підвищення завадостійкості матричних біноміальних чисел, що полягає у виборі перевірного розряду наприкінці кожного рядка чисел так, що кількість одиниць у рядках залишається парною. Це дозволило виявляти всі помилки одиничної кратності, а також частину помилок більшої кратності.*

***Ключові слова:*** *матричні біноміальні числа з перевіркою на парність, властивості чисел, числові матриці.*

## ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работах [1] рассматривается метод представления двоичных линейных биномиальных чисел в виде так называемых матричных биномиальных чисел (МБЧ). Полученные таким образом числа, благодаря регулярности своей структуры, позволяют строить различные быстродействующие компоненты цифровых устройств, такие как счетчики, регистры и преобразователи кодов [2]. Кроме того, в силу наличия естественной информационной избыточности, полученные компоненты содержат встроенные схемы контроля, позволяющие контролировать наличие сбоев непосредственно в процессе обработки информации [3].

МБЧ хотя и содержат достаточно большую естественную избыточность, обнаруживают только часть однократных, часть двукратных и т.д. ошибок. На рис. 1 приведены примеры однократных и двукратных необнаруживаемых ошибок. Как видно, их количество зависит от количества и расположения единиц в матричных числах.

$$\begin{pmatrix} 1 & \text{Ж} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \text{Ж} & \text{Ж} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*Рисунок 1 - Пример необнаруживаемых ошибок*

Возможность обнаруживать ошибки кратностью $l_o$ зависит от минимального кодового расстояния [4]:

$$d_{\min} \geq l_o + 1\,, \tag{1}$$

*где* $l_o$ - кратность обнаруживаемых ошибок;

$d_{\min}$ - минимальное кодовое расстояние.

МБЧ имеют $d_{\min} = 1$, чего недостаточно даже для обнаружения всех однократных ошибок. Это является серьезным недостатком, поскольку именно однократные ошибки составляют 75 – 80 % от всех ошибок, возникающих в цифровых устройствах. С целью ликвидации данного недостатка поставлена задача, которая заключатся в повышении помехоустойчивости МБЧ для получения возможности обнаружения всех однократных ошибок.

## АНАЛИЗ СВОЙСТВ МАТРИЧНЫХ БИНОМИАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ С ПРОВЕРКОЙ НА ЧЕТНОСТЬ

Для решения поставленной задачи был предложен метод контроля по четности каждой из строк матричного числа. Для этого в конце каждой строки МБЧ добавлен один разряд, получивший название проверочного. Его работа организована так, что общее число единиц в каждой из строк матрицы остается четным. В результате были получены новые числа, получившие название МБЧ с проверкой на четность.

**Определение 1.** Матричные биномиальные числа с параметрами $n$ и $k$ дополненные $(k+1)$-м столбцом,

$$\left[\begin{array}{cccccc} x_{01} & x_{02} & \cdots & x_{0j} & \cdots & x_{0k} \\ x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{ik} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{(n-k)1} & x_{(n-k)2} & \cdots & x_{(n-k)j} & \cdots & x_{(n-k)k} \end{array}\right] \begin{array}{c} x_{0(k+1)} \\ x_{1(k+1)} \\ \cdots \\ x_{i(k+1)} \\ \cdots \\ x_{(n-k)(k+1)} \end{array},$$

удовлетворяющие дополнительному свойству называются матричными биномиальными числами с проверкой на четность (рис. 2).

**Определение 2.** Совокупность всех $N = C_{n+1}^{k}$ матричных биномиальных чисел с проверкой на четность для заданных параметров $n$ и $k$ образуют матричный биномиальный код с проверкой на четность.

Дополнительное свойство МБЧ с проверкой на четность состоит в следующем. Сумма единиц по строкам биномиальной матрицы с проверкой на четность всегда остается четной. Так, если дана биномиальная матрица с параметрами $n$ и $k$, то для нее всегда выполняется $x_{i1} \oplus x_{i2} \oplus ... \oplus x_{ik} \oplus x_{ik} = 0$, $i = 0,1,...,(n-k)$.

**Пример 1.** Дано МБЧ с проверкой на четность $\left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}$ с параметрами $n = 5$, $k = 3$. Для него всегда выполняется дополнительное свойство

$$x_{01} \oplus x_{02} \oplus x_{03} \oplus x_{04} = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0,$$
$$x_{11} \oplus x_{12} \oplus x_{13} \oplus x_{14} = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0,$$
$$x_{21} \oplus x_{22} \oplus x_{23} \oplus x_{24} = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 0.$$

Пример МБЧ с проверкой на четность для $n = 5$ , $k = 3$ приведен на рис. 2. Частные случаи чисел возникают в результате того, что соотношение параметров $n$ и $k$ определяют параметры матрицы. Так, при соотношении параметров $n$ , $k = n$ матрица состоит из одной строки, а при соотношении $n$ , $k = 1$ - из одного столбца.

$$\begin{array}{ccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} &
\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix} &
\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} &
\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix} &
\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\
\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix} &
\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} &
\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix} &
\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix} &
\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}
\end{array}$$

*Рисунок 2 - МБЧ с проверкой на четность, $n = 5$ , $k = 3$*

**Теорема 1.** МБЧ с проверкой на четность обнаруживают все однократные ошибки.

**Доказательство.** В результате введения проверочного разряда для МБЧ с проверкой на четность минимальное кодовое расстояние стало равным $d_{min} = 2$ [4], чего согласно (1) достаточно для обнаружения всех однократных ошибок. Теорема доказана.

Таким образом, введение проверочных разрядов позволило поднять помехоустойчивость МБЧ и обнаруживать все однократные ошибки.

Для обнаружения ошибок с помощью МБЧ с проверкой на четность необходима проверка достаточных свойств МБЧ описанных в работе [5], а также проверка дополнительного свойства. Для удобства оба свойства были объединены в одно, получившее название достаточного свойства МБЧ с проверкой на четность:

$$\begin{cases}
\sum\limits_{j=1}^{k}\sum\limits_{i=0}^{(n-k-1)} x_{ij}\cdot Sm_{(i+1)j} = 0 \\
\sum\limits_{i=0}^{(n-k)}\sum\limits_{j=1}^{(k-1)} x_{i(j+1)}\cdot \overline{Sm_{ij}} = 0 \\
\sum\limits_{i=0}^{n-k} m_i = 0
\end{cases}, \qquad (2)$$

где $Sm_{mj} = \sum\limits_{z=m}^{(n-k)} x_{zj}$ - сумма единиц по столбцам числа, $i = 0,1,\dots,(n-k)$ , $j = 1,2,\dots k$ . $m_i = x_{ij} \oplus x_{i(j+1)} \oplus \dots \oplus x_{ik} \oplus x_{i(k+1)}$ .

Проверка достаточного свойства (2) позволяет определять все однократные ошибки в МБЧ с проверкой на четность. Невыполнение хотя бы одного из равенств системы говорит о том, что проверяемая кодовая комбинация принадлежит к классу запрещенных.

**Пример 2.** Определить класс кодовых комбинаций

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} 0 \\ 0, \\ 1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \text{ для } n = 5, \ k = 3.$$

**Решение.** Определим класс комбинаций при помощи проверки достаточного свойства (2). Для первой комбинации уравнения системы примут вид

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=0}^{2} x_{ij} \cdot Sm_{(i+1)j} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$$

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=1}^{2} x_{i(j+1)} \cdot \overline{Sm_{ij}} = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$$

$$x_{01} \oplus x_{02} \oplus x_{03} \oplus x_{04} = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$$

$$x_{11} \oplus x_{12} \oplus x_{13} \oplus x_{14} = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$

$$x_{21} \oplus x_{22} \oplus x_{23} \oplus x_{24} = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

Как видно, все равенства системы выполняются, откуда сделан вывод, что комбинация принадлежит к классу разрешенных. Для второй кодовой комбинации система примет вид

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=0}^{2} x_{ij} \cdot Sm_{(i+1)j} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$$

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=1}^{2} x_{i(j+1)} \cdot \overline{Sm_{ij}} = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$$

$$x_{01} \oplus x_{02} \oplus x_{03} \oplus x_{04} = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$$

$$x_{11} \oplus x_{12} \oplus x_{13} \oplus x_{14} = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

$$x_{21} \oplus x_{22} \oplus x_{23} \oplus x_{24} = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$$

Вторая кодовая комбинация принадлежит к классу запрещенных, поскольку для нее не выполняется третье равенство системы. Как видно, данная однократная ошибка (вида $0 \to 1$ в разряде $x_{03}$, либо вида $1 \to 0$ в разряде $x_{04}$) является необнаруживаемой для матричных чисел, так как достаточные свойства МБЧ выполняются. Однако данная ошибка обнаружена проверкой достаточных свойств МБЧ с проверкой на четность.

## МЕТОДЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАТРИЧНЫХ БИНОМИАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ С ПРОВЕРКОЙ НА ЧЕТНОСТЬ

Метод построения МБЧ с проверкой на четность состоит в следующем:

Шаг 1. Метод построения МБЧ с параметрами $n$ и $k$ до получения сигнала останов.

Шаг 2. Добавление в конце каждой строки каждого МБЧ проверочных разрядов так, чтобы количество единиц по строкам матриц оставалось парным. Останов.

Метод помехоустойчивого матричного биномиального счета с проверкой на четность состоит в следующем:

Шаг 1. Формируется начальная кодовая комбинация, состоящая из $i = (n - k + 1)$ строк, содержащих по $(k+1)$ нулей, старший из которых является проверочным.

Шаг 2. Производится проверка достаточных свойств (2). При невыполнении свойств произошла ошибка, переход к шагу 8. Иначе переход к 3.

Шаг 3. Сформировано очередное МБЧ с проверкой на четность.

Шаг 4. Проверка количества единиц $q$ в биномиальной матрице без учета проверочных разрядов. Если $q = k$, где $q-$ количество единиц в биномиальной матрице, то формируется перенос в старшую строку, $i = i + 1$ и переход к 6, иначе переход к 5.

Шаг 5. В $i$-й строке матрицы заносится единица в $j = (k - q)$-й разряд, проверочный разряд меняет свое состояние на противоположный. Производится переход к самой младшей строке, $i = 0$. Переход к 2.

Шаг 6. Проверка номера строки. Если перенос сформирован в старшей строке $i = (n - k)$, то происходит переход к пункту 8, иначе переход к 7.

Шаг 7. Производится обнуление $i$-й строки с одновременным переходом на старшую строку $i = i + 1$. Переход к 2.

Шаг 8. Метод счета для параметров $n$ и $k$ завершен. Останов.

Метод перехода к линейной биномиальной форме для МБЧ с проверкой на четность ничем не отличается от метода перехода для МБЧ, так как проверочные разряды в формировании линейных биномиальных чисел не участвуют. Метод перехода к линейной форме состоит в следующем:

Шаг 1. Формирование начального МБЧ с проверкой на четность, состоящего из $(n - k + 1)$ строк, каждая из которых содержит $(k + 1)$ столбцов, заполненных нулями. Переход к шагу 2.

Шаг 2. Перебор чисел с параметрами $n$ и $k$ при помощи метода счета до формирования сигнала останов. Переход к шагу 3.

Шаг 3. Проверка достаточного свойства МБЧ с проверкой на четность до формирования сигнала останов. При выполнении всех свойств переход к шагу 4, иначе произошла ошибка, переход к шагу 6.

Шаг 4. В каждом матричном числе замена каждых информационных $k$ нулей, стоящих перед первой единицей при счете от начала старшей $(n - k)$-й строки или между единицами, одним нулем и записью полученной таким образом последовательности единиц в виде строки. Переход к шагу 5.

Шаг 5. Проверка свойств линейных биномиальных чисел до формирования сигнала останов. При выполнении всех свойств переход к шагу 6, иначе произошла ошибка, переход к шагу 6.

Шаг 6. Останов.

Метод нумерации МБЧ с проверкой на четность совпадает с методами нумерации МБЧ, описанными в [5].

Наличие провероки достаточного свойства в предложенных методах преобразования МБЧ с проверкой на четность позволило контролировать наличие ошибок непостредственно во время обработки информации.

## ВЫВОДЫ

В работе предложен метод повышения помехоустойчивости матричных биномиальных чисел, заключающийся в выборе проверочного разряда в конце каждой строки чисел так, что количество единиц в строках остается парной. Это позволило обнаруживать все ошибки единичной кратности, а также часть ошибок большей кратности.

Для предложенных чисел с повышенной помехоустойчивостью разработаны методы их преобразования.

## SUMMARY


### MATRIX BINOMIAL PARITY-CHECK NUMBERS



***V.V. Petrov,***
*Sumy State University, Sumy*



*In this paper the method of improving of the noise immunity of the matrix of binomial numbers is suggested. Known before properties were proved and some new properties were obtained. The method allows to detect all one-fold errors.*

***Key words:*** *matrix of binomial numbers, the properties of numbers, numerical matrices, one-fold errors, noise immunity.*


## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Борисенко А.А. Представление биномиальных чисел в матричной форме / А.А. Борисенко // Вестник СумГУ. – 2003. - №11. - С. 51-56.
2. Борисенко А.А. Синтез матричных биномиальных счетчиков Асу и приборы автоматики / А.А. Борисенко, В.В. Петров. – Харьков: ХНУРЕ, 2009.
3. Петров В.В. Синтез устройства контроля матричных биномиальных автоматов / В.В. Петров // Вісник Сумського державного університету. – 2010. –№ 1.– С. 30-36.
4. Березюк Н.Т. Кодирование информации (двоичные коды) / Н.Т. Березюк. - Харьков: Вища школа, 1978. – 252 с.
5. Петров В.В. Матричная биномиальная система счисления / В.В. Петров // Вісник Сумського державного університету. – 2010. – № 3.– С. 142-153.



*Поступила в редакцию 27 апреля 2011 г.*