Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Сумський державний університет

Л.С. Кафтарян, С.О. Міщенко

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Розділ «Динаміка»

Конспект лекцій

Затверджено на засіданні кафедри
загальної механіки і динаміки машин
як конспект лекцій з дисципліни
«Теоретична механіка»
Протокол № 8 від 11.05.2001 р.

Суми
Сумський державний університет
2011

Навчальне видання

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА
Розділ «Динаміка»
Конспект лекцій

для студентів
факультету технічних систем та енергоефективних технологій
усіх форм навчання
Розділ «Динаміка»

Відповідальний за випуск В.А. Марцинковський
Редактор Н.В. Лисогуб
Комп’ютерне верстання С.О. Міщенко

Підписано до друку 08.06.2011, поз.
Формат 60х84х16. Ум.друк.арк. 3,02 . Обл.-вид.арк. 3,43. Тираж 200 пр.
Зам. №
Собівартість видання грн. к.

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет.
вул. Р.-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007

Теоретична механіка: розділ «Динаміка». Конспект лекцій /Укладачі: доц. Л.С. Кафтарян, С.О. Міщенко. – Суми: Сумський державний університет, 2011. - 56 с.

Кафедра загальної механіки і динаміки машин

ЗМІСТ

Вступ до динаміки

Як уже відомо, теоретична механіка – це наука про найбільш загальні рухи і взаємодії тіл. Із визначення теоретичної механіки випливає, що вона належить до фундаментальних природничих наук, а історія її розвитку переконує у тому , що вона є однією з наукових основ техніки і технології.

Теоретична механіка широко застосовує методи абстракції, узагальнення, математичні методи, методи формальної логіки. Критеріями істинності наших знань є досвід і практика. Вона формує, розвиває і спрямовує творчу інтуїцію вчених, інженерів та технологів, оскільки певною мірою є підсумком багатовікового досвіду людства.

Основою теоретичної механіки є закони І. Ньютона, тому вона називається ньютонівською, класичною механікою. З огляду на історичні традиції за характером задач, що вивчаються, теоретична механіка поділяється на статику, кінематику та динаміку. Це значною мірою полегшує вивчення механічного руху тіл і перетворення енергії та пов’язує вивчення теоретичної механіки з іншими дисциплінами технічних вузів.

Слід нагадати, що до основних понять теоретичної механіки насамперед належать поняття матеріальної точки й абсолютно твердого тіла, що є ідеальними моделями матеріальних тіл з тим чи іншим ступенем абстракції конкретних властивостей реальних фізичних тіл.

Матеріальною точкою називається геометрична точка, якій приписана певна маса.

Системою матеріальних точок називається сукупність матеріальних точок, положення і рухи яких взаємозв’язані між собою. Окремим випадком системи матеріальних точок є абсолютно тверде тіло.

Абсолютно твердим тілом називається тіло. яке складається з системи матеріальних точок, що неперервно заповнюють певну частину простору так, що відстань між будь-якими двома його точками залишається незмінною.

Надалі абсолютно тверде тіло називатимемо просто твердим тілом, або тілом. Зазначимо, що абстракція абсолютно твердого тіла дає змогу вивчати механічний рух тіл, не пов’язаних з існуючою зміною їхньої форми, зокрема з деформацією.

Динамікою називається розділ теоретичної механіки, в якому вивчається механічний рух матеріальної точки, системи матеріальних точок і абсолютно твердого тіла з урахуванням сил, що діють на ці рухомі об’єкти. У динаміці синтезуються й узагальнюються положення, розглянуті в статиці та кінематиці, а також встановлюються найбільш загальні закони механічного руху. При цьому враховується взаємодія між тілами, мірою якої є сила.

У динаміці серед основних розглядаються дві задачі. Перша з них (пряма задача механіки) полягає в тому, що за заданими механічним рухом і масою тіла визначають сили, що діють на тіло і під дією яких здійснюється цей рух. Друга задача (обернена задача динаміки) полягає в тому, що за заданими силами, прикладеними до тіла, його масою і початковими умовами визначають рух, який вони спричиняють.

Звичайно динаміку прийнято поділяти на динаміку матеріальної точки, динаміку системи матеріальних точок і динаміку твердого тіла.

РОЗДІЛ 1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ ТОЧКИ

1.1. Закони Ньютона

В основі динаміки лежать закони І.Ньютона, викладені в «Математичних началах натуральної філософії».

Закони Ньютона є об'єктивними законами природи, встановленими на основі численних дослідів і спостережень Ньютона і його попередників.

Системи координат, у яких справедливі закони Ньютона, називаються інерціальними. Інерціальними (галілеєвими) є системи координат, що рухаються поступально, прямолінійно і рівномірно відносно нерухомих зірок. З достатньою точністю інерціальною (основною) можна вважати геліоцентричну систему координат при вивченні рухів зі швидкостями, малими порівняно зі швидкістю світла. При розв'язанні багатьох задач із техніки основну систему координат (систему відліку) пов'язують із Землею.

Перший закон Ньютона (закон інерції). Ізольована матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху до того часу, поки вплив з боку інших тіл не виведе її з цього стану.

Ізольованою називається матеріальна точка, взаємодією якої з навколишніми тілами нехтують. Властивість ізольованої матеріальної точки зберігати стан рівномірного і прямолінійного руху називається властивістю інертності.

Із закону інерції випливає, що спонтанна зміна руху матеріальної точки неможлива. Рух матеріальної точки може змінитися лише внаслідок її взаємодії з іншими тілами. Мірою цих взаємодій є сила.

Другий закон Ньютона (основний закон динаміки). Швидкість зміни кількості руху матеріальної точки дорівнює силі, що діє на цю точку.

Математично цей закон виражається рівнянням

$$\frac{d\left(m\vec{V}\right)}{dt}=\vec{F}\,, \tag{1.1}$$

де $m\vec{V}$ - кількість руху матеріальної точки; m - маса точки.

У класичній механіці розглядають рух зі швидкостями, малими порівняно зі швидкістю світла. При русі з великими швидкостями відповідно до формули Лоренца маса залежатиме від швидкості руху

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}\,, \tag{1.2}$$

де m_0 - маса нерухомого об'єкта; V - швидкість руху; c - швидкість світла.

При малих швидкостях $(V << c)$ стосовно тіл постійного складу маємо $m = m_0 = const$. Вважаючи $m = const$, вираз (1.1) перепишемо у вигляді

$$m\vec{a} = \vec{F}, \tag{1.3}$$

де $\vec{a} = \dfrac{d\vec{V}}{dt}$ - прискорення точки.

На основі (1.3) другий закон Ньютона можна сформулювати так: прискорення матеріальної точки пропорційне прикладеній до неї силі і має однаковий із нею напрям.

Рівняння (1.3) називається основним рівнянням динаміки вільної матеріальної точки. Другий закон Ньютона виражає кількісне співвідношення між трьома фізичними величинами: силою, масою і прискоренням. Поняття сили зустрічалося в статиці, поняття прискорення – в кінематиці. Масою матеріальної точки називається фізична величина, яка є мірою її інертних і гравітаційних властивостей. Масу можна визначити двома способами. Перший спосіб визначення маси ґрунтується на законі всесвітнього тяжіння, згідно з яким сила взаємного тяжіння між тілами виражається формулою

$$F = \gamma \frac{mm_1}{r^2}, \tag{1.4}$$

де γ - гравітаційна стала, що дорівнює $6{,}67 \cdot 10^{-11}\ м^3 кг^{-1} с^{-2}$; r - відстань між тілами з масами m і m_1.

Ще Галілей встановив, що поблизу земної поверхні при вільному падінні всі тіла мають одне й те саме прискорення

$$g = \gamma \frac{m_1}{r^2}, \tag{1.5}$$

що дорівнює *9,80665 м/с*^{2}. Отже, сила тяжіння тіла визначається за формулою

$$\vec{P} = m\vec{g}. \tag{1.6}$$

Таким чином, вимірявши силу тяжіння тіла за допомогою вагів, з формули (1.6) можна визначити його масу. Такий спосіб визначення маси називається статичним, а сама маса, визначена цим способом – гравітаційною.

Другий спосіб визначення маси полягає у такому. Нехай одна й та сама сила $\vec{F}$, діючи на два різних тіла з масами m і m_1, спричинює прискорення $\vec{a}$ і $\vec{a}_1$. Тоді за другим законом Ньютона

$$m\vec{a} = m_1\vec{a}; \ ma = m_1 a_1 \tag{1.7}$$

звідси

$$m_1 = \frac{a}{a_1} m . \qquad (1.8)$$

Взявши масу першого тіла m за еталон, за цією формулою можна визначити масу другого тіла. Такий спосіб визначення маси називається динамічним, а сама маса, знайдена цим способом – інертною.

Експериментально доведено, що гравітаційна та інертна маса чисельно дорівнюють одна одній з точністю до 10^{-8}. Цей факт, що відіграє велику роль у сучасній фізиці, становить основу загальної теорії відносності й називається принципом еквівалентності гравітаційної та інертної мас.

Встановлюючи зв'язок між основними характеристиками механічного руху, другий закон Ньютона є одним із методів для розв’язання задач механіки.

Третій закон Ньютона (закон рівності дії і протидії). Сили взаємодії двох матеріальних точок або двох тіл (дія і протидія) рівні за величиною, напрямлені в протилежні боки і мають загальну лінію дії.

Якщо перший і другий закони Ньютона належать до динаміки матеріальної точки, то третій закон належить до динаміки системи матеріальних точок або тіл. Слід зазначити, що дія і протидія прикладені до різних матеріальних точок або тіл і що третій закон Ньютона, на відміну від перших двох, справедливий у будь-якій системі координат, а не тільки в інерціальній, оскільки він не містить кінематичних характеристик руху матеріальних об’єктів. Зрештою, цей закон дає змогу відрізнити реальні сили, прикладені до точок, від фіктивних, які можуть виникнути при математичному розв’язанні задач механіки.

Закон незалежності дії сил (принцип суперпозиції). Прискорення матеріальної точки, що виникає при одночасній дії на неї декількох сил, дорівнює векторній сумі прискорень, яких надають точці окремі сили.

Цей закон випливає з аксіоми про паралелограм сил. Він не придатний при дії на матеріальну точку сил, що залежать від прискорення.

Закони Ньютона, як і всі положення теоретичної механіки, що ґрунтуються на них, мають обмежений характер і є лише першим наближенням до дійсності, добре узгоджується з нею лише при рухах із малими швидкостями. Ця обмеженість спричинюється тим, що в теоретичній механіці властивості рухомих матеріальних об’єктів вважаються незалежними від властивостей простору і часу, які до того ж абсолютизують. У межах своєї застосовуваності теоретична механіка займає провідне місце серед природничих наук і має велике значення при дослідженні механічних процесів і явищ, що зустрічаються на практиці, а закони Ньютона мають велике методологічне значення.

1.2. Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки

Згідно з трьома способами задання руху точки встановимо диференціальне рівняння її руху .Якщо рух матеріальної точки масою m задано у векторній формі за допомогою радіуса-вектора $\vec{r}=\vec{r}(t)$, то рівняння (1.3) набере вигляду

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}\,. \tag{1.9}$$

У загальному випадку сила $\vec{F}$ може бути функцією часу, координат і швидкості рухомої точки $\vec{F}=\vec{F}\left(t,\vec{r},\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$. Сили, що явно залежать від часу, зустрічаються при дослідженні роботи різного роду машин і механізмів. До сил, що залежать від положення точки (позиційних), належать сили пружності, а також сили тяжіння або відштовхування. Сили, що залежать від швидкості, зустрічаються при дослідженні руху тіл у в’язкому середовищі.

Отже, рівняння (1.9) набере вигляду

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}\left(t,\vec{r},\frac{d\vec{r}}{dt}\right). \tag{1.10}$$

Рівнянням (1.10) у векторній формі відповідають три скалярних диференціальних рівняння в координатній формі:

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2}&=F_x\left(t,x,y,z,\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right),\\ m\frac{d^2y}{dt^2}&=F_y\left(t,x,y,z,\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right),\\ m\frac{d^2z}{dt^2}&=F_z\left(t,x,y,z,\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right), \end{aligned} \tag{1.11}$$

де $\frac{d^2x}{dt^2},\frac{d^2y}{dt^2},\frac{d^2z}{dt^2}$ - проекції вектора прискорення $\vec{a}$ на осі координат; x,y,z - координати точки; $\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}$ - проекції вектора швидкості $\vec{V}$; F_x,F_y,F_z - проекції сили $\vec{F}$. Кожне з диференціальних рівнянь (1.11) є рівнянням другого порядку. Рівняння (1.11) називаються динамічними рівняннями руху матеріальної точки в координатній формі.

Якщо спроектувати обидві частини основного рівняння динаміки (1.3) на натуральні осі (дотичну $\vec{\tau}$, головну нормаль $\vec{n}$ і бінормаль $\vec{b}$), то одержимо

$$
\begin{aligned}
& m\frac{dV_\tau}{dt} = F_\tau\left(t, S, \frac{dS}{dt}\right), \\
& m\frac{V^2}{\rho} = F_n\left(t, S, \frac{dS}{dt}\right), \\
& 0 = F_b
\end{aligned}
\qquad (1.12)
$$

Рівняння (1.12) називаються динамічними рівняннями руху точки в натуральній формі, або у формі Ейлера.

У разі потреби можна одержати динамічні рівняння руху матеріальної точки на осі будь-якої системи координат (наприклад, полярні, циліндричні, сферичні координати).

1.3. Дві основні задачі динаміки вільної матеріальної точки

При дослідженні руху матеріальної точки зустрічаються дві основні задачі динаміки (пряма та обернена).

Пряма, або перша, основна задача. Визначити рівнодійну сил $\vec{F}$, що діють на матеріальну точку, якщо задано її масу m і кінематичні рівняння руху.

Ця задача розв’язується так.

1. Якщо рух матеріальної точки масою m задано координатним способом $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$, то двічі диференціюючи ці співвідношення за часом, одержимо проекції прискорення на осі координат (1.11). Тоді на основі рівняння (1.11) визначимо проекції сили:

$$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2},\ F_y = m\frac{d^2y}{dt^2},\ \ F_z = m\frac{d^2z}{dt^2}. \qquad (1.13)$$

Отже, модуль рівнодійної сили

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}. \qquad (1.14)$$

Напрям сили визначимо за напрямними косинусами.

2.Якщо рух матеріальної точки масою m задано в натуральній формі, то за рівняннями (1.12) знайдемо проекції рівнодійної сил, що діють на точку, на натуральній осі. Модуль сили та напрям визначимо за формулами

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2},\ tg\alpha = \frac{F_\tau}{F_n} = \frac{a_\tau}{a_n}, \qquad (1.15)$$

де α - кут між силою $\vec{F}$ і нормальною складовою сили $\vec{F}_n$.

Обернена, або друга, основна задача. Визначити кінематичні рівняння руху вільної матеріальної точки, якщо задано її масу m, прикладену до неї силу $\vec{F}$ і початкові умови руху.

Розв’язання цієї задачі зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки. Знайдемо проекції сили $\vec{F}$ на осі координат, тобто F_x, F_y, F_z, потім проінтегруємо систему диференціальних рівнянь (1.11). Розв’язання цієї системи буде функцією часу і шести сталих інтегрування $c_1,\ c_2,...,c_6$, тобто

$$\begin{aligned} x &= x(t,\ c_1,\ c_2,...,c_6), \\ y &= y(t,\ c_1,\ c_2,...,c_6), \\ z &= z(t,\ c_1,\ c_2,...,c_6), \end{aligned} \tag{1.16}$$

оскільки порядок системи диференціальних рівнянь дорівнює шести.

Щоб розв’язати конкретну динамічну задачу, треба задати початкові умови руху для визначення зазначених сталих інтегрування. Під початковими умовами руху матеріальної точки слід розуміти значення координат точки і проекції її швидкості у початковий момент часу $t = t_0$, тобто

$$\begin{aligned} &x(t_0) = x_0,\ \ y(t_0) = y_0,\ \ z(t_0) = z_0, \\ &\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0,\ \ \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0,\ \ \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Аналогічно початкові умови руху точки можна задати у векторній $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$, $\dot{\vec{r}}(t_0) = \dot{\vec{r}}_0$ і в натуральній $S(t_0) = S_0$, $\dot{S}(t_0) = \dot{S}_0$ формах і т.ін. Диференціюючи (1.16) за часом, знайдемо ще три співвідношення

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}(t,\ c_1,\ c_2,...,c_6), \\ \dot{y} &= \dot{y}(t,\ c_1,\ c_2,...,c_6), \\ \dot{z} &= \dot{z}(t,\ c_1,\ c_2,...,c_6), \end{aligned} \tag{1.18}$$

що мають сталі інтегрування. Якщо в (1.16) і в (1.18) підставити початкові умови руху точки (1.17), то одержимо систему шести алгебраїчних рівнянь з шістьома невідомими сталими інтегрування, розв’язуючи яку, знайдемо

$$c_i = c_i(t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0), \quad i = 1,2,...,6\,. \tag{1.19}$$

Нарешті, підставивши знайдені значення сталих інтегрування у співвідношення (1.16), що виражають загальне розв’язання системи диференціальних рівнянь (1.11), одержимо закон руху точки

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)\,. \qquad (1.20)$$

Розглядаючи рух у натуральній формі, для розв'язання оберненої задачі динаміки застосовують рівняння (1.12). Початковими умовами руху в цьому разі є значення дугової координати при $t = 0$ $S(t_0) = S_0$ і початкової швидкості $V_\tau(t_0) = \dot{S}_0$. Загальний інтеграл першого з рівнянь (1.12) має вигляд $S = S(t, c_1, c_2)$. На основі початкових умов руху знаходимо сталі інтегрування $c_i = c_i(t_0, S_0, \dot{S}_0), i = 1{,}2$. Обчислену таким чином дугову координату $S = S(t)$ підставимо в друге рівняння (1.12) і одержимо значення радіуса кривини ρ траєкторії рухомої точки.

Отже, розв'язання оберненої задачі динаміки матеріальної точки включає такі операції: 1) складання динамічних рівнянь руху матеріальної точки згідно з умовою задачі; 2) інтегрування одержаної системи диференціальних рівнянь, тобто знаходження загального розв'язання цієї системи; 3) визначення відповідних значень сталих інтегрування; 4) знаходження закону руху точки.

Приклад 1. Визначити траєкторію руху снаряда, випущеного із дула гармати з початковою швидкістю $\vec{V}_0$ під кутом α до горизонту. Опором повітря можна знехтувати. Знайти дальність і найбільшу висоту польоту снаряда (рис. 1.1).

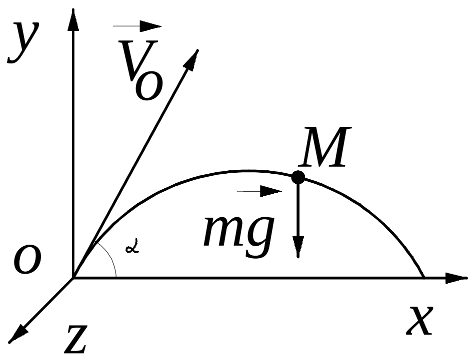

Рисунок 1.1

Розв'язання. У початковий момент $(t = 0)$ снаряд був на початку координат, тому $x_0 = 0,\ y_0 = 0,\ z_0 = 0$. Проекції початкової швидкості на осі координат запишемо у вигляді $\dot{x}_0 = V_0 cos\alpha,\ \dot{y}_0 = V_0 sin\alpha,\ \dot{z}_0 = 0$. Щоб визначити траєкторію точки (снаряда), знайдемо залежність координат x, y, z від часу. Для цього скористаємося диференціальними рівняннями руху (1.11) точки

$$m\ddot{x} = 0,\ m\ddot{y} = -mg,\ m\ddot{z} = 0\,.$$

Після скорочення на m маємо: $\ddot{x} = 0,\ \ddot{y} = -g,\ \ddot{z} = 0$. Інтегруючи ці рівняння, одержимо $\dot{x} = c_1,\ \ \dot{y} = -gt + c_2,\ \ \dot{z} = c_3$. Сталі інтегрування знайдемо з початкових умов руху. Тому $c_1 = V_0 cos\alpha,\ c_2 = V_0 sin\alpha, c_3 = 0$. Отже, $\dot{x} = V_0 cos\alpha,\ \dot{y} = -gt + V_0 sin\alpha,\ \dot{z} = 0$. Звідси після інтегрування одержимо

$x = V_0 t cos\alpha + c_4$, $y = V_0 t sin\alpha - g\dfrac{t^2}{2} + c_5$, $z = c_6$. Сталі інтегрування знайдемо з початкових умов руху. Тому $c_4 = c_5 = c_6 = 0$. Тоді закон руху снаряда матиме вигляд

$$x = V_0\, t\, cos\alpha,\; y = V_0\, t\, sin\alpha - g\frac{t^2}{2},\quad z = 0.$$

Ці вирази є також рівнянням траєкторії в параметричному вигляді. Вилучивши час із цих рівнянь, визначимо траєкторію у явному вигляді

$$y = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2 cos^2\alpha}.$$

Неважко побачити, що траєкторією снаряда є парабола, яка лежить у площині xOy. Найбільшої відстані польоту l снаряд досягає тоді, коли $y = 0$ при $x \neq 0$ (рис. 1.1). Тобто для знаходження l потрібно прирівняти до нуля вираз

$$x\left(tg\alpha - \frac{gx}{2V_0^2 cos^2\alpha}\right) = 0.$$

Оскільки $x \neq 0$ за умовою задачі, то розв'язком буде значення x, яке отримаємо, прирівнявши до нуля вираз у дужках

$$l = x(y=0) = \frac{2V_0^2 cos^2\alpha tg\alpha}{g} = \frac{V_0^2 sin2\alpha}{g}.$$

Найбільшої висоти польоту при заданому куті α снаряд досягне в точці $x = l/2$, тобто

$$h_{\max} = y(l/2) = \frac{V_0^2 sin^2\alpha}{2g}$$

Очевидно, що найбільшу відстань $l_{\max} = \dfrac{V_0^2}{g}$ снаряд пролетить при куті $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, а найбільшої висоти $h_{\max} = \dfrac{V_0^2}{2g}$ досягне при куті $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

1.4. Рівняння руху невільної матеріальної точки

При формулюванні основних задач динаміки вільної точки вважалося, що на рухи точки не накладено ніяких обмежень. Відповідним вибором закону зміни сили $\vec{F}$ і початкових умов можна примусити матеріальну точку рухатися по будь-якій траєкторії.

Якщо на рух точки накладені певні обмеження, то такий рух точки є невільним. Як уже зазначалося в статиці, обмеження, які накладаються на рух матеріальної точки, називаються в'язами. За наявності цих обмежень на рух точки незалежно від діючих сил, координати точки певним чином зв'язані між собою, і тому вибір початкових умов не може бути вільним.

Отже, будемо називати матеріальну точку невільною, а її рух – невільним рухом, якщо внаслідок тих чи інших обмежень при дії на неї будь-яких сил вона виконує рух або по строго фіксованій лінії, поверхні, або знаходиться в строго фіксованій частині простору.

При вивченні невільного руху точки застосовують відповідну аксіому про звільнення від в'язей, замінюючи їх дію відповідними силами. які називають реакціями в'язей. Тоді точку можна вважати вільною, але такою, на яку діють не тільки активні сили, але й пасивні – реакції в'язей. Якщо назначити через $\vec{F}$ рівнодійну всіх активних сил, що прикладені до точки, а через $\vec{R}$ - рівнодійну всіх реакцій в'язей, то основне рівняння динаміки у векторній формі можна записати у вигляді

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R}. \tag{1.21}$$

Векторному рівнянню (1.21) можна поставити у відповідність три скалярних у проекціях на осі

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= F_x + R_x, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= F_y + R_y, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= F_z + R_z. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Особливістю цих рівнянь є те, що в них реакції R_x, R_y, R_z є невідомими функціями часу, тому система рівнянь (1.22) є недовизначеною, або незамкненою. Тому потрібно скласти ще додаткові рівняння, які враховували б відповідні рівняння в'язей та їх властивості – ідеально гладкі поверхні (без тертя), шорсткі поверхні (з тертям) тощо.

Розв'язання задач динаміки невільної матеріальної точки в окремих випадках, коли точка рухається: 1) по ідеально гладкій нерухомій поверхні; 2) по ідеально нерухомій кривій,буде розглянуто в курсі аналітичної механіки.

1.5. Коливання матеріальної точки

Важливою для дослідження формою руху матеріальної точки є коливальний рух. Розрізняють коливання матеріальної точки: вільні, згасаючі та вимушені.

Вільними, або власними, коливаннями точки називаються її коливання під дією відновлюваної сили, зумовлені початковим відхиленням точки від положення рівноваги або наданням їй початкової швидкості.

Відновлювана сила – це сила, яка повертає точку в положення рівноваги.

Диференціальне рівняння вільних прямолінійних коливань матеріальної точки, яке можна отримати на підставі основного закону динаміки, має вигляд

$$m\ddot{x} + cx = 0, \tag{1.23}$$

де m - маса точки; c - коефіцієнт жорсткості пружини або коефіцієнт пропорційності відновлюваної сили; x - координата точки; $\ddot{x}$ - друга похідна за часом від координати.

Існування нетривіального розв'язку цього рівняння можливе тоді, коли хоча б одна з початкових умов

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 \tag{1.24}$$

буде ненульовою.

Після ділення усіх членів рівняння (1.23) на m отримаємо

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{1.25}$$

де $\omega_0^2 = \dfrac{c}{m}$.

Величина $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$ називається коловою частотою коливань, вона дорівнює кількості коливань точки за інтервал часу 2π секунди. Кількість коливань за одну секунду називається частотою коливань, і визначається так: $\nu = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$.

Загальний розв'язок лінійного диференціального однорідного рівняння (1.25) другого порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$x = c_1 cos\omega_0 t + c_2 sin\omega_0 t, \tag{1.26}$$

або після перетворень

$$x = A sin(\omega_0 t + \alpha). \tag{1.27}$$

Сталі інтегрування c_1, c_2, A, α пов'язані співвідношеннями:

$$A = \sqrt{C_1^2 + c_2^2}, \quad tg\alpha = \frac{c_1}{c_2}, \tag{1.28}$$

де A – амплітуда коливань, визначається найбільшим відхиленням точки від положення рівноваги (або центра коливань); α - початкова фаза коливань.
З урахуванням початкових умов (1.24) маємо

$$c_1 = x_0;\, c_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0};\; A = \sqrt{(x_0)^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right)^2};\;\; \alpha = arctg\,\frac{x_0\omega_0}{\dot{x}_0}. \tag{1.29}$$

Проміжок часу між двома послідовними проходженнями точкою положення рівноваги (центра коливань) в одному й тому ж напрямку називається періодом коливань, який можна визначити на підставі виразу (1.27)

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{1.30}$$

Період і відповідно частота коливань, які описуються диференціальним рівнянням (1.25), не залежать від початкових умов. Ця властивість називається ізохронністю коливань.

Диференціальне рівняння вільних прямолінійних коливань точки з урахуванням сили опору, яка пропорційна першому степеню швидкості, має вигляд

$$m\ddot{x} + \beta\,\dot{x} + cx = 0. \tag{1.31}$$

Коефіцієнт β дорівнює коефіцієнту пропорційності сили опору $R = \beta V = \beta\dot{x}$, де - V - швидкість точки.

Після ділення рівняння (1.31) на m отримаємо

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{1.32}$$

де $h = \dfrac{\beta}{2m}$ - коефіцієнт згасання, або відносний коефіцієнт демпфірування коливань; $\omega_0^2 = \dfrac{c}{m}$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння (1.32) в залежності від співвідношення між параметрами h та ω_0 може мати три форми. У випадку великого опору $h > \omega_0$ (корені відповідного характеристичного рівняння дійсні) цей розв'язок має вигляд

$$x = e^{-ht}(c_1 e^{pt} + c_2 e^{-pt}), \tag{1.33}$$

який подається через гіперболічні функції $x = e^{-ht}(B_1 chpt + B_2 shpt)$ або $x = Ae^{-ht} sh(pt + \alpha)$, де $p = \sqrt{h^2 - \omega_0^2}$. Рух, який відповідає розв'язку (1.33), має неколивальний характер і тому називається аперіодичним. Сталі інтегрування c_1, c_2 визначаються на підставі початкових умов (1.24)

$$c_1 = \frac{x_0(p+h) + \dot{x}_0}{2p}, \; c_2 = \frac{x_0(p-h) - \dot{x}_0}{2p}.$$

Якщо $h = \omega_0$ (випадок кратних коренів характеристичного рівняння), загальний розв'язок рівняння (1.32) записується у формі

$$x = e^{-ht}(c_1 + c_2 t), \tag{1.34}$$

а сталі інтегрування визначаються з виразів $c_1 = x_0, c_2 = \dot{x}_0 + hx_0$. Загальний розв'язок диференціального рівняння (1.32) при $h < \omega_0$, тобто у випадку малого опору, набирає вигляду

$$x = e^{-ht}(c_1 cos\omega_1 t + c_2 sin\omega_1 t), \tag{1.35}$$

або

$$x = Ae^{-ht} sin(\omega_1 t + \alpha), \tag{1.36}$$

де

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - h^2} \tag{1.37}$$

У цьому випадку сталі інтегрування для заданих початкових умов (1.24) визначаються з виразів

$$c_1 = x_0; c_2 = \frac{\dot{x}_0 + x_0 h}{\sqrt{\omega_0^2 - h^2}}; A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + x_0 h}{\sqrt{\omega_0^2 - h^2}}\right)^2}; \; \alpha = arctg\frac{x_0\sqrt{\omega_0^2 - h^2}}{\dot{x}_0 + x_0 h}.$$

Рух, що відповідає розв'язку (1.36), є коливальним з амплітудою, яка зменшується з часом, тобто відбуваються згасаючі коливання. Період цих коливань $T_k = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - h^2}}$, відповідно величина $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$ є коловою частотою згасаючих коливань. Числова послідовність, яка складається з амплітудних (максимальних) значень $A_0, A_1, A_2, \dots$ відхилення точки в один і той самий бік від центра коливань у випадку згасаючих коливань, є геометричною прогресією (рис. 1.2).

Знаменник цієї геометричної прогресії $\eta = e^{-hT_k}$ називається декрементом згасання, або фактором згасання. Модуль натурального логарифма цієї величини $|ln\eta| = hT_k$ є логарифмічним декрементом згасаючих коливань.

Вимушеними коливаннями називаються коливання точки, якщо на неї, крім відновлюваної сили, діє збурювальна сила, яка змінюється з часом за гармонічним законом. У найпростішому випадку збурювальна сила $Q = H_0 sin(\omega t + \sigma)$, де H_0 - максимальне значення збурювальної сили; σ - початкова фаза.

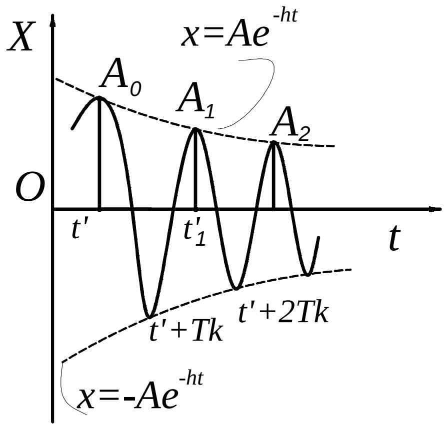

Рисунок 1.2

Диференціальне рівняння вимушених прямолінійних коливань точки без урахування сил опору, записується у вигляді

$$m\ddot{x} + cx = H_0 sin(\omega t + \sigma),$$

а після ділення на m

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = H sin(\omega t + \sigma), \quad (1.38)$$

де $\omega_0^2 = \frac{c}{m}; H = \frac{H_0}{m}$.

Загальний розв’язок неоднорідного диференціального рівняння (1.38) подається у вигляді суми загального розв’язку x_1 відповідного однорідного диференціального рівняння та частинного розв’язку x_2 неоднорідного рівняння, тобто

$$x = x_1 + x_2 \tag{1.39}$$

Загальний розв’язок однорідного рівняння

$$x_1 = c_1 cos\omega_0 t + c_2 sin\omega_0 t \tag{1.40}$$

При визначенні частинного розв’язку x_2 можливі такі три випадки: $\omega_0 \neq \omega;\ \omega_0 \approx \omega;\ \omega_0 = \omega$.

У першому випадку, коли частота вільних коливань не дорівнює частоті збурювальної сили $(\omega_0 \neq \omega)$, частинний розв’язок шукаємо у вигляді

$$x_2 = A^* sin(\omega t + \sigma), \tag{1.41}$$

де $A^* = \dfrac{H}{\omega_0^2 - \omega^2}$ - амплітуда вимушених коливань. Загальний розв’язок у даному випадку

$$x = c_1 cos\omega_0 t + c_2 sin\omega_0 t + A^* sin(\omega t + \sigma). \tag{1.42}$$

Сталі c_1 і c_2 визначаються з урахуванням початкових умов (1.24):

$$c_1 = x_0 - \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2} sin\sigma;\ c_2 = \frac{1}{\omega_0}\left(\dot{x}_0 - \frac{H\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} cos\sigma\right).$$

У другому випадку, коли частота вільних коливань близька за значенням до частоти збурювальної сили $(\omega_0 \approx \omega)$, можна покласти $\omega/\omega_0 \approx 1,\ \omega_0 + \omega \approx 2\omega$ і $\omega_0^2 - \omega^2 \neq 0$. Тоді при нульових початкових умовах $\left[x(t_0) = 0,\ \dot{x}(t_0) = 0\right]$ вираз (1.42) записується так:

$$x = A(t) cos(\omega t + \sigma), \tag{1.43}$$

де $A(t) = \dfrac{2H}{\omega_0^2 - \omega^2} sin\left(\dfrac{\omega - \omega_0}{2} t\right)$.

Рух, що відповідає виразу (1.43), є коливальним, частота якого дорівнює частоті збурювальної сили, а амплітуда повільно змінюється з частотою, що дорівнює половині різниці частоти збурювальної сили та частоти вільних коливань. Це явище називається биттям.

У третьому випадку, коли частота вільних коливань дорівнює частоті збурювальної сили $(\omega_0 = \omega)$, якісно змінюється характер коливань – виникає резонанс. За таких умов загальний розв'язок диференціального рівняння (1.38) подається у вигляді суми загального розв'язку (1.40) однорідного відповідного рівняння та частинного розв'зку x_2 неоднорідного рівняння, який записується у формі

$$x_2 = tA^* cos(\omega t + \sigma), \qquad (1.44)$$

де $A^* = \frac{-H}{2\omega} = -\frac{H}{2\omega_0}$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння (1.38) у випадку резонансу має вигляд

$$x = c_1 cos\omega t + c_2 sin\omega t - \frac{H}{2\omega} t\, cos(\omega t + \sigma), \qquad (1.45)$$

де $c_1 = x_0$, $c_2 = \frac{1}{\omega}\left(\dot{x}_0 + \frac{H}{2\omega} cos\sigma\right)$.

Розв'язок (1.45) можна записати так

$$x = x_0\, cos\,\omega t + \frac{1}{\omega}\left(\dot{x}_0 + \frac{H}{2\omega} cos\sigma\right) sin\,\omega t - \frac{H}{2\omega} t\, sin\left(\omega t + \sigma - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (1.46)$$

Останній доданок виразу (1.46) відповідає вимушеним коливанням у випадку резонансу. Частота ω та період T цих коливань дорівнюють відповідно частоті ω_0 і періоду $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ вільних коливань. Фаза вимушених коливань при резонансі $\omega t + \sigma - \frac{\pi}{2}$ відстає від фази збурювальної сили $\omega t + \sigma$ на величину $\frac{\pi}{2}$. Амплітуда вимушених коливань у випадку резонансу $A = -\frac{H}{2\omega} t$ зростає пропорційно часу (рис. 1.3).

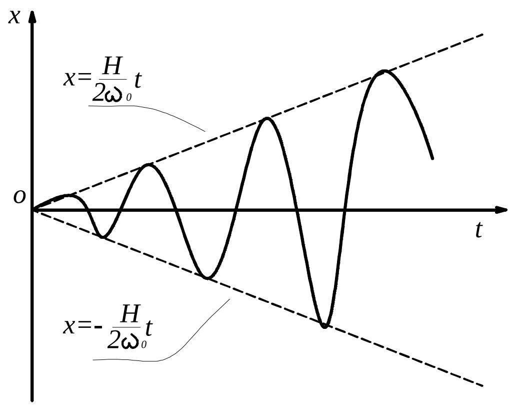

Рисунок 1.3

РОЗДІЛ 2. ДИНАМІКА ВІДНОСНОГО РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

2.1. Основне рівняння динаміки відносного руху матеріальної точки

Основне рівняння динаміки точки надає можливість досліджувати рух точки в нерухомій або інерціальній системі координат. Розв'язування численних задач техніки потребує дослідження руху об'єктів відносно рухомої системи координат . У кінематиці було викладено теорію складного руху точки. У цій теорії розглядається рух відносно рухомої системи координат. При дослідженні руху точки відносно неінерціальної системи координат застосування основного рівняння динаміки точки можливе після розкладання абсолютного руху на переносний і відносний.

Розглянемо рух матеріальної точки масою m, на яку діє сила $\vec{F}$, де $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ - рівнодійна всіх активних сил і реакцій в'язей, прикладених до точки. Рух цієї матеріальної точки відносно нерухомої системи координат є абсолютним, а відносно рухомої системи координат – відносним. Характер переносного руху встановлюється рухом рухомої системи координат відносно нерухомої.

Основне рівняння динаміки абсолютного руху точки має вигляд

$$m\vec{a}_a = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \, . \tag{2.1}$$

Абсолютне прискорення точки $\vec{a}_a$ визначимо за теоремою про додавання прискорень (теорема Коріоліса)

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c . \tag{2.2}$$

Тоді

$$m\vec{a}_r + m\vec{a}_e + m\vec{a}_c = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \, . \tag{2.3}$$

Оскільки нас цікавить рівняння відносного руху, то

$$m\vec{a}_r = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + (-m\vec{a}_e) + (-m\vec{a}_c). \tag{2.4}$$

Вектори $\vec{\Phi}_e = -m\vec{a}_e$, $\vec{\Phi}_c = -m\vec{a}_c$ називають відповідно переносною і коріолісовою силами інерції. Рівняння (2.4) набирає вигляду

$$m\vec{a}_r = \sum_{i=1}^{n} F_i + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c \qquad (2.5)$$

Рівняння (2.5) називають основним рівнянням динаміки відносного руху матеріальної точки.

Із рівняння (2.5) видно, що для складання диференціального рівняння руху матеріальної точки в неінерціальній системі координат у формі другого закону Ньютона (2.1) треба до активних сил і реакцій в'язей, які діють на точку, додати умовно переносну і коріолісову сили інерції. Згідно з цим рівнянням можна так сформулювати закон відносного руху: добуток маси точки на прискорення її відносного руху дорівнює векторній сумі сил, що прикладені до точки, і двох сил інерції – переносної і коріолісової.

Вектори переносної $\vec{\Phi}_e$ і коріолісової $\vec{\Phi}_c$ сил інерції – це поправки на неінерціальність рухомої системи координат. Ці сили фіктивні, оскільки вони не є силами взаємодії між тілами, та отримали назву ейлерових сил інерції. Щоб обчислити переносну і коріолісову сили інерції, треба спочатку визначити за правилами кінематики переносне прискорення і прискорення Коріоліса.

Диференціальні рівняння відносного руху матеріальної точки отримуються з векторного рівняння (2.5) шляхом його проектування на осі рухомої системи координат, відносно якої здійснюється відносний рух. У декартовій системі координат маємо:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum_{i=1}^{n} F_{ix} + \Phi_{ex} + \Phi_{cx}, \\ m\ddot{y} &= \sum_{i=1}^{n} F_{iy} + \Phi_{ey} + \Phi_{cy}, \\ m\ddot{z} &= \sum_{i=1}^{n} F_{iz} + \Phi_{ez} + \Phi_{cz}. \end{aligned} \qquad (2.6)$$

У натуральній системі координат:

$$\begin{aligned} m\ddot{S} &= \sum_{i=1}^{n} F_{i\tau} + \Phi_{e\tau}, \\ m\frac{\dot{S}^2}{\rho} &= \sum_{i=1}^{n} F_{in} + \Phi_{en} + \Phi_{cn}, \\ 0 &= \sum_{i=1}^{n} F_{ib} + \Phi_{eb} + \Phi_{cb}. \end{aligned} \qquad (2.7)$$

Задачі динаміки відносного руху матеріальної точки слід розв'язувати у такій послідовності:

1. Розкласти абсолютний рух точки на відносний і переносний, вибрати рухому систему відліку, жорстко зв'язану з рухомим тілом, що створює для точки переносний рух.

2. Записати початкові умови відносного руху точки.

3. Зобразити на рисунку сили $\vec{F}_i$, що прикладені до точки.

4. Визначити прискорення точки в переносному русі $\vec{a}_e$, прискорення Коріоліса $\vec{a}_c$, силу інерції в переносному русі $\vec{\Phi}_e$, коріолісову силу інерції $\vec{\Phi}_c$ і умовно додати ці сили до сил $\vec{F}_i$.

5. Скласти диференціальні рівняння (2.6) або (2.7) відносного руху матеріальної точки у проекціях на осі рухомої системи координат.

6. Проінтегрувати складені диференціальні рівняння, визначити сталі інтегрування за допомогою початкових умов.

7. Визначити шукані величини.

Зауваження:

- при розв'язанні прямої задачі, тобто при визначенні сил за заданим рухом, пункти 2 і 6 треба відкидати;

- матеріальну точку слід зображувати у поточному положенні, що відповідає додатним координатам цієї точки, і припустити, що точка рухається у бік зростання цих координат;

- при відносному криволінійному русі матеріальної точки зручно користуватися диференціальними рівняннями руху в проекціях на осі натуральної системи координат;

- бажано розв'язувати задачу до кінця у загальному вигляді з буквеними позначеннями величин, для того щоб була можливість непрямої перевірки розв'язку шляхом аналізу розмірностей.

2.2. Окремі випадки відносного руху точки
Умови відносного спокою
Принцип відносності класичної динаміки

Аналізуючи рівняння (2.5), розглянемо такі окремі випадки.

1. Матеріальна точка відносно рухомої системи координат здійснює рівномірний прямолінійний рух. Тоді відносна швидкість $\vec{V}_r = c\vec{o}nst$, а відносне прискорення $\vec{a}_r = 0$. Отже, на основі (2.5) дістанемо

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c = 0. \qquad (2.8)$$

2. Якщо розглядувана точка перебуває у спокої відносно рухомої системи координат, то її відносна швидкість $\vec{V}_r = 0$ і відносне прискорення $\vec{a}_r = 0$. Тоді на основі (2.5) запишемо

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \vec{\Phi}_e = 0. \qquad (2.9)$$

Ця рівність виражає умову відносної рівноваги матеріальної точки, яка формулюється так: при відносній рівновазі матеріальної точки векторна сума активних сил, що діють на точку, реакцій в'язей і переносної сили інерції дорівнює нулю.

3. Якщо рухома система координат здійснює поступальний рух $(\vec{\omega}_e = 0)$, то прискорення Коріоліса $\vec{a}_c = 0$ і коріолісова сила інерції $\vec{\Phi}_c = 0$. Тоді рівняння (2.5) набирає вигляду

$$m\vec{a}_r = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \vec{\Phi}_e. \tag{2.10}$$

4. Якщо рухома система координат є інерціальною, тобто вона рухається рівномірно і прямолінійно $\vec{V}_e = co\vec{n}st$, здійснюючи поступальний рух $(\vec{\omega}_e = 0)$, то на нуль обертаються обидві сили інерції: $\vec{\Phi}_e = 0$ і $\vec{\Phi}_c = 0$. Тоді основне рівняння динаміки відносного руху набере вигляду

$$m\vec{a}_r = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \,. \tag{2.11}$$

Порівнюючи вираз (2.11) з рівнянням (2.1) приходимо до висновку, що за формою вони збігаються. Отже, другий закон Ньютона справедливий у даному разі і для відносного руху матеріальної точки. Зазначене виражає принцип відносності класичної динаміки, встановлений Г. Галілеєм у 1630 р. Цей принцип формулюється так: за однакових початкових умов механічні рухи здійснюються однаково в нерухомих системах координат і в тих, що рухаються поступально, рівномірно та прямолінійно, тобто описуються однаковими рівняннями.

Отже, всі положення динаміки Ньютона справедливі для будь-якої інерціальної системи координат.

Приклад 1. Встановити закон руху кільця M, що рухається вздовж гладенького стрижня OA, якщо маса кільця $m = 2$ *кг*, довжина стрижня $OA = 1$ *м*. Стрижень обертається навколо осі, що проходить через його кінець, з кутовою швидкістю $\omega = 4\ c^{-1}$. У початковий момент часу $(t = 0)$ $OM = 0{,}6$ *м*, $V_M(t = 0) = 0$.

Розв'язання. Згідно з умовою задачі розглядається відносний рух кільця – матеріальної точки M по стрижню OA, що обертається. Уздовж цього стрижня спрямуємо рухому вісь Ox (рис. 2.1). На точку M діє сила ваги $\vec{P} = m\vec{g}$ і нормальна реакція стрижня $\vec{N}$. Відносна швидкість $V_r = \dfrac{dx}{dt}$, відносне прискорення $a_r = \dfrac{d^2x}{dt^2}$. Введемо сили інерції. Оскільки переносним є обертальний рух навколо осі Oy зі сталою кутовою швидкістю $\omega_e = \omega = 4c^{-1}$, то $\varepsilon_e = 0$. Отже, переносна сила інерції $\vec{\Phi}_e$ буде відцентровою силою (рис. 2.1), що дорівнює $mx\omega^2$, оскільки радіусом обертання є $r = OM = x$. Прискорення Коріоліса $\vec{a}_c = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r)$; коріолісова сила інерції $\vec{\Phi}_c = -m\vec{a}_c$. Як видно з рисунка 2.1, $\vec{\Phi}_c$ перпендикулярна до осі Ox, тому проекція $\Phi_{cx} = 0$. Спроектувавши всі сили на вісь Ox, матимемо $m\frac{d^2x}{dt^2} = \Phi_e$, оскільки проекції решти сил на вісь Ox дорівнюють нулю. Оскільки переносна сила інерції $\Phi_e = mx\omega^2$, то $m\frac{d^2x}{dt^2} = mx\omega^2$, або з урахуванням значення ω

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 16x = 0. \qquad (1)$$

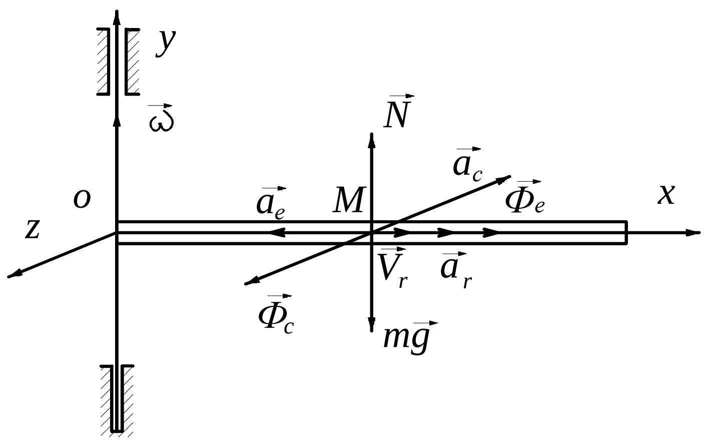

Рисунок 2.1

Складемо характеристичне рівняння $p^2 - 16 = 0$, звідки $p_{1,2} = \pm 4$. Отже, загальний розв’язок рівняння (1) має вигляд

$$x = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-4t}. \qquad (2)$$

Сталі c_1 і c_2 визначимо з початкових умов при $t = 0$; $x(0) = 0{,}6$; $\dot{x}_0(0) = 0$. Знайдемо похідну

$$\frac{dx}{dt}: \ \frac{dx}{dt} = 4(c_1 e^{4t} - c_2 e^{-4t}). \qquad (3)$$

Підставимо тепер початкові умови в рівності (2) та (3) і дістанемо систему рівнянь для визначення c_1 і c_2: $c + c_2 = 0{,}6$; $c_1 - c_2 = 0$, звідки $c_1 = c_2 = 0{,}3$. З урахуванням c_1 і c_2 закон руху кільця M уздовж стрижня, що обертається, матиме вигляд

$$x = 0{,}3(e^{4t} + e^{-4t}) = 0{,}6ch4t \quad (4)$$

Приклад 2. Тіло *А*, в якому на видовбаній циліндричній поверхні знаходиться точка M (рис. 2.2), рухається зі сталим прискоренням $\vec{a}$ у горизонтальному напрямку. Тертя між точкою і поверхнею відсутнє. Визначити кут α, який відповідає відносному зрівноваженому положенню точки.

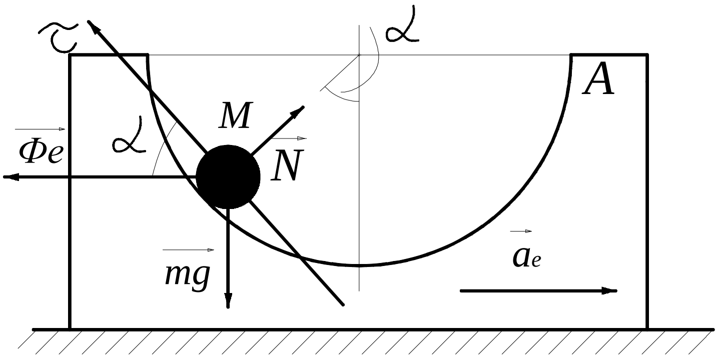

Рисунок 2.2

Розв'язання. Зобразимо точку M в передбачуваному зрівноваженому положенні і прикладемо до неї силу ваги $m\vec{g}$, нормальну реакцію $\vec{N}$ і силу інерції $\vec{\Phi}_e = -m\vec{a}$, напрямлену протилежно до переносного прискорення $\vec{a}$. Невідомими величинами тут є $\vec{N}$ і кут α, що визначає шукане зрівноважене положення. Для виключення невідомої реакції $\vec{N}$ напишемо одне рівняння проекцій на тангенціальну (дотичну) вісь і отримаємо величину кута α: $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{i\tau} + \Phi_{e\tau} = 0$; $-mg sin\alpha + ma cos\alpha = 0$, звідки $tg\alpha = \dfrac{a}{g}$, або $\alpha = arctg\dfrac{a}{g}$.

РОЗДІЛ 3. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО СИСТЕМИ МАТЕРІАЛЬНИХ ТОЧОК

3.1. Основні поняття динаміки системи матеріальних точок

Системою матеріальних точок називається сукупність матеріальних точок, положення і рухи яких взаємозв’язані.

Розрізняють вільні та невільні системи. Якщо на рух точок системи не накладені наперед задані обмеження, то система називається вільною. Іншими словами, точки системи у будь-який момент часу можуть займати довільне положення і мати довільні швидкості.

Невільною називається така система матеріальних точок, на рух яких накладені в’язі. У задачах техніки зустрічаються в основному невільні системи (невільні тверді тіла).

Нагадаємо, що в’язі поділяються на геометричні та кінематичні. Геометричні в’язі накладають обмеження на координати точок системи, кінематичні – на швидкості точок системи. Умови, що обмежують вільність руху матеріальних точок системи, виражаються деякими рівняннями, які називаються рівняннями в’язей. У загальному випадку ці рівняння встановлюють зв’язки між координатами матеріальних точок, проекціями швидкостей цих точок і часом.

Рівняння геометричної в’язі мають вигляд

$$f_j(t, x_1, y_1, z_1, ...x_n, y_n, z_n) = 0, \quad j = 1,2,..., k_1. \tag{3.1}$$

Рівняння кінематичного зв’язку записують у формі

$$\varphi_j(t, x_1, y_1, z_1, ...x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, ..., \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n) = 0, \quad j = 1,2,..., k_2. \tag{3.2}$$

Якщо на систему матеріальних точок одночасно накладено геометричні та кінематичні в’язі, то загальна кількість в’язей буде $k = k_1 + k_2$. Зазначимо,для того щоб рух відбувався, загальна кількість в’язей k не повинна перевищувати числа $3n$ координат n матеріальних точок системи.

За класифікацією німецького фізика Г.Герца в’язі поділяються на голономні та неголономні. Голономними називаються в’язі, рівняння яких можуть бути проінтегровані. Неголономними, або неінтегрованими, називаються в’язі, у диференціальні рівняння яких явно входять швидкості так, що для цих рівнянь не існує інтегруючого множника. Класичним прикладом системи з неголономними в’язями є кочення без ковзання абсолютно твердої кулі радіусом R по шорсткій поверхні.

Розрізняють також в’язі неутримуючі та утримуючі. В’язь називається утримуючою, якщо вона обмежує рух як у певному напрямі, так і у протилежному. Утримуюча в’язь виражається рівнянням (3.2). В’язь називається неутримуючою, якщо вона обмежує рух у певному напрямі, але не обмежує у протилежному. Неутримуюча в’язь визначається нерівністю

$$\varphi_j(t, x_1, y_1, z_1, ...x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, ..., \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n) \le 0, \quad j = 1,2,..., k \qquad (3.3)$$

У механіці найчастіше розглядають утримуючі в’язі. Розрізняють також в’язі стаціонарні і нестаціонарні. Якщо в рівняння в’язі явно час не входить, то в’язь називається стаціонарною. У протилежному випадку в’язь називається нестаціонарною.

3.2. Сили. Їх класифікація та властивості

У динаміці, так само як і в статиці, використовують дві класифікації сил, прикладених до системи матеріальних точок, а саме:

1) сили внутрішні і зовнішні;
2) активні сили і реакції в’язей.

Сили внутрішні і зовнішні. Нагадаємо, що внутрішніми називаються сили взаємодії між матеріальними точками однієї і тієї самої системи. Внутрішні сили позначимо через $\vec{F}_i^b$. Вони мають такі властивості: головний вектор і головний момент внутрішніх сил відносно деякої точки, наприклад O, дорівнюють нулю:

$$\vec{F}_i^b = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^b = 0, \;\; \vec{M}_o^b = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_0(\vec{F}_i^b) = 0, \qquad (3.4)$$

Умови (3.4) одержуємо на основі третього закону Ньютона. Слід зазначити, що ці умови не можна розглядати як достатні умови рівноваги внутрішніх сил. При розгляді руху змінюваної системи матеріальних точок питання про рівновагу внутрішніх сил не має фізичного змісту, оскільки ці сили прикладені до різних тіл і до них не можна застосовувати аксіому 1 про дві сили, хоча внутрішні сили діють попарно, мають загальну лінію дії, рівні за модулем і протилежно напрямлені.

Як показано в статиці, внутрішні сили урівноважуються або утворюють нульову систему лише тоді, коли вони прикладені до абсолютно твердого тіла.

Зовнішніми називаються сили взаємодії між матеріальними точками певної системи й іншими фізичними тілами, що не входять у систему. Зовнішні сили позначимо через $\vec{F}_i^e$. Ця класифікація сил застосовується в основному у разі вільної системи матеріальних точок. Залежно від складу системи одні й ті самі сили можуть бути або зовнішніми, або внутрішніми.

Активні сили і реакції в’язей. За другою класифікацією сили поділяються на активні та реакції в’язей. Активну силу позначимо $\vec{F}$, а реакцію в’язей $\vec{R}$. Ця класифікація застосовується у разі невільної системи матеріальних точок. Реакціями в’язей називають сили, з якими в’язі діють на систему матеріальних точок. Реакції в’язей, на відміну від активних сил, є невідомими величинами і в загальному випадку залежать від закону руху механічної системи.

Розроблення методів визначення реакцій в'язей є однією із задач динаміки невільної системи. Зазначимо, що реакції в'язей вводяться на основі аксіоми про звільнення від в'язей. Таким чином, за допомогою аксіоми про звільнення від в'язей невільна система перетворюється у вільну, але на яку поряд із активними силами діють додаткові сили – реакції в'язей.

3.3. Диференціальні рівняння руху системи матеріальних точок.

Вільна система матеріальних точок. Основною задачею динаміки системи матеріальних точок є дослідження її руху при заданих силах, що діють на систему. Розглянемо систему матеріальних точок, на які діють внутрішні $\vec{F}_i^b$ і зовнішні $\vec{F}_i^e$ сили. Для довільної матеріальної точки системи рівняння руху має вигляд

$$m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i^e + \vec{F}_i^b,\ i = 1,2,...,n. \qquad (3.5)$$

Цим n рівнянням руху у векторній формі відповідають $3n$ диференціальних рівнянь у координатній формі:

$$\begin{aligned} m_i\ddot{x}_i &= F_{ix}^e + F_{ix}^b, \\ m_i\ddot{y}_i &= F_{iy}^e + F_{iy}^b, \\ m_i\ddot{z}_i &= F_{iz}^e + F_{iz}^b \quad i = 1,2,...,n. \end{aligned} \qquad (3.6)$$

Рівняння (3.6) становлять систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. При інтегруванні цієї системи рівнянь одержимо $6n$ сталих інтегрування, які визначимо з початкових умов руху.

Знаходження невідомих функцій x_i, y_i, z_i із системи рівнянь (3.6), загалом, пов'язане зі значними, а інколи й нездоланними математичними труднощами, які пов'язані з тим, що в ці рівняння можуть входити невідомі внутрішні сили, які попередньо потрібно визначити.

Крім того, труднощі розв'язання системи рівнянь можуть виникати через її високий порядок і взаємозв'язок окремих рівнянь системи, оскільки сили, що входять у ці рівняння, можуть залежати від координат не тільки однієї матеріальної точки системи.

Подолати ці труднощі допомагають загальні теореми динаміки, які дають можливість одержати залежності між різними характеристиками руху точок системи, не інтегруючи диференціальні рівняння руху системи (3.6).

Невільна система матеріальних точок. Якщо система матеріальних точок невільна, то на неї діють активні сили $\vec{F}_i$ і реакції в'язей $\vec{R}_i$. Нехай невільна система складається з n матеріальних точок, маси яких відповідно дорівнюють $m_1, m_2, ..., m_n$. Звільнивши цю систему від в'язей і замінивши їх на реакції і формально перетворивши її у вільну, складемо диференціальне рівняння руху невільної системи у векторній формі

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i, i = 1,2,...,n \tag{3.7}$$

або

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i + \vec{R}_i, \tag{3.8}$$

де $\vec{F}_i$ - рівнодійна активних сил, прикладених до i-ї точки системи;
$\vec{R}_i$ - рівнодійна реакцій в'язей, прикладених в i-й точці системи.

Рівнянням (3.8) у векторній формі відповідають рівняння руху невільної системи в координатній формі:

$$\begin{aligned} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= X_i + R_{ix}, \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= Y_i + R_{iy}, \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= Z_i + R_{iz}, \quad i = 1,2,...,n, \end{aligned} \tag{3.9}$$

де X_i, Y_i, Z_i - проекції рівнодійної активних або задаваних сил на осі декартових координат, а R_{ix}, R_{iy}, R_{iz} - проекції рівнодійної реакцій $\vec{R}_i$ на ті самі осі координат.

Як бачимо з (3.9), диференціальних рівнянь $3n$, а невідомих $6n$, тобто $3n$ координат і $3n$ проекцій реакцій в'язей, що діють на точки системи. Це не дає можливості розв'язати основну задачу динаміки, тобто за відомими масами і силами, що діють на точки системи, визначити закон руху точок системи.

Отже, у загальному вигляді задачу про рух невільної системи матеріальних точок без додаткових співвідношень, які задовольняють в'язі, розв'язати не можна. Задача може бути розв'язана лише для ідеальних в'язей за допомогою рівнянь Лагранжа першого роду.

3.4. Маса системи. Центр мас системи

Масою системи, що складається з n матеріальних точок, називається сума мас точок системи

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \tag{3.10}$$

Центром мас, або центром інерції системи матеріальних точок, називається геометрична точка c, радіус-вектор якої має вигляд

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m}, \tag{3.11}$$

де m_i - маса i-ї точки системи; $\vec{r}_i$ - радіус-вектор i-ї точки системи.

Координати центра мас (центра інерції) системи з урахуванням (3.11) мають вигляд

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{m}, \tag{3.12}$$

де x_i, y_i, x_i - координати i-ї точки системи.

Диференціюючи співвідношення (3.11) за часом, знайдемо швидкість і прискорення центра мас (центра інерції) в нерухомій системі координат.

Поняття центра мас більш широке, ніж поняття центра ваги системи. Геометрично центр ваги системи збігається з його центром мас, проте ототожнювати центр ваги з центром мас не можна, оскільки між ними є глибокі фізичні відмінності. Відомо, що поняття про центр ваги пов'язане з припущенням про однорідність поля сил ваги в незначних областях поблизу поверхні Землі. Насправді ж сили ваги непаралельні. Отже, поняття центра ваги вводиться наближено на основі гіпотези про паралельність сил ваги. Поняття центра мас не залежить від такого роду припущень.

Як бачимо з формул (3.12), координати центра мас залежать тільки від розподілу мас. Зауважимо, що положення центра мас в тілі чи незмінній системі є незмінним і не залежить від вибору системи координат і закону її руху.

Введення поняття центра мас (центра інерції) дає змогу у ряді випадків звести задачу про рух системи матеріальних точок до задачі про рух однієї точки – центра мас.

3.5. Моменти інерції механічної системи

Поняття моменту інерції тіла належить до основних і важливих понять у динаміці. Це є характеристика розподілу мас у системі. У теоретичній механіці приймається гіпотеза про те, що маса твердого тіла розподіляється неперервно. Наведемо такі означення.

1. Моментом інерції матеріальної точки відносно осі називають добуток маси цієї точки m на квадрат її відстані h до цієї осі, наприклад *Oz*:

$$I_z = mh^2. \tag{3.13}$$

2. Моментом інерції системи? яка складається з n матеріальних точок, відносно осі називають суму добутків мас точок системи на квадрати відстаней h_i від точок до осі:

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i h_i^2 \,. \qquad (3.14)$$

У разі неперервного розподілу маси замість суми буде інтеграл, що поширений на всю масу.

3. Моментом інерції твердого тіла відносно осі, наприклад *Oz*, називають інтеграл, що поширений на всю масу і має вигляд

$$I_z = \int_{(m)} r^2 dm \,, \qquad (3.15)$$

або

$$I_x = \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm, \quad I_y = \int_{(m)} (x^2 + z^2) dm, \quad I_z = \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm, \qquad (3.16)$$

де x, y, z - координати точки.

У ряді випадків, для обчислення моментів інерції користуються поняттям радіуса інерції, або плеча інерції. Радіусом інерції ρ називають відстань, на якій від осі обертання треба розмістити масу m тіла, що розглядається, зосередивши її в одній точці, щоб вона мала той самий момент інерції, що і розглядуване тіло:

$$I_z = m\rho^2 \,. \qquad (3.17)$$

Розрізняють моменти інерції осьові або аксіальні, полярні, планарні та відцентрові. Для обчислення осьового моменту інерції точки її масу множать на квадрат відстані до осі (3.13), полярного – до заданої точки (полюса), планарного - до заданої площини.

Осьовий момент інерції тіла – це фізична величина, що характеризує міру інертності тіла під час обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі.

Розглянемо теорему Гюйгенса-Штейнера про моменти інерції відносно паралельних осей.

Теорема: момент інерції системи матеріальних точок або твердого тіла відносно деякої осі дорівнює моменту інерції відносно центральної осі, що паралельна даній, складеному з добутком маси системи (тіла) на квадрат відстані між осями.

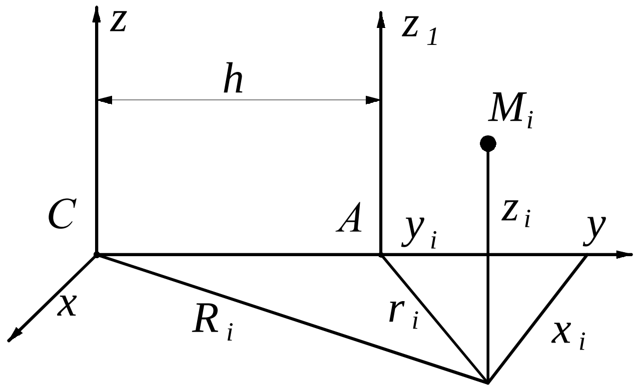

Рисунок 3.1

Доведення. Нехай центр мас C є початком координат (рис. 3.1), вісь Az_1 паралельна центральній осі Cz. Розглянемо довільну точку системи $M_i(x_i, y_i, z_i)$, відстань якої від осі Cz дорівнює R_i, а від осі $Az_i - r_i$. Відстань між осями дорівнює h. Обчислимо момент інерції системи відносно осі Az_1:

$$I_{z_1} = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[(y_i - h)^2 + x_i^2 \right] = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2) + h^2 \sum_{i=1}^{n} m_i - 2h \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \,, \qquad (3.18)$$

Проте оскільки $\sum_{i=1}^{n} m_i y_i = m y_c = 0,\quad x_i^2 + y_i^2 = R_i^2,\quad I_{z_1} = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 + mh^2$, де за означенням осьового моменту інерції $\sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 = I_z = I_c$.

Тоді

$$I_{z_1} = I_c + mh^2, \qquad (3.19)$$

що і треба було довести.

Із (3.19) також видно, що вісь, яка проходить через центр інерції, є віссю найменшого моменту інерції серед усіх паралельних осей.

Приклад 1. Обчислити момент інерції однорідного тонкого стрижня (довжина його l, постійний попередній переріз σ) відносно осі Oz, яка перпендикулярна до стрижня і проходить через його кінець O (рис. 3.2).

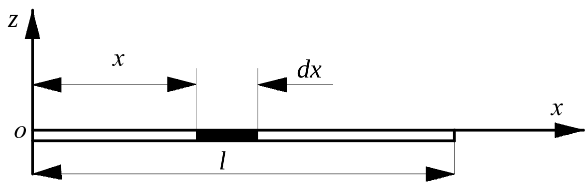

Рисунок 3.2

Виділимо на відстані x від осі Oz елемент стрижня dx. Тоді елементарна маса $dm = \gamma\sigma dx$, де γ - густина матеріалу стрижня, а σ - площа поперечного перерізу стрижня. Момент інерції стрижня має вигляд

$$I_{Oz} = \int\limits_{(m)} x^2 dm = \int\limits_0^l \gamma\sigma x^2 dx = \gamma\sigma \int\limits_0^l x^2 dx = \gamma\sigma \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^l = \frac{\gamma\sigma l^3}{3} = \frac{ml^2}{3}, \tag{3.20}$$

де $m = \gamma\sigma l$ - маса стрижня.

Отже,

$$I_{Oz} = \frac{1}{3} ml^2, \tag{3.21}$$

тобто дорівнює третині добутку маси стрижня на квадрат його довжини.

Вирази для моментів інерції інших тіл найпростішої форми можна знайти в довідниковій літературі з механіки.

Розділ 4. Основні (загальні) теореми динаміки

4.1. Основні теореми динаміки як методи дослідження механічного руху

Розв’язання диференціальних рівнянь пов’язане з великими труднощами, викликаними з визначенням внутрішніх сил, а також знаходженням загального інтеграла системи диференціальних рівнянь (3.6) високого порядку. Разом з тим існує багато задач динаміки, розв’язання яких не потребує повної інформації про всі властивості досліджуваного руху системи і застосування диференціальних рівнянь (3.6). До таких задач належать, наприклад, задачі, пов’язані з визначенням зовнішніх сил, що діють на матеріальні точки системи, і задачі, що потребують визначення кінематичних рівнянь руху не всіх матеріальних точок системи, а тільки центра мас або визначення мір механічного руху системи (головного вектора кількості руху, головного моменту кількості руху, кінетичної енергії). Такі задачі часто виникають у техніці. До ефективних методів розв’язування цих задач належать загальні або основні теореми динаміки, що встановлюють співвідношення між мірами механічного руху системи матеріальних точок (або однієї матеріальної точки) і силами, що характеризують динамічний ефект дії оточуючих тіл на кожну матеріальну точку системи.

Основні теореми динаміки характеризують окремі властивості механічного руху і надають часткову інформацію про цей рух. При розв’язанні динамічних задач, що потребують визначення окремих властивостей руху системи, основні теореми динаміки є найбільш ефективними методами дослідження.

У динаміці системи матеріальних точок розглядають чотири основні теореми – про рух центра мас, про зміну кількості руху, про зміну кінетичного моменту і про зміну кінетичної енергії. У динаміці матеріальної точки – три основні теореми (про зміну кількості руху, про зміну моменту кількості руху і про зміну кінетичної енергії).

Загальні, або основні, теореми динаміки можна подати як у диференціальній, так і в інтегральній формі.

4.2. Теорема про рух центра мас

Теорема. Центр мас системи матеріальних точок рухається як вільна матеріальна точка, маса якої дорівнює масі всієї системи і на яку діє сила, що дорівнює головному вектору зовнішніх сил.

Доведення. Нехай система складається з n матеріальних точок, на кожну з яких діють зовнішня $\vec{F}_i^e$ і внутрішня $\vec{F}_i^b$ сили. Згідно з (3.5) рівняння руху i-ї точки системи має вигляд

$$m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i^e + \vec{F}_i^b,\ \ i = 1,2,...,n. \tag{4.1}$$

Склавши ліві та праві частини цих рівнянь, одержимо

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^e + \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^b\,, \tag{4.2}$$

Оскільки головний вектор внутрішніх сил $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^b$ дорівнює нулю, то

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^e \tag{4.3}$$

На основі співвідношення (3.11) $\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a}_i = m\vec{a}_c$ сума $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^e$ дорівнює головному вектору зовнішніх сил $\vec{F}^e$, тоді остаточно отримаємо

$$m\vec{a}_c = \vec{F}^e, \tag{4.4}$$

що і потрібно було довести.

Векторній рівності (4.4) відповідають три диференціальні рівняння в координатній формі. Проектуючи обидві частини рівності (4.4) на осі координат, одержимо:

$$m\ddot{x}_c = \vec{F}_x^e,\ m\ddot{y}_c = \vec{F}_y^e,\quad m\ddot{z}_c = \vec{F}_z^e, \tag{4.5}$$

де $F_x^e = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}^e,\quad F_y^e = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}^e,\quad F_z^e = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}^e$.

Із теореми випливає декілька наслідків.

1. Одними лише внутрішніми силами не можна змінити характер руху центра мас системи матеріальних точок. Внутрішні сили можуть здійснювати непрямий вплив на рух центра мас лише через зовнішні сили.

2. Якщо головний вектор $\vec{F}^e$ зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю, то центр мас перебуває у стані спокою, або рухається рівномірно і прямолінійно залежно від початкових умов. Справді, якщо $\vec{F}^e = 0$, то з рівняння (4.4) маємо

$$\vec{a}_c = \frac{d\vec{V}_c}{dt} = 0 \qquad (4.6)$$

Звідси, інтегруючи, одержимо $\vec{V}_c = \vec{V}_c(0) = co\vec{n}st$, де $\vec{V}_c(0)$ - початкова швидкість центра мас. Якщо $\vec{V}_c(0) = 0$, то $\vec{r}_c = co\vec{n}st$. Зазначимо, що пара сил, прикладена до твердого тіла, не може змінити характер руху його центра мас, бо головний вектор пари сил дорівнює нулю. Пара сил може спричинити лише обертання тіла.

3. Якщо одна з проекцій головного вектора зовнішніх сил на вісь нерухомої системи координат дорівнює нулю, то проекція швидкості центра мас на цю вісь не змінюється. Цей висновок випливає безпосередньо з рівнянь (4.5). Наприклад, якщо $F_x^e = 0$, то

$$m\frac{d^2x_c}{dt^2} = m\frac{dV_{cx}}{dt} = 0\,. \qquad (4.7)$$

Звідси $V_{cx} = const = V_{cx}(0)$. При $V_{cx}(0) = 0 \Rightarrow x_c = const$.

Якщо в початковий момент часу швидкість центра мас або її проекція на вісь дорівнює нулю, то точки системи можуть рухатися тільки так, щоб радіус-вектор $\vec{r}_c$ або відповідна координата залишалися незмінними.

Якщо задано рух центра мас системи матеріальних точок, то теорема про рух центра мас дає змогу визначити головний вектор зовнішніх сил, що діють на точки системи.

4.3. Теорема про зміну кількості руху системи матеріальних точок

Кількістю руху (мірою механічного руху) матеріальної точки $\vec{q}$ називається вектор, який дорівнює добутку маси точки m на вектор її швидкості:

$$\vec{q} = m\vec{V}. \qquad (4.8)$$

Кількістю руху $\vec{Q}$ системи матеріальних точок називається головний вектор (векторна сума) кількостей руху матеріальних точок, що входять у систему:

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^{n} \vec{q}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_i . \qquad (4.9)$$

Виходячи з цього визначення кількості руху системи, доведемо наступну теорему.

Теорема. Кількість руху системи матеріальних точок (твердого тіла) дорівнює добутку маси системи (твердого тіла) на швидкість її (його) центра мас.

Доведення. На основі формули (3.11) маємо

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_i = m\vec{V}_c . \qquad (4.10)$$

Підставивши це співвідношення в (4.9), одержимо

$$\vec{Q} = m\vec{V}_c , \qquad (4.11)$$

що і потрібно було довести.

Векторній рівності (4.11) відповідають три рівності в координатній формі

$$Q_x = mV_{cx}, \quad Q_y = mV_{cy}, \quad Q_z = mV_{cz} . \qquad (4.12)$$

Як бачимо з формули (4.11), кількість руху системи матеріальних точок дорівнює кількості руху однієї матеріальної точки, маса якої дорівнює масі системи, а швидкість дорівнює швидкості центра мас.

Теорема. Похідна за часом від кількості руху системи матеріальних точок дорівнює головному вектору зовнішніх сил, прикладених до точок системи.

Доведення. Нехай система складається з n матеріальних точок. На довільну i-ту точку системи діють зовнішні й внутрішні сили $\vec{F}_i^e$ і $\vec{F}_i^b$. Кількість руху цієї точки дорівнює $m_i\vec{V}_i$. За другим законом Ньютона маємо

$$\frac{d(m_i\vec{V}_i)}{dt} = \vec{F}_i^e + \vec{F}_i^b, \quad i = 1,2,...,n. \qquad (4.13)$$

Складаючи ліві та праві частини цих рівнянь, на основі формул (4.9), (4.11) і враховуючи, що $\vec{Q} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{V}_i = m\vec{V}_c$, одержимо

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\,e} + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\,b}, \quad i = 1,2,...,n. \tag{4.14}$$

Другий доданок у правій частині останнього рівняння як головний вектор внутрішніх сил дорівнює нулю, а $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\,e} = \vec{F}^{\,e}$ - головний вектор зовнішніх сил. Остаточно одержимо:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^{\,e}, \tag{4.15}$$

що і необхідно було довести. Векторній рівності (4.15) відповідають три в координатній формі

$$\frac{dQ_x}{dt} = F_x^{\,e}, \quad \frac{dQ_y}{dt} = F_y^{\,e}, \quad \frac{dQ_z}{dt} = F_z^{\,e}, \tag{4.16}$$

де $F_x^{\,e} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}^{\,e}, \quad F_y^{\,e} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}^{\,e}, \quad F_z^{\,e} = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}^{\,e}$ - проекції головного вектора зовнішніх сил на осі координат.

Неважко впевнитися, що коли в (4.15) у випадку незмінної маси системи замість $\vec{Q}$ підставити його значення $\vec{Q} = m\vec{V}_c$, то одержимо теорему про рух центра мас:

$$m\vec{a}_c = \vec{F}^{\,e}. \tag{4.17}$$

Формула (4.15) – теорема про зміну кількості руху системи матеріальних точок у диференціальній формі.

Зазначимо, що теорему про зміну кількості руху системи у формі рівняння (4.15) можна застосувати і до системи зі змінною масою, наприклад, у випадку реактивних сил, тим часом як теорему про центр мас – лише до систем незмінної маси.

Із теореми про зміну кількості руху системи, записаної у векторній (4.15) або скалярній (4.16) формі випливають три наслідки, аналогічні за змістом до наслідків з теореми про рух центра мас.

1. Одними внутрішніми силами не можна змінити кількість руху системи.

2. Якщо головний вектор зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю, то кількість руху матеріальної системи залишається незмінною, тобто $\vec{Q} = \overrightarrow{const}$.

3. Якщо проекція головного вектора зовнішніх сил, прикладених до системи, на деяку нерухому в інерціальній системі координат вісь дорівнює нулю, то проекція кількості руху на цю вісь залишається незмінною, тобто

якщо $F_e^x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}^e = 0 \Rightarrow Q_x = const$. Наведені другий і третій наслідки з теореми про зміну кількості руху системи називаються законами збереження кількості руху системи матеріальних точок.

Доведемо теорему про зміну кількості руху системи матеріальних точок в інтегральный формі або, як ще її називають, теорему імпульсів для системи.

Теорема. Приріст кількості руху системи матеріальних точок за деякий проміжок часу $[t_0, t]$ дорівнює повному імпульсу головного вектора зовнішніх сил, прикладених до точок системи, за той самий проміжок часу.

Доведення. Перепишемо рівність (4.15) у вигляді

$$d\vec{Q} = \vec{F}^e dt. \tag{4.18}$$

Інтегруючи цю рівність у межах від t_0 до t, одержимо

$$\vec{Q}(t) - \vec{Q}(t_0) = \int_{t_o}^{t} \vec{F}^e dt. \tag{4.19}$$

Добуток $\vec{F}^e dt$ називається елементарним імпульсом сили і позначається $d\vec{S}^e$. Повний імпульс сили дорівнює

$$\vec{S}^e = \int_{t_0}^{t} d\vec{S}^e = \int_{t_0}^{t} \vec{F}^e dt. \tag{4.20}$$

Підставивши (4.20) у співвідношення (4.19), одержимо

$$\vec{Q}(t) - \vec{Q}(t_0) = \vec{S}^e, \text{ або } \vec{Q} - \vec{Q}_0 = \vec{S}^e. \tag{4.21}$$

Рівність (4.21) виражає теорему про зміну кількості руху системи матеріальних точок в інтегральній формі, що і потрібно було довести. Одній векторній рівності (4.21) відповідають три в координатній формі:

$$\begin{aligned} Q_x - Q_{ox} &= S_x^e, \\ Q_y - Q_{oy} &= S_y^e, \\ Q_z - Q_{oz} &= S_z^e. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Теорему імпульсів (4.21) застосовують в теорії удару, а також у гідродинаміці.

4.4. Теорема про зміну моменту кількості руху точки

Якщо перша міра механічного руху $m\vec{V}$ характеризує поступальний рух тіла. то для характеристики обертального руху застосовується друга міра руху – момент кількості руху (або кінетичний момент).

Моментом кількості руху $\vec{K}_0$ точки відносно центра O називається величина, що дорівнює векторному добутку радіуса-вектора $\vec{r}$ матеріальної точки, проведеного з цього центра, на кількість її руху:

$$\vec{K}_0 = \vec{m}_0(m\vec{V}) = \vec{r} \times m\vec{V}. \quad (4.23)$$

Співвідношення між моментом кількості руху (кінетичним моментом) і моментом сили встановлюється на основі теореми про зміну моменту кількості руху (кінетичного моменту).

Теорема. Похідна за часом від моменту кількості руху матеріальної точки відносно нерухомого центра O (або осі) дорівнює моменту рівнодійної сил, прикладених до точки, відносно того самого центра (або осі).

Доведення. Нехай матеріальна точка M масою m рухається зі швидкістю $\vec{V}$ під дією сили $\vec{F}$. Кількість руху цієї точки дорівнює $m\vec{V}$. Радіус-вектор точки M позначимо $\vec{r}$. Точка O є центром моменту (рис. 4.1).

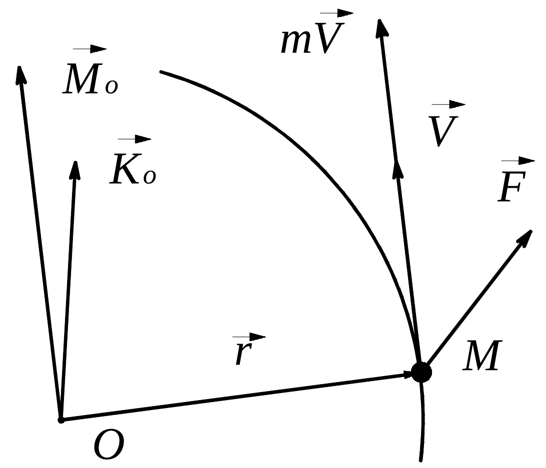

Рисунок 4.1

Зі статики відомо, що момент рівнодійної сил $\vec{F}$ відносно центра O дорівнює $\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F}$. За визначенням момент кількості руху матеріальної точки (кінетичний момент) відносно того самого центра O буде

$$\vec{K}_o = \vec{r} \times m\vec{V}. \quad (4.24)$$

Взявши першу похідну за часом від моменту кількості руху і враховуючи, що $\frac{d(m\vec{V})}{dt} = \vec{F}$, одержимо

$$\frac{d\vec{K}_o}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{V}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{V} + \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{V}) = \vec{V} \times m\vec{V} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_o, \tag{4.25}$$

бо $\vec{V} \times m\vec{V} = 0$. Остаточно одержимо

$$\frac{d\vec{K}_o}{dt} = \vec{M}_o, \tag{4.26}$$

що й потрібно було довести.

Векторній рівності (4.26) відповідають три рівності в координатній формі, якщо спроектувати її на осі деякої системи координат, наприклад $Oxyz$:

$$\frac{dK_x}{dt} = M_x, \quad \frac{dK_y}{dt} = M_y, \quad \frac{dK_z}{dt} = M_z, \tag{4.27}$$

де K_x, K_y, K_z - моменти кількості руху матеріальної точки відносно координатних осей; M_x, M_y, M_z - моменти рівнодійної сил, прикладених до точки, відносно координатних осей.

З розглянутої теореми наведемо закони збереження моменту кількості руху матеріальної точки, аналогічні до законів збереження кількості руху точки.

1. Якщо момент $\vec{M}_o$ рівнодійної сил $\vec{F}$ відносно нерухомого центра O дорівнює нулю $(\vec{M}_o = 0)$, то згідно з (4.26) момент кількості руху точки зберігається незмінним.

2. Якщо момент M_z рівнодійної сил $\vec{F}$ відносно деякої осі, наприклад Oz, дорівнює нулю $(M_z = 0)$, то згідно з (4.27), момент кількості руху точки відносно цієї осі буде незмінним.

4.5. Теорема про зміну моменту кількості руху системи матеріальних точок

Кінетичним моментом $\vec{K}_o$ матеріальної системи, або головним моментом кількості руху системи матеріальних точок відносно центра, називається векторна сума моментів кількостей руху точок системи відносно того самого центра:

$$\vec{K}_o = \sum_{i=1}^{n} \vec{K}_{oi} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{V}_i , \tag{4.28}$$

де $\vec{K}_{oi}$ - момент кількості руху i-ї точки системи; $m_i\vec{V}_i$ - кількість руху i-ї точки; $\vec{r}_i$ - радіус-вектор, що з'єднує нерухомий центр O з i-ю точкою системи.

Проектуючи вектор $\vec{K}_o$ на координатні осі Ox, Oy, Oz, знайдемо вирази для визначення кінетичних моментів відносно координатних осей

$$\begin{aligned} K_x &= \sum_{i=1}^{n} m_i \left(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt} \right), \\ K_y &= \sum_{i=1}^{n} m_i \left(z_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dz_i}{dt} \right), \\ K_z &= \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt} \right), \end{aligned} \tag{4.29}$$

де x_i, y_i, z_i - координати i-ї точки системи; $\frac{dx_i}{dt}, \frac{dy_i}{dt}, \frac{dz_i}{dt}$ - проекції швидкості цієї точки на координатні осі.

Знайдемо кінетичний момент твердого тіла відносно нерухомої осі обертання, наприклад Oz, тобто K_z. Нехай тверде тіло обертається навколо осі Oz з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ (рис. 4.2). Розглянемо елементарний об'єм масою dm, віддалений від осі обертання на відстань r. Швидкість цього об'єму становитиме $V = r\omega$, кількість руху - $dQ = Vdm = r\omega dm$, а елементарний кінетичний момент відносно осі Oz - $dK_z = rdQ = rVdm = r^2\omega dm$. Для всього тіла кінетичний момент буде $K_z = \omega \int\limits_{(m)} r^2 dm$, де інтегрування поширено на масу m усього тіла. Інтеграл $\int\limits_{(m)} r^2 dm$ за всією масою тіла, який залежить лише від характеру розподілу маси в тілі, є моментом інерції тіла відносно осі обертання і позначається I_z (див. 3.5., розд. 3). З урахуванням цього позначення вираз для кінетичного моменту тіла K_z відносно осі Oz запишемо у вигляді

$$K_z = I_z \omega . \tag{4.30}$$

Отже, кінетичний момент твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює добутку моменту інерції тіла відносно нерухомої осі обертання на кутову швидкість.

Теорему про зміну кінетичного моменту системи матеріальних точок, так само, як і теорему про зміну кількості руху системи, можна записувати як у диференціальній, так і в інтегральній формі. Доведемо спочатку теорему в диференціальній формі.

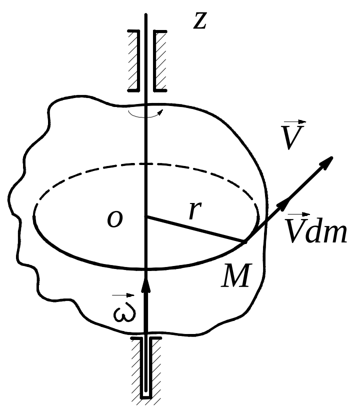

Рисунок 4.2

Теорема. Похідна за часом від кінетичного моменту системи відносно нерухомого центра O дорівнює головному моменту зовнішніх сил відносно того самого центра.

Доведення. Нехай система складається з n матеріальних точок. На i-ту точку системи діють внутрішня $\vec{F}_i^b$ і зовнішня $\vec{F}_i^e$ сили. Тоді вираз (4.26), що відображає теорему про зміну кінетичного моменту для точки, подамо у вигляді

$$\frac{d\vec{K}_{oi}}{dt} = \vec{M}_o(\vec{F}_i^e) + \vec{M}_o(\vec{F}_i^b), \quad i = 1,2,...,n. \tag{4.31}$$

Підсумовуючи ліві та праві частини цієї рівності, одержимо

$$\frac{d\sum_{i=1}^{n}\vec{K}_{oi}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\vec{M}_o(\vec{F}_i^e) + \sum_{i=1}^{n}\vec{M}_o(\vec{F}_i^b), \tag{4.32}$$

де $\sum_{i=1}^{n}\vec{K}_{oi} = \vec{K}_o$ - кінетичний момент системи, або головний момент кількості руху.

Ураховуючи, що головний момент внутрішніх сил $\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_o(\vec{F}_i^b) = 0$ і головний момент зовнішніх сил $\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_o(\vec{F}_i^e) = \vec{M}_o$, виразу (4.32) надамо вигляду

$$\frac{d\vec{K}_o}{dt} = \vec{M}_o, \tag{4.33}$$

що й потрібно було довести.

Цій векторній рівності відповідають три рівності в координатній формі

$$\frac{dK_{ox}}{dt} = M_{ox}, \quad \frac{dK_{oy}}{dt} = M_{oy}, \quad \frac{dK_{oz}}{dt} = M_{oz}. \tag{4.34}$$

Доведемо теорему про зміну кінетичного моменту в інтегральній формі або у формі теореми моменту імпульсів зовнішніх сил.

Теорема. Приріст кінетичного моменту матеріальної системи відносно нерухомого центра O за деякий проміжок часу $[t_0, t]$ дорівнює головному моменту імпульсів зовнішніх сил, прикладених до точок системи, за той самий проміжок часу.

Доведення. Рівність (4.33) перепишемо у вигляді $d\vec{K}_o = \vec{M}_o dt$. Інтегруючи це співвідношення у межах від t_0 до t , одержимо

$$\vec{K}_o(t) - \vec{K}_o(t_0) = \int_{t_0}^{t} M_o dt. \tag{4.35}$$

Розглянемо докладніше праву частину виразу (4.35) з урахуванням виразів (4.19), (4.20) для повного та елементарного імпульсів сил. Оскільки головний момент

$$\vec{M}_o = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^e, \tag{4.36}$$

то, підставивши (4.36) у (4.35) і враховуючи вираз для $d\vec{S}^e$, одержимо

$$\vec{K}_o(t) - \vec{K}_o(t_0) = \int_{t_o}^{t} \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^e dt = \int_{t_o}^{t} \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times d\vec{S}_i^e = \vec{L}_o^e, \tag{4.37}$$

де $\vec{L}_o^e = \int_{t_o}^{t} \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times d\vec{S}_i^e$ - головний момент імпульсів зовнішніх сил відносно центра O.

Отже, остаточно одержимо

$$\vec{K}_o(t) - \vec{K}_o(t_0) = \vec{L}_o^e, \tag{4.38}$$

що й потрібно було довести.

Насамкінець наведемо три наслідки, що випливають з цієї теореми, які за своїм змістом аналогічні до відповідних наслідків з теореми про зміну кількості руху системи.

1. Одними внутрішніми силами не можна змінити кінетичний момент системи.

2. Якщо головний момент $\vec{M}_o$ зовнішніх сил відносно деякої нерухомої точки O дорівнює нулю, то кінетичний момент системи відносно тієї самої точки буде сталим як за величиною, так і за напрямом. Справді, на основі (4.33) маємо $\frac{d\vec{K}_o}{dt} = \vec{M}_o$. Якщо $\vec{M}_o = 0$, то $\vec{K}_o = \overrightarrow{const}$. Цю властивість кінетичного моменту покладемо в основу побудови гіроскопів.

3. Якщо головний момент зовнішніх сил відносно однієї з координатних осей дорівнює нулю, то відповідний кінетичний момент системи буде сталим. Наприклад, $M_z = 0$, тоді за (4.34) $\frac{dK_z}{dt} = 0$ і $K_z = const$.

Другий і третій наслідки відображають закон збереження кінетичного моменту.

Приклад 1. Через нерухомий блок перекинуто гнучку, нерозтяжну нитку, до кінців якої підвішені вантажі M_1 і M_2 (рис. 4.3) вагою відповідно P_1 і P_2 $(P_1 > P_2)$. Тертям нитки об блок нехтуємо. Визначити прискорення $\vec{a}$ рухомих вантажів.

Розв'язання. Ця система складається з двох матеріальних точок, маси яких $m_1 = \frac{P_1}{g}$, $m_2 = \frac{P_2}{g}$. Зовнішніми є сили ваги, внутрішніми – сили натягу нитки. Оскільки поступальний рух вантажів залежить від обертального руху блока, то застосуємо теорему про зміну кінетичного моменту відносно осі Oz обертання блока: $\frac{dK_{oz}}{dt} = M_{oz}$, або $\frac{dK_{oz}}{dt} = P_1 r - P_2 r$, де r - радіус блока.

Ураховуючи вектори кількості руху точок M_1 і M_2, зазначені на рис. 4.3, обчислимо кінетичний момент системи

$K_{oz} = m_1 Vr + m_2 Vr = Vr(m_1 + m_2) = \frac{Vr}{g}(P_1 + P_2)$, де враховано, що $|V_1| = |V_2| = V$.

Тоді маємо

$$\frac{r(P_1 + P_2)}{g}\frac{dV}{dt} = r(P_1 - P_2),$$

звідки

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{(P_1 - P_2)}{(P_1 + P_2)}g.$$

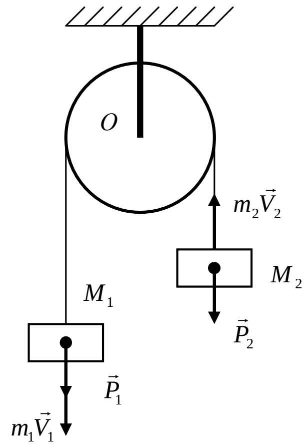

Рисунок 4.3

4.6. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки

Кінетичною енергією називають скалярну міру механічного руху в нерухомій системі координат, що дорівнює половині добутку маси точки на квадрат її швидкості, тобто

$$T = \frac{mV^2}{2}. \tag{4.39}$$

Залежно від способу задання руху точки вираз для кінетичної енергії буде різним.

1. Якщо рух точки задано у векторній формі $\vec{r} = \vec{r}(t)$, то швидкість точки $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. Отже,

$$T = \frac{m}{2}\vec{V} \cdot \vec{V} = \frac{m}{2}\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{4.40}$$

2. Якщо рух точки задано в координатній формі $x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t)$, то швидкість $\vec{V}$ визначається через її проекції на осі координат. Отже,

$$T = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] \tag{4.41}$$

2. Якщо рух задано в натуральній формі, то кінетична енергія

$$T=\frac{1}{2}m\left(\frac{dS}{dt}\right)^2, \tag{4.42}$$

де $S=S(t)$ - закон руху точки по траєкторії в дугових координатах. Із наведених формул видно, що кінетична енергія є додатною величиною.

Теорема. Приріст кінетичної енергії матеріальної точки на деякому відрізку дуги її траєкторії дорівнює роботі сили, що прикладена до точки, на цьому самому відрізку дуги траєкторії.

Доведення. Нехай на матеріальну точку M діє сила $\vec{F}$, унаслідок чого точка рухається по траєкторії з положення M_1, в якому швидкість точки $\vec{V}_1$, у кінцеве положення, де швидкість точки $\vec{V}$ (рис. 4.4). За другим законом Ньютона маємо

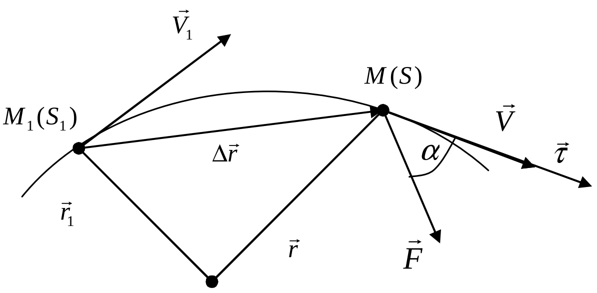

Рисунок 4.4

$$\frac{d(m\vec{V})}{dt}=\vec{F}. \tag{4.43}$$

Щоб у рівняння (4.43) увійшла кінетична енергія $\frac{mV^2}{2}$, необхідно скалярно помножити обидві частини його на $\vec{V}=\frac{d\vec{r}}{dt}$, тоді одержимо

$$\vec{V}\cdot\frac{d(m\vec{V})}{dt}=\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{V}. \tag{4.44}$$

Звідси легко отримати

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right)=\vec{F}\cdot d\vec{r}. \tag{4.45}$$

Оскільки $\frac{mV^2}{2}=T$, то вираз (4.45) запишемо у вигляді

$$dT = \vec{F} \cdot d\vec{r}\ . \qquad (4.46)$$

Зліва в рівності (4.46) записано елементарний приріст кінетичної енергії, а справа – фізичну величину, що називається елементарною роботою і позначається dA, тобто

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}\ . \qquad (4.47)$$

Отже, елементарна робота дорівнює скалярному добутку сили на елементарне переміщення, що спричинене цією силою. Підставляючи dA в (4.46), одержимо

$$dT = dA. \qquad (4.48)$$

Ця рівність виражає теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки в диференціальній формі: диференціал кінетичної енергії матеріальної точки дорівнює елементарній роботі сил, що діють на точку.

Інтегруючи обидві частини (4.48), одержимо
$T - T_0 = A$, або

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A \qquad (4.49)$$

Теорема доведена.

Через T_0 позначена кінетична енергія матеріальної точки на початку руху, а через T - кінетична енергія в кінцевому положенні. У виразі (4.49) через A позначена робота сил на кінцевому відрізку траєкторії, що визначається формулою

$$A = \int_{M_0}^{M} \vec{F} \cdot d\vec{r}\ . \qquad (4.50)$$

Як видно з доведеної теореми, зміна кінетичної енергії (другої міри механічного руху) дає нову фізичну величину, що називається роботою. Щоб мати можливість застосувати теорему про зміну кінетичної енергії до розв’язання задач, слід вивчити основні властивості роботи сили.

4.7. Робота сили, що прикладена до матеріальної точки

Поняття роботи сили виникло у зв’язку зі зміною другої міри механічного руху (кінетичної енергії).

Елементарна робота сили є скалярною мірою дії сили, що дорівнює скалярному добутку (4.47) сили на елементарне переміщення точки її прикладення. У разі натурального способу задання руху $d\vec{r} = \bar{\tau} dS$ (див. рис. 4.4), елементарну роботу визначимо з виразу

$$dA = \vec{F} \cdot \vec{\tau} dS = F dS cos(\vec{F}, \vec{\tau}) = F dS cos\alpha . \qquad (4.51)$$

Повна робота при цьому визначатиметься криволінійним інтегралом

$$A = \int_{S_0}^{S} F cos\alpha dS , \qquad (4.52)$$

де S_0 і S - початкове і кінцеве значення дугової координати.

При координатному способі задання руху вираз (4.52) для повної роботи має вигляд

$$A = \int_{M_0}^{M} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{M_0}^{M} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) . \qquad (4.53)$$

Від криволінійного інтеграла (4.53) можна перейти до визначеного інтеграла, якщо врахувати, що $dx = \dot{x}dt, \quad dy = \dot{y}dt, \quad dz = \dot{z}dt$. Тоді

$$A = \int_{t_0}^{t} \left(F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} \right) dt , \qquad (4.54)$$

де t_0 і t - моменти часу, в які точка проходить положення M_0 і M (рис. 4.4).

Теорема 1. Робота рівнодійної системи сил дорівнює алгебраїчній сумі робіт складових сил.

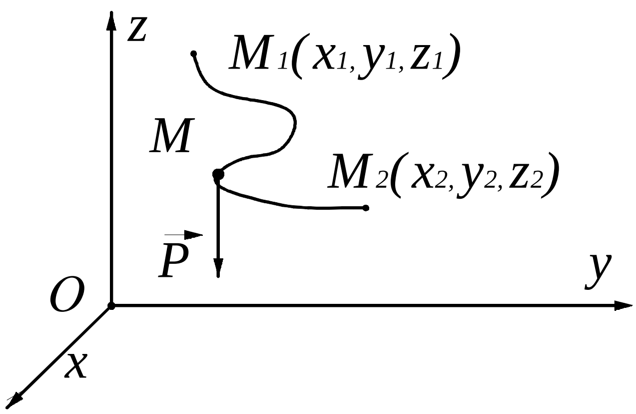

Рисунок 4.5

Доведення. Нехай на точку діє система, що складається з n сил. Рівнодійна їх

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n . \qquad (4.55)$$

Помноживши обидві частини рівності скалярно на $d\vec{r}$, одержимо

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F}_1 d\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \ldots + \vec{F}_n \cdot d\vec{r},$$

або

$$dA = dA_1 + dA_2 + \ldots + dA_n, \tag{4.56}$$

що й потрібно було довести.

Теорема 2. Елементарна робота постійної сили $\vec{F} = \overrightarrow{const}$ на послідовних переміщеннях дорівнює роботі цієї сили на результуючому переміщенні.

Доведення цієї теореми формально аналогічне доведенню попередньої теореми.

Розглянемо обчислення роботи сили в деяких окремих випадках руху точки.

1. Робота, виконувана силою ваги. Нехай матеріальна точка вагою $\vec{P}$ (рис. 4.5) рухається по деякій траєкторії з положення $M_1(x_1, y_1, z_1)$ у положення $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Проекції сили $\vec{P}$ на координатні осі запишемо у вигляді $F_x = 0,\ F_y = 0,\ F_z = -P$. Елементарна робота цієї сили

$$dA = F_z\, dz = -P dz.$$

Отже, робота, що виконана силою ваги під час переміщення точки M із положення M_1 у положення M_2, дорівнює

$$A = \int_{M_1}^{M_2} (-P) dz = -P(z_2 - z_1).$$

Оскільки різниця $z_2 - z_1$ може бути додатною і від’ємною, то, позначивши $z_2 - z_1 = \pm h$, одержимо

$$A = \pm Ph = \pm mgh. \tag{4.57}$$

Як бачимо з формули (4.57), робота сили ваги матеріальної точки дорівнює добутку сили ваги P на різницю висот початкового і кінцевого положення точки. Зазначимо, що робота сили ваги $\vec{P}$ не залежить від форми траєкторії матеріальної точки, що рухається, а залежить тільки від крайніх її положень.

2. Робота, виконувана силою пружності. Обчислимо роботу, здійснену силою $\vec{F}$, що прикладена до точки M пружини (рис. 4.6) при її деформації на

Δr. Початкове положення точки M_0 відповідає недеформованій пружині завдовжки r_0. Сила $\vec{F}$ при розтягненні пружини, очевидно, буде дорівнювати пружній силі пружини, яка згідно із законом Гука пропорційна подовженню Δr.

Отже,

$$F = -c\Delta r = -c(r - r_0), \tag{4.58}$$

де c - коефіцієнт жорсткості пружини; Δr - подовження пружини, що відповідає точці M. Обчислимо роботу при переході точки з положення M_1 у положення M_2. Силу $\vec{F}$ при цьому можна розглядати як центральну, що є функцією відстані $OM = r$. Тоді:

$$A = -c\int_{r_1}^{r_2}(r - r_0)dr = -\frac{1}{2}c\left[(r_2 - r_0)^2 - (r_1 - r_0)^2\right]. \tag{4.59}$$

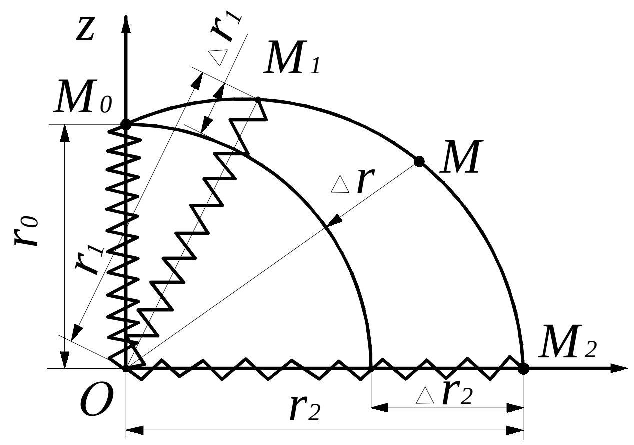

Рисунок 4.6

Як видно з формули (4.59), робота сили пружності не залежить від форми траєкторії точки M, а залежить тільки від крайніх положень точки. В окремому випадку, коли траєкторією точки M_0 є пряма, напрямлена вздовж осі Oz, тоді $r_1 = r_0$ і маємо таку формулу для роботи сили пружності

$$A = -\frac{1}{2}ch^2, \tag{4.60}$$

де h - повне подовження пружини.

Таким чином можна обчислити роботи інших сил, прикладених до матеріальної точки.

4.8. Теорема про зміну кінетичної енергії системи матеріальних точок

Кінетичною енергією системи матеріальних точок називають суму кінетичних енергій усіх точок, що входять у систему

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \overline{V}_i^{\,2}}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i V_i^2}{2}. \qquad (4.61)$$

Розглянемо випадок, коли система матеріальних точок незмінна, тобто є твердим тілом. За допомогою формули (4.61) можна обчислити кінетичну енергію твердого тіла для окремих випадків руху.

Кінетична енергія твердого тіла, що рухається поступально. При поступальному русі твердого тіла ($\vec{\omega} = 0$) швидкості всіх його точок однакові: $\vec{V}_0 = \vec{V} = \vec{V}_c$. Для цього руху з виразу (4.61) одержимо

$$T = \frac{1}{2} m V_0^2 = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} m V_c^2. \qquad (4.62)$$

Отже, кінетична енергія твердого тіла, що рухається поступально, дорівнює половині добутку маси тіла на квадрат швидкості будь-якої його точки.

Кінетична енергія твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі. Нехай тверде тіло обертається навколо нерухомої осі, наприклад Oz, тоді $V_i = \omega h_i$. З виразу (4.61) одержимо

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2} (\omega^2 h_i^2) = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i h_i^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2, \qquad (4.63)$$

де ω - кутова швидкість тіла; I_z - момент інерції тіла відносно осі обертання.

Кінетична енергія твердого тіла при плоскому русі. Розглядаючи цей рух як обертання відносно миттєвої осі, маємо

$$T = \frac{1}{2} I_p \omega^2, \qquad (4.64)$$

де ω - миттєва кутова швидкість тіла; I_p - момент інерції тіла відносно осі, що проходить через миттєвий центр швидкостей. За теоремою Гюйгенса-Штейнера (3.19) маємо

$$I_p = I_c + m h^2, \qquad (4.65)$$

де h - відстань між осями.
Підставивши (4.65) у формулу (4.64), матимемо

$$T = \frac{1}{2}(I_c + mh)^2\,\omega^2 = \frac{1}{2}I_c\omega^2 + \frac{1}{2}mh^2\omega^2 = \frac{1}{2}I_c\omega^2 + \frac{1}{2}mV_c^2, \qquad (4.66)$$

де $V_c = \omega h$ - швидкість центра мас тіла.

Отже,

$$T = \frac{1}{2}mV_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2, \qquad (4.67)$$

кінетична енергія твердого тіла при плоскому русі дорівнює сумі кінетичної енергії його поступального руху разом із центром мас і кінетичної енергії обертального руху тіла навколо центра мас.

Приклад 2. Тонкий диск масою m і радіусом r котиться по горизонтальній площині так, що швидкість центра мас дорівнює $\vec{V}_c$ (рис. 4.7). Обчислити його кінетичну енергію двома методами.

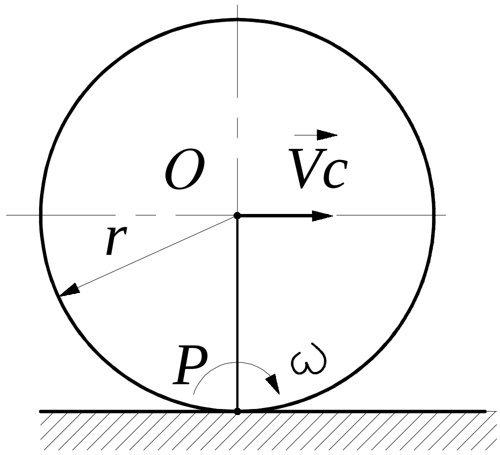

Рисунок 4.7

Розв’язання. 1. За формулою (4.67) маємо

$$T = \frac{1}{2}mV_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2.$$

У даному випадку $\omega = \frac{V_c}{r}$, $I_c = \frac{1}{2}mr^2$ і тому вираз для кінетичної енергії набуде вигляду

$$T = \frac{1}{2}mV_c^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\cdot\frac{V_c^2}{r^2} = \frac{3}{4}mV_c^2.$$

2. Диск виконує миттєвий обертальний рух відносно осі, що проходить через миттєвий центр швидкостей P, тому $T=\frac{1}{2}I_p\omega^2$, де $\omega=\frac{V_c}{r}$. За теоремою Гюйгенса-Штейнера маємо

$$I_p=I_c+mr^2=\frac{1}{2}mr^2+mr^2=\frac{3}{2}mr^2.$$

Підставивши значення моменту інерції I_p і кутової швидкості ω у формулу для кінетичної енергії, матимемо

$$T=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}mr^2\cdot\frac{V_c^2}{r^2}=\frac{3}{4}mV_c^2,$$

що збігається з попереднім результатом.

Розглянемо теорему про зміну кінетичної енергії системи матеріальних точок.

Теорема. Приріст кінетичної енергії системи матеріальних точок за деякий проміжок часу дорівнює сумі робіт зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на точки системи протягом розглядуваного проміжку часу.

Доведення. Нехай система складається з n матеріальних точок. На довільну точку M_i масою m_i діють зовнішня $\vec{F}_i^e$ і внутрішня $\vec{F}_i^b$ сили. За теоремою про зміну кінетичної енергії для матеріальної точки (4.49) маємо

$$\frac{m_iV_i^2}{2}-\frac{m_iV_{i0}^2}{2}=A_i(\vec{F}_i^e)+A_i(\vec{F}_i^b),\quad i=1,2,...,n. \tag{4.68}$$

Виходячи з означення кінетичної енергії системи (4.61) і підсумовуючи, дістанемо

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_iV_i^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_iV_{i0}^2=\sum_{i=1}^{n}A_i(\vec{F}_i^e)+\sum_{i=1}^{n}A_i(\vec{F}_i^b) \tag{4.69}$$

або

$$T-T_0=\sum_{i=1}^{n}A_i, \tag{4.70}$$

де T_0,T - кінетична енергія системи відповідно в початковому і кінцевому її положеннях; $\sum_{i=1}^{n}A_i$ - сума робіт зовнішніх і внутрішніх сил, тобто сума робіт усіх сил, що діють на систему. Отже, теорема доведена.

Примітки: 1. У випадку твердого тіла в правій частині рівності (4.70) буде сума робіт лише зовнішніх сил, оскільки внутрішні сили у твердому тілі зрівноважуються і їх робота дорівнює нулю.

2. Аналіз основних, або загальних, чотирьох теорем динаміки системи переконує в тому, що тільки теорема про зміну кінетичної енергії системи містить внутрішні сили, які впливають на зміну кінетичної енергії на відміну від трьох перших теорем, коли внутрішні сили не впливають на зміну кількості руху, на рух центра мас і зміну кінетичного моменту. Отже, кінетична енергія як друга міра механічного руху повніше відображає властивості цього руху системи матеріальних точок.

3. Усі доведені основні теореми динаміки вільної системи придатні і для невільної системи. Для цього треба спочатку застосувати аксіому про звільнення від в'язей і реакції в'язей зарахувати до активних сил.

Приклад 3. Вантажу вагою $\vec{P} = m\vec{g}$, підвішеному в точці O_1 на пружині, статичне подовження якої під дією сили ваги P дорівнює λ_{cm}, надана початкова швидкість $\vec{V}_0$ із положення M_0 вертикально вниз (рис. 4.8). Визначити швидкість вантажу в положенні M, якщо вантаж, який вважається матеріальною точкою, ковзає по кільцю радіуса R без тертя $OO_1 = R$ і довжина недеформованої пружини теж дорівнює R.

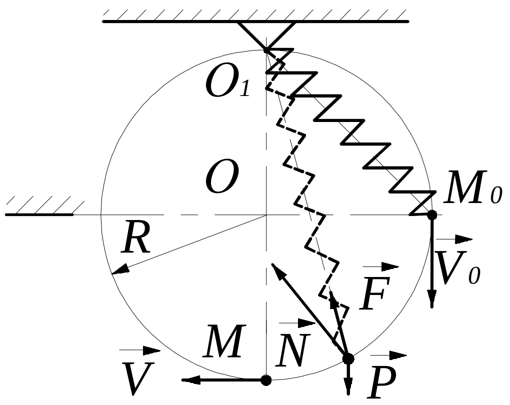

Рисунок 4.8

Розв'язання. Застосуємо для аналізу руху вантажу теорему про зміну кінетичної енергії точки, взявши за початкове положення вантажу точку M_0, за кінцеве - точку M.

Маємо

$$m\frac{V^2}{2} - m\frac{V_0^2}{2} = A.$$

Роботу здійснюють сила ваги вантажу $(A = m\,g\,h)$ і сила пружини

$$A = -\frac{c}{2}(\Delta r_2^2 - \Delta r_1^2),$$

де Δr_2 та Δr_1 - відповідно подовження пружини в кінцевому та початковому положеннях. Оскільки в стані статичної рівноваги тіла, підвішеного на пружині, сила ваги mg урівноважена силою пружини, то $mg = c\lambda_{ст}$, де $\lambda_{ст}$ - статичне подовження пружини (подовження пружини в стані рівноваги). Тоді коефіцієнт пружності пружини

$$c = \frac{mg}{\lambda_{ст}}.$$

Нормальна реакція $\vec{N}$ кільця весь час перпендикулярна до переміщення і її робота дорівнює нулю. Отже, сума робіт

$$A = mgh - \frac{mg}{2\lambda_{ст}}(\Delta r_2^2 - \Delta r_1^2).$$

У випадку, який розглядається, $h = R$, $\Delta r_1 = R\sqrt{2} - R$, $\Delta r_2 = 2R - R = R$, тому

$$A = mgh - \frac{mg}{2\lambda_{ст}}\left[R^2 - R(\sqrt{2}-1)^2\right] = mgh\left[1 - \frac{R}{\lambda_{ст}}(\sqrt{2}-1)\right].$$

$m\frac{V^2}{2} - m\frac{V_0^2}{2} = mgR\left[1 - \frac{(\sqrt{2}-1)R}{\lambda_{ст}}\right]$, звідки $V = \sqrt{V_0^2 + 2gR\left[1 - \frac{(\sqrt{2}-1)R}{\lambda_{ст}}\right]}$.

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Айзерман М.А. Классическая механика. –М.: Наука, 1974. – 357 с.
2. Павловський М.А. Теоретична механіка: підруч. –К.: Техніка, 2002. - 512 с.
3. Павловский М.А. Теоретическая механика. Динамика /М.А. Павловский, Л.Ю. Акинфеева, О.Ф. Бойчук.. –К.: Вища шк., 1990. – 480 с.
4. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. –М.: Высш.шк., 2001. – 416 с.
5. Старжинский В.М. Теоретическая механика. –М.: Наука, 1980. – 464 с.
6. Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах /М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон.: в 2-х т. –М.: Наука, 1990. –Т.1 -670 с.; т.2 – 683 с.
7. Руководство к решению задач по теоретической механике /Т.Б. Айзенберг, И.М. Воронков, В.М. Осецкий. –М.: Высш. шк., 1968. -436 с.
8. Кафтарян Л.С. Методичні вказівки до самостійної роботи при виконанні розрахункових робіт з теоретичної механіки /Л.С. Кафтарян, С.М. Гудков, С.О. Міщенко. – Суми: СумДУ, 2011. – с. 33.
9. Кафтарян Л.С. Методичні вказівки до самостійної роботи при виконанні розрахункових робіт з теоретичної механіки. Розділ „Кінематика”. /Л.С. Кафтарян, С.М. Гудков, С.О. Міщенко. – Суми: СумДУ, 2011. – с. 50.