УДК 681.518:519.718

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МНОГОУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЫ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ

В.Е. Кривцов* А.П. Чекалов**, С.П. Шаповалов**, С.С. Шаповалов***
**ИСА РАН*
***Сумский государственный университет*
****МФТИ*

Построена математическая модель многоуровневой системы индивидуального обучения. С помощью построенной модели исследовано влияние параметров системы на её динамику развития.

ВВЕДЕНИЕ

Становится ясно, что овладение суммой знаний, накопленных человечеством, по старой технологии обучения с учителем становится невозможным. Компьютеризация обучения, внедрение новых информационных технологий обучения делает возможным непрерывное индивидуальное обучение в течение всей активной фазы жизни [1]. На наших глазах возникают нетрадиционные информационные системы, связанные с обучением; такие системы естественно называть информационно - обучающими.

В настоящее время широко развивается такая ветвь информационных технологий, как обучающие системы, позволяющие пользователю получать знания с помощью персонального компьютера. Основная цель таких систем – дистанционное обучение пользователя, предоставление знаний именно в тот момент, когда они нужны, и именно тогда, когда обучающийся имеет возможность эти знания усвоить. Подобные системы применяются сейчас и в учебных заведениях для предоставления учебного материала по различным факультативным курсам[2,3], и в крупных корпорациях для быстрого и качественного обучения персонала, и как средство самостоятельного получения знаний, если нет возможности посещать курсы. В англоязычной литературе всё, что касается дистанционного обучения, получило название e-Learning.

Большинство обучающих систем строится по общему принципу: студент платит за знания, получая не только доступ к учебным материалам, но и возможность заниматься с преподавателем, которого нанимают специально для помощи студентам. То есть для нормального функционирования подобной системы и для получения прибыли нужно заниматься постоянной поддержкой этой системы, причём при увеличении числа студентов потребуется нанимать новых преподавателей. Но можно предложить другую концепцию построения обучающей системы, которая позволит значительно снизить затраты на поддержку системы, предоставляя возможность преподавать студентам, уже изучившим учебный материал. Таким образом, система оказывается замкнутой относительно передаваемых знаний, такая система требует минимальных затрат в процессе своей работы.

Такая схема построения обучающей системы до сих пор не нашла применения в среде e-Learning, но её преимущество для решения определённого круга задач очевидно, поэтому исследование подобной системы должно принести важные и полезные для её реализации результаты.

Изучение подобной системы дистанционного обучения следует начать с построения её математической модели. Эта модель поможет установить взаимосвязь между динамикой численности обучающихся и динамикой равновесной цены на репетиторские услуги, возникающей при взаимодействии спроса, формируемого студентами, и предложения, формируемого преподавателями, а также исследовать возможность увеличения прибыли владельцев подобной системы.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Требуется построить математическую модель многоуровневой обучающей системы, с помощью которой провести сравнительный аналитический и экспериментальный анализ динамики числа обучающихся, динамики цен и совокупного объёма доходов участников системы, а также исследовать влияние изменения внешних факторов и предварительно заданных параметров модели.

Основные требования к математической модели:

– весь учебный курс разделён на несколько уровней;

– студент успешно заканчивает уровень и переходит на следующий после накопления заданного объёма знаний;

– студенты могут получать репетиторские услуги от студентов, находящихся уровнем выше;

– самостоятельное обучение бесплатно, уроки с преподавателем оплачиваются в соответствии с равновесной ценой, формирующейся под влиянием спроса и предложения;

На основе построенной модели изучить инструменты влияния на динамику системы и описать методы её регулирования.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ

1 Математическая модель динамики количества обучающихся

В основе математической модели обучающей системы лежит система обыкновенных дифференциальных уравнений, решением которой является n-мерный вектор $\overrightarrow{уровень}(t)$. Компоненты этого вектора – функции, выражающие зависимость численности уровней системы от времени, т. е. отражающие динамику числа обучающихся. В общем случае система имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}уровень_1 = вход(t) - \min(вход(t-\tau_1(t)), уровень_1(t)); \\ \dfrac{d}{dt}уровень_2 = \min(вход(t-\tau_1(t)), уровень_1(t)) - \min(вход(t-\tau_1(t)-\tau_2(t)), \\ уровень_2(t)); \\ \ldots \\ \dfrac{d}{dt}уровень_n = \min(вход(t-\tau_1(t)-\ldots-\tau_{n-1}(t)), уровень_{n-1}(t)) - \\ -\min(вход(t-\tau_1(t)-\ldots-\tau_n(t)), уровень_n(t)). \end{cases}$$

Эта система описывает следующую модель:

1 Количество новичков, приходящих в единицу времени, определяется функцией *вход*(t), все новички попадают на первый уровень.

2 Каждый студент распределяет своё учебное время на три части: самостоятельное обучение, работа с репетитором и предоставление репетиторских услуг другим студентам, если он уже получил какие-нибудь знания. Эти доли могут меняться во времени, поэтому обозначим их функциями от времени *самообучение*(t), *работа с репетитором*(t) и *преподавание*(t) соответственно.

3 На основе потребностей студентов в репетиторских услугах и возможностей доступных в данный момент преподавателей формируются равновесная цена и объём передаваемых знаний, который обозначается как *передаваемые_знания*(t). Модель рыночного равновесия рассмотрим более подробно далее.

4 Все студенты уникальны и по-разному усваивают материал как при самостоятельной работе, так и при занятиях с репетитором. Но рассмотрение каждого студента в отдельности привело бы к большому усложнению модели, в связи с этим введены относительные коэффициенты *усвоение_материала* и *полезность_репетиторства*, которые изменяются от 1 до 5. Таким образом, все студенты разделились на 25 групп, различающихся своими способностями к обучению.

5 Объём изученного материала представляет собой интеграл от функции скорости обучения по всему временному интервалу обучения:

$$\int_{t_{нач}}^{t_{кон}} скорость\_обучения(t)\,dt,$$

где

$$скорость\_обучения(t) = усвоение\_материала \times самообучение(t) +$$
$$+полезность\_репетиторства \times передаваемые\_знания(t).$$

6 Студент заканчивает учёбу на уровне и переходит на следующий после того, как объём полученных им знаний достигает заданной величины, характеризующей количество учебного материала на этом уровне $сложность\ уровня_i$. Из уравнения, в котором неизвестен верхний предел интеграла, находится время обучения на уровне $\tau_i(t)$, где i – номер уровня.

7 Уровень не может покинуть большее количество студентов, чем количество проходящих обучение в данный момент.

Математическая реализация этой системы вызвала следующее условие предоставления репетиторских услуг: репетиторы могут обучать только тому материалу, который они изучили на предыдущем уровне, то есть знания передаются между двумя соседними уровнями. Таким образом, цены на репетиторские услуги формируются независимо от других уровней.

Итак, модель системы зависит от следующих входных параметров:

– функции входного потока новичков *вход* (t);

– доли учебного времени *самообучение* (t), *работа с репетитором* (t) и *преподавание* (t);

– параметров модели равномерного ценообразования, которые будут рассмотрены далее;

– количества учебного материала на каждом из уровней $сложность\_уровня_i$.

Воспользовавшись данными с Интернет-сайта www.worldwidelearn.com [4], где проведён анализ рынка дистанционных обучающих систем и предоставлена исчерпывающая статистика сферы дистанционного обучения, получим динамику, характерную для большинства существующих аналогов. Возникшие различия были вызваны спецификой рассмотренной модели, а точнее возможностью предоставления репетиторских услуг студентами более высоких уровней.

2 Математическая модель равновесного ценообразования

Рассмотрим подробнее модель равновесного ценообразования, используемую для моделирования динамики цены на репетиторские услуги.

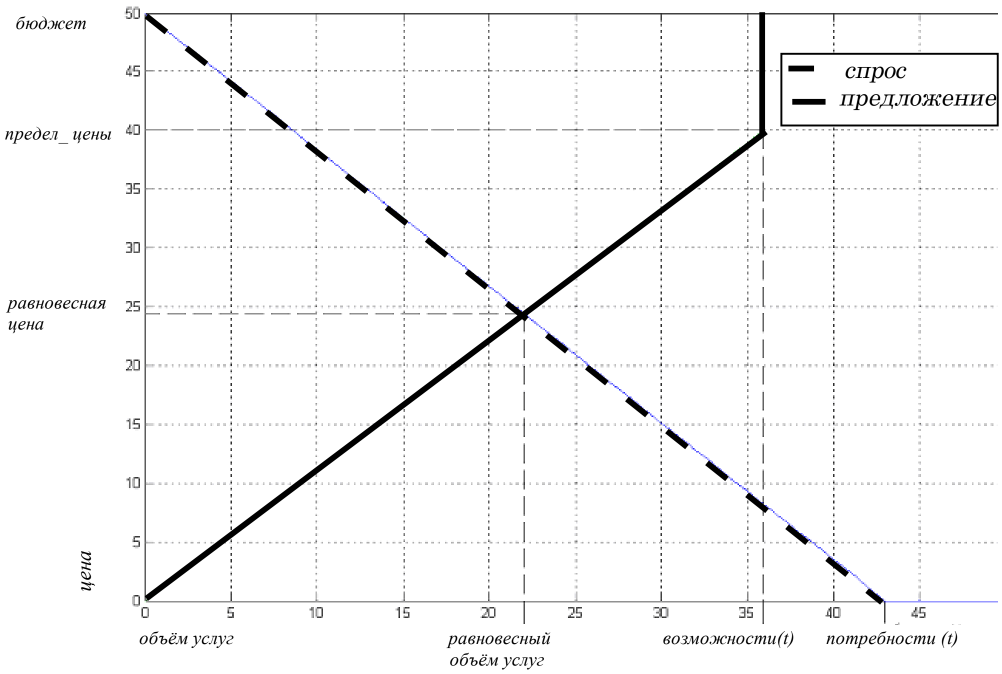


Рисунок 1 – Спрос и предложение на репетиторские услуги

Прямая спроса характеризуется параметром *бюджет*, который задаётся заранее. Это максимальная цена, которую ученик готов заплатить за час работы с преподавателем. *Потребности* (t) есть сумма всех запросов на получение репетиторских услуг. Эта величина зависит от времени, а вследствие этого прямая спроса также изменяется во времени.

Предложение зависит от параметра *предел цены*. Это та цена, по которой преподаватель готов работать максимально доступное количество времени. Этот параметр тоже задаётся заранее. В данной модели он учитывает загруженность преподавателя собственным образованием. Чем больше он имеет свободного времени, тем охотнее он готов тратить его на предоставление репетиторских услуг и тем ниже его *предел цены*. *Возможности* (t) соответственно есть количество свободного времени у преподавателей. Прямая предложения, как и прямая спроса, зависит от времени.

Эти зависимости порождают постоянное колебание цены. В реальных условиях конечно же невозможно резкое изменение цены за короткий промежуток времени, поэтому вводится ограничение на изменение цены в единицу времени: *шаг цены*. Этот параметр также входит в число начальных параметров модели и характеризует инертность рынка.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ЗАДАЮЩИХ ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ МОДЕЛИ

Полученная система дифференциальных уравнений слишком сложна для того, чтобы решить её аналитически. Тем не менее если добавить некоторые упрощающие допущения, то становится возможным получить аналитическое решение.

Итак, рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\,\textit{уровень}_1 = \textit{вход}(t) - \min(\textit{вход}(t-\tau), \textit{уровень}_1(t)); \\ \dfrac{d}{dt}\,\textit{уровень}_2 = \min(\textit{вход}(t-\tau), \textit{уровень}_1(t)) - 0,9\min(\textit{вход}(t-2\tau), \\ \textit{уровень}_2(t)); \\ \dfrac{d}{dt}\,\textit{уровень}_3 = 0,9\min(\textit{вход}(t-2\tau), \textit{уровень}_2(t)) - 0,9\times 0,9\min(\textit{вход}(t- \\ -3\tau), \textit{уровень}_3(t)). \end{cases}$$

В этой системе время обучения считается фиксированным и одинаковым для всех. Доля учеников, не покидающих уровень, составляет 10%. При таких допущениях можно решать эту систему последовательно: сначала найти функцию численности первого уровня, потом – второго и в конце – третьего.

Рассмотрим периодическую функцию входного потока студентов:

$$\textit{вход}(t) = \begin{cases} 0, t < 0; \\ 1 + \sin(t), t \ge 0. \end{cases}$$

Решив систему уравнений при этой функции входа и при начальных условиях *уровень*$_1$=0, *уровень*$_2$=0, *уровень*$_3$=0 при t=0, получим следующий результат:

$$\begin{aligned} & 0 < t < \tau: \\ & \textit{уровень}_1 = t - \cos(t) + 1; \\ & \textit{уровень}_2 = 0; \\ & \textit{уровень}_3 = 0; \\ & \tau < t < 2\tau: \\ & \textit{уровень}_1 = \tau - \cos(t) + \cos(t-\tau); \\ & \textit{уровень}_2 = 1 - \tau + t - \cos(t-\tau); \\ & \textit{уровень}_3 = 0; \\ & 2\tau < t < 3\tau: \\ & \textit{уровень}_1 = \tau - \cos(t) + \cos(t-\tau); \\ & \textit{уровень}_2 = 0,1t + 0,1 - 0,8\tau - \cos(t-\tau) + 0,9\cos(t-2\tau); \\ & \textit{уровень}_3 = 0,9 - 1,8\tau + 0,9t - 0,9\cos(t-2\tau); \\ & t > 3\tau: \\ & \textit{уровень}_1 = \tau - \cos(t) + \cos(t-\tau); \\ & \textit{уровень}_2 = 0,1t + 0,1 - 0,8\tau - \cos(t-\tau) + 0,9\cos(t-2\tau); \\ & \textit{уровень}_3 = 0,09 + 0,63\tau + 0,09t - 0,9\cos(t-2\tau) + 0,9\cos(t-3\tau). \end{aligned}$$

Для наглядности изобразим решение на графике (рис.2).

Все три функции количества студентов на уровнях на любом временном отрезке можно представить в виде суммы двух функций: периодической, в которую входят косинусы с разной амплитудой и фазой, и непериодической, задающей прямую (на рис. 2 она изображена пунктиром для первого и второго уровней).

Непериодическая часть указывает на тенденцию развития динамики уровня, а периодическая формирует колебания численности относительно прямой развития. Из графика видно, что пока первый уровень не покидают студенты, его численность без учёта периодической составляющей растёт. После того как появляются студенты, переходящие на следующий уровень, численность уровня начинает колебаться относительно некоторого постоянного значения. Поведение численностей второго и третьего уровней такое же, с тем отличием, что после начала оттока студентов с уровней всё равно остаётся тенденция к росту, но уже с меньшей скоростью. Это связано с желанием части студентов прекратить обучение и постоянно преподавать.

ИЗУЧЕНИЕ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ НА ДИНАМИКУ СИСТЕМЫ

1 Модель при стандартных параметрах

Рассмотрим модель при стандартных параметрах:

– Функция входного потока новичков $вход(t)$ представляет собой синусоиду, то есть количество новых студентов подвержено сезонным колебаниям.

– Доли учебного времени $самообучение(t)$, $работа\_с\_репетитором(t)$ и $преподавание(t)$ тоже синусоидальны. Они моделируют учебный процесс, при котором больше всего времени студент уделяет учёбе в середине недели, отдыхая во время выходных. Учебное время делится между различными типами учебной активности в пропорции 2:1:1 соответственно.

– Количество учебного материала на каждом из уровней $сложность\_уровня$ равно количеству материала, усваиваемого за 30 дней студентами со средними показателями усвоения знаний. Другими словами, уровень построен таким образом, чтобы средний студент тратил на его изучение 1 месяц.

– В начальный момент времени в системе студентов нет.

– 5% учащихся принимают решение не переходить на следующий уровень, а оставаться на текущем и зарабатывать деньги репетиторством.

На рис.3 показаны итоговые графики, первый из них отражает динамику численности уровней, а второй – динамику цен. В легенде второго графика *цена 1* означает цену на репетиторские услуги, которые студенты второго уровня оказывают студентам первого, *цена 2* – цена на услуги, предоставляемые третьим уровнем второму, и *цена 3* – услуги четвёртого третьему соответственно.

Ясно видно, что результаты компьютерного моделирования с помощью пакета математических программ MatLab находятся в соответствии с результатами, полученными аналитическим решением системы дифференциальных уравнений. На графиках динамики численности уровней явно виден синусоидальный характер решения системы дифференциальных уравнений, а также запаздывание уровня относительно предыдущего, равное времени обучения на предыдущем уровне. Различные значения этого времени в разные моменты наблюдения вызывают дрожание графиков относительно стандартной синусоиды.

Численности всех уровней, кроме первого, имеют тенденцию к росту. Это связано с тем, что 5% студентов не переходят на следующий уровень, а предпочитают оставаться на текущем для преподавательской деятельности. Само собой на первом уровне такая ситуация возникнуть не может.

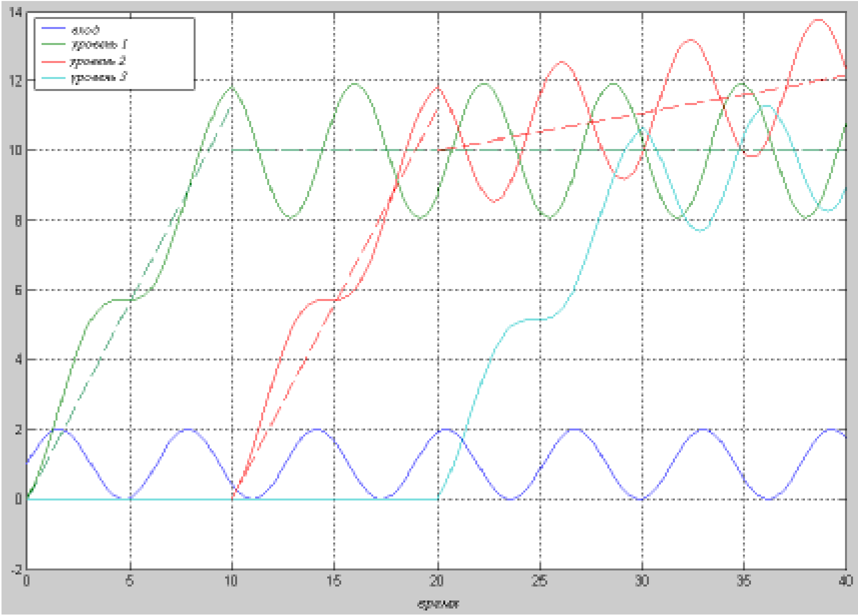


Рисунок 2 – График решения СДУ для случая периодической функции входа

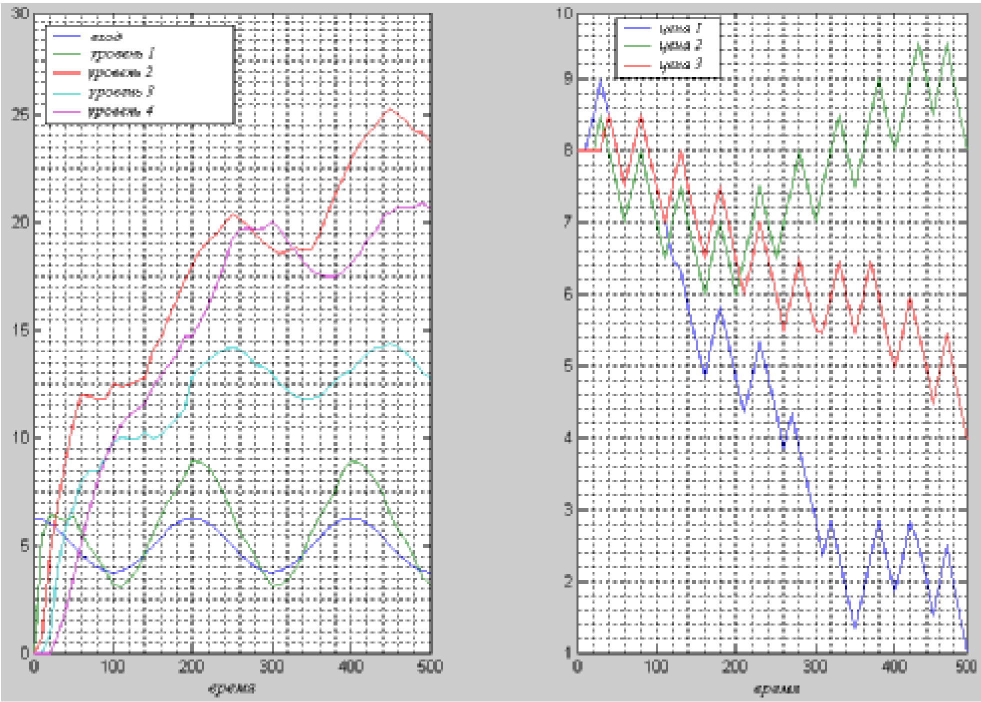


Рисунок 3 – Динамика численности уровней системы и цен на репетиторские услуги при стандартных параметрах

Тенденции изменения цен тоже очевидны. Поскольку количество преподавателей на втором уровне постоянно растёт, а число студентов на первом колеблется относительно постоянной величины, иными словами, спрос не меняется, а предложение растёт, то равновесная цена стремится к уменьшению. Для цены между вторым и третьим уровнем ситуация обратная: здесь спрос растёт быстрее предложения, поскольку первый уровень в отличие от второго покидают все студенты, завершившие обучение. Это влечёт за собой смещение равновесной цены в сторону увеличения. Цена на услуги между третьим и четвёртым уровнями не меняется настолько сильно, но тоже уменьшается из-за того, что преподавателей на четвёртом уровне больше, чем студентов на третьем.

2 Влияние характера функции потока новых студентов

Изменим функцию мощности входного потока новичков таким образом, чтобы уменьшилась амплитуда сезонных колебаний. Согласно теоретическим расчётам это должно привести к уменьшению колебаний периодической части решения, при этом непериодическая часть не изменится.

Теоретические предположения подтверждаются результатами моделирования, которые можно видеть на рис. 4. В случае б) амплитуда сезонных колебаний уменьшена по сравнению со стандартными параметрами в пять раз.

Значит, чем стабильнее будет поток новых студентов обучающей системы, тем стабильнее будет развиваться её динамика и, как следствие, тем легче будет предсказать её поведение.

4 Влияние объёма знаний, необходимого для перехода на следующий уровень

Ещё один важный параметр системы – сложность уровня, объём знаний, необходимый для перехода на следующий уровень. Согласно аналитическому решению увеличение этого объёма знаний выгодно для системы, потому что увеличивается время обучения τ, позднее наступает равновесие между входящим и исходящим потоками на уровне и, следовательно, на уровень приходит большее количество студентов. Экспериментальные результаты в сравнении со стандартной сложностью уровня можно видеть на рис. 5.

ВЫВОДЫ

На основе заданных требований к многоуровневой системе индивидуального обучения построена математическая модель, отражающая динамику численности студентов.

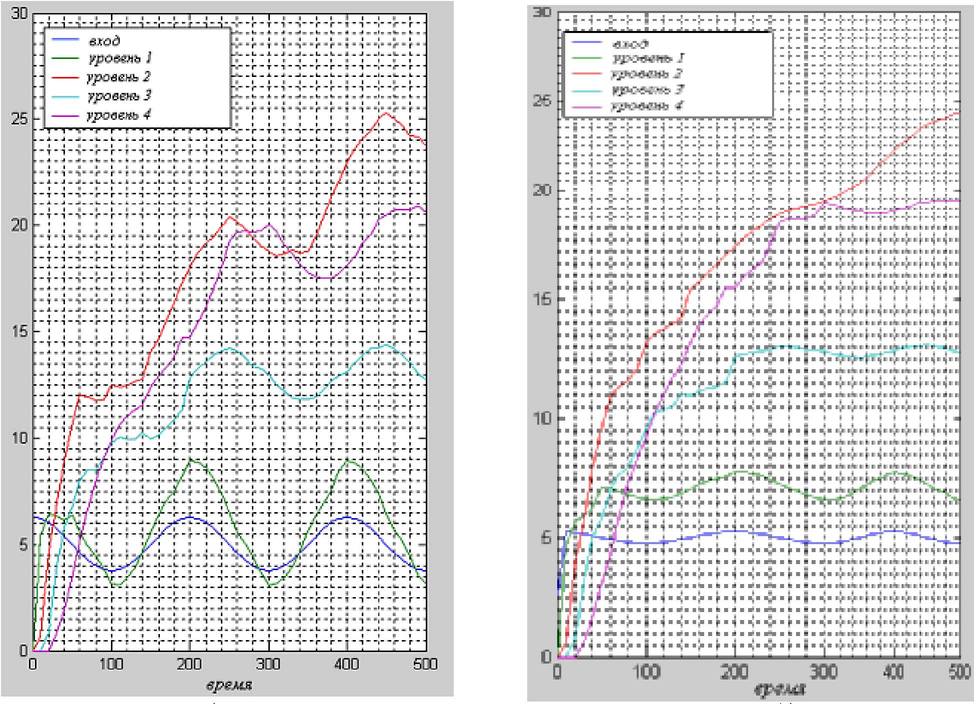
Проведены аналитический и экспериментальный анализы построенной модели, результаты которых совпадают в пределах сделанных допущений.

Изучено влияние изменений начальных параметров модели на динамику, на основе полученных результатов выделим следующие свойства системы:

1 Стабильность потока новых студентов обеспечивает предсказуемость динамики системы.

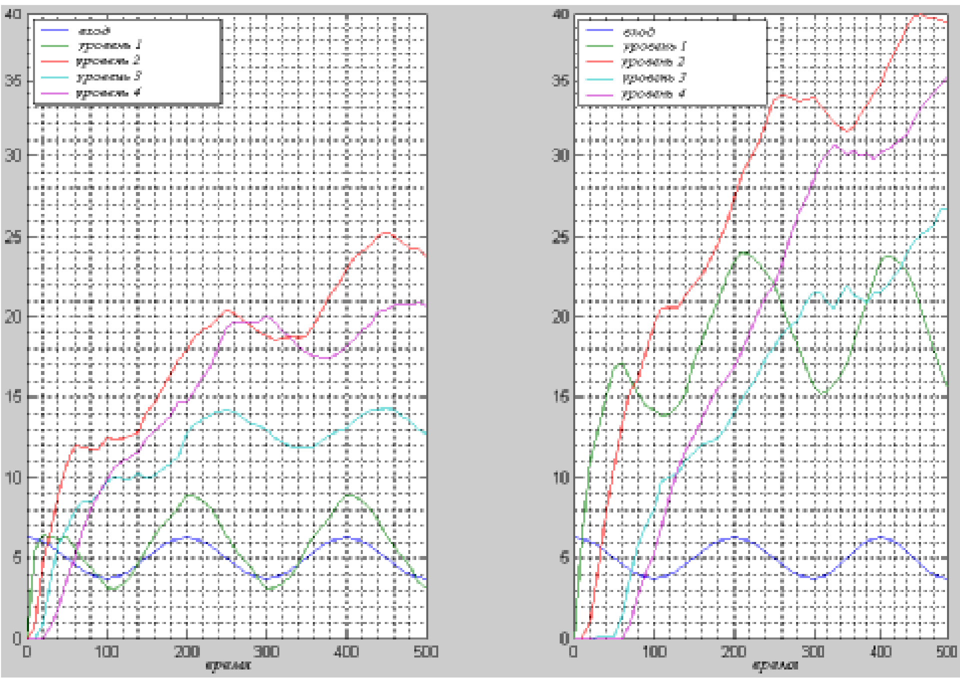
2 Для повышения количества студентов нужно повышать объём знаний, который нужно изучить на уровне, объединять разделы в более крупные.

3 Оптимальная начальная цена – цена, максимально приближённая к равновесной цене на начальном этапе работы системы.



а)   б)

Рисунок 4 – Динамика численности уровней а) – амплитуда функции входного потока 1,25; б) – 0,25



а)   б)

Рисунок 5 – Динамика численности уровней для сложности уровней : а) – студенты со средними способностями затрачивают на изучение уровня 30 дней, б) – 60 дней

SUMMARY

The mathematical model of distant learning multilevel system was created; Using the mathematical model the influence of variation of system parameters upon the system dynamics was studied.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Башмаков А.И., Башмаков И.А. Разработка компьютерных учебников и обучающих систем. - М.: Информационно-издательский дом "Филинъ", 2003. - 616 с.
2. Чекалов А.П., Шаповалов С.П. Организация автоматизированного контроля знаний на основе четырехуровневой модели / Інформаційні технології навчання у вищих закладах освіти: Збірник матеріалів/Кол. авторів. - Суми: Вид-во СумДУ, 2001.-С. 107-111.
3. Лебединский И.Л., Ноздренков В.С., Романовский В.И. Информационная модель оценки знаний обучаемого, учитывающая время, затраченное на выполнение конкретного задания// Вісник СумДУ.-2005.-№9(81).- С.76-82.
4. The World's Premier Online Directory of Education.- www.worldwidelearn.com.

Кривцов В. Е., канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.
ИСА РАН;

Чекалов А.П., канд. техн. наук., доц.
Сумский государственный университет;

Шаповалов С.П., канд. техн. наук, доц.
Сумский государственный университет;

Шаповалов С. С., студент
МФТИ

Поступила в редакцию 21 марта 2007 г.