

**МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ****А.И. Олемской, В.Н. Борисюк\*, И.А. Шуда\****Институт прикладной физики НАН Украины, ул. Петропавловская, 58, Сумы, 40030**\*Сумский государственный университет, ул. Римского-Корсакова, 2, Сумы, 40007*

*Изложен алгоритм мультифрактального флуктуационного анализа (МФФА), протестированный на бинарном мультифрактале Кантора и некоррелированном самоподобном ряде. В качестве приложений исследованы мультифрактальные спектры обменных курсов валют, электрокардиограмм сердца и процесса аномальной диффузии. Показано, что кризис приводит к усилению мультифрактальных свойств временных рядов экономических показателей и появлению корреляций в их изменении. В медицине использование метода МФФА позволяет установить связь между различными формами мультифрактальных спектров и группами сердечных патологий. На физическом примере показано, что трансформация полётов Леви в нормальную диффузию обусловлена ослаблением корреляций в смещениях частицы, приводящим к сужению спектра мультифрактала.*

**ВВЕДЕНИЕ**

Временной ряд представляет последовательность значений исследуемой величины, зафиксированных через равные промежутки времени. Как правило, временными рядами представляются случайные изменения величин, наиболее популярные примеры которых дают колебания обменных курсов валют и временные изменения других экономических показателей. Естественное представление наблюдений природных явлений также сводится к временным рядам измерений температуры воздуха, количества осадков, скорости ветра и других метеорологических данных. Кроме экономики и метеорологии, временные ряды широко используются в медицине, где наиболее яркий пример даёт электрокардиограмма сердца, а также при описании стохастических процессов в физике, химии, социологии и других областях науки и техники [1].

Анализ временных рядов является основой разработки и верификации макроскопических моделей, позволяющих последовательным образом представить эволюцию сложных систем на основе микроскопических данных [2]. Такой анализ сводится к вычислению корреляционных функций векторов состояний, которые представляют временные последовательности величин, характеризующих систему. Будучи традиционным разделом статистики, анализ временных рядов основывается на классе моделей гармонического осциллятора, которые отвечают простейшему случаю гауссовского случайного процесса [3]. Однако в действительности оказывается, что реальный временной ряд отвечает скорее полётам Леви, нежели гауссовским процессам, которые являются их частным случаем. Известная особенность полётов Леви состоит в их инвариантности относительно масштабных преобразований [1], в связи с чем проблема исследования временных рядов сводится к анализу самоподобных стохастических процессов, которые представляются (мульти)фрактальными множествами [4]. Статистическое описание самоподобных временных рядов, основанное на термодинамической модели [5], позволило определить их глобальные характеристики, определяющие предсказуемость изменений случайной величины. Однако при этом выпадают из рассмотрения локальные

свойства, представление которых достигается в рамках метода мультифрактального флуктуационного анализа (МФФА) [6], позволившего исследовать временные ряды в экономике [7], медицине [8] и метеорологии [9].

Предлагаемая работа открывается изложением алгоритма МФФА. В разделе 2 проводится его тестирование для бинарного мультифрактала Кантора и некоррелированного самоподобного ряда, которые допускают аналитическое описание. Разделы 3, 4 посвящены описанию мультифрактальных спектров обменных курсов валют и электрокардиограмм сердца, которые дают наиболее яркие примеры временных рядов в экономике и медицине. Их исследование показывает, что кризис приводит к усилению мультифрактальных свойств временных рядов экономических показателей и появлению корреляций в их изменении. В медицине использование метода МФФА позволяет установить связь между различными формами мультифрактальных спектров и группами сердечных патологий. В качестве физического примера в разделе 5 рассмотрено мультифрактальное множество, порождаемое процессом аномальной диффузии. Раздел 6 завершает наше рассмотрение обсуждением.

## 1 ОПИСАНИЕ МЕТОДА МФФА

Алгоритм этого метода сводится к следующим шагам [6]. Сначала из ряда  $x(k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N$  выделяем флуктуационный профиль

$$y(i) = \sum_{k=1}^i [x(k) - \bar{x}], \quad (1)$$

отсчитанный от средней величины  $\bar{x}$ . Затем разделяем полученные значения  $y(i)$  по непересекающимся сегментам длины  $s$ , число которых равно целому значению  $N_s = [N/s]$ . Так как длина ряда  $N$  не всегда кратна выбранной шкале  $s$ , то в общем случае последний участок содержит число точек, меньше чем  $s$ . Для учёта этого остатка следует повторить процедуру деления на сегменты, начиная с противоположного конца ряда. В результате полное число сегментов, обладающих длиной  $s$ , составит  $2N_s$ .

Поскольку изменение случайной величины  $y(i)$  происходит вблизи значения  $y_v(i) \neq 0$ , обусловленного определённой тенденцией (трендом) эволюции ряда, то далее следует найти локальный тренд  $y_v(i)$  для каждого из  $2N_s$  сегментов. При этом проще всего использовать метод наименьших квадратов, представляя тренд  $y_v(i)$  полиномом, степень которого выбирается таким образом, чтобы обеспечить интерполяцию с ошибкой, не превышающей заданный предел. Затем определяем дисперсию

$$F^2(v, s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{y[(v-1)s+i] - y_v(i)\}^2 \quad (2)$$

для сегментов  $v = 1, \dots, N_s$ , следующих в прямом направлении, и соответствующее значение

$$F^2(v, s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{y[N - (v - N_s)s + i] - y_v(i)\}^2 \quad (3)$$

для обратной последовательности  $v = N_s + 1, \dots, 2N_s$ .

На следующем шаге вводим деформированную дисперсию

$$F_q(s) = \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} [F^2(v, s)]^{q/2} \right\}^{1/q}, \quad (4)$$

полученную возведением выражений (2), (3) в степень  $q$  и последующим усреднением по всем сегментам. Поскольку при  $q = 0$  равенство (4) содержит неопределённость, то вместо него следует использовать предельное выражение

$$F_0(s) = \exp \left\{ \frac{1}{4N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} \ln [F^2(v, s)] \right\}. \quad (5)$$

Изменяя временную шкалу  $s$  при фиксированном показателе  $q$ , находим зависимость  $F_q(s)$ , представляя её в двойных логарифмических координатах. Если исследуемый ряд сводится к самоподобному множеству, проявляющему дальнедействующие корреляции, то флуктуационная функция  $F_q(s)$  представляется степенной зависимостью

$$F_q(s) \propto s^{h(q)} \quad (6)$$

с обобщённым показателем Херста  $h(q)$ , величина которого определяется параметром  $q$ . Из определений (4), (6) следует, что при  $q = 2$  этот показатель сводится к обычному значению  $H$ . Для временных рядов, которые отвечают монофрактальному множеству, флуктуационная функция  $F^2(v, s)$  одинакова для всех сегментов  $v$ , и обобщённый показатель Херста  $h(q) = H$  не зависит от параметра деформации  $q$ . Для мультифрактальных рядов при положительных  $q$  основной вклад в функцию  $F_q(s)$  дают сегменты  $v$ , проявляющие большие отклонения  $F^2(v, s)$ , а при отрицательных  $q$  доминируют сегменты с малыми дисперсиями  $F^2(v, s)$ . В результате можно заключить, что при отрицательных значениях  $q$  обобщённый показатель Херста  $h(q)$  описывает сегменты, проявляющие малые флуктуации, а при положительных – большие.

При реализации изложенного алгоритма следует иметь в виду, что с ростом размера сегментов до  $s > N/4$  функция  $F_q(s)$  теряет статистическую информативность ввиду малости числа  $N_s < 4$  сегментов, используемых при усреднении. Таким образом, проведение указанной процедуры предполагает исключение, с одной стороны, больших сегментов ( $s > N/4$ ), а с другой – малых ( $s < 10$ ).

Стандартное представление скейлинговых свойств временного ряда предполагает переход от показателя Херста  $h(q)$  к массовому показателю  $\tau(q)$  и спектральной функции  $f(\alpha)$ , которые являются основными характеристиками мультифракталов [6]:

$$\tau(q) = qh(q) - 1, \quad (7)$$

$$f(\alpha) = \alpha q(\alpha) - \tau(q(\alpha)). \quad (8)$$

Здесь значение  $q(\alpha)$  определяется условием  $\tau'(q) = \alpha$ , где штрих означает дифференцирование по аргументу. При  $|q| \gg 1$  зависимость  $\tau(q)$  имеет линейно возрастающий вид с криволинейным участком вблизи  $q = 0$ , который обеспечивает замедление роста массового показателя  $\tau$  с увеличением параметра деформации  $q$ . Спектральная функция  $f(\alpha)$  определяет набор монофракталов с размерностями  $\alpha$ , которые формируют исследуемое множество: при этом относительное число монофракталов с данным  $\alpha$ , которые попадают в ячейки размером  $l$ , покрывающие это множество, задаётся соотношением  $N(\alpha) \sim l^{-f(\alpha)}$ . Согласно этому определению ширина спектра  $f(\alpha)$  будет тем больше, чем сильнее выражены мультифрактальные свойства (так, монофрактал характеризуется единственным значением  $\alpha$ ) [4].

## 2 ТЕСТИРОВАНИЕ МЕТОДА МФФА

Проведем тестирование изложенного метода на временных рядах, допускающих аналитическое представление, – биномиальном и некоррелированном ряде со степенной функцией распределения [6].

### 2.1 Биномиальный ряд

Биномиальный мультифрактальный ряд состоит из  $N = 2^n$  членов  $x_k, k = 1, \dots, N$ , определённых равенством

$$x_k = p^{m(k-1)}(1-p)^{n-m(k-1)}, \quad (9)$$

где параметр  $p$  определяет вероятность  $1/2 \leq p \leq 1$ , а  $m(k)$  означает количество единиц в бинарном коде числа  $k$  (например,  $m(13) = 3$ , так как число 13 представляется бинарным кодом 1101). Обобщенный показатель Херста и массовый показатель ряда (9) выражаются равенствами [6]

$$h = \frac{1}{q} - \frac{\ln[p^q + (1-p)^q]}{q \ln 2}, \quad (10)$$

$$\tau = -\frac{\ln[p^q + (1-p)^q]}{\ln 2}. \quad (11)$$

При тестировании метода МФФА учёт тренда в равенствах (2), (3) обеспечивался использованием полинома  $y_v(i)$  четвертой степени. Это приводит к зависимости  $F_q(s)$ , показанной на рис.1а при различных значениях  $q$  в двойных логарифмических осях. При  $50 < s < 500$  она обнаруживает хорошо выявленный линейный участок, наклон которого определяет обобщенный показатель Херста  $h(q)$ , показанный на рис.1б. Тогда использование равенства (7) приводит к массовому показателю  $\tau(q)$ , зависимость которого от параметра деформации изображена на рис.1с. Сравнение численных данных, полученных методом МФФА, с аналитическими выражениями (10) и (11) при различных значениях вероятности  $p$  указывает на их хорошее соответствие.

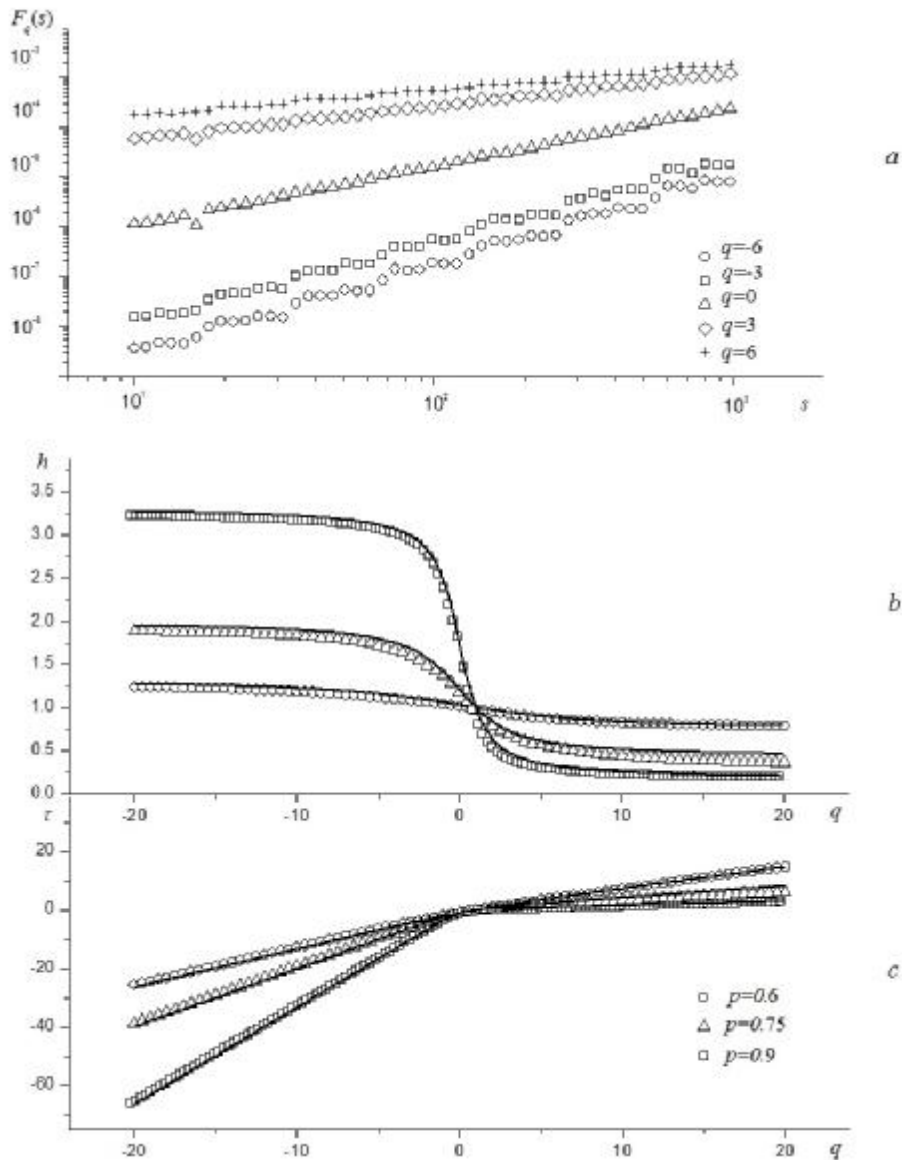


Рисунок 1 – Зависимость дисперсии биномиального ряда (9) от размера сегмента  $s$  при различных значениях параметра деформации  $q$  (а) ( $n = 16$ ,  $p = 0,75$ ); показатель Херста (b) и массовый показатель (c) для биномиальных рядов с различными значениями параметра  $p$  при  $n = 16$  (значения величин, отмеченные кружками, треугольниками и квадратами, получены методом МФФА, сплошные линии – на основе равенств (10) и (11))

## 2.2 Некоррелированные самоподобные ряды

В качестве другого примера рассмотрим ряд, случайные значения которого распределены с плотностью вероятности

$$P(x) = \alpha x^{-(\alpha+1)}, \quad (12)$$

степенной характер которой отражает самоподобие множества  $1 \leq x < \infty$  при  $\alpha > 0$ . При этом показатель Херста выражается равенством [6]

$$h = \begin{cases} 1/q & \text{при } q > \alpha, \\ 1/\alpha & \text{при } q < \alpha. \end{cases} \quad (13)$$

На рис.2 проведено сравнение зависимостей  $h(q)$  и  $\tau(q)$ , полученных методом МФФА и по формулам (13) и (7) для рядов с функцией распределения (12) при различных показателях  $\alpha$ . Как и выше, обнаруживается хорошее согласие численных и аналитических данных.

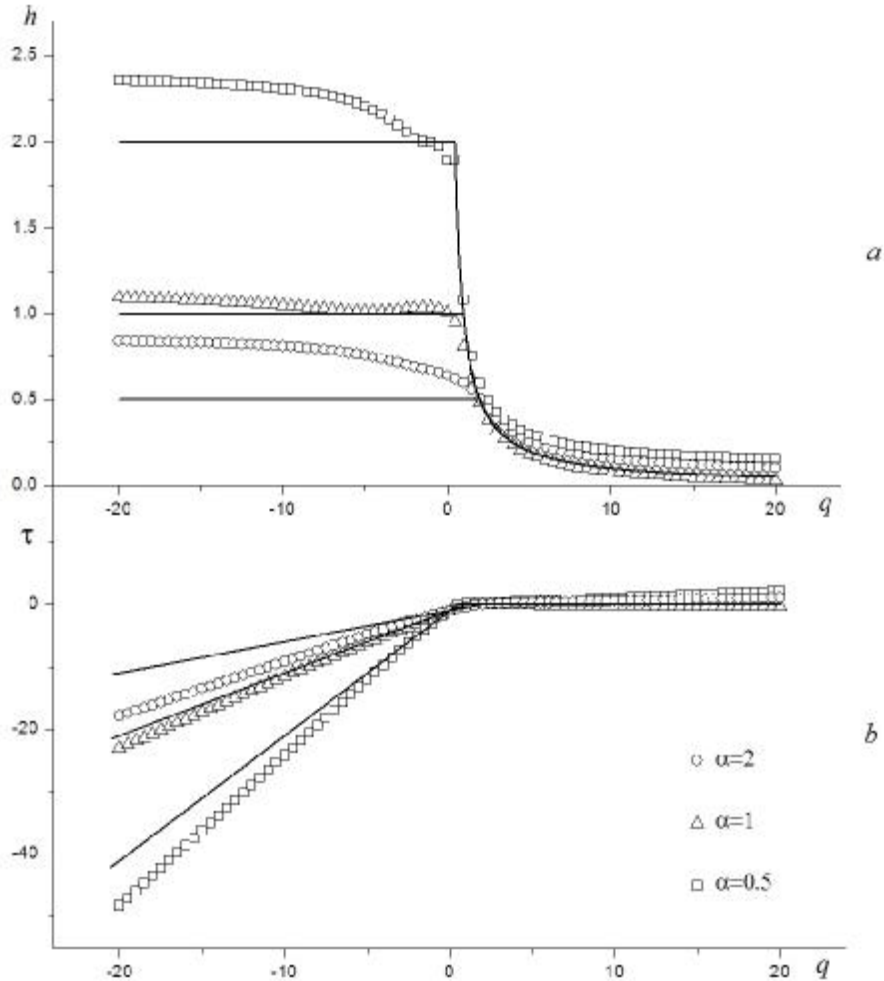


Рисунок 2 – Показатель Херста (а) и массовый показатель (б) некоррелированного самоподобного ряда при различных показателях  $\alpha$ ; значения величин, отмеченные кружками, треугольниками и квадратиками, получены методом МФФА, сплошные линии – по формуле (13) (число членов ряда  $N = 2^{16}$ )

### 3 АНАЛИЗ ОБМЕННЫХ КУРСОВ ВАЛЮТ

В последние годы экономические системы привлекают постоянное внимание не только у самих экономистов, но и в среде специалистов по статистической физике, где наблюдается значительный прогресс в исследовании сложных систем [1]. Финансовые рынки дают реальный пример таких систем, поскольку их поведение подвержено различного рода воздействиям микро- и макроскопической природы. Примеры такого влияния дают случайные изменения спроса и предложения на товары и

услуги, финансовые росты и кризисы, внешние воздействия типа стихийных бедствий и геополитических событий, а также многое другое.

Основным методом описания экономических систем являются временные ряды, наиболее яркий пример которых представляют обменные курсы валют. Недавние исследования [7] показали, что отвечающие им временные ряды обладают мультифрактальным спектром, исследование которого достигается методом МФФА. В качестве примера такого ряда рассмотрим динамику изменения курса доллара США к российскому рублю (соответствующие данные могут быть найдены в архиве центрального банка РФ по адресу [www.cbr.ru](http://www.cbr.ru)).

Согласно принятой методике колебания валютных котировок представляются временным рядом разницы логарифмов обменных курсов  $r(t) = \ln(P(t)) - \ln(P(t-1))$ , где  $P(t)$  – цена валюты в день  $t$ . На рис. 3 приведено изменение такой разницы с августа 1995 по май 2008 года.

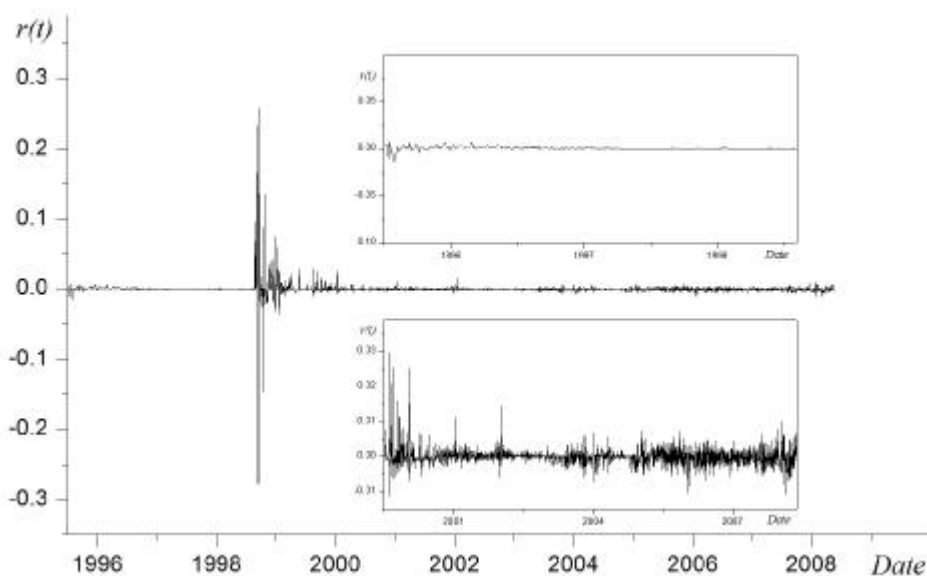


Рисунок 3 – Динамика изменения обменного курса доллара США к рублю РФ (верхняя вставка даёт увеличенный масштаб изменений до кризиса, нижняя – после)

Характерная особенность приведенного графика состоит в наличии участка, обнаруживающего аномально большие изменения разности курса. Эти изменения отражают финансовый кризис, разразившийся в России осенью 1998 года, когда стоимость доллара многократно возросла в течение нескольких дней.

Следуя методу МФФА, рассмотрим влияние этого кризиса на мультифрактальные свойства временного ряда. С этой целью проведем отдельный анализ двух участков ряда, один из которых предшествует кризису, а другой следует за ним (период самого кризиса – с августа 1998 по июнь 1999 года. – следует исключить из рассмотрения как непредсказуемый). Из зависимостей, приведенных на рис.4, видно, что вследствие кризиса спектральная функция  $f(\alpha)$  приобретает более широкий интервал  $\Delta\alpha$  изменения фрактальных размерностей: до кризиса  $\Delta\alpha \approx 0,99$ , а после  $\Delta\alpha \approx 1,2$ . Это свидетельствует о размытии мультифрактального спектра в результате подорожания валюты.

Более полное представление о влиянии финансового кризиса на статистические свойства временного ряда достигается исследованием

корреляций на каждом из выделенных участков. С этой целью сравним спектр исходного ряда с его формой после того, как члены ряда были переставлены случайным образом. Очевидно, в отсутствие корреляции такое перемешивание не может сказаться на спектре мультифрактала, тогда как рандомизация скоррелированного ряда должна существенно сузить его спектр. Из рис.5а видно, что на участке, предшествующем кризису, перемешивание ряда практически не изменяет ширину мультифрактального спектра:  $\Delta\alpha_{original} - \Delta\alpha_{shuffled} \approx -0.08$ , где  $\Delta\alpha_{original}$  и  $\Delta\alpha_{shuffled}$  означают ширину спектра для исходного и перемешанного рядов соответственно.

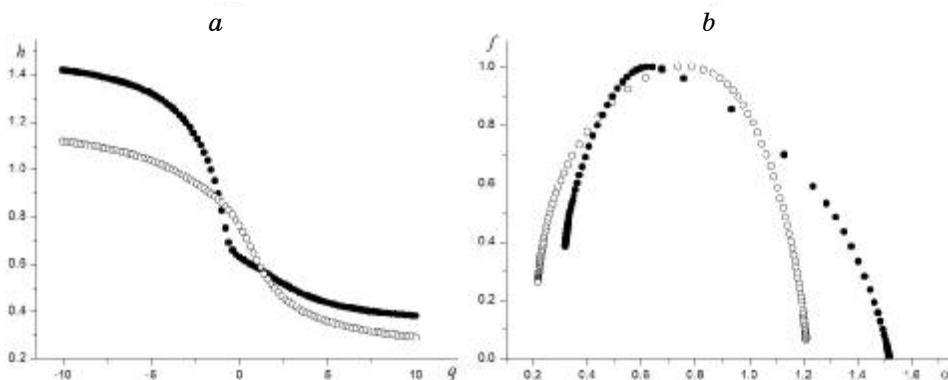


Рисунок 4 – Сравнение показателя Херста (а) и спектральной функции (б) для участков обменного курса доллар/рубль до (полые кружки) и после кризиса (жирные точки)

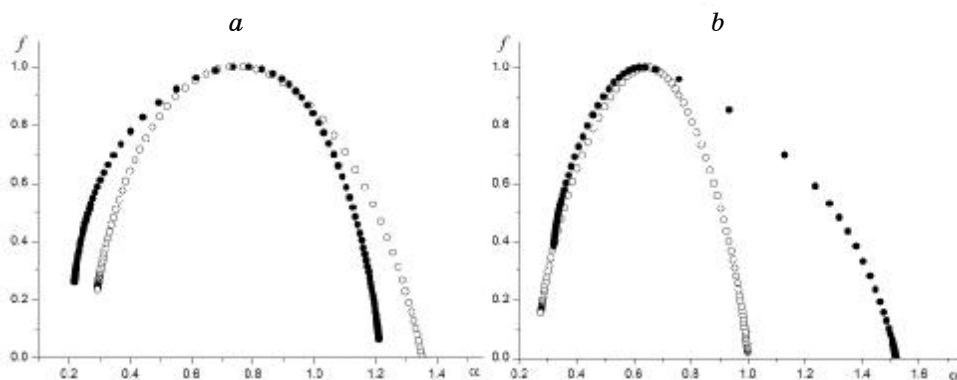


Рисунок 5 – Мультифрактальные спектры исходного (жирные точки) и перемешанного (полые кружки) рядов на участках временного ряда обменного курса доллара до (а) и после (б) кризиса соответственно

Отсюда следует вывод, согласно которому в предкризисный период практически отсутствовали временные корреляции в изменении курса доллара, благодаря чему внешние факторы оказывали слабое влияние на его стоимость. Рис.5б показывает, что перемешивание ряда после кризиса приводит к значительному уменьшению ширины мультифрактального спектра:  $\Delta\alpha_{original} - \Delta\alpha_{shuffled} \approx 0.48$ . Отсюда можно заключить, что в результате финансового кризиса временной ряд обменного курса становится сильно коррелированным, благодаря чему стоимость валюты



приобретает чувствительность к изменению экономических, социальных, политических и прочих факторов.

Общий вывод проведенного исследования состоит в следующем: экономический кризис приводит к усилению мультифрактальных свойств временных рядов соответствующих показателей и появлению сильных корреляций в их изменении.

#### 4 МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫЙ СПЕКТР ЭЛЕКТРОКАРДИОГРАММ СЕРДЦА

Рассмотрим биологические системы, для которых яркий пример проявления мультифрактальных свойств дают временные ряды электрокардиограмм сердца. Использование метода МФФА позволило установить связь между различными формами мультифрактальных спектров и группами сердечных патологий [8].

В качестве примера проанализируем типичную электрокардиограмму сердца человека, изображённую на рис.6. Из рис.7, на котором приведены соответствующие зависимости показателя Херста и массовый показатель, видно, что электрокардиограмма проявляет ярко выраженную мультифрактальную природу. С другой стороны, перемешивание ряда разрушает, как и выше, временные корреляции. Таким образом, электрокардиограмма сердца даёт пример коррелированных временных рядов, присущих биологическим системам.

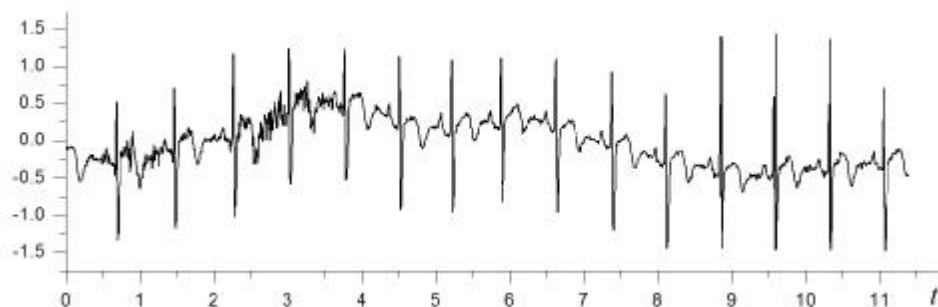


Рисунок 6 – Типичный вид электрокардиограммы сердца человека (по оси абсцисс отложено время в секундах, по оси ординат – сердечный ритм, измеренный в милливольтках)

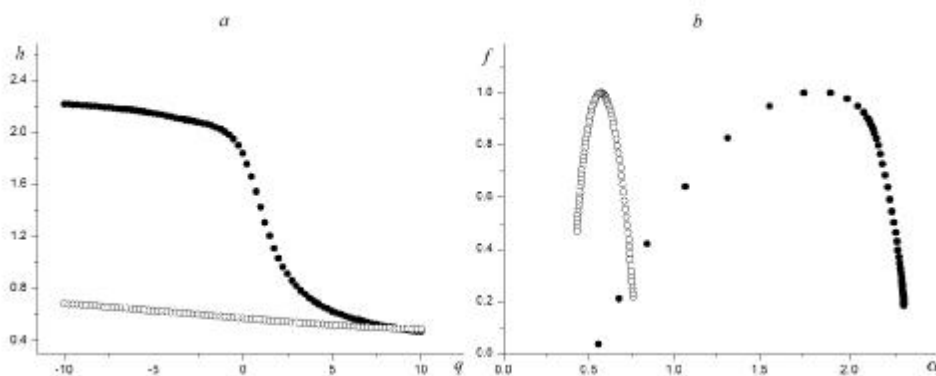


Рисунок 7 – Показатель Херста (а) и спектральная функция (b) электрокардиограммы, приведенной на рис.6 (жирные точки), для рандомизированного ряда (полые кружки)

## 5 МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫЙ СПЕКТР АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ

В предыдущих разделах были рассмотрены примеры временных рядов, взятые из экономики и медицины. В качестве физического приложения рассмотрим процесс аномальной диффузии, в ходе которой исследуемый ряд представляется временной зависимостью  $x_i$  координаты частицы, диффундирующей согласно дискретному стохастическому уравнению [10]

$$x_{i+1} = \sqrt{\tau}\zeta_i + [(1 - \gamma\tau) + \sqrt{\tau}\xi_i]x_i. \quad (14)$$

Здесь время  $t_i = i\tau$  фиксируется набором чисел  $i = 0, 1, \dots, N$  и минимальным интервалом  $\tau$ ;  $\zeta_i$  и  $\xi_i$  – аддитивный и мультипликативный стохастические источники, нормированные условиями белого шума  $\langle \zeta_i \zeta_j \rangle = \langle \xi_i \xi_j \rangle = \delta_{ij}$ ; коэффициент трения  $\gamma$  задаёт параметр  $\nu = \gamma/(1 + \gamma)$ , значения которого определяют режим диффузии: при  $\nu < 0$  реализуются полёты Леви, а предел  $\nu \rightarrow 1$ ,  $\gamma \rightarrow \infty$  отвечает броуновскому движению. Использование итерационной процедуры (14) на множестве, состоящем из  $N = 10^7$  точек, приводит к временному ряду, мультифрактальный спектр которого показан на рис.8.

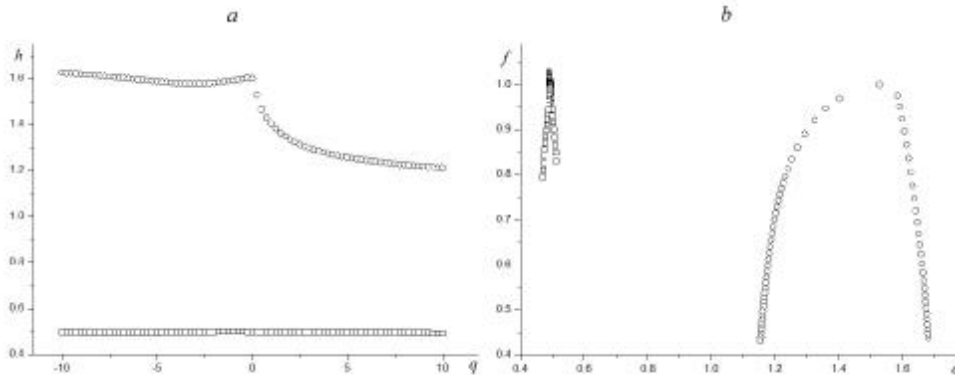


Рисунок 8 – Показатель Херста (а) и спектральная функция (б) для временного ряда, генерированного дискретным процессом (14) при  $\nu = -0,9$  (кружки) и  $\nu = 0,99$  (квадратики)

Из него видно, что с увеличением параметра  $\nu$ , когда полёты Леви переходят в нормальную диффузию, спектр мультифрактала неограниченно сужается. Очевидно, это обусловлено тем, что с ростом  $\nu$  пропадают разреженные области фрактального множества, отвечающие экстремальным выбросам положений частицы при полётах Леви.

## 6 ОБСУЖДЕНИЕ

Как показывает проведенное рассмотрение, форма мультифрактального спектра даёт полное описание множества значений, принимаемых исследуемой переменной. С другой стороны, использование метода МФФА позволяет исследовать характер корреляций в изменении временного ряда. Наиболее ярко наличие таких корреляций проявилось при исследовании процесса аномальной диффузии в предыдущем разделе: бесконечный рост параметра  $\nu$  от отрицательных значений трансформирует полёты Леви, характеризуемые наличием корреляций в распределении положений частицы, в броуновскую диффузию, для

которой распределение таких положений совершенно случайно [1]. Рис.8 показывает, что указанная перестройка процесса диффузии приводит к постоянному значению  $h(q) = 1/2$  показателя Гельдера, что означает неограниченное сужение мультифрактального спектра.

Из разделов 3 - 5 видно, что для выделения временных корреляций следует наряду со спектром исходного ряда исследовать мультифрактальные характеристики перемешанного ряда, члены которого переставлены в случайном порядке. Очевидно, такое перемешивание должно разрушать временную корреляцию в распределении случайной величины, тогда как в некоррелированном ряде перестановка его членов не может сказаться на мультифрактальном спектре. Если броуновская диффузия даёт тривиальный пример ряда, который не обладает ни временными корреляциями, ни мультифрактальным спектром, то самоподобный ряд, исследованный в разделе 2.2, хотя и не коррелирован, но имеет широкий спектр (см. рис.2). Очевидно, такой ряд представляет идеальный случай для тестирования метода перемешивания, позволяющего выделить временную корреляцию членов ряда. Из рис.9а видно, что это перемешивание практически не сказывается на спектре самоподобного ряда, в котором корреляции отсутствуют по определению. В отличие от него перемешивание биномиального ряда (рис.9b) существенно сужает мультифрактальный спектр и смещает его в сторону малых значений  $\alpha$ .

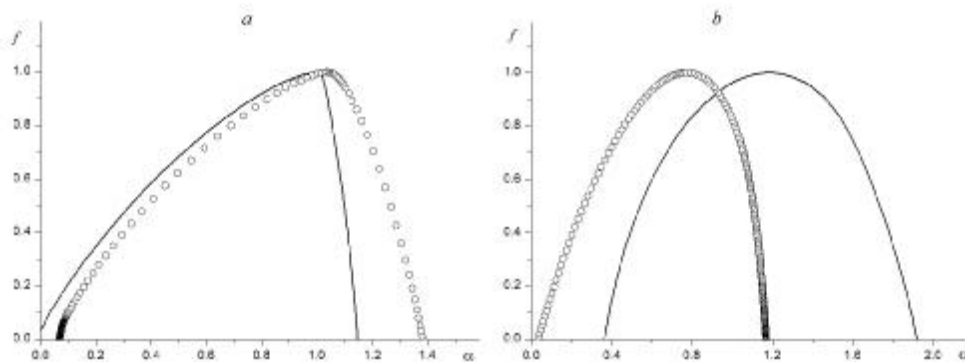


Рисунок 9 – Сравнение спектральных функций исходных (сплошные линии) и перемешанных (кружки) рядов: самоподобный ( $\alpha = 1$ ,  $N = 2^{16}$ ) (a); биномиальный ( $p = 0,75$ ,  $n = 16$ ) (b)

Таким образом, временные корреляции играют принципиальную роль в формировании биномиального ряда. Поскольку для него граничные значения фрактальной размерности  $\alpha_{\min} = -\ln p / \ln 2$  и  $\alpha_{\max} = -\ln(1 - p) / \ln 2$  определяются вероятностью  $p \geq 1/2$ , задающей значения ряда (9), то можно сделать следующий вывод: перемешивание биномиального ряда, смещающее мультифрактальный спектр к малым значениям  $\alpha$ , приводит к возрастанию вероятности  $p$  в сторону предельного значения  $p = 1$ .

В случае произвольного ряда форма мультифрактального спектра определяется двумя причинами [6]:

- некоррелированным разбросом случайной переменной, распределение которой характеризуется наличием расходящихся моментов;

– коррелированной последовательностью чередования членов временного ряда, характеризующей конечными моментами.

Очевидно, при перемешивании ряда последняя из этих причин становится несущественной, в результате чего спектр сужается и смещается в сторону малых фрактальных размерностей.

## SUMMARY

### MULTIFRACTAL DETRENDED FLUCTUATION ANALYSIS OF TIME SERIES

*A.I.Olemskoy, V.N. Borisyuk\*, I.A. Shuda\**

*Institute of Applied Physics of Academy of Sciences of Ukraine*

*\*Sumy State University*

*We describe algorithm of multifractal detrended fluctuation analysis (MF DFA) of time series and test it on both binomial multifractal and uncorrelated series with power law distribution function. As real series, we investigate multifractal spectra of currency exchange rates, heart rate signal and anomalous diffusion process. We detect that financial crisis leads to strengthening both multifractal properties of economic indexes and correlations in variations of time series related. In medicine, usage of MF DFA shows to allow one to state correspondence between different forms of multifractal spectra and groups of heart pathologies. As physical example, we shown that transformation of the Levy flights into the normal diffusion process narrows corresponding multifractal spectrum.*

*Key words: Multifractal spectrum; time correlation.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sornette D. Critical phenomena in natural Sciences. – N.Y.: Springer-Verlag, 2001.
2. G. Boffetta, M. Cencini, M. Falcioni, A. Vulpiani. Predictability: a way to characterize complexity // *Phys.Rep.* – 2002. – Vol. 356. – P. 367–474.
3. P.J. Brockwell, R.A. Davis. Springer Texts in Statistics. Introduction to Time Series and Forecasting. – New York: Springer, 1998.
4. Федер Е.Н. Фракталы. – М: Мир. 1991.
5. A. Olemskoi, S. Kokhan. Effective temperature of self-similar time series: analytical and numerical developments // *Physica A.* – 2006. – Vol. 360. – P. 37–58.
6. J. W.Kantellhardt, S.A. Zschiegner, E. Koscielny-Bunde, S. Havlin, A. Bunde, H.E. Stanley. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series // *Physica A.* – 2002. – Vol. 316. – P. 87–114.
7. J. W. Lee, K. E. Lee, P. A. Rikvold. Multifractal behavior of the Korean stock-market index KOSPI // *Physica A* – 2006. – Vol. 364. – P. 355–361.
8. D. Makowiec, R. Galaska, A. Dudkowska, A. Rynkiewicz, M. Zwierng. Long-range dependencies in heart rate signal revisited // *Physica A* . – 2006. – Vol. 369. – P. 632–644.
9. R.G. Kavasseri, R. Nagarajan. A multifractal description of wind speed records // *Chaos, solitons and fractals.* – 2005. – Vol. 24. – P. 165–173.
10. S. Anteneodo. Non-extensive random walks // *Physica A.*– 2005. – Vol. 358. – P. 289–298.

**Олемской А.И.**, доктор физ.-мат. наук, профессор;  
**Борисюк В.Н.**, аспирант;  
**Шуда И.А.**, кандидат физ.-мат. наук, доцент

*Поступила в редакцию 28 ноября 2008 г.*