
СИНЕРГЕТИЧНИЙ ПІДХІД ДО ОПИСУ ПЕРЕРИВЧАСТОГО ПЕРЕХОДУ МІЖ РЕЖИМАМИ РУХУ АКТИВНИХ ЧАСТИНОК

О.В. ЮЩЕНКО, О.І. ОЛЄМСКОЙ¹

УДК 539.2

© 2009 р.

Сумський державний університет
(Вул. Римського-Корсакова, 2, Суми 40007)

¹Інститут прикладної фізики НАН України
(Вул. Петропавлівська, 58, Суми 40030; e-mail: alex@ufn.ru)

Розвинуто синергетичну модель, яка дозволяє представити перехід між режимами руху ансамблю активних частинок типу біологічних систем. Показано, що стани системи зводяться до безладного руху частинок або до поступального зміщення їх ансамблю як цілого, залежно від ступеня збудженості системи, що визначається внутрішнім параметром. На основі фазових портретів системи досліджено переривчастий перехід між режимами руху активних частинок для різних співвідношень між часами зміни гідродинамічних мод. Проаналізовано параметри моделі, що сприяють переходу системи до впорядкованого стану.

1. Вступ

Ще з XIX століття багатьох вчених цікавила ідея опису поведінки біологічних систем за допомогою методів теоретичної фізики (див. [1,2] і посилання у них). Ця проблема зумовлена складністю біологічних систем, які мають безліч складових, що взаємодіють між собою нелінійним чином, у зв'язку з чим поведінка всієї системи не наслідує поведінку її складових. З іншого боку, природні складні системи мають дисипативний характер, і їх самоорганізація вимагає додаткової зовнішньої енергії.

Системи, що випробовують самоорганізацію, останнім часом широко вивчаються [3]. При цьому вони не обмежуються лише об'єктами неживої природи, коли індивідуальні риси складових системи практично не враховуються. За допомогою синергетичного підходу було описано багато соціальних та

фінансових систем, таких як крахи фінансових ринків, динаміка курсу валют, розподіл соціальних шарів суспільства, соціальні революції, рух транспорту та інше. У зв'язку з цим виникає питання: чи міг би бути використаний синергетичний підхід і для опису поведінки живих організмів.

Виявляється, що використання моделей, які ґрунтуються на методах нелінійної динаміки та теорії самоорганізації, дозволило пояснити такі процеси, як формування біологічного рельєфу, регенерація, біологічні ритми, скорочення м'язів, асоціативна пам'ять і т.д. [2,4]. Разом з тим залишається безліч біологічних процесів, що не одержали належного розуміння. Вони зводяться до виявлення механізмів структуроутворення, дослідження яких займає одне з центральних місць у природних і технічних науках для розгляду систем, що мають безліч стійких станів. Наприклад, дослідження динаміки системи хижак–жертва виявляє наявність просторово–часових структур у вигляді фронтів, що поширюються, регулярних і стохастичних коливань або концентричних і спіральних хвиль [4]. Останні спостерігаються в океані при обертальному русі планктону у кілометровому діапазоні та можуть виникати у колоніях різних бактерій [5,6].

Особливе місце серед зазначених проблем займає опис можливих режимів колективного руху живих організмів — зграї птахів, рою комах, колонії бактерій і т.д. Дослідження показують [4–6], що такий рух не залежить від рівня біологічних скупчень, починаючи від клітин і найпростіших мікроорганізмів та закін-

чуючи високоорганізованими рибами й птахами. Це дозволяє подати такі скупчення як ансамблі активних броунівських частинок, кожна з яких, маючи запас внутрішньої енергії, може змінювати свій внутрішній стан, що задається параметром θ . Враховуючи взаємодію між частинками, можна представити динаміку скупчення, зумовлену дією хімічного реагенту (наприклад, феромонів). Виділення такого реагенту приводить до просторово-часового розподілу $h(\mathbf{r}, t)$ концентрації хімічних продуктів, що еквівалентне появі поля $\mathbf{f} = \nabla h(\mathbf{r}, t)$, яке представляє градієнт концентрації цих продуктів. Характерно, що реакція частинки на хімічний сигнал зводиться не тільки до її зміщення в просторі, але й до утворення хімічних продуктів, склад яких визначається параметром внутрішнього стану θ . В результаті виявляється, що група активних частинок може рухатися таким чином:

- обертальний рух навколо відносно порожнього центра мас, в результаті чого скупчення утворює тороїдальну форму (при цьому центр мас залишається у спокої);
- поступальний рух, коли скупчення рухається як ціле, утворюючи щільну групу;
- переривчастий рух (послідовне чергування зазначених вище режимів).

У роботі [2] було розпочато спробу подання зазначених режимів руху, однак розвинена там схема не є самоузгодженою. Це пов'язано з тим, що один із параметрів, які визначають поведінку системи, задається штучно (наприклад, внутрішній параметр може набувати лише двох значень $\theta = \pm 1$). У даній роботі досліджується феноменологічна схема, в межах якої самоорганізацію ансамблю активних частинок подано самоузгодженим чином. Наш підхід ґрунтується на трипараметричній системі Лоренца, яка відповідає найпростішому польовому поданню системи, що самоорганізується. Розділ 2 присвячено розробці моделі та дослідженню монотонного режиму самоорганізації. У розділі 3 досліджується переривчастий перехід між режимами руху активних частинок та представлена оцінка параметрів моделі, що сприяють переходу системи до впорядкованого стану. У розділі 4 проведено аналіз кінетичної картини переходу на основі фазових портретів системи.

2. Синергетика колективної поведінки активних частинок

Із прикладу конденсованого середовища [7], представляти систему, що самоорганізується, можна за допо-

могою самоузгодженого опису часових залежностей параметра порядку, сполученого йому поля та керуючого параметра. Групою активних частинок будемо вважати для визначеності зграю птахів, центр маси якої може бути нерухомим, або рухатися поступально. Тоді параметр порядку, що розрізняє ці стани, зводиться до середньої швидкості \mathbf{v} руху птахів. Відповідно, сполучене поле задається далекодією силою $\mathbf{f} \equiv \nabla h(\mathbf{r}, t)$ хімічного типу, а керуючий параметр θ характеризує внутрішній стан, який визначається реакцією частинок на цю силу. В результаті задача зводиться до виразу швидкостей зміни \dot{v} , \dot{f} , $\dot{\theta}$ зазначених величин через їх значення v , f , θ (далі для простоти будемо розглядати одновимірний випадок).

З огляду на те, що параметр порядку $v(t)$ є основним, а його поведінка наслідуються силою $f(t)$ та внутрішнім параметром $\theta(t)$, то співвідношення для середнього прискорення візьмемо в лінійній формі

$$\tau_v \dot{v} = -v + A_v f. \quad (1)$$

Тут перший доданок у правій частині враховує релаксацію швидкості до нульового значення за час τ_v , а другий описує лінійну реакцію прискорення \dot{v} на зростання поля f ($A_f > 0$ — константа зв'язку).

Рівняння для сполученого поля приймаємо у вигляді

$$\tau_f \dot{f} = -f + A_f v \theta, \quad (2)$$

де перший доданок знову має релаксаційну природу з характерним часом τ_f , друге представляє *позитивний* зворотний зв'язок середньої швидкості руху й параметра внутрішнього стану зі швидкістю зміни сполученого поля ($A_f > 0$ — константа зв'язку). Саме цей зв'язок зумовлює наростання сполученого поля, що є причиною самоорганізації.

Останнє рівняння еволюції системи описує релаксацію параметра внутрішнього стану θ , що відіграє роль керуючого параметра:

$$\tau_\theta \dot{\theta} = (\theta_e - \theta) - A_\theta v f. \quad (3)$$

На відміну від (1), (2) перший доданок в (3) описує релаксацію параметра θ не до нуля, а до кінцевого значення θ_e , що задається зовнішнім впливом (τ_θ — відповідний час релаксації, $A_\theta > 0$ — константа зв'язку). Згідно з (3) *негативний* зворотний зв'язок далекодіяної сили та швидкості руху зі швидкістю зміни параметра внутрішнього стану приводить, відповідно до принципу Ле-Шательє, до зменшення цього параметра.

Згідно з [8] система синергетичних рівнянь (1) – (3) є найпростішою польовою схемою, що представляє ефект самоорганізації. Для аналізу цієї системи зручно використати безрозмірні змінні, тобто віднести час t , швидкість руху v , сполучене поле f і параметр внутрішнього стану θ до таких масштабів:

$$t_v, \quad v_c \equiv (A_f A_\theta)^{-1/2},$$

$$f_c \equiv (A_v^2 A_f A_\theta)^{-1/2}, \quad \theta_c \equiv (A_v A_f)^{-1}. \quad (4)$$

Тоді поведінка групи активних частинок представляється безрозмірною системою рівнянь

$$\dot{v} = -v + f, \quad (5)$$

$$\sigma \dot{f} = -f + v\theta, \quad (6)$$

$$\delta \dot{\theta} = (\theta_e - \theta) - v f, \quad (7)$$

де співвідношення між характерними часами релаксації позначені, як

$$\sigma \equiv \frac{\tau_f}{\tau_v}, \quad \delta \equiv \frac{\tau_\theta}{\tau_v}. \quad (8)$$

Монотонний режим самоорганізації реалізується, коли час релаксації середньої швидкості τ_v набагато перевершує масштаби зміни сполученого поля τ_f і керуючого параметра τ_θ [3]:

$$\sigma, \delta \ll 1. \quad (9)$$

Оскільки безрозмірні швидкості \dot{v} , \dot{f} , $\dot{\theta}$ мають однаковий порядок, то умови (9) дозволяють зневажити лівими частинами рівнянь (6), (7), що приводить до співвідношень

$$f = \theta_e \frac{v}{1 + v^2}, \quad \theta = \frac{\theta_e}{1 + v^2}. \quad (10)$$

Таким чином, спонтанний ріст середньої швидкості в інтервалі, обмеженому максимальним значенням v_c , приводить до наростання далекодійної сили f і до спадання параметра внутрішнього стану θ до значення $\theta_e/2$, що фіксується зовнішнім впливом.

Підстановка першої із рівностей (10) до (5) дає рівняння Ландау–Халатникова:

$$\dot{v} = -\frac{\partial E}{\partial v}, \quad (11)$$

вигляд якого визначається кінетичною енергією руху:

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{\theta_e}{2} \ln(1 + v^2), \quad (12)$$

що вимірюється в одиницях v_c^2 . Для малих значень параметра внутрішнього стану θ_e залежність $E(v)$ має монотонно зростаючий вигляд з мінімумом $v = 0$, що відповідає спокою центра мас групи (невпорядкований стан). З ростом θ_e до значень, що перевищують критичний рівень θ_c , з'являється мінімум

$$v_0 = \sqrt{\theta_e - 1}, \quad (13)$$

який відповідає поступальному руху (впорядкований стан). При цьому далекодійна сила здобуває кінцеве значення $f_0 = v_0$, а параметр внутрішнього стану зменшується до критичного значення $\theta_0 = 1$.

Проведений аналіз показує, що використання системи (5)–(7) дозволяє представити самоузгоджену картину спонтанного переходу групи активних частинок до режиму поступального руху.

3. Переривчастий перехід

Викладена вище поведінка системи активних частинок припускає, що для переходу від обертального до поступального режиму руху характерний час зміни середньої швидкості τ_v залишається сталим. В дійсності реакція системи на збільшення середньої швидкості v може привести до наростання часу τ_v . Таке уповільнення приводить до трансформації безперервного переходу до переривчастого. Скористаємося найпростішою апроксимацією

$$\tau_v = \tau_0 \left(1 + \frac{\kappa}{1 + v^2/v_\tau^2}\right)^{-1}, \quad (14)$$

що визначається позитивними константами τ_0, κ, v_τ . Тоді в рамках адіабатичного наближення (9) системі Лоренца (5) – (7) відповідає кінетична енергія руху:

$$E = \frac{v^2}{2} - \theta_e \ln(1 + v^2) + \frac{\kappa v_1^2}{2} \ln \left[1 + \left(\frac{v}{v_1}\right)^2\right],$$

$$v_1 \equiv \frac{v_\tau}{v_c}, \quad (15)$$

що відрізняється від (12) останнім доданком. Згідно з (15) за малих значень параметра внутрішнього стану θ_e залежність $E(v)$ має монотонно зростаючий вигляд

із мінімумом у точці $v = 0$, що відповідає обертальному режиму руху. Для значення

$$\theta_c^0 = 1 + v_1^2(\kappa - 1) + 2v_1\sqrt{\kappa(1 - v_1^2)} \quad (16)$$

на залежності $E(v)$ з'являється плато, що для $\theta_e > \theta_c^0$ трансформується у мінімум, який відповідає значенню середньої швидкості $v_0 \neq 0$ (поступальний рух), і максимум (нестійкий стан), що розділяє мінімуми $v_0 = 0$ і $v_0 \neq 0$. З подальшим ростом параметра внутрішнього стану θ_e мінімум, що відповідає поступальному режиму руху, заглиблюється, а висота бар'єра, що розділяє стаціонарні стани, спадає, досягаючи нуля для критичного значення параметра внутрішнього стану:

$$\theta_{c0} = 1 + \kappa. \quad (17)$$

Стаціонарні значення середньої швидкості визначаються співвідношеннями

$$v_0^m = v_{00} \left\{ 1 \mp \left[1 + \left(\frac{v_1}{v_{00}^2} \right)^2 (\theta_e - \theta_{c0}) \right]^{1/2} \right\}^{1/2}, \quad (18)$$

$$v_{00}^2 \equiv \frac{1}{2} [(\theta_e - 1) - (1 + \kappa)v_1^2], \quad (19)$$

де верхній знак відповідає нестійкому стану v^m , коли кінетична енергія руху має максимум, а нижній – стійкому стану v_0 (поступальний рух). Якщо параметр внутрішнього стану збільшується повільно, то в точці $\theta_e = \theta_{c0}$ відбувається стрибок стаціонарного значення середньої швидкості v_0 від нуля до $\sqrt{2}v_{00}$, а потім його величина плавно зростає. Для зворотного спадання θ_e стаціонарне значення середньої швидкості v_0 плавно зменшується до точки $\theta_e = \theta_c^0$, $v_0 = v_{00}$, а потім стрибком набуває нульового значення. Таким чином, при $v_1 \equiv v_\tau / v_c < 1$ спостерігається гістерезис, зумовлений наявністю бар'єра на залежності кінетичної енергії руху (15). З ростом швидкості зміни параметра внутрішнього стану петля гістерезису звужується.

Якщо віднести середню швидкість руху v , далекодійну силу f і параметр внутрішнього стану θ до масштабів v_c, f_c, θ_c , що визначені рівностями (4), можна дослідити можливі режими еволюції системи, що задаються різними співвідношеннями характерних часів $\tau_0, \tau_f, \tau_\theta$. При цьому слід пам'ятати, що ефективний час зміни середньої швидкості τ_v у вихідному рівнянні (5) задається рівністю (14).

3.1. Випадок $\tau_f \ll \tau_0, \tau_\theta$

Починаючи з дослідження немонотонної поведінки, розглянемо випадок, коли найменше значення має час релаксації далекодійної сили, яка наслідуює зміни середньої швидкості та параметра внутрішнього стану. В результаті можна зневажати коливаннями далекодійної сили та вважати, що в (6) $\dot{f} = 0$. Це приводить до зв'язку

$$f = v\theta. \quad (20)$$

Враховуючи (20) у рівняннях (5), (7), приходимо до системи рівнянь (час вимірюється в одиницях τ_0):

$$\dot{v} = -v \left[(1 - \theta) + \kappa (1 + v^2/v_1^2)^{-1} \right], \quad (21)$$

$$\dot{\theta} = \delta^{-1} [\theta_e - \theta (1 + v^2)]. \quad (22)$$

Її поведінка задається значенням параметра внутрішнього стану θ_e , що визначає ступінь нерівноважності системи, і співвідношенням характерних часів зміни параметра внутрішнього стану та середньої швидкості:

$$\delta = \frac{\tau_\theta}{\tau_0}. \quad (23)$$

У загальному випадку стандартний аналіз [9] системи (21), (22) показує, що її фазовий портрет характеризується наявністю трьох особливих точок $D(\theta_e, 0)$, $O(\theta_-, v_-)$, $S(\theta_+, v_+)$, координати яких θ_\pm, v_\pm визначаються рівностями

$$\theta_\pm = \frac{(1 + v_{00}^2) \pm \sqrt{(1 + v_{00}^2)^2 - \theta_e (1 - v_1^2)}}{1 - v_1^2}, \quad (24)$$

$$v_\pm = \sqrt{(\theta_e - \theta_\pm) / \theta_\pm}. \quad (25)$$

Точці D відповідають показники Ляпунова,

$$\lambda_D = \frac{\delta(\theta_e - \theta_{c0}) - 1}{2\delta} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\delta(\theta_e - \theta_{c0})}{[\delta(\theta_e - \theta_{c0}) - 1]^2}} \right), \quad (26)$$

де відповідно до (17) величина $\theta_{c0} = 1 + \kappa$ визначає точку втрати стійкості. Тому для $\theta_e < \theta_{c0}$ точка D являє собою стійкий вузол, а для $\theta_e > \theta_{c0}$ – сідло. Показники Ляпунова точок $O(\theta_-, v_-)$, $S(\theta_+, v_+)$

визначаються їх координатами (24), (25) за допомогою співвідношень

$$\lambda_{\pm} = \lambda_0 \left(1 \pm \sqrt{1 + \Delta} \right),$$

$$\lambda_0 = \frac{\theta_e - \theta_{\pm}}{\kappa v_1^2 \theta_{\pm}} (\theta_{\pm} - 1)^2 - \frac{\theta_e}{2\delta \theta_{\pm}},$$

$$\lambda_0^2 \Delta = \frac{2}{\delta} (\theta_e - \theta_{\pm}) \left(\frac{\theta_e (1 - \theta_{\pm})^2}{v_1^2 \kappa \theta_{\pm}^2} - 1 \right). \quad (27)$$

В інтервалі $\theta_c^0 < \theta < \theta_{c0}$ точка S є сідлом, а O – стійким вузлом або фокусом.

Наведені дані показують, що з ростом параметра внутрішнього стану θ_e фазовий портрет системи змінюється у такий спосіб (див. рис. 1). Для $\theta_e < \theta_c^0$, коли залежність (15) має монотонно зростаючий вигляд, точки S , O не реалізуються, а D являє собою стійкий вузол, що відповідає обертальному режиму руху активних частинок. З перевищенням характерного значення (16) у системі відбувається біфуркація, що складається з появи сідла S і стійкого вузла/фокуса O , які визначаються координатами (24), (25). Зі зростанням параметра θ_e сідло, що відповідає енергетичному бар'єру на залежності $E(v)$, наближається до вузла D і в точці θ_{c0} поглинає його. Подальше зростання θ_e дає картину, що відповідає поступальному режиму руху. На рис. 2 наведено, яким чином змінюється фазовий портрет, що відповідає поступальному режиму руху сукупності активних частинок ($\theta_c^0 < \theta_e < \theta_{c0}$), зі збільшенням співвідношення часів релаксації $\delta = \tau_{\theta} / \tau_0$.

Як видно з рисунка, в околі точки O для адіабатичного наближення $\tau_{\theta} \ll \tau_0$ траєкторії швидко збігаються до універсальної ділянки MOS (рис. 2, а), а в протилежному випадку $\tau_{\theta} \gg \tau_0$ з'являється режим загасаючих коливань (рис. 2, в). Крім цього, в діапазоні малих значень середньої швидкості з'являється сепаратриса, що показує наявність бар'єру на залежності $E(v)$. Дослідження часових залежностей шляху, пройденого точкою за фазовою траєкторією [10], показує, що тут відбувається уповільнення поблизу *русла великої ріки MOS*, що відповідає околі мінімуму впорядкованого стану (поступальний режим).

Знайдені особливості еволюції системи можуть бути представлені на основі вигляду залежності $E(v, \theta)$ кінетичної енергії руху від середньої швидкості v та

¹Це впливає з того факту, що зазначена кривизна зворотно пропорційна відповідній сприйнятливості, яка, у свою чергу, пропорційна часу релаксації, що відповідає їй [11].

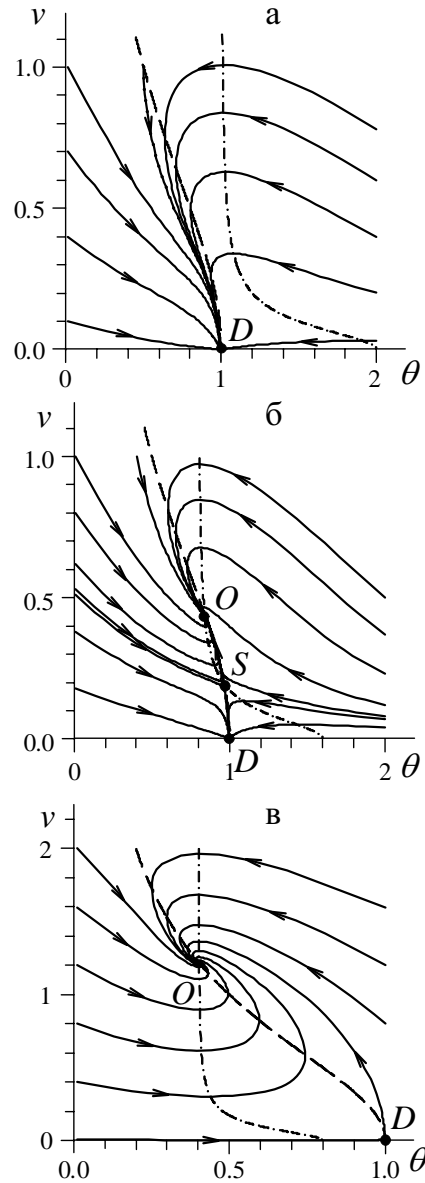


Рис. 1. Фазові портрети переривчастого переходу між режимами руху активних частинок для різних значень параметра внутрішнього стану ($\kappa = 1, v_1 = 0, 1, \tau_f \ll \tau_0 = \tau_{\theta}$): а – $\theta_e = \theta_c$; б – $\theta_e = 1, 25\theta_c$; в – $\theta_e = 2, 5\theta_c$

параметра внутрішнього стану θ . При цьому варто виходити з того факту, що в ході своєї еволюції система проводить основний час в околі екстремумів залежності $E(v, \theta)$. Оскільки час релаксації уздовж кожної з осей v, θ зворотно пропорційний кривизні залежності $E(v, \theta)$ уздовж відповідної осі ¹, то умова

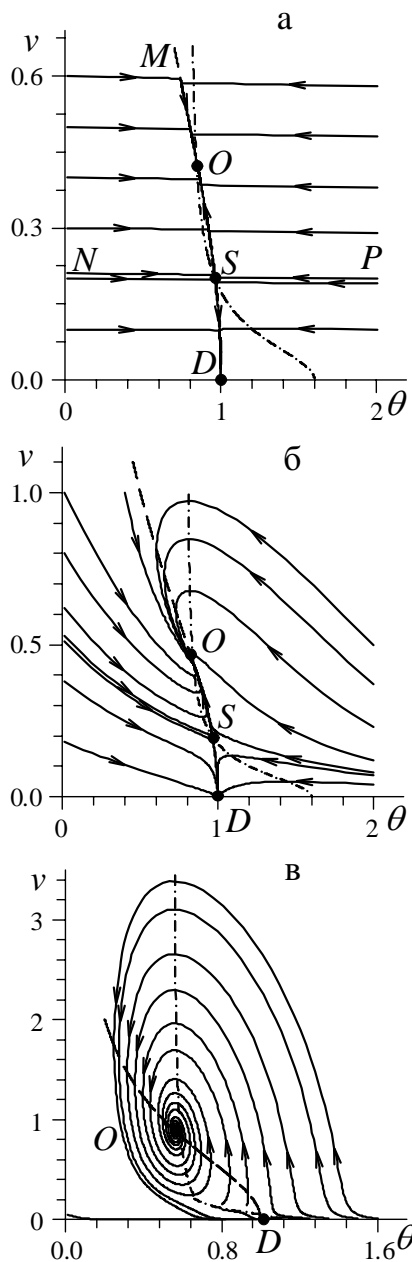


Рис. 2. Фазові портрети переривчастого переходу для різних значень параметра внутрішнього стану та для різних співвідношень між часами зміни гідродинамічних мод ($\kappa = 1, v_1 = 0, 1$): а - $\theta_e = 1, 25\theta_c, \tau_f \ll \tau_0 = 100\tau_\theta$; б - $\theta_e = 1, 25\theta_c, \tau_f \ll \tau_0 = \tau_\theta$; в - $\theta_e = 1, 8\theta_c, \tau_f \ll \tau_\theta = 10\tau_0$

$\tau_\theta \ll \tau_0$ означає, що залежність $E(v, \theta)$ змінюється набагато швидше уздовж осі θ , ніж уздовж v . У результаті виявляється, що поверхня функції $E(v, \theta)$ має вузький жолоб уздовж універсальної траєкторії,

зумовленої залежністю $\theta(v)$ вигляду (10). Як видно з рис. 2,а, у нього система швидко скачується уздовж осі θ , що відповідає великій кривизні. Саме наявність цього жолоба забезпечує універсальний характер еволюції системи, оскільки поблизу екстремумів залежність $E(v, \theta)$ завжди має вигляд параболи:

$$E \approx E(v_0, \theta_0) + \frac{\chi_v^{-1}}{2} (v - v_0)^2 + \frac{\chi_\theta^{-1}}{2} (\theta - \theta_0)^2, \quad (28)$$

де значення v_0, θ_0 визначають положення екстремуму, а сприйнятливості χ_v, χ_θ — його кривизну.

У зв'язку зі сказаним може здатися, що для наближення $\tau_0 \ll \tau_\theta$, протилежного адіабатичному, залежність $E(v, \theta)$ також повинна мати жолоб, і стає незрозумілою природа загасаючих коливань, наведених на рис. 2,в. Однак варто пам'ятати, що поблизу точки мінімуму залежності $E(v, \theta)$ сприйнятливості χ_v, χ_θ у рівності (28) зв'язані із часами релаксації τ_0, τ_θ різними співвідношеннями $\chi_\theta \propto \tau_\theta, \chi_v \propto \tau_0 |\theta_e - \theta_{c0}|^{-1}$. Оскільки $|\theta_e - \theta_{c0}| \ll 1$, то, незважаючи на мале значення τ_0 , кривизна $\chi_v^{-1} \propto \tau_0^{-1} |\theta_e - \theta_{c0}|$ параболи (28) уздовж осі v виявляється порівняною з кривизною $\chi_\theta^{-1} \propto \tau_\theta^{-1}$ залежності $E(v, \theta)$ уздовж осі θ . Іншими словами, для $\tau_0 \ll \tau_\theta$ залежність $E(v, \theta)$ має поблизу мінімуму, що відповідає поступальному режиму руху, вигляд параболоїда з кривизною, що має малі (і порівняні) значення уздовж осей v, θ . У результаті, коли конфігуративна точка скочується до мінімуму, вона обертається за поверхнею цього параболоїда. Очевидно, таке обертання і представляє загасаючі коливання, зображені на рис. 2,в.

Варто взяти до уваги, що описане критичне зростання сприйнятливості χ_v у співвідношенні (28) носить колективний характер, властивий системі, що самоорганізується [7], і не проявляється поблизу максимуму залежності $E(v, \theta)$. Саме із цієї причини не відбувається закручування сепаратиси у наближенні $\tau_0 \ll \tau_\theta$ (див. рис. 2,в).

3.2. Випадок $\tau_0 \ll \tau_f, \tau_\theta$

Із аналітичної точки зору даний випадок є найбільш трудомістким, оскільки підстановка ефективного часу зміни середньої швидкості (14) у вихідне рівняння (5), де необхідно покласти $\dot{v} = 0$, приводить до кубічного рівняння (див. [12]). Його рішення зручно записати у вигляді

$$3v = f + v_+(f) + v_-(f), \quad (29)$$

де введено функції

$$v_{\pm}(f) = \left\{ f(f^2 + f_1^2) \pm 3v_1 \sqrt{3[(f^2 + f_2^2)^2 + f_3^4]} \right\}^{1/3} \quad (30)$$

і сталі $f_1 - f_3$, що визначаються рівностями

$$f_1^2 \equiv \frac{9}{2}v_1^2(2 - \kappa),$$

$$f_2^2 \equiv \frac{1}{8}v_1^2 [36(2 - \kappa) - (8 - \kappa)^2],$$

$$f_3^2 \equiv \frac{1}{8}v_1^2 \sqrt{\kappa(8 - \kappa)^3}. \quad (31)$$

Підстановка зв'язку (29) до рівняння (6), (7) приводить їх до вигляду

$$\dot{f} = -f + \frac{1}{3}\theta[f + v_+(f) + v_-(f)], \quad (32)$$

$$\tau\dot{\theta} = (\theta_e - \theta) - \frac{1}{3}f[f + v_+(f) + v_-(f)], \quad (33)$$

де час вимірюється в одиницях τ_f , і введене співвідношення часів релаксації $\tau \equiv \tau_{\theta}/\tau_f$.

Хоча аналітично тут не вдається знайти ні особливих точок, ні відповідних їм показників Ляпунова, чисельне дослідження фазового портрета (див. рис. 3) показує, що поведінка системи збігається з дослідженою у розділі 3.1. Тут, як і в попередньому випадку, з'являється сепаратриса для значень параметра внутрішнього стану θ і далекодіючої сили f , які відповідають енергетичному бар'єру, що відокремлює поступальний режим руху від обертального.

Тоді за аналогією до попереднього розділу, неважко побачити, що для $\tau_{\theta} \ll \tau_f$, коли універсальність еволюції системи проявляється максимально (див. рис. 3,а), залежність $E(f, \theta)$ має вузький жолоб уздовж універсальної ділянки траєкторій. Наявність режиму загасаючих коливань у протилежному випадку $\tau_{\theta} \gg \tau_f$ (рис. 3,б) вказує на критичне зростання сприйнятливості $\chi_f \propto \tau_f |\theta_e - \theta_{c0}|^{-1}$ далекодіючої сили. Очевидно, вихідною причиною цього зростання є критичний ріст сприйнятливості $\chi_v \propto \tau_0 |\theta_e - \theta_{c0}|^{-1}$, що відповідає середній швидкості. Наявність чіткого функціонального зв'язку (29) між середньою швидкістю та далекодіючою силою забезпечує зростання сприйнятливості далекодіючої сили.

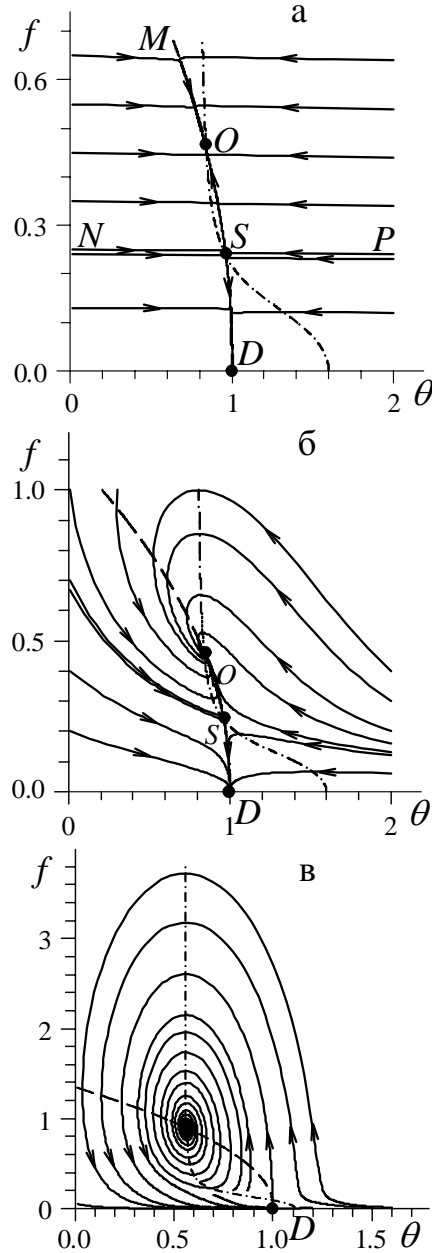


Рис. 3. Фазові портрети переривчастого переходу ($\kappa = 1, v_1 = 0, 1$): а - $\theta_e = 1,25\theta_c, \tau_0 \ll \tau_f = 100\tau_{\theta}$; б - $\theta_e = 1,25\theta_c, \tau_0 \ll \tau_f = \tau_{\theta}$; в - $\theta_e = 1,8\theta_c, \tau_0 \ll \tau_{\theta} = 10\tau_f$

3.3. Випадок $\tau_{\theta} \ll \tau_0, \tau_f$

Якщо у (7) покласти $\dot{\theta} = 0$, то одержуємо зв'язок

$$\theta = \theta_e - vf. \quad (34)$$

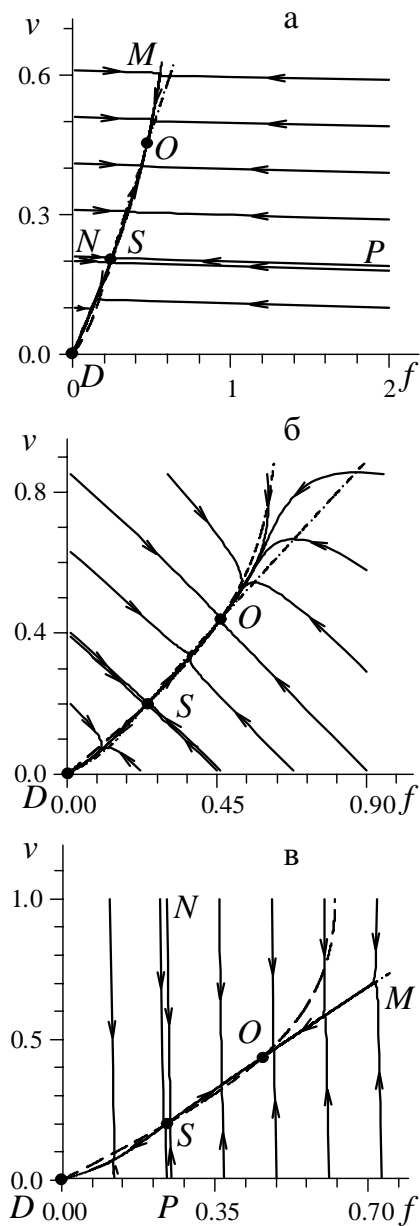


Рис. 4. Фазові портрети переривчастого переходу ($\kappa = 1, v_1 = 0, 1, \theta_e = 1, 25\theta_c$): а - $\tau_\theta \ll \tau_0 = 100\tau_f$; б - $\tau_\theta \ll \tau_0 = \tau_f$; в - $\tau_\theta \ll \tau_f = 100\tau_0$

Підстановка (34) до (6) дає рівняння

$$\dot{f} = \frac{1}{\sigma} [\theta_e v - f(1 + v^2)], \tag{35}$$

де $\sigma \equiv \tau_f / \tau_0$.

Рівняння (5) при цьому набуває вигляду

$$\dot{v} = -v \left(1 + \frac{\kappa}{1 + v^2/v_1^2} \right) + f. \tag{36}$$

Фазовий портрет системи (35), (36) характеризується наявністю трьох особливих точок $D(0, 0)$, $O(f_+, v_+)$ і $S(f_-, v_-)$, координати яких v_\pm, f_\pm задаються рівностями

$$v_\pm = \left\{ v_{00}^2 \pm \sqrt{v_{00}^4 + [\theta_e - (1 + \kappa)] v_1^2} \right\}^{1/2}, \tag{37}$$

$$f_\pm = \theta_e \frac{v_\pm}{1 + v_\pm^2}. \tag{38}$$

Показники Ляпунова особливої точки D визначаються співвідношенням

$$\lambda_D = -\frac{1}{2} (\theta_{c0} + \sigma^{-1}) \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4(\theta_e - \theta_{c0})}{\sigma(\theta_{c0} + \sigma^{-1})^2}} \right]. \tag{39}$$

Для $\theta_e < \theta_{c0}$ ця точка є стійким вузлом, а для $\theta_e \geq \theta_{c0}$ — сідлом. Показники Ляпунова точок $O(f_+, v_+)$, $S(f_-, v_-)$ залежать від їх координат (37), (38) таким чином:

$$\lambda_\pm = \lambda_0 \left(1 \pm \sqrt{1 + \Delta} \right),$$

$$\lambda_0 = \frac{(f_\pm - v_\pm)^2}{\kappa v_1^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1 + v_\pm^2}{\sigma} + \frac{f_\pm}{v_\pm} \right),$$

$$\lambda_0^2 \Delta = \frac{(1 - v_\pm^2) f_\pm}{\tau v_\pm} - \frac{1 + v_\pm^2}{\sigma} \left[\frac{f_\pm}{v_\pm} - \frac{2(f_\pm - v_\pm)^2}{\kappa v_1^2} \right]. \tag{40}$$

В інтервалі реалізації переривчастого переходу $\theta_e^0 < \theta < \theta_{c0}$ точка S є сідлом, а O — стійким вузлом або фокусом.

Чисельне визначення фазового портрета приводить до картини, показаної на рис. 4. Як видно з рисунка, відмінною рисою даного випадку є та обставина, що універсальність еволюції системи проявляється не тільки для $\tau_f \ll \tau_0$ (рис. 4, а), але й у протилежному випадку $\tau_f \gg \tau_0$ (рис. 4, б), де, здавалося б, можна чекати появи коливачь. Це пов'язано з тим, що кривизна парабол уздовж осей f, v визначаються значеннями $\chi_f^{-1} \propto \tau_f^{-1} |\theta_e - \theta_{c0}|$, $\chi_v^{-1} \propto \tau_0^{-1} |\theta_e - \theta_{c0}|$ зворотних сприйнятливостей. Тому для $\tau_f \gg \tau_0$ виконується співвідношення $\chi_f^{-1} \ll \chi_v^{-1}$, яке означає, що кривизна залежності $E(v, f)$ уздовж осі значень далекодійної сили f набагато менша, ніж уздовж осі

середньої швидкості v . Тому на рис. 4, в траєкторії, за якими конфігуративна точка швидко скочується до *русла великої ріки*, спрямовані практично уздовж осі v .

Проведене дослідження показує, що рівняння Лоренца (5)–(7) дозволяють подати основні особливості переходу між режимами руху активних частинок, а саме між обертальним та поступальним режимами. Феноменологічний опис досягається використанням залежності $E(v)$ кінетичної енергії від величини середньої швидкості. Переривчастий перехід реалізується, якщо час релаксації середньої швидкості залежить від його величини v згідно з (14). Тоді функція $E(v)$ задається рівнянням (15), зумовленим параметрами κ, v_τ . Залежність $E(v)$ має енергетичний бар'єр, що розділяє мінімуми, які відповідають поступальному та обертальному руху, за умови $v_1 \equiv \frac{v_\tau}{v_c} < 1$. У цьому випадку, якщо параметр θ_e знаходиться в інтервалі $(\theta_c^0, \theta_{c0})$, перехід протікає стрибком, а для $\theta_e > \theta_{c0}$ — безперервно. Рівноважне значення середньої швидкості визначається рівностями (18), (19).

Істотна особливість системи, що самоорганізується, полягає в тому, що стаціонарне значення внутрішнього параметра θ_0 не збігається з параметром θ_e , що задається зовнішнім впливом. Для переривчастого переходу реалізується значення θ_- (див. (24)), що відповідає мінімуму залежності $E(v)$. Оскільки величини θ_c, θ_- представляють мінімальні значення внутрішнього параметра, починаючи з яких відбувається перехід до поступального режиму руху, то зазначений факт означає, що негативний зворотний зв'язок між середньою швидкістю та далекодією силою (останній доданок у (7)) приводить до настільки сильного зменшення параметра внутрішнього стану, яке тільки на межі забезпечує самоорганізацію.

Згідно з рис. 5 стаціонарне значення внутрішнього параметра θ_0 збігається зі значенням θ_e в інтервалі $0 < \theta_e < \theta_c^0$.

Якщо $\theta_e > \theta_c^0$, то стаціонарне значення внутрішнього параметра θ_0 стає двозначним та повільно спадає від значення

$$\theta_m^0 = \theta_{c0} \left(1 + v_1 \sqrt{\frac{\kappa}{1 - v_1^2}} \right), \quad (41)$$

що відповідає $\theta_e = \theta_c^0$, до θ_c для $\theta_e \rightarrow \infty$. За умов повільного росту θ_e від 0 до θ_{c0} стаціонарне значення внутрішнього параметра лінійно зростає у тому ж інтервалі. Після стрибка вниз у точці $\theta_e = \theta_{c0}$ величина θ_0 повільно спадає відповідно до залежності (24) для

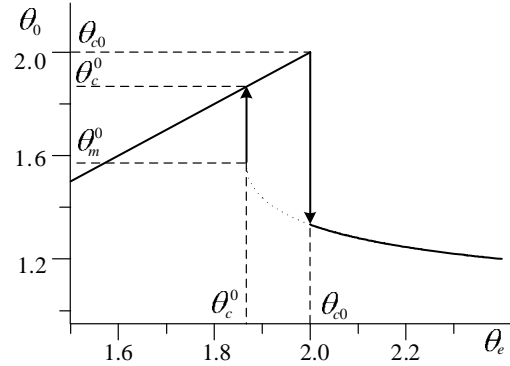


Рис. 5. Залежність стаціонарного значення параметра внутрішнього стану θ_0 від параметра θ_e , що задається зовнішнім впливом ($\kappa = 1, v_1 = 0,5$)

θ_- . Для зворотного зменшення θ_e стаціонарне значення внутрішнього параметра θ_0 повільно зростає, а в точці θ_c^0 змінюється стрибком від значення θ_m^0 до θ_c^0 . Оскільки в актуальній області параметрів v_1, κ , що обмежена величиною

$$\kappa_{\min} = \frac{v_1^2}{1 - v_1^2}, \quad (42)$$

значення θ_m^0 менше θ_c^0 , то в інтервалі $(\theta_c^0, \theta_{c0})$ мінімальне значення внутрішнього параметра θ_0 менше, ніж θ_e .

Кінетична картина переходу представляється фазовими портретами, зображеними на рис. 1–4. У випадку переривчастого переходу для $\theta_e = \theta_c^0$ відбувається біфуркація, у результаті якої з'являються вузол D , що характеризує обертальний рух, сідло S , що відповідає енергетичному бар'єру на залежності $E(v)$, і вузол/фокус O , який характеризує поступальний режим руху. З ростом параметра внутрішнього стану в інтервалі $(\theta_c^0, \theta_{c0})$ сідло S наближається до вузла D , поглинаючи його в точці θ_{c0} , а вузол/фокус O зміщується у бік зростання середньої швидкості й далекодієвої сили.

4. Висновки

Відповідно до безрозмірної системи рівнянь Лоренца (21), (6), (7) картина переходу від обертального до поступального режиму руху визначається набором трьох синергетичних і трьох кінетичних параметрів. Головну роль у першій групі відіграє внутрішній параметр θ_e , відношення якого до критичного значення θ_c визначає режим руху (див. рис.1). Два інші синергетичні параметри κ і $v_1 \equiv v_\tau/v_c$, значення яких задають закон (14) дисперсії часу зміни

середньої швидкості, визначають область переривчастого переходу. Вона обмежена мінімальним значенням (42), віддалення від якого розширює цю область. Характерна риса переривчастого переходу полягає в тому, що на фазовому портреті з'являється сепаратриса, наявність якої приводить до критичної залежності еволюції системи від вибору її початкового стану. Така поведінка відповідає поділу простору станів на області режимів руху, межа між якими задається сепаратрисою.

Кінетичними параметрами, що визначають поведінку системи, є характерні часи τ_0 , τ_f , τ_θ змін середньої швидкості, далекодійної сили і внутрішнього параметра в автономних режимах. Проведене дослідження показує, що універсальна картина еволюції системи реалізується, якщо останній із зазначених часів набуває найменшого значення. При цьому система за короткий час τ_θ виходить на універсальну ділянку MOS (див. рис 2–4), положення якої залежить тільки від синергетичних параметрів, а не від співвідношення масштабів часу τ_0 , τ_f , τ_θ . Очевидно, саме така ситуація реалізується в дійсності. Для аномального наростання часу зміни внутрішнього параметра відбувається закручування фазових портретів поблизу стійкого стану.

Відзначимо на закінчення, що для переходу до реальних значень середньої швидкості, далекодійної сили та внутрішнього параметра слід помножити їх безрозмірні значення v , f , θ на відповідні масштаби v_c , f_c , θ_c , задані рівностями (4). З вищесказаного випливає, що найбільш схильними до еволюції виявляються системи, які мають малий критичний поріг θ_c , подолання якого забезпечує перехід до поступального режиму руху. Відповідно до останньої рівності (4) більш просто такий перехід досягається для великих значень параметрів зв'язку A_v , A_f у рівняннях (1), (2).

1. H. Markl, A.V. Humboldt-Magazin. **65**, 13 (1995).
2. W. Ebeling and F. Schweitzer *Self-organization, active brownian dynamics, and biological applications* (cond-mat/0211606 v1).
3. Г. Хакен, *Синергетика* (Мир, Москва, 1980).
4. А.Б. Медвидинский, С.В. Петровский, И.А. Тихонова и др., УФН **172**, №1, 31, (2002).
5. W. Alt and G. Hoffmann, *Biological motion* (Springer-Verlag, Berlin, 1990).
6. Г.Р. Иванцкий, А.Б. Медвидинский, М.А. Цыганов, УФН **164**, 1041 (1994).
7. А.И. Олемской, А.А. Кацнельсон, *Синергетика конденсированной среды* (УРСС, Москва, 2003).

8. А.И. Olemskoi, Physica A **310**, 223 (2002).
9. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. *Теория колебаний* (Наука, Москва, 1981).
10. А.И. Олемской, А.В. Хоменко, ЖЭТФ **110**, 2144 (1996).
11. А.А. Кацнельсон, А.И. Олемской, *Микроскопическая теория неоднородных структур* (Изд-во МГУ, Москва, 1987).
12. Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц, *Теоретическая физика. В 10 т. Статистическая физика Ч.1 Т.5.* (Физматлит, Москва, 2002).
13. Г. Хакен, *Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах* (Мир, Москва, 1985).
14. А.И. Olemskoi, *Fractals in Condensed Matter Physics* (Gordon & Breach, London, 1996); А.И. Олемской, А.Я. Флат, УФН **163**, 5 (1993).

Одержано 12.11.08

СИНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ ПРЕРЫВИСТОГО ПЕРЕХОДА МЕЖДУ РЕЖИМАМИ ДВИЖЕНИЯ АКТИВНЫХ ЧАСТИЦ

О.В. Ющенко, А.И. Олемской

Резюме

Развита синергетическая модель, позволяющая представить переход между режимами движения ансамбля активных частиц, роль которого играет биологическая система. Показано, что в зависимости от степени возбуждения, определяемой внутренним параметром, состояния системы сводятся к беспорядочному движению частиц либо к поступательному смещению их ансамбля как целого. На основе фазовых портретов исследуется прерывистый переход между режимами движения активных частиц для различных соотношений между временами изменения гидродинамических мод. Найденны параметры модели, при которых система способна к переходу в упорядоченное состояние.

SYNERGETIC APPROACH TO THE DESCRIPTION OF A STEP-LIKE TRANSITION BETWEEN THE MOTION REGIMES OF ACTIVE PARTICLES

O.V. Yushchenko, A.I. Olemskoi¹

Sumy State University

(2, Rymyskyi-Korsakov Str., Sumy 40007, Ukraine),

¹Institute of Applied Physics, Nat. Acad. of Sci. of Ukraine (58, Petropavlivska Str., Sumy 40030, Ukraine; e-mail: alex@ufn.ru)

Summary

A synergetic model has been developed to describe transitions between the motion modes in an ensemble of active particles of the type of biological systems. We show that states of the system are reduced to either the random motion of particles or

a translational displacement of the ensemble as a whole, which depends on the excitation level of the system determined by an internal parameter. The phase portraits of the system were used to study a step-like transition between the motion regimes of

active particles for various ratios between the characteristic times of hydrodynamic mode variations. The model parameters, which promote the transition of the system into the ordered state, have been analyzed.