

T_{cr} (для рассмотренных ансамблей наночастиц C_{60} соответствующее увеличение равно 98 К, а уменьшение – 42 К).

SUMMARY

Magnetic properties of an ensemble of uniaxial ellipsoidal nanoparticles randomly distributed on the sites of a tetragonal lattice are considered. The mean local field acting on a nanoparticle from the other nanoparticles is found, the phase diagram for such ensembles is constructed and the regions where the ferromagnetic ordering exists are defined. The equation for dipolar order parameter is derived and the temperature of paramagnetic-ferromagnetic phase transition is calculated.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Такзей Г.А., Гунько Л.П., Сыч И.И., Троценков Ю.Н., Черепанов С.В., Миребо И. // Письма в ЖЭТФ, 1996. – Т.63. – С. 1013.
2. Del Bianco L., Ballesteros C., Rojo J.M., Hernando A., // Phys. Rev. Lett. – 1998. – V. 81. – P. 4500.
3. Bouchaud J.P., Zйrah, P.G., // Phys. Rev. B. – 1993. – V. 47. – P. 9095.
4. Zhang H., Widom, M., // Phys. Rev. B. – 1995. – V. 51. – P. 8951.
5. Денисов С.И. // ФТТ. – 1999. – Т.41. – №10. – С. 1822.
6. Kechrakos D., Trohidou K.N. // J. Magn. Magn. Mater. – 1998. – V. 177. – P. 943.
7. Денисов С.И., Нефедченко В.Ф. // Вестник СумГУ. – 1999. – № 2 (13). – С. 12.
8. Luttinger J.M., Tisza L. // Phys. Rev. – 1947. – V. 70. – P. 954.
9. Brown W.F., // Jr., Phys. Rev. – 1963. – V. 130. – P. 1677.
10. Вонсовский С.В. Магнетизм. – М.: Наука, 1971.

Поступила в редколлегию 11 октября 1999 г.

УДК 539.3

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СЛОЯ

Л.А.Фильштинский, проф.; Л.П.Гришко, асп.

Граничная задача теории упругости для слоя с туннельным разрезом сводится к бесконечной системе одномерных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений, которая реализуется численно. В качестве примера расчета определяются коэффициенты интенсивности напряжений – функционалы, характеризующие меру сингулярности напряжений в вершине разреза.

В настоящей работе обобщаются методы работ [1,2].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И СВЕДЕНИЕ ЕЕ К ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Рассмотрим упругий слой $-h \leq x_3 \leq h$, $-\infty < x_1, x_2 < \infty$, ослабленный сквозными туннельными разрезами, поперечные сечения которых имеют форму гладких разомкнутых дуг L_j ($j=1,2,\dots,k$) (рис.1).

Пусть на поверхности разреза действует периодическая по координате x_1 нагрузка X_n^\pm ($X_n^\pm = -X_n^\mp = X_n$, $n=1,2,3$). Будем считать, что кривизны дуг и

функции $X_n \in H$ на L , [3], и, кроме того, X_n раскладываются в ряды Фурье по координате x_3 на $[-h, h]$. Граничные условия на основаниях заданы в виде $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, u_3 = 0$ ($x_3 = \pm h$). (1)

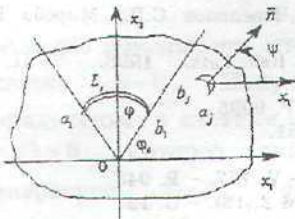
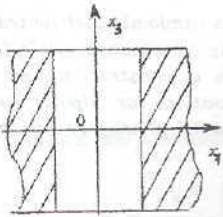


Рисунок 1

Краевые условия на L представим следующим образом:

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} + \sigma_{22})^{\pm} - e^{2i\psi} (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12})^{\pm} &= \\ = 2(N - iT)^{\pm}, & \\ \operatorname{Re}[e^{-i\psi} (\sigma_{13} + i\sigma_{23})^{\pm}] &= \pm Z_n^{\pm}, \end{aligned} \quad (2)$$

где ψ – угол между положительной нормалью к левому берегу разреза (при движении от его начала a_j к концу b_j) и осью Ox_1 , верхний знак относится к левому берегу.

Для этого случая привлечем интегральные представления, полученные в [2], корректные в том смысле, что они обеспечивают непрерывность вектора напряжения и существование скачка вектора перемещения на L , ($j=1, 2, \dots, k$) и

исключают появление расходящихся интегралов для вектора напряжения:

$$\begin{aligned} \theta_k(z) &= \int_L p_k^{(1)}(\zeta) K_0(\gamma_k r) dS + \frac{2}{\gamma_k} \operatorname{Re} \int_L q_k^{(1)}(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} K_0(\gamma_k r) d\zeta, \\ i\varphi_k(z) - \psi_k(z) &= \int_L (ip_k^{(1)}(\zeta) - p_k^{(2)}(\zeta)) K_0(\gamma_k r) dS + \frac{2i}{\gamma_k} \int_L \bar{q}_k^{(2)}(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} K_0(\gamma_k r) d\bar{\zeta} + \\ + \frac{1}{2\gamma_k} \int_L p_k^{(1)}(\zeta) r K_1(\gamma_k r) dS + \frac{1}{\gamma_k} \operatorname{Re} \int_L q_k^{(1)}(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} (r K_1) d\zeta, \quad r = |\zeta - z|, \end{aligned} \quad (3)$$

где $K_n(\gamma_k r)$ – функции Макдональда порядка n ; dS – элемент дуги контура L ; плотности $p_k^{(i)}(\zeta)$, $q_k^{(i)}(\zeta)$ выражаются через скачки перемещений u_k ($i=1, 2, 3$).

В этих представлениях плотности выражаются через физические величины – скачки "перемещений" на L по формулам:

$$\begin{aligned} p_k^{(1)} &= \frac{\gamma_k^2}{\pi(1+\sigma)} [U_{3k}^{(a)}], \quad p_k^{(3)} - ip_k^{(2)} = -\frac{1}{2\pi\sigma} [U_{1k}^{(a)} - iU_{2k}^{(a)}], \\ \pi(1+\sigma)q_k^{(1)} &= i\gamma_k^2 [U_{3k}] + \gamma_k e^{-i\psi} \frac{d}{ds} \bar{q}_k, \\ \pi\sigma q_k^{(2)} &= -\frac{1}{2} [U_{3k}] + \frac{ie^{-i\psi}}{\gamma_k} \frac{d}{ds} \bar{q}_k, \quad q_k = [U_{1k} - iU_{2k}]. \end{aligned} \quad (4)$$

Перемещение представляем в виде рядов Фурье:

$$\begin{aligned}
 u_i &= \sum_{k=0}^{\infty} U_{ik} (x_1, x_2) \cos \gamma_k x_3, \\
 u_3 &= \sum_{k=0}^{\infty} U_{3k} \sin \gamma_k x_3, \quad \gamma_k = \frac{k\pi}{h} \quad (i=1,2)
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Амплитуды U_{ik}, U_{3k} выражаются через произвольные метагармонические функции φ_k и ψ_k по формулам [2]:

$$\begin{aligned}
 U_{1k} - iU_{2k} &= 2\sigma \frac{\partial}{\partial z} (i\varphi_k - \psi_k), \\
 U_{3k} &= \left(\sigma\gamma_k + \chi_k \frac{1+\sigma}{\gamma_k} \right) \psi_k.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

С учетом соотношений (4) граничные равенства (2) достаточно выполнить на одном из берегов разрезов. Учитывая предельные значения входящих туда функций, сводим краевую задачу к системе из трех сингулярных интегродифференциальных уравнений, которую из-за громоздкости здесь не приводим. Для замыкания алгоритма систему необходимо рассматривать совместно с дополнительными условиями:

$$\int_L dq_k = 0, \quad \int_L d[U_{3k}] = 0, \quad (k=1,2).
 \tag{7}$$

ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

Рассмотрим слой, ослабленный туннельным разрезом с поперечным сечением в виде дуги эллипса:

$$\begin{cases}
 x = -R_1 \cos[\varphi(\beta+1) + \varphi_0], \\
 y = R_2 \sin[\varphi(\beta+1) + \varphi_0].
 \end{cases}
 \tag{8}$$

На поверхности разреза приложена нагрузка (N -нормальное давление)

$$N = \frac{\alpha}{3} + \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\alpha}{(k\pi)^2} (-1)^k \cos \frac{k\pi x_0}{h}, \quad T = 0.$$

Вводя параметризацию контура по формулам

$$\zeta = \zeta(\beta), \quad -1 \leq \beta \leq 1, \quad a = \zeta(-1), \quad b = \zeta(1), \quad \omega'(\beta) = \frac{\varphi(\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

и применяя к полученным интегральным уравнениям метод механических квадратур [4], приходим к системе линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных $\varphi(\beta_k)$ ($k = \overline{1, n}$) в узлах разбиения. Значения в точках $\beta = \pm 1$ найдем при помощи интерполяционного полинома с узлами в точках интерполяции $\beta_k = \cos \theta_k$, где $\theta_k = (2k-1)\pi/2n$ ($k = \overline{1, n}$) - нули многочлена Чебышева первого рода:

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu+1} \varphi(\beta_{\nu}) \operatorname{ctg} \frac{2\nu-1}{4n} \pi, \\ \varphi(-1) &= \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu+n} \varphi(\beta_{\nu}) \operatorname{tg} \frac{2\nu-1}{4n} \pi.\end{aligned}\quad (9)$$

Целью расчета являются относительные коэффициенты интенсивности напряжений K , в вершинах трещины, которые можно определить по формулам [1]:

$$\begin{aligned}K_I - iK_{II} &= -\frac{\mu\sigma}{\sigma+1} \sqrt{\frac{\pi}{s'(\mp 1)}} \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi_1^{(k)}(\mp 1) - i\varphi_2^{(k)}(\mp 1)) \cos \frac{\pi k x_2}{h}, \\ K_{III} &= -\frac{\mu h}{2} \sqrt{\frac{\pi}{s'(\mp 1)}} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_3^{(k)}(\mp 1) \sin \frac{\pi k x_2}{h}, \\ K_I &= \sqrt{2\pi r} \sigma_n, \quad K_{II} = \sqrt{2\pi r} \sigma_{ns}, \quad K_{III} = \sqrt{2\pi r} \sigma_{n3} \quad (r \rightarrow 0), \\ \langle K_I \rangle &= \frac{K_I}{\sqrt{\pi l} |\alpha + \alpha_0|}, \quad \langle K_{II} \rangle = \frac{K_{II}}{\sqrt{\pi l} |\alpha + \alpha_0|},\end{aligned}\quad (10)$$

где $\sigma_n, \sigma_{ns}, \sigma_{n3}$ — нормальное и касательные напряжения на площадке за вершиной трещины, верхний знак относится к $\beta = -1$.

Результаты расчетов коэффициентов интенсивности для различных типов нагружения представлены на рис. 2-3. Эпюры распределения относительного коэффициента $\langle K_I \rangle$ по толщинной координате при действии нормальной нагрузки $N = \alpha \left(\frac{x_2}{h} \right)^2 + \alpha_0$ показаны на рис. 2. Здесь сплошные кривые соответствуют значениям $\alpha = -1, \alpha_0 = -1$, штриховые — $\alpha = -1, \alpha_0 = 0$. Кривые 1, 2, 3 соответствуют вариантам $\varphi = \pi/6, \varphi_0 = \pi/3$; $\varphi = \pi/4, \varphi_0 = \pi/4$; $\varphi = \pi/3, \varphi_0 = \pi/6$.

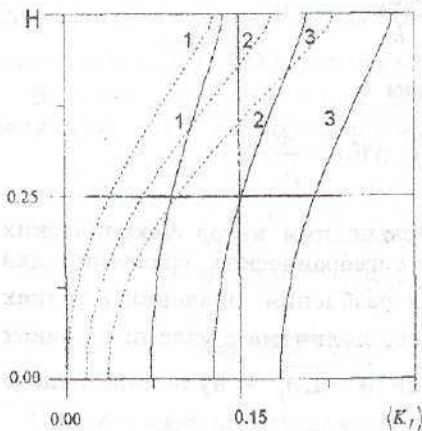


Рисунок 2

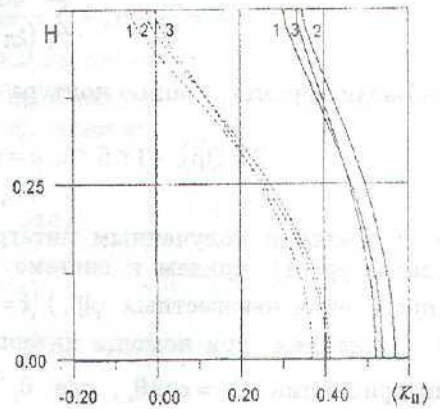


Рисунок 3

На рис.3 представлены кривые относительного коэффициента $\langle K_{II} \rangle$ при действии сдвигающих усилий $T = \alpha \left(\frac{x_3}{h} \right)^2 + \alpha_0$ при том же соответствии и тех же значениях, что и выше.

Таким образом, построенные выше процедуры дают возможность оценивать напряженное состояние в теле с трещиной и параметры его разрушения.

SUMMARY

A boundary problem of theory of elasticity for the layer with through-the-thickness is reduced to the infinite system of one-dimensional singular-differential equations which is solved numerically. As an example of calculation, stress intensity factor (the functionals which are characterizing the measure of singularity of stresses in the top of cut) is defined.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фильштинский Л.А. Растяжение слоя, ослабленного туннельными разрезами // ПИММ, 1995.- Т. 59.- №5. - С. 827-835.
2. Фильштинский Л.А. Периодические решения теории упругости и электроупругости для цилиндра в R^3 / В кн.: Теоретическая и прикладная механика. - Вып. 21. - Киев - Донецк: Вища школа, 1990. - С. 13-20.
3. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функции и некоторые их приложения к математической физике. - М.: Наука, 1968. - 511 с.
4. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. - М.: Наука, 1985. - 253 с.

Поступила в редколлегию 25 июня 1999 г.

УДК 517

О ПОВЕДЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ОСОБЫХ ТОЧКАХ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ

Л.А.Фильштинский, проф.; А.Ибеда, асп.

При исследовании физических полей в составных областях с нерегулярной границей возникает необходимость в определении характера и порядка особенностей полевых величин в окрестности особой точки. В данной статье на примере задачи магнитоэластики для составного ферромагнитного клина дается простая аналитическая процедура анализа локальных свойств магнитного поля в угловой точке области.

В цилиндрической системе координат (ρ, θ, x_3) рассмотрим кусочно-однородную призму, составленную из двух непрерывно скрепленных между собой вдоль плоскости $\theta = 0$, $0 \leq \rho < \infty$, $-\infty < x_3 < \infty$ ферромагнитных призм (рис.1). Будем считать, что составная призма вдоль внешних граней OA_1 и OA_2 сопрягается с вакуумом. При некоторых сочетаниях углов α_1 и α_2 и относительных магнитных проницаемостей материалов составляющих призм $\mu_e^{(1)}$ и $\mu_e^{(2)}$ возможна сильная концентрация магнитных полей в окрестности