

На рис.3 представлены кривые относительного коэффициента  $\langle K_{11} \rangle$  при действии сдвигающих усилий  $T = \alpha \left( \frac{x_3}{h} \right)^2 + \alpha_0$  при том же соответствии и тех же значениях, что и выше.

Таким образом, построенные выше процедуры дают возможность оценивать напряженное состояние в теле с трещиной и параметры его разрушения.

## SUMMARY

A boundary problem of theory of elasticity for the layer with through-the-thickness is reduced to the infinite system of one-dimensional singular-differential equations which is solved numerically. As an example of calculation, stress intensity factor (the functionals which are characterizing the measure of singularity of stresses in the top of cut) is defined.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фильштинский Л.А. Растяжение слоя, ослабленного туннельными разрезами //ПММ, 1995.- Т. 59.- №5. -С. 827-835.
2. Фильштинский Л.А. Периодические решения теории упругости и электроупругости для цилиндра в  $R^3$  / В кн.: Теоретическая и прикладная механика. - Вып. 21. - Киев - Донецк: Вища школа, 1990.- С. 13-20.
3. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функции и некоторые их приложения к математической физике.- М.: Наука, 1968.- 511 с.
4. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике.- М.: Наука, 1985.- 253 с.

Поступила в редколлегию 25 июня 1999 г.

УДК 517

## О ПОВЕДЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ОСОБЫХ ТОЧКАХ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ

Л.А.Фильштинский, проф.; А.Ибеда, асп.

При исследовании физических полей в составных областях с нерегулярной границей возникает необходимость в определении характера и порядка особенностей полевых величин в окрестности особой точки. В данной статье на примере задачи магнитоэластики для составного ферромагнитного клина дается простая аналитическая процедура анализа локальных свойств магнитного поля в угловой точке области.

В цилиндрической системе координат  $(\rho, \theta, x_3)$  рассмотрим кусочно-однородную призму, составленную из двух непрерывно скрепленных между собой вдоль плоскости  $\theta = 0$ ,  $0 \leq \rho < \infty$ ,  $-\infty < x_3 < \infty$  ферромагнитных призм (рис.1). Будем считать, что составная призма вдоль внешних граней  $OA_1$  и  $OA_2$  сопрягается с вакуумом. При некоторых сочетаниях углов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  и относительных магнитных проницаемостей материалов составляющих призм  $\mu_e^{(1)}$  и  $\mu_e^{(2)}$  возможна сильная концентрация магнитных полей в окрестности

угловой точки. Это проявляется в наличии степенной сингулярности у магнитной напряженности и индукции на ребре  $\rho = 0$ ,  $-\infty < x_3 < \infty$ .

Представим компоненты вектора магнитной напряженности в вакууме и сопрягающихся ферромагнетиках в виде

$$H_1^{(0)} - iH_2^{(0)} = \frac{iB}{\mu_0} F_0(z), \quad z = x_1 + ix_2 = \rho e^{i\theta},$$

$$H_1^{(r)} - iH_2^{(r)} = \frac{iB}{\mu_0 \mu_e^{(r)}} F_r(z) \quad (r = 1, 2), \quad (1)$$

где  $F_0(z)$ ,  $F_r(z)$  - функции, аналитические в соответствующих клиновидных областях;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м - абсолютная магнитная проницаемость;  $B$  - величина, имеющая размерность магнитной индукции.

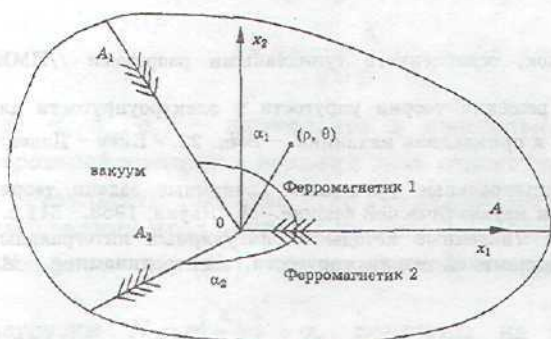


Рисунок 1

Условия сопряжения магнитных полей вдоль лучей  $OA_1$ ,  $OA_2$  и  $OA$ , выражающие непрерывную продолжимость касательной компоненты вектора магнитной напряженности  $H_s$  и нормальной компоненты магнитной индукции  $B_n$  через границы раздела сред [1], запишем в комплексной форме:

- на  $OA_1$

$$\text{Im} \left\{ e^{i\alpha_1} \left( F_0(z) - \frac{1}{\mu_e^{(1)}} F_1(z) \right) \right\} = 0, \quad z = \rho e^{i\alpha_1}, \quad (2)$$

$$\text{Re} \left\{ e^{i\alpha_1} (F_0(z) - F_1(z)) \right\} = 0;$$

- на  $OA$

$$\frac{1}{\mu_e^{(1)}} \text{Im} F_1(z) = \frac{1}{\mu_e^{(2)}} \text{Im} F_2(z), \quad \text{Re} F_1(z) = \text{Re} F_2(z), \quad z = \rho; \quad (3)$$

- на  $OA_2$

$$\text{Im} \left\{ e^{-i\alpha_2} \left( F_0(z) - \frac{1}{\mu_e^{(2)}} F_2(z) \right) \right\} = 0, \quad z = \rho e^{-i\alpha_2}, \quad (4)$$

$$\text{Re} \left\{ e^{-i\alpha_2} (F_0(z) - F_2(z)) \right\} = 0.$$

Для определения нетривиальных решений однородной граничной задачи (2) - (4) представим искомые функции в виде

$$F_r(z) = A_r z^{-\gamma} + B_r z^{-\bar{\gamma}} \quad (r = 0, 1, 2), \quad (5)$$

где  $A_r$ ,  $B_r$  и  $\gamma$  - неизвестные константы;  $\bar{\gamma}$  - величина, комплексно сопряженная к  $\gamma$ .

Подстановка функции (5) в соотношения (2) - (4) приводит после некоторых преобразований к однородной системе:

$$a_{11}A_0 + a_{12}B_0 = 0, \quad a_{21}A_0 + a_{22}B_0 = 0, \quad (6)$$

$$a_{11} = 1 + \mu_e^{(1)} - \frac{1}{2}(1 + \lambda)(1 + \mu_e^{(2)}) - \frac{1}{2}(1 - \lambda)(1 - \mu_e^{(2)})e^{-2i\beta_2},$$

$$a_{12} = (1 - \mu_e^{(1)})e^{-2i\beta_1} - \frac{1}{2}(1 + \lambda)(1 - \mu_e^{(2)})e^{2i\beta_2} - \frac{1}{2}(1 - \lambda)(1 + \mu_e^{(2)}),$$

$$a_{21} = (1 - \mu_e^{(1)})e^{2i\beta_1} - \frac{1}{2}(1 + \lambda)(1 - \mu_e^{(2)})e^{-2i\beta_2} - \frac{1}{2}(1 - \lambda)(1 + \mu_e^{(2)}),$$

$$a_{22} = 1 + \mu_e^{(1)} - \frac{1}{2}(1 + \lambda)(1 + \mu_e^{(2)}) - \frac{1}{2}(1 - \lambda)(1 - \mu_e^{(2)})e^{2i\beta_2},$$

$$\lambda = \frac{\mu_e^{(1)}}{\mu_e^{(2)}}, \quad \beta_m = \alpha_m(1 - \gamma) \quad (m = 1, 2),$$

условие нетривиальной разрешимости которой дает уравнение для определения  $\gamma$ .

Относительная магнитная проницаемость таких материалов, как железо - никелевые сплавы, трансформаторное железо и др., много больше единицы, поэтому в системе (6) возможны упрощения.

Приняв  $\mu_e^{(1)} \gg 1$ ,  $\mu_e^{(2)} \gg 1$ , получим

$$a_{11} = \frac{1}{2}(\mu_e^{(1)} - \mu_e^{(2)}) \left(1 - e^{-2i\beta_2}\right),$$

$$a_{12} = -\mu_e^{(1)}e^{-2i\beta_1} + \frac{1}{2}(\mu_e^{(1)} + \mu_e^{(2)})e^{2i\beta_2} - \frac{1}{2}(\mu_e^{(2)} - \mu_e^{(1)}), \quad (7)$$

$$a_{21} = -\mu_e^{(1)}e^{2i\beta_1} + \frac{1}{2}(\mu_e^{(1)} + \mu_e^{(2)})e^{-2i\beta_2} - \frac{1}{2}(\mu_e^{(2)} - \mu_e^{(1)}),$$

$$a_{22} = \frac{1}{2}(\mu_e^{(1)} - \mu_e^{(2)}) \left(1 - e^{2i\beta_2}\right).$$

С учетом (7) уравнение  $\det \|a_{ij}\| = 0$  дает

$$\sin(\beta_1 + \beta_2) \left( \lambda \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \sin \beta_2 \cos \beta_1 \right) = 0. \quad (8)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1 Пусть  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ . Тогда ближайший к единице корень  $\gamma \in (0, 1)$  определяется формулой

$$\gamma = 1 - \frac{\pi}{2\alpha}, \quad \frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi.$$

Наивысший порядок степенной особенности  $\rho^{-\gamma}$  в магнитной напряженности и индукции достигается при  $\alpha = \pi$  ( $\gamma = 1/2$ ).

2 Пусть  $\alpha_2 = 2\alpha_1$ . Уравнение (8) для этой ситуации преобразуется к виду

$$\sin \beta_1 \cdot \sin 3\beta_1 (\cos 2\beta_1 + \mu_1) = 0, \quad \mu_1 = \frac{1}{(1+\lambda)}.$$

Анализ порядка степенной особенности  $\gamma$  в вершине составного ферромагнитного клина можно провести с использованием значений корней уравнения  $\cos 2x + \mu_1 = 0$ , данных в таблице (1).

Таблица 1

$\lambda$	0,3	0,5	0,7	1	1,5	2	5	10	$\infty$
$x_* = x/\pi$	0,3896	0,3661	0,35	0,3(3)	0,3155	0,3041	0,2767	0,2645	0,25

Например, при  $\alpha_1 = \pi/3$  ( $\alpha_2 = 2\pi/3$ ),  $\lambda = 1,5$  имеем

$$\gamma = 1 - \frac{\pi x_*}{\alpha_1} = 1 - \frac{0,3155}{\pi} \cdot 3 \approx 0,7.$$

3 Положим теперь  $\alpha_2 = 4\alpha_1$ . Уравнение (8) для этого случая преобразуем к виду

$$\sin \beta_1 (\cos 2\beta_1 - \mu_1) (\cos 2\beta_1 - \mu_2) = 0,$$

$$\mu_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{2\lambda^2 + 2\lambda + 1}}{2(\lambda + 1)}.$$

Наивысший порядок интегрируемой особенности  $\gamma$ , как показывает анализ, задается лежащими в первой четверти корнями уравнения  $\cos 2x = \mu_1$  (см. таблицу 2).

Таблица 2

$\lambda$	0,3	0,5	0,7	1	1,5	2	5	10	$\infty$
$x_* = x/\pi$	0,2295	0,2190	0,2103	0,2	0,1874	0,1785	0,1540	0,1415	0,125

При  $\alpha_1 = \pi/6$  ( $\alpha_2 = 2\pi/3$ ),  $\lambda = 10$  находим

$$\gamma = 1 - \frac{\pi x_*}{\lambda_1} = 1 - \frac{0,1415}{\pi} \cdot 6 \approx 0,73.$$

Таким образом, уровень градиентов магнитного поля как со стороны составного ферромагнетика, так и со стороны вакуума, может быть весьма высоким.

## SUMMARY

The local features of the magnetic field are used in the compound ferromagnetic wedge. It is shown that at the top of the wedge magnetic intensity and induction can have degree singularities of higher order. The results of calculations are given below.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1966. – 616 с.

Поступила в редколлегию 28 декабря 1998 г.

УДК 539.2

## СИНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПЕРЕХОДА МЕЖДУ РЕЖИМАМИ ТРАНСПОРТНОГО ПОТОКА

А.В.Хоменко, доц.; О.В.Ющенко, студ.

В последнее время проблемы дорожного движения привлекают значительное внимание. Для описания коллективных характеристик транспортного потока применяется много подходов. Переход между режимами транспортного потока (свободным движением и затором машин) обнаруживается при моделировании дорожного движения и наблюдается в действительности. В частности, показано [1], что такой переход имеет свойства обычного фазового перехода жидкость-пар, где свободное и сгущенное движение автомобилей отвечает паровой и жидкой фазам соответственно. Этот переход происходит, когда плотность машин достигает критического значения. Транспортный поток с увеличенной плотностью и неустойчивой однородной частью сопровождается образованием затора на дороге. Таким образом, при данном фазовом переходе неупорядоченное состояние соответствует свободному движению автомобилей с интервалом  $h$ , а упорядоченное (двухфазное) – «пробке» на дороге, когда свободное движение машин с малой плотностью сосуществует с затором (большая плотность автомобилей).

В рамках термодинамического рассмотрения [1] переход между режимами транспортного потока представляется как фазовый переход первого рода, характер которого определяется расстоянием между машинами  $\Delta x(t)$ , играющим роль объема или плотности, и обратным временем задержки (временем разгона/торможения)  $1/\tau$ , соответствующим температуре. Для его описания используется уравнение движения  $n$ -го автомобиля:

$$dx_n/d(t+\tau) = V(\Delta x_n(t)). \quad (1)$$

Здесь задаётся оптимальная скорость  $V(\Delta x_n(t))$ , которая удовлетворяет следующим требованиям: во-первых,  $V(\Delta x_n)$  – монотонно возрастающая функция; во-вторых, имеет верхний предел; в-третьих, при интервале между машинами, равном критическому значению  $h_c$ , имеет точку настройки (изменения). Таким требованиям соответствует функция, которую использовал Бандо (Bando) [2]:

$$V(\Delta x) = (v_{\max}/2) \{ \text{th}(\Delta x - h_c) + \text{th}(h_c) \}. \quad (2)$$

Получено уравнение Гинзбурга-Ландау-Халатникова для данной модели. Доказано, что линия сосуществования фаз и линия спинодали, а также критическая точка описываются производными от термодинамического потенциала таким же образом, как и для обычных фазовых переходов и критических явлений. Подобно фазовому переходу первого рода,