функционала. Учитывая асимптотику функций Макдональда [3], формулы (1.12), (2.3) и (1.5), получаем

$$u_m^0 = -\frac{\kappa}{c} P_m(x_3)\ln r \quad (m = 1, 2),$$

$$u_3^0 = -\frac{P_3(x_3)}{2\pi\mu}\ln r ,$$

$$\sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0 = -\frac{P_1(x_3)\cos\alpha + P_2(x_3)\sin\alpha}{2\pi(1-\nu)r},$$

$$\sigma_{22}^0 - \sigma_{11}^0 + 2i\sigma_{12}^0 = \frac{e^{-i\alpha}}{4\pi(1-\nu)r}\left\{[P_1(x_3) + iP_2(x_3)]e^{-2i\alpha} + \kappa[P_1(x_3) - iP_2(x_3)]\right\},$$

$$\sigma_{13}^0 - i\sigma_{23}^0 = -\frac{e^{-i\alpha}}{2\pi r}P_3(x_3),$$

$$\sigma_{33}^0 = -\frac{\nu[P_1(x_3)\cos\alpha + P_2(x_3)\sin\alpha]}{2\pi(1-\nu)r},$$

где под u_m^0, σ_{mp}^0 понимается главная асимптотика соответствующих величин в окрестности нуля.

Отметим, что результаты остаются в силе и в том случае, когда нагрузка действует вдоль шнура $x_1 = x_{10}$, $x_2 = x_{20}$, $-h \le x_3 \le h$. Необходимо только положить

$$r = |z - z_0| = \sqrt{(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2}, \quad \alpha = \arg(z - z_0).$$

SUMMARY

Matrix of fundamental solution of elasticity theory for the layer in R^3 is build. Solution is defound in the form of Fourie lines, coefficient of this lines are determined in the close form with the McDonalds function. Results are usefull during solution of boundary problem of theory elasticity for the piece – wise layer.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир. – 1975. – 872 с.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
3. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. – М.: Мир, 1980. – 608 с.

Поступила в редколлегию 4 апреля 2000 г.

УДК 621.01

РОЗПІЗНАВАННЯ ТОЧКИ БІФУРКАЦІЇ НАРОДЖЕННЯ ЦИКЛУ

І.О. Шуда, асп.

Розглядається n-мірна нелінійна система звичайних диференціальних рівнянь:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \eta, \nu, \gamma), \qquad (1)$$

де η, ν, γ – набір параметрів, що описують фізичні характеристики системи. Їх кількість обумовлюється лише змістом задачі. Далі для зручності в формулах вказується лише один параметр η, і приймаються такі позначення: $\vec{x}_c(\eta)$ – одна з стаціонарних точок системи; λ_i – власні значення якобіана правих частин системи (1), обчисленого в одній із стаціонарних точок. Вважається, що принаймні два з цих власних значень є комплексно-спряжені, а інші мають від'ємну дійсну частину:

$\lambda_{1,2} = \alpha(\eta) + i\beta(\eta)$, $\quad \mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$, $\quad i > 2$. Крім того, виконуються такі умови: $\dfrac{\partial\alpha(\eta_1)}{\partial\eta} \neq 0$, $\quad \beta(\eta_1) \neq 0$. η_1 – Біфуркаційне значення параметра η, яке знаходиться з рівняння $\alpha(\eta) = 0$. При виконанні цих умов стаціонарний розв'язок системи (1) може перейти в періодичний розв'язок при виконанні певних умов, що забезпечують стійкість руху [1]. Далі вважається, що рівняння $\alpha(\eta) = 0$ має кілька розв'язків, для частини з яких виконується умова стійкості руху. Це означає, що існує кілька точок біфуркації, в кожній з яких можна спостерігати коливний рух системи. Однак одночасно може реалізуватися одна точка біфуркації, яка саме - не відомо. У певних ситуаціях важливо знати, яка саме точка біфуркації реалізувалася. У роботі пропонується схема розпізнавання точки біфуркації з кількох можливих, яка зводиться до виконання таких операцій: а) перевірити умови виконання теореми Хопфа; б) якщо точок біфуркації кілька, то для кожної з них перевірити виконання умов стійкості руху; в) для кожної точки біфуркації при виконанні умов стійкості руху знайти наближений розв'язок системи; г) для кожної з можливих точок біфуркації знайти ті характеристики руху, значення яких можна знайти емпіричним методом, наприклад, можна знайти амплітуду, період коливання, фазу коливання в першому чи другому наближенні; д) знайти емпіричні значення відповідних величин; е) ввести міру відмінності між сукупністю теоретичних і емпіричних значень характеристик руху:

$$M_K = \Psi_K\left(A_T - A_E, T_T - T_E, \Phi_T - \Phi_E\right),$$

де *A*, *T*, *Ф*- амплітуда, період і фаза; *k*-номер точки біфуркації; є) на підставі одержаних даних прийняти рішення в задачі розпізнавання за правилом: реалізованій точці біфуркації відповідає мінімальне значення M_K. Наведена схема розпізнавання далі ілюструється одним прикладом.

Розглядається система рівнянь Фіц-Х'ю-Нагумо, яка має біофізичне походження:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \eta + x_1 + x_2 - \dfrac{x_1^3}{3}, \\ \dot{x}_2 = \rho(a - x_1 - bx_2), \end{cases} \qquad a, \eta \in R, \qquad b, \rho \in (0,1),$$

де a, η, b, ρ – константи. Стаціонарна точка:

$$x_{1c} = N + B; \quad N = \left(0.5\left(\eta + \frac{a}{b}\right) + \sqrt{Q}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$B = \left(0.5\left(\eta + \frac{a}{b}\right) - \sqrt{Q}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$Q = \left(\frac{1-b}{3b}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\eta + \frac{a}{b}\right)^2 > 0; \quad x_{2c} = \frac{a}{b} - \frac{x_{1c}}{b}.$$

Власні значення якобіана правих частин, обчисленого в стаціонарній точці:

$$\lambda = \frac{1}{2}\left\{\left(1 - \rho b - x_{1c}^2\right) \pm i\left[4\left(\rho + \rho b(x_{1c}^2 - 1)\right) - \left(\rho b + x_{1c}^2 - 1\right)^2\right]\right\}.$$

З рівняння $\operatorname{Re}\lambda = 0$ випливає: $x_{1c}(\eta_1) = \pm\sqrt{1-\rho b}$, де η_1 – біфуркаційне значення параметра біфуркації η. Значення η_1 знаходиться з умови

$$x_{1c}(\eta_1) = \pm\sqrt{1-\rho\beta} = \left(N + B\right)\Big|_{\eta=\eta_1},$$

що дає два біфуркаційних значення параметра η:

$$\eta_1 = -\frac{a}{b} \pm \left(\rho b - \frac{1}{b}\right)\sqrt{1-\rho b}.$$

Оскільки в точці біфуркації

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\eta} = -x_{1c}\frac{\partial x_{1c}}{\partial\eta} = \mp\sqrt{1-\rho b}\left.\frac{\partial x_{1c}}{\partial\eta}\right|_{\eta=\eta_1} =$$

$$= \pm\sqrt{1-\rho b}\left(\frac{b}{b - 1 - bx_{1c}^2(\eta_1)}\right) = \alpha_1' \neq 0,$$

$$\beta(\eta_1) = \sqrt{\rho - \rho^2 b^2} = \beta_1 \neq 0,$$

то всі умови теореми Хопфа виконуються. Відповідно до алгоритму теорії біфуркації народження циклу [1] сам розв'язок будується у вигляді

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1c} \\ x_{2c} \end{pmatrix} + P \cdot \bar{y}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \beta_1 - \rho b & -\beta_1 - \rho b \end{pmatrix},$$

$$y_1 = \operatorname{Re} z; \qquad y_2 = \operatorname{Im} z;$$

$$z = \varepsilon \cdot e^{\frac{2\pi i t}{T}} + \frac{i\varepsilon^2}{6\beta_1}\left[g_{02}e^{\frac{-4\pi i t}{T}} - 3g_{20}e^{\frac{4\pi i t}{T}} + 6g_{11}\right] + O(\varepsilon^3),$$

$$\varepsilon = \left(\frac{\eta - \eta_1}{\mu_2}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \mu_2 = -\frac{\operatorname{Re} c_1}{\alpha_1'},$$

$$T=\frac{2\pi}{\beta_1}\left(1+\tau_2\varepsilon^2+O(\varepsilon^4)\right),\qquad \tau_2=-\frac{1}{\beta_1}\left(\operatorname{Im}c_1+\mu_2\beta'\right),$$

$$\operatorname{Re}c_1=\frac{-1+2b-2\rho b^2}{4(1-\rho b^2)},\qquad \operatorname{Im}c_1=\frac{-1}{2\sqrt{\rho-\rho^2b^2}}\left(\rho^2b^2+\rho b+\frac{2}{3}\rho\right),$$

$$g_{11}=\frac{x_{1c}}{2\beta_1}\left(-\beta_1-\rho b+i(-\beta_1+\rho b)\right),$$

$$g_{02}=-g_{20},$$

$$g_{20}=-\frac{x_{1c}}{2\beta_1}\left(-\beta_1+\rho b+i(\beta_1+\rho b)\right).$$

Множник ε, що визначає амплітуду, має різні значення для двох точок біфуркації, бо різними для них є η_1, що видно з наведених вище формул.

Для першої точки $$\varepsilon=\left(\frac{\left[\eta+\dfrac{a}{b}-\left(\rho b-\dfrac{1}{b}\right)\sqrt{1-\rho b}\right]\alpha_1'}{-\operatorname{Re}c_1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для другої $$\varepsilon=\left(\frac{\left[\eta+\dfrac{a}{b}+\left(\rho b-\dfrac{1}{b}\right)\sqrt{1-\rho b}\right]\left|\alpha_1'\right|}{-\operatorname{Re}c_1}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{\pi i}{2}}.$$

Біфуркація називається докритичною чи закритичною залежно від того $\eta-\eta_1<0$, чи $\eta-\eta_1>0$. Оскільки $\rho b<\frac{1}{b}$ і для першої точки $\alpha_1'>0$, то у ній спостерігається закритична біфуркація. Для другої точки вираз у квадратних дужках може бути як додатним, так і від'ємним, $\alpha_1'<0$. Отже, тут біфуркація може бути як докритичною, так і закритичною. В останньому випадку фаза має приріст, який дорівнює $\pi/2$. З формул випливає, що чисельне значення амплітуди у двох точках буде різним.

Перша і головна поправка до періоду T визначається величиною, яка має значення

$$\tau_2=\frac{1}{2\sqrt{1-\rho b^2}}\left[\frac{\rho b^2+b+\dfrac{2}{3}}{\sqrt{1-\rho b^2}}\mp\frac{1-2b+\rho b^2}{4(1-\rho b^2)\sqrt{1-\rho b}}\right].$$

Подвійний знак відповідає різним точкам біфуркації і вказує на перше джерело зміни періоду. Другим джерелом є множник ε, значення якого для обох точок наведене вище.

Стійкість руху визначається знаком показника Флоке:

$$\rho=2\varepsilon^2\operatorname{Re}c_1+O(\varepsilon^4).$$

Область стійкості визначається нерівністю

$$\left(-1+2b-2\rho b^2\right)\left(1-\rho b^2\right)<0, \qquad \rho, b \in (0,1),$$

яка є спільною для обох точок біфуркації. Однак значення показника Флоке будуть різні завдяки множнику ε^2. Отже, при виконанні вказаної нерівності рух можна спостерігати в обох точках біфуркації.

Таким чином, показано, що існує принаймні три ознаки, якими відрізняється коливний процес у двох точках біфуркації: амплітуда, період і фаза. Тому можна будувати різні критерії розпізнавання: одно-, дво-, і трипараметричні залежно від того, від кількох параметрів залежить критерій. Усього можна побудувати три однопараметричні, три двопараметричні і один трипараметричний критерій, наприклад:

$$M_K=\left(\frac{A_T-A_E}{A_E}\right)^2+\left(\frac{T_T-T_E}{T_E}\right)^2+\left(\frac{\Phi_T-\Phi_E}{\Phi_E}\right)^2.$$

Зрозуміло, що коли внесок одного з доданків істотно перевищує суму інших, то можна обійтися однопараметричним критерієм, що істотно полегшує обчислення. З іншого боку, висновки, одержані на основі однопараметричних критеріїв можуть бути суперечливими. Тоді слід віддати перевагу найбільш потужному критерію, який використовує максимальне число параметрів.

Оскільки розв'язок системи знаходиться у вигляді ряду, який практично можна побудувати з доданками першого і другого порядку малості через громіздкість наступних наближень, то критерії розпізнавання також можна побудувати в першому і другому наближеннях.

Що стосується емпіричних методів визначення характеристик періодичних процесів, то відповідні алгоритми викладені в [2], у тому числі алгоритм Глаговського, який належить до найпростіших. Для зменшення об'єму обчислень доцільно скористатися цифровими аналізаторами, які використовують швидке перетворення Фур'є [3].

SUMMARY

The recognition one of points bifurcation of generatiny the cicle criterium basing on minimum of defeectiam between theoretical values of motion characteristices for each stable bifurcatian point and empirical values of the same ones is offered.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. -М.: Мир, 1985.-280 с.
2. Серебренников М.Г., Первозванский А.А. Выявление скрытых периодичностей. - М.: Наука, 1965.-244 с.
3. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. - М.: Мир, 1972. - Т.2.-288 с.

Надійшла до редколегії 12 жовтня 1999 р.