

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ УСРЕДНЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ
ВОЛОКНИСТЫХ ПЬЕЗОКОМПОЗИТОВ

Л.А. Фильштинский, проф.; Ю.В. Шрамко, асп.

В рамках модели регулярной структуры проведено усреднение упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических свойств волокнистых композитов с пьезоэлектрическими компонентами в условиях антиплоской деформации. В структуре композита предполагается наличие дефектов типа цилиндрических пор.

Рассмотрим отнесенную к декартовым осям $Ox_1x_2x_3$ неограниченную пьезоэлектрическую среду, армированную двоякопериодической системой одинаковых цилиндрических вдоль оси x_3 волокон. Будем считать, что поперечное сечение волокна представляет собой односвязную область D , ограниченную достаточно гладким замкнутым контуром L , а в матрице имеются цилиндрические поры (полости), распределение которых также имеет двоякопериодический характер (с теми же основными периодами). Поперечное сечение полости - односвязная область D^* , ограниченная достаточно гладким замкнутым контуром Γ . Свойства армированной среды (композита) определяются структурой фундаментальной ячейки Π_0 (рис. 1), построенной на периодах ω_1 и ω_2 ($Im \omega_1 = 0, Im \omega_2 / \omega_1 > 0$).

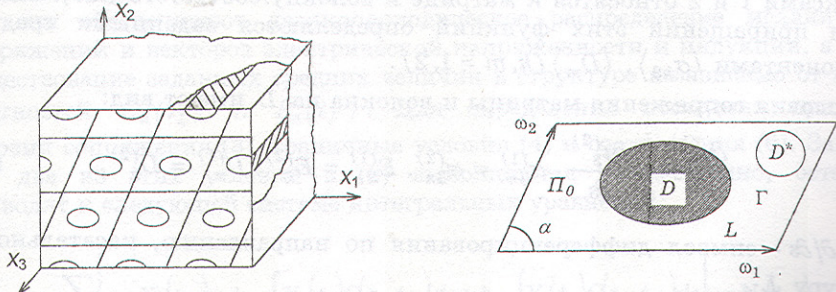


Рисунок 1 - Структура фундаментальной ячейки

Пусть в материале имеют место средние сдвиговые напряжения $\langle \sigma_{13} \rangle$, $\langle \sigma_{23} \rangle$ и средние компоненты вектора электрической индукции $\langle D_1 \rangle$, $\langle D_2 \rangle$. В этих условиях приходим к антиплоской деформации регулярно армированной пьезоэлектрической среды в плоскости x_1Ox_2 .

Соответствующие соотношения для однородной пьезоэлектрической среды имеют вид [1,2]:

$$\begin{aligned} \sigma_{i3} &= c_{44} \partial_i u_3 - e_{15} E_i, D_m = e_{15} \partial_m u_3 + \varepsilon_{11} E_m, \\ \partial_i \sigma_{i3} &= 0, \partial_m D_m = 0, E_m = -\partial_m \varphi, \partial_i = \partial / \partial x_i \quad (i, m = 1, 2). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь величины $u_3(x_1, x_2)$, $\sigma_{i3}(x_1, x_2)$, $E_m(x_1, x_2)$, $D_m(x_1, x_2)$ - упругие перемещения точек тела в направлении оси x_3 , компоненты

тензора механических напряжений и векторов электрической напряженности и индукции соответственно; $c_{44} = c_{44}^E$, e_{15} и $\epsilon_{11} = \epsilon_{11}^S$ - модуль сдвига, измеряемый при нулевом электрическом поле, пьезомодуль и диэлектрическая проницаемость, измеренная при нулевой деформации; $\varphi(x_1, x_2)$ - электрический потенциал.

Из (1) вытекают следующие комплексные представления механических и полевых величин [3]:

$$\begin{aligned} u_3 &= \operatorname{Re} f_1(z), \quad \varphi = \operatorname{Re} f_2(z), \quad E_1 - iE_2 = -F_2(z), \\ \sigma_{13} - i\sigma_{23} &= \sum_{\nu=1}^2 d_{1\nu} F_\nu(z), \quad D_1 - iD_2 = \sum_{\nu=1}^2 d_{2\nu} F_\nu(z), \\ P_1 &= \int_{AB} \sigma_{n3} ds = \operatorname{Im} \sum_{\nu=1}^2 d_{1\nu} f_\nu(z) \Big|_B^A, \quad P_2 = \int_{AB} D_n ds = \operatorname{Im} \sum_{\nu=1}^2 d_{2\nu} f_\nu(z) \Big|_B^A, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{n3} &= \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2, \quad D_n = D_1n_1 + D_2n_2, \\ d_{11} &= c_{44}, \quad d_{12} = d_{21} = e_{15}, \quad d_{22} = -\epsilon_{11}, \\ z &= x_1 + ix_2, \quad n_1 = \cos \psi, \quad n_2 = \sin \psi, \quad F_\nu(z) = df_\nu(z)/dz. \end{aligned}$$

В формулах (2) величины P_1 и P_2 - главный вектор сдвиговых усилий на дуге AB и поток вектора электрической индукции через AB ; ψ - угол между положительной нормалью к AB и осью Ox_1 .

Потребуем, чтобы главный вектор сдвиговых усилий и поток вектора электрической индукции на дуге, соединяющей конгруэнтные точки z и $z + \omega_\nu$ ($\nu = 1, 2$), не зависели от z . Тогда $f_n^{(1)}(z)$ ($n = 1, 2$) - квазипериодические функции (здесь и ниже величины с верхними индексами 1 и 2 относятся к матрице и волокну соответственно). Мнимые части приращений этих функций определяются заданными средними компонентами $\langle \sigma_{k3} \rangle$, $\langle D_m \rangle$ ($k, m = 1, 2$).

Условия сопряжения матрицы и волокна на L имеют вид:

$$\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial s} = \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial s}, \quad \sigma_{3n}^{(1)} = \sigma_{3n}^{(2)}, \quad E_S^{(1)} = E_S^{(2)}, \quad D_n^{(1)} = D_n^{(2)}, \quad (3)$$

где $\partial/\partial s$ - символ дифференцирования по направлению, касательному к контуру L .

Граничные условия на контуре Γ таковы (полость пор заполнена воздухом):

$$\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial n} = 0, \quad E_n^{(1)} = 0, \quad (4)$$

где $\partial/\partial n$ - символ дифференцирования по направлению, нормальному к контуру Γ .

Для того чтобы они выполнялись на всех волокнах, необходимо и достаточно разыскивать функции $F_n^{(r)}(z)$ ($n, r = 1, 2$) в классе двоякопериодических функций. Положим

$$\begin{aligned} B_n - \frac{1}{2\pi} \int_L \Omega_n(t_L) \zeta(t_L - z) ds_L - \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma P_n(t_\Gamma) \zeta(t_\Gamma - z) ds_\Gamma = \\ = \begin{cases} F_n^{(1)}(z), & z \in \Pi_0 \setminus (\bar{D} \cup \bar{D}^*) \\ F_n^{(2)}(z), & z \in D \end{cases} \quad (n = 1, 2), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\zeta(z)$ - дзета - функция Вейерштрасса [4], $t_L \in L$, $t_\Gamma \in \Gamma$,
 $Im \Omega_n(t_L) = 0$, $Im P_n(t_\Gamma) = 0$, ds_L и ds_Γ - элементы дуг контуров L и Γ
 соответственно.

Фигурирующие в представлениях (5) постоянные B_n ($n = 1, 2$) должны обеспечить существование в структуре заданных средних механических и электрических величин. Используя это обстоятельство, находим после преобразований:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{\langle \sigma_{13} \rangle - i \langle \sigma_{23} \rangle}{c_{44}^{(1)}(1 + \kappa_1^2)} + \frac{e_{15}^{(1)} \langle (D_1) - i(D_2) \rangle}{\varepsilon_{11}^{(1)} c_{44}^{(1)}(1 + \kappa_1^2)} + \frac{\delta_1(b_1 + q_1)}{\omega_1} - \frac{2\pi}{F} Re(b_1 + q_1), \\
 B_2 &= \frac{e_{15}^{(1)} \langle \sigma_{13} \rangle - i \langle \sigma_{23} \rangle}{\varepsilon_{11}^{(1)} c_{44}^{(1)}(1 + \kappa_1^2)} - \frac{\langle (D_1) - i(D_2) \rangle}{\varepsilon_{11}^{(1)}(1 + \kappa_1^2)} + \frac{\delta_1(b_2 + q_2)}{\omega_1} - \frac{2\pi}{F} Re(b_2 + q_2), \\
 q_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} t_\Gamma P_n(t_\Gamma) ds, \quad b_n = \frac{1}{2\pi} \int_L t_L \Omega_n(t_L) ds, \quad \delta_n = 2\zeta\left(\frac{\omega_n}{2}\right) \quad (n = 1, 2), \\
 \kappa_1^2 &= \frac{\left(\frac{e_{15}^{(1)}}{c_{44}^{(1)}}\right)^2}{c_{44}^{(1)} \varepsilon_{11}^{(1)}}. \quad F = H\omega_1.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Из свойств дзета-функции Вейерштрасса следует квазипериодичность функций $f_n^{(1)}(z)$ и $f_n^{(2)}(z)$, а также тот факт, что они имеют одинаковые периодические веса c_{mn} :

$$c_{mn} = f_n^{(1)}(z + \omega_m) - f_n^{(1)}(z), \quad h + iH = \omega_2.$$

Таким образом, интегральные представления (5) корректны в том смысле, что они обеспечивают двоякопериодическое распределение механических напряжений и векторов электрической напряженности и индукции, а также существование заданных средних величин в структуре независимо от выбора плотностей $\Omega_n(t_L)$ и $P_n(t_\Gamma)$. Для определения последних привлечем условия сопряжения (3), граничные условия (4) и соотношения (6). Заметим, что два из этих условий в (3) выполняются тождественно, остальные приводят к следующей системе интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \sum \left\{ a_{kn} X_n(t_{0L}) + b_{kn} \int_L X_n(t_L) G(t_L, t_{0L}) ds + b_{kn} \int_\Gamma Y_n(t_\Gamma) G(t_\Gamma, t_{0L}) ds \right\} &= N_k(t_{0L}) \\
 & \quad (k = 1, 2), \tag{7} \\
 -Y_k(t_{0\Gamma}) + \int_L X_n(t_L) G(t_L, t_{0\Gamma}) ds + \int_\Gamma Y_n(t_\Gamma) G(t_\Gamma, t_{0\Gamma}) ds &= Q_k(t_{0\Gamma}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_1(t_L) &= \Omega_1(t_L), \quad X_2(t_L) = e_{15}^{(1)} \Omega_2(t_L) / c_{44}^{(1)}, \\
 Y_1(t_\Gamma) &= P_1(t_\Gamma), \quad Y_2(t_\Gamma) = e_{15}^{(1)} P_2(t_\Gamma) / c_{44}^{(1)}, \\
 a_{11} &= 1 + c_1, \quad a_{12} = a_{21} = 1 + e_1, \quad a_{22} = -\kappa_1^{-2} (1 + \varepsilon_1), \\
 b_{11} &= c_1 - 1, \quad b_{12} = b_{21} = e_1 - 1, \quad b_{22} = \kappa_1^{-2} (1 - \varepsilon_1), \\
 \pi G(t_m, t_{0j}) &= Re \left\{ e^{i\psi_{0j}} \left(\zeta(t_m - t_{0j}) - t_m \delta_1 \omega_1^{-1} + 2\pi F^{-1} Re t_m \right) \right\} \\
 & \quad (j, m = \Gamma, L),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_1(t_{0L}) &= 2 \operatorname{Re} \left\{ e^{i\psi_{0L}} \left((c_1 - 1 + \kappa_1^2 (e_1 - 1)) \sigma + (c_1 - e_1) \kappa_1^2 D \right) \right\}, \\
N_2(t_{0L}) &= 2 \operatorname{Re} \left\{ e^{i\psi_{0L}} \left((e_1 - \varepsilon_1) \sigma + (\kappa_1^2 (e_1 - 1) + \varepsilon_1 - 1) D \right) \right\}, \\
Q_1(t_{0r}) &= 2 \operatorname{Re} \left\{ e^{i\psi_{0r}} (\sigma + \kappa_1^2 D) \right\}, \quad Q_2(t_{0r}) = 2 \operatorname{Re} \left\{ e^{i\psi_{0r}} (\sigma - D) \kappa_1^2 \right\}, \\
\sigma &= \frac{\langle \sigma_{13} \rangle - i \langle \sigma_{23} \rangle}{c_{44}^{(1)} (1 + \kappa_1^2)}, \quad D = \frac{\langle D_1 \rangle - i \langle D_2 \rangle}{e_{15}^{(1)} (1 + \kappa_1^2)}, \quad \psi_{0j} = \psi(t_{0j}), \\
c_1 &= c_{44}^{(2)} / c_{44}^{(1)}, \quad e_1 = e_{15}^{(2)} / e_{15}^{(1)}, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_{11}^{(2)} / \varepsilon_{11}^{(1)}.
\end{aligned}$$

Применим полученный алгоритм к решению проблемы осреднения физических свойств композита с двоякопериодической укладкой волокон. При этом будем использовать методику [5]. Так как в макромодели композита перемещение u_3 и потенциал электрического поля ϕ — линейные функции, то можем записать:

$$\begin{aligned}
2\omega_1 \langle e_{13} \rangle &= \{ u_3(x_1 + \omega_1, x_2) - u_3(x_1, x_2) \} = \operatorname{Re} c_{11}, \\
2H \langle e_{23} \rangle + 2h \langle e_{13} \rangle &= u_3(x_1 + h, x_2 + H) - u_3(x_1, x_2) = \operatorname{Re} c_{21}, \quad (8) \\
\omega_1 \langle E_1 \rangle &= -\operatorname{Re} c_{12}, \quad H \langle E_2 \rangle + h \langle E_1 \rangle = -\operatorname{Re} c_{22}.
\end{aligned}$$

Вводя теперь стандартные решения системы (7) $X_n^{(j)}(t_L)$, $Y_n^{(j)}(t_r)$ согласно равенствам:

$$\begin{aligned}
\alpha X_n(t_L) &= \varepsilon_{11}^{(1)} \langle \sigma_{13} \rangle X_n^{(1)}(t_L) + \varepsilon_{11}^{(1)} \langle \sigma_{23} \rangle X_n^{(2)}(t_L) + \\
&+ e_{15}^{(1)} \langle D_1 \rangle X_n^{(3)}(t_L) + e_{15}^{(1)} \langle D_2 \rangle X_n^{(4)}(t_L), \\
\alpha Y_n(t_r) &= \varepsilon_{11}^{(1)} \langle \sigma_{13} \rangle Y_n^{(1)}(t_r) + \varepsilon_{11}^{(1)} \langle \sigma_{23} \rangle Y_n^{(2)}(t_r) + \\
&+ e_{15}^{(1)} \langle D_1 \rangle Y_n^{(3)}(t_r) + e_{15}^{(1)} \langle D_2 \rangle Y_n^{(4)}(t_r), \quad (9) \\
\alpha &= \varepsilon_{11}^{(1)} c_{44}^{(1)} (1 + \kappa_1^2) \quad (n = 1, 2)
\end{aligned}$$

и учитывая соотношения (5), получаем:

$$\begin{aligned}
\langle \partial_2 u_3 \rangle &= \langle s_{44}^D \rangle \langle \sigma_{23} \rangle + \langle s_{54}^D \rangle \langle \sigma_{13} \rangle + \langle g_{14} \rangle \langle D_1 \rangle + \langle g_{24} \rangle \langle D_2 \rangle, \\
\langle \partial_1 u_3 \rangle &= \langle s_{45}^D \rangle \langle \sigma_{23} \rangle + \langle s_{55}^D \rangle \langle \sigma_{13} \rangle + \langle g_{15} \rangle \langle D_1 \rangle + \langle g_{25} \rangle \langle D_2 \rangle, \\
\langle E_1 \rangle &= \langle g_{41} \rangle \langle \sigma_{23} \rangle + \langle g_{51} \rangle \langle \sigma_{13} \rangle + \langle \beta_{11}^T \rangle \langle D_1 \rangle + \langle \beta_{12}^T \rangle \langle D_2 \rangle, \quad (10) \\
\langle E_2 \rangle &= \langle g_{42} \rangle \langle \sigma_{23} \rangle + \langle g_{52} \rangle \langle \sigma_{13} \rangle + \langle \beta_{12}^T \rangle \langle D_1 \rangle + \langle \beta_{22}^T \rangle \langle D_2 \rangle, \\
\langle g_{41} \rangle &= -\langle g_{14} \rangle, \quad \langle g_{42} \rangle = -\langle g_{24} \rangle, \\
\langle g_{51} \rangle &= -\langle g_{15} \rangle, \quad \langle g_{52} \rangle = -\langle g_{25} \rangle,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\frac{\langle s_{44}^D \rangle}{s_{44}^D} &= 1 - \frac{2\pi}{F} \operatorname{Im}(b_1^{(2)} + q_1^{(2)}), \quad \frac{\langle s_{45}^D \rangle}{s_{44}^D} = -\frac{2\pi}{F} \operatorname{Im}(b_1^{(1)} + q_1^{(1)}), \\
\frac{\langle s_{55}^D \rangle}{s_{44}^D} &= 1 - \frac{2\pi}{F} \operatorname{Re}(b_1^{(1)} + q_1^{(1)}), \quad \frac{\langle g_{14} \rangle}{g_{24}} = -\frac{2\pi}{F} \operatorname{Im}(b_1^{(3)} + q_1^{(3)}), \\
\frac{\langle g_{24} \rangle}{g_{24}} &= 1 - \frac{2\pi}{F} \operatorname{Im}(b_1^{(4)} + q_1^{(4)}), \quad \frac{\langle g_{15} \rangle}{g_{15}} = 1 - \frac{2\pi}{F} \operatorname{Re}(b_1^{(3)} + q_1^{(3)}), \\
\frac{\langle \beta_{11}^T \rangle}{\beta_{11}^T} &= 1 + \frac{2\pi}{F} \operatorname{Re}(b_2^{(3)} + q_2^{(3)}), \quad \frac{\langle \beta_{12}^T \rangle}{\beta_{11}^T} = \frac{2\pi}{F} \operatorname{Re}(b_2^{(4)} + q_2^{(4)}),
\end{aligned}$$

$$\frac{\langle \beta_{22}^T \rangle}{\beta_{11}^T} = 1 + \frac{2\pi}{F} \text{Im}(b_2^{(4)} + q_2^{(4)}), \quad b_n^{(j)} = \frac{1}{2\pi} \int_L t_L X_n^{(j)}(t_L) ds,$$

$$q_n^{(j)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} t_{\Gamma} Y_n^{(j)}(t_{\Gamma}) ds.$$

Соотношения (10) представляют собой материальные уравнения макромодели волокнистого пьезокерамического композита в условиях антиплоской его деформации. Фигурирующие в них коэффициенты $\langle s_{ij}^D \rangle$, $\langle g_{ij} \rangle$ и $\langle \beta_{ij}^T \rangle$ назовем соответственно осредненными податливостями, пьезоэлектрическими постоянными и диэлектрическими непроницаемостями композита. Осредненные модули упругости $\langle c_{ij}^E \rangle$, пьезомодули $\langle e_{ij} \rangle$, диэлектрические проницаемости $\langle \varepsilon_{ij}^s \rangle$ можно получить, обратив закон (10).

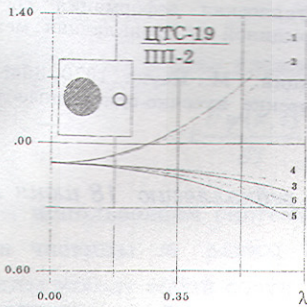


Рисунок 2

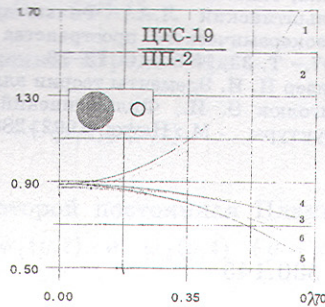


Рисунок 3

Осредненные характеристики материалов для композита тетрагонального строения ($\omega_1=2, \omega_2=2i$) с дефектами типа пор и с волокнами кругового поперечного сечения в функции параметра λ . Радиус поры - 0,2. Координаты центра включения - (-0,3;0), центра поры - (0,7;0). Материал матрицы - ЦТС-19, волокна - ПП-2

Осредненные характеристики материалов для композита тетрагонального строения ($\omega_1=2, \omega_2=i$) с дефектами типа пор и с волокнами кругового поперечного сечения в функции параметра λ . Радиус поры - 0,2. Координаты центра включения - (-0,3;0), центра поры - (0,7;0). Материал матрицы - ЦТС-19, волокна - ПП-2

В качестве первого примера рассмотрим композит тетрагонального строения с волокнами кругового поперечного сечения - радиус R_1 . Материал матрицы - пьезокерамика ЦТС-19 [1,2], волокна выполнены из пьезопассивного материала ПП-2 ($c_{55} = c_{44} = 10^{11}$ Н/м², $\varepsilon_{11}/\varepsilon_0 = 500$, $e_{15} = 0$ Кл/м²). На рис.2 представлены результаты расчета относительных эффективных параметров композита ($\omega_1 = 2, \omega_2 = 2i$) с дефектами типа пор в структуре в зависимости от параметра $\lambda = 2R_1/\omega_1$. Кривые 1, 2, ..., 6 относятся к величинам $\langle c_{44}^E \rangle / c_{44}^E, \langle c_{55}^E \rangle / c_{44}^E, \langle \varepsilon_{22}^s \rangle / \varepsilon_{11}^s, \langle \varepsilon_{11}^s \rangle / \varepsilon_{11}^s, \langle e_{24} \rangle / e_{15}, \langle e_{15} \rangle / e_{15}$ соответственно. Радиус поры - 0,2, координаты центра включения - (-0,3;0), координаты центра поры - (0,7;0). На каждом рисунке в числителе стоит материал матрицы, в знаменателе - материал волокна.

Рассмотрим теперь композит тетрагонального строения с прямоугольной фундаментальной ячейкой ($\omega_f=2$, $\omega_z=1$). На рис. 3 приведены данные расчета для композита с дефектами типа пор (радиус поры — 0.2). Координаты центра включения — (-0.3;0), координаты центра поры — (0.7;0). Композиция здесь та же, что и выше.

SUMMARY

In the case of the antiplane deformation procedure of determination of connected electroelastic fields in the fibrous piezocomposite of periodic structure with the cylindrical hole system is constructed. An appropriate boundary problem is reduced to singular integrated equations. The averaging physical characteristic of piezocomposite is precisely defined as functionals of this system solutions.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях. - В кн. : Физическая акустика. Т. 1. Методы и приборы ультразвуковых исследований. Ч. А. - М.: Мир, 1966. - С. 204 - 326.
2. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Электроупругость. - Киев: Наукова думка, 1989.-280 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5 т. Т.5).
3. Фильштинский Л.А., Фильштинский М.Л. Антиплоская деформация составного пьезокерамического пространства с межфазной трещиной // Прикладная механика, 1997.- Т. 33, № 8. - С. 73-78.
4. Ахизер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. - М.: Наука, 1970.-304с.
5. Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. Периодические кусочно-однородные упругие структуры. - М.: Наука, 1992.-288 с.

Поступила в редколлегию 18 июня 1998 г.

УДК 530.145

СТОХАСТИЧЕСКОЕ УСКОРЕНИЕ КВАНТОВОЙ ЧАСТИЦЫ

С.И. Денисов, проф.

1 Стохастический механизм ускорения частиц был предложен Ферми [1] для объяснения происхождения высокоэнергичных космических лучей. Суть его состоит в том, что при столкновениях с хаотически движущимися магнитными облаками, рассматриваемыми как гигантские частицы, заряженная частица чаще приобретает энергию, чем отдает. Происходит это потому, что, вследствие изотропного (в космических масштабах) распределения скоростей облаков, частица чаще встречает те облака, которые движутся ей навстречу.

При математическом моделировании этого эффекта используются два подхода - стохастический и динамический. В первом изначально предполагается, что поведение частицы стохастично, и основной задачей, которая решается в таком подходе, является нахождение статистических характеристик частицы через заданные статистические характеристики силового поля. Во втором подходе основным является вопрос о возможности появления ускорения Ферми без априорного использования предположения о случайности силового поля. При этом второе направление развивается в рамках как классической [2,3], так и квантовой [3] механики, тогда как исследования, относящиеся к первому направлению, проводятся исключительно на классической основе. Основная причина - отсутствие точных решений нестационарного уравнения Шредингера, содержащего случайные потенциалы. Отметим в этой связи, что даже в случае детерминистических потенциалов точных решений известно крайне мало. По существу, в настоящее время имеется