УДК 532.511

СИЛА ИНЕРЦИИ ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ В УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

П.М.Калиниченко, доц.

Данная работа является продолжением работ автора [1-5]. В ней сделана попытка дать наглядное физическое обоснование полученного в этих работах результата.

Как следует из классической гидромеханики любое цилиндрическое тело, обтекаемое потоком идеальной жидкости, не взаимодействует с этим потоком. Известный парадокс Эйлера-Даламбера, невозможность объяснения возникновения циркуляции в идеальной жидкости, а значит и подъемной силы, являются следствием такого обтекания. Из уравнения движения жидкости силовое взаимодействие потока жидкости с обтекаемым телом возможно лишь благодаря силам трения в жидкости. Отсутствие сил вязкости приводит к отсутствию силового взаимодействия потока и обтекаемого тела. В то же время механика знает два вида взаимодействия между телами: с помощью трения и посредством нормального давления. Если связь идеальная, то тела взаимодействуют посредством нормального давления, если шероховатая - с помощью нормальной и касательной составляющих силы взаимодействия. Природа силового взаимодействия между телами независимо от того, дискретные они или представляют сплошную жидкую среду, должна быть одинаковой. Результатом такого взаимодействия является сила, с которой поток жидкости воздействует на обтекаемое тело, равно как и обтекаемое тело воздействует на поток жидкости.

В работе [5] показано, что природа отсутствия силового взаимодействия обтекаемого тела с потоком идеальной жидкости кроется в самих уравнениях движения жидкости. Попытаемся получить уравнение движения идеальной жидкости, отражающее реальную картину динамического взаимодействия потока и тела.

Выясним, что же представляет собой модель идеальной жидкости. Это сплошная жидкая среда, лишенная вязкости. Допущение об отсутствии вязкости равносильно условию отсутствия в идеальной среде внутреннего трения. А так как считается, что в жидкости касательные напряжения обусловлены лишь трением, то в идеальной жидкости безотносительно к тому, покоится она или движется, касательные напряжения равны нулю: $p_{ij}=0$.

В потоке жидкости, движущемся вдоль криволинейной поверхности, выделим произвольную «жидкую» частицу массой δm. Запишем дифференциальное уравнение движения «жидкой» частицы. Действием массовых сил пренебрегаем. Учитывая, что «жидкая» частица под действием приложенной системы поверхностных сил изменяет свою форму - деформируется, при составлении дифференциального уравнения движения «жидкой» частицы к действующим на нее поверхностным силам $\vec{F}_p$

прибавим силы инерции $\vec{F}^u$, обусловленные изменением ее формы. Таким образом, дифференциальное уравнение движения «жидкой» частицы запишется в виде

$$\frac{d\delta m\vec{V}}{dt} = \vec{F}_p + \delta m\vec{F}^u ,$$

где $$\vec{F}^u = -\frac{dV_\tau}{dt}\vec{\tau}^o = -\vec{a}_\tau = V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}\vec{i} + V_y\frac{\partial V_y}{\partial y}\vec{j} + V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}\vec{k} .$$

Для стационарного поля плотности предыдущее уравнение запишем в виде

$$\delta m\left[\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V}\right] = \vec{F}_p + \delta m\vec{F}^u .$$

Представляя жидкость в виде совокупности «жидких» частиц, запишем уравнение движения конечной массы жидкости

$$\int_\tau \rho\left[\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V}\right]d\tau = \sum\vec{F}_p + \int_\tau \rho\vec{F}^u d\tau.$$

Учитывая, что $\sum\vec{F}_p = \int_\sigma \vec{p}_n d\sigma$, будем иметь

$$\int_\tau \rho\left[\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V}\right]d\tau = \int_\sigma \vec{p}_n d\sigma + \int_\tau \rho\vec{F}^u d\tau. \qquad (1)$$

Здесь $\vec{p}_n$ - вектор напряжения поверхностных сил; $d\tau$ - элемент объема; $d\sigma$- элемент поверхности.

Согласно теореме Гуасса-Остроградского

$$\int_\sigma \vec{p}_n d\sigma = \int_\tau\left(\frac{\partial\vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{p}_z}{\partial z}\right)d\tau = \int_\tau DivPd\tau.$$

Учитывая это, а также произвольность объема интегрирования, придем к уравнению динамики идеальной жидкости:

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V} = \frac{1}{\rho}DivP + \vec{F}^u. \qquad (2)$$

Представляя $Div\ P = -gradp + \vec{F}^\partial$ и используя преобразования Громека, приведем уравнение (2) к виду

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + grad\frac{V^2}{2} + \vec{\Omega}\times\vec{V} = -\frac{1}{\rho}gradp + \frac{1}{\rho}\vec{F}^\partial + \vec{F}^u .$$

Здесь

$$\vec{F}^{\partial} = F_x^{\partial}\vec{i} + F_y^{\partial}\vec{j} + F_z^{\partial}\vec{k} = \left(\frac{\partial p'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p'_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z}\right)\vec{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p'_{zz}}{\partial z}\right)\vec{k},$$

где p'_{ii} - добавочное нормальное напряжение, определяемое из выражения $p_{ii} = -p + p'_{ii}$; p- гидродинамическое давление.

Учитывая, что $\vec{F}^u = \vec{a}_\tau$ предыдущее уравнение перепишем в окончательном виде:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + grad\frac{V^2}{2} + \vec{\Omega} \times \vec{V} + \vec{a}_\tau = -\frac{1}{\rho} gradp + \frac{1}{\rho}\vec{F}^{\partial}. \qquad (3)$$

Для анализа полученного уравнения (3), а также для доказательства существования напряженного состояния движущейся идеальной жидкости рассмотрим частный случай установившегося течения $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$ баротропной жидкости $\rho = \rho(p)$. Уравнения такого движения, основываясь на (3), будут иметь вид

$$grad\frac{V^2}{2} + \vec{\Omega} \times \vec{V} + \vec{a}_\tau = -grad\frac{p}{\rho} + \frac{1}{\rho}\vec{F}^{\partial}. \qquad (4)$$

В идеальной жидкости с завихренностью на бесконечности, равной нулю, энергия потока $E = \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}$ есть величина постоянная. Из этого $grad\left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}\right) = 0$, а значит, $grad\frac{V^2}{2} = -grad\frac{p}{\rho}$.

Таким образом, из уравнения (4) будем иметь

$$\vec{\Omega} \times \vec{V} + \vec{a}_\tau = \frac{1}{\rho}\vec{F}^{\partial}. \qquad (5)$$

Геометрическая интерпретация уравнения (4) представлена на рис.1.

Рисунок 1 дает наглядное представление о динамике «жидкой» частицы. Так, говоря о состоянии относительного покоя жидкости, при котором силы инерции, перпендикулярные поверхности равного давления, уравновешиваются поверхностными силами, можно утверждать, что под действием поверхностной силы $grad\frac{p}{\rho}$ «жидкая» частица движется с ускорением, равным $grad\frac{V^2}{2}$, как отвердевшая. Вторая составляющая динамического движения «жидкой» частицы обусловлена ее деформацией, происходящей под действием добавочной силы $\vec{F}^{\partial}$. Добавочная сила является результатом напряженного состояния движущейся жидкости [5]. Следовательно, в движущейся идеальной жидкости касательные напряжения p_{ij} отличны от нуля, а нормальные p_{ii} зависят от ориентации площадки, на которой они действуют. Докажем это.

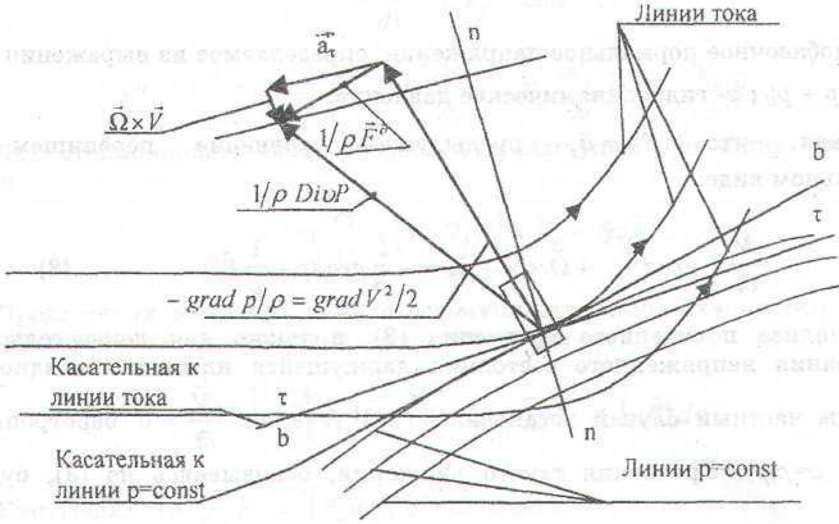

Рисунок 1 - Геометрическая интерпретация уравнения движения жидкости

$$\left(grad\frac{V^2}{2} \perp bb,\ \frac{1}{\rho}\vec{F}^{\partial}\ ||\ bb,\ \vec{a}_\tau\ ||\ \tau\tau,\ \vec{\Omega}\times\vec{V} \perp \tau\tau \right)$$

Вектор ускорения $\vec{a}_\tau$, входящий в уравнение движения жидкости, касателен к линии тока. Вектор $grad\frac{V^2}{2}$, как и вектор $\vec{a}_\tau$, зависит от распределения скорости $V(x,y,z)$ - поля скорости. Поэтому проекция вектора $grad\frac{V^2}{2}$ на направление, касательное к линии тока $grad_\tau\frac{V^2}{2}$, должна быть равной вектору $\vec{a}_\tau$, то есть $grad_\tau\frac{V^2}{2} = a_\tau$. Представляя $grad\frac{V^2}{2} = grad_\tau\frac{V^2}{2} + grad_n\frac{V^2}{2} = \vec{a}_\tau + grad_n\frac{V^2}{2}$,

где $grad_n\frac{V^2}{2} = \left(V_y\frac{\partial V_y}{\partial x} + V_z\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\vec{i} + \left(V_x\frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z\frac{\partial V_z}{\partial y}\right)\vec{j} + \left(V_x\frac{\partial V_x}{\partial z} + V_y\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{k}$,

уравнение (4) перепишем в виде

$$2\vec{a}_\tau + grad_n\frac{V^2}{2} + \vec{\Omega}\times\vec{V} = -grad\frac{p}{\rho} + \frac{1}{\rho}\vec{F}^{\partial}.$$

Если положить касательные напряжения равными нулю p_{ij}=0, как это считается в настоящее время для идеальной жидкости, то вектор добавочной силы $\vec{F}^{\partial}$ должен быть равен нулю. Из (5) равенство нулю вектора $\vec{F}^{\partial}$ приводит к равенству нулю векторов $\vec{a}_{\tau}$ и $\vec{\Omega} \times \vec{V}$, а следуя предыдущему уравнению,

$$grad_n \frac{V^2}{2} = -grad \frac{p}{\rho}.$$

Выполнение данного условия возможно при совпадении линий равного давления и линий тока. Линии тока и равного давления совпатают при прямолинейном движении и движении по концентричной окружности с постоянной скоростью. Такой вид движения жидкости относится к потенциальному. В общем случае произвольного движения жидкости линии тока и равного давления пересекаются, а значит в потоке жидкости касательные напряжения отличны от нуля p_{ij}≠0. Следует заметить, что касательные напряжения в идеальной жидкости не обусловлены трением. Они являются лишь результатом напряженного состояния движущейся идеальной жидкости.

Полученное уравнение движения идеальной жидкости (3) отличается от уравнения Эйлера в левой части членом $\vec{a}_{\tau}$ и в правой части - членом $\frac{1}{\rho}\vec{F}^{\partial}$.

Данное уравнение показывает, что поток идеальной жидкости, безотрывно обтекающий любое цилиндрическое тело, вступает с ним в силовое взаимодействие. Таким образом, существовавшее противоречие теории и опыта по вопросу взаимодействия идеальной жидкости и обтекаемого тела можно считать решенным.

В результате проведенной работы получено уравнение движения идеальной жидкости (3), отличающееся от уравнения Эйлера. Показано, что в движущейся идеальной жидкости касательные напряжения отличны от нуля $p_{ij} \neq 0$, а нормальные напряжения p_{ii} зависят от ориентации площадки.

SUMMARY

The equation of ideal fluid movement is obtained. It differs from the Eiler equation/ It is shown, that in moving ideal fluid, the tangential stresses are different from zero. They are conditioned by the stress character of the moving ideal fluid.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калиниченко П.М. Возникновение вихрей в движущейся жидкости // Вісник СумДУ, 1998.- № 1(9).- С.41-47.
2. Калиниченко П.М. О парадоксе Эйлера-Даламбера // Вісник СумДУ, 1999.- № 1(12).-С.41-47.
3. Калиниченко П.М. К уравнениям движения идеальной жидкости // Вісник СумДУ, 1999.- № 2(13).- С.45-50.
4. Калініченко П.М. Уточнення рівнянь руху ідеальної рідини // Машинознавство, 1998. - № 11-12.- С.13-15.
5. Калиниченко П.М. Некоторые уточнения уравнений гидромеханики и теории лопастных насосов.- К.: ИСМО, 1999.- 240 с.

Поступила в редколлегию 3 февраля 2000 г.