

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ,  
МОЛОДЁЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ  
СУМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**На правах рукописи**

**Шуда Ирина Александровна**

**УДК 537.2; 536.75; 536.756; 539.21**

**ВЛИЯНИЕ ИЕРАРХИЧЕСКОГО СТРОЕНИЯ И САМОПОДОБИЯ  
НА САМООРГАНИЗАЦИЮ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ**

**01.04.07 — Физика твёрдого тела**

**Диссертация**

**на соискание ученой степени доктора  
физико-математических наук**

**Научный консультант  
заслуженный деятель  
науки и техники Украины,  
д.ф.-м.н., профессор  
Олемской Александр Иванович**

**Сумы – 2011**

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	7
РАЗДЕЛ 1    ОСНОВЫ ТЕОРИИ САМООРГАНИЗАЦИИ	21
1.1    Феноменологическая теория самоорганизации	21
1.1.1    Основы синергетической схемы. . . . .	21
1.1.2    Динамика одномодовых твердотельных лазеров. . . . .	23
1.2    Самоорганизация структуры конденсированной среды	29
1.2.1    Теоретико-полевое представление одиночных дефектов. . . . .	32
1.2.2    Коллективное поведение ансамбля дефектов. . . . .	43
1.2.3    Сложность иерархического ансамбля дефектов. . . . .	52
1.3    Выводы к разделу 1	62
РАЗДЕЛ    2            САМООРГАНИЗОВАННАЯ            МОДУЛЯЦИЯ	
КОГЕРЕНТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ	63
2.1    Автоколебания, обусловленные рождением предельного цикла.	65
2.1.1    Формализм бифуркации Хопфа. . . . .	65
2.1.2    Динамика лазеров, отвечающих системе Лоренца. . . . .	76
2.2    Периодическое множество предельных циклов	84
2.3    Фазовый анализ когерентного излучения ансамбля квантовых точек	94
2.4    Выводы к разделу 2	106
РАЗДЕЛ 3    АВТОКОЛЕБАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ	107
3.1    Индуцированные шумом осцилляции стационарных стохастических систем	108
3.1.1    Описание стохастических систем конечного размера. . . . .	109

3.1.2	Статистическая картина предельного цикла. . . . .	112
3.1.3	Стохастическая система Лоренца без предельного цикла. . . . .	114
3.1.4	Самоорганизуемая модуляция в стохастической системе Лоренца.	118
3.2	Подавление осцилляций шумами Леви	123
3.2.1	Статистическое представление мультипликативных шумов Леви.	124
3.2.2	Статистическая картина предельного цикла. . . . .	130
3.3	Выводы к разделу 3	139
<b>РАЗДЕЛ 4 СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ</b>		<b>140</b>
4.1	Показатель подобия сложного статистического ансамбля	142
4.1.1	Параметр неаддитивности. . . . .	142
4.1.2	Описание самоподобных систем. . . . .	144
4.1.3	Определение показателя подобия. . . . .	152
4.1.4	Заключительные замечания. . . . .	156
4.2	Статистическая теория самоподобно распределённых полей	160
4.3	Статистические полевые теории, деформированные в рамках различных исчислений	169
4.3.1	Введение в формализм деформированных исчислений. . . . .	171
4.3.2	Базово-деформированная статистика. . . . .	183
4.3.3	Конечно-разностная статистика. . . . .	191
4.3.4	Статистика Каниадакиса. . . . .	195
4.3.5	Произвольно деформированная статистика. . . . .	197
4.3.6	Заключительные замечания. . . . .	201
4.4	Выводы к разделу 4	203
<b>РАЗДЕЛ 5 МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫЕ ОБЪЕКТЫ</b>		<b>205</b>
5.1	Обобщение теории мультифракталов в рамках базово-деформированного исчисления	206

5.2	Мультифрактальный анализ временных рядов	219
5.2.1	Описание метода МФФА. . . . .	221
5.2.2	Тестирование метода МФФА. . . . .	224
5.2.3	Анализ обменных курсов валют. . . . .	225
5.2.4	Мультифрактальный спектр электрокардиограмм сердца. . . . .	232
5.2.5	Мультифрактальный спектр аномальной диффузии. . . . .	232
5.2.6	Заключительные замечания. . . . .	234
5.3	Мультифрактальный анализ рентгеновских дифрактограмм сложных конденсированных сред	236
5.3.1	Экспериментальные данные. . . . .	237
5.3.2	Мультифрактальный анализ экспериментальных данных. . . . .	240
5.3.3	Обсуждение результатов. . . . .	240
5.4	Исследование мультифрактальных поверхностей конденсатов, полученных методом магнетронного распыления	245
5.4.1	Описание метода. . . . .	246
5.4.2	Тестирование метода двумерного МФФА. . . . .	248
5.4.3	Исследуемые покрытия. . . . .	249
5.4.4	Результаты двумерного МФФА. . . . .	254
5.5	Выводы к разделу 5	257
<b>РАЗДЕЛ 6 ИЕРАРХИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ</b>		<b>259</b>
6.1	Статистические особенности образования иерархических структур	262
6.2	Формулировка проблемы	264
6.3	Регулярное дерево	269
6.4	Вырожденное дерево	273
6.5	Самоподобное дерево	275
6.6	Произвольное дерево	276



6.7	Заключительные замечания	282
6.8	Выводы к разделу 6	284
РАЗДЕЛ 7 МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ		285
7.1	Исследование фазового пространства сложных систем	287
7.1.1	Основы теории мультифракталов . . . . .	288
7.1.2	Бинарный мультифрактал Кантора . . . . .	291
7.1.3	Метод множителей . . . . .	294
7.1.4	Мультифрактальный спектр фазового пространства . . . . .	301
7.1.5	Обобщение метода множителей . . . . .	307
7.2	Изменение структуры аморфных и многокомпонентных тонких плёнок под воздействием импульсной фотонной обработки	312
7.2.1	Исследование условий кристаллизации . . . . .	315
7.2.2	Описание взрывной кристаллизации в представлении самоорганизующей критичности . . . . .	321
7.3	Суперсимметричное представление бозе-эйнштейновской конденсации фермионных пар	328
7.3.1	Основные теоретико-полевые соотношения . . . . .	330
7.3.2	Суперсимметричные полевые уравнения . . . . .	333
7.3.3	Нарушение суперсимметрии . . . . .	335
7.3.4	Обсуждение результатов . . . . .	337
7.4	Выводы к разделу 7	340
ВЫВОДЫ		341
Приложение А. К двумерным полётам Леви		345
Приложение Б. Деформированные гамма-функции		347
Приложение В. Основные правила деформированной алгебры		349
Приложение Д. Сумма деформированной геометрической прогрессии		350

Приложение Е. Суперсимметричные уравнения движения	357
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	359

## ВВЕДЕНИЕ

Заглавие известной работы Ф. Андерсона "More is different" [1], которое можно перевести как "Большее – отличается" стало архетипом теории *сложных систем*. Основная идея этой работы сводится к тому, что ансамбль простых объектов типа атомов, связанных силами взаимодействия, может проявлять нетривиальное поведение, наиболее яркий пример которого дают явления сверхпроводимости и сверхтекучести. В теоретической физике об этом принято говорить как о *нарушении симметрии*, в результате которого коллективное поведение простых объектов приобретает сложный характер. Он проявляется в спонтанном появлении *коллективных мод*, гидродинамический характер которых обусловлен тем, что в импульсном пространстве появляется состояние  $\mathbf{p} = 0$ , в котором плотность частиц приобретает бесконечное значение [2]. Иными словами, появление сложности выражается в том, что пространство состояний простой системы приобретает особую точку  $\mathbf{p} = 0$ .

Дальнейшее развитие концепции сложности связано с теорией спиновых стёкол [3]. Их исследование показало, что фазовое пространство разделено на слабо перекрывающиеся области, благодаря чему поведение спиновых стёкол может измениться коренным образом при сколь угодно слабом воздействии [4]. Это обусловлено тем, что области разрешённых состояний сложной системы разделены энергетическими барьерами, которые имеют конечную высоту, характеризуемую мезоскопическими значениями свободной энергии. Иными словами, *потенциальный рельеф* имеет чрезвычайно сложный ландшафт в пространстве состояний сложной системы [5]. В результате её поведение определяется тем, в какую из областей разрешённых состояний попадает система. С другой стороны, даже слабое макроскопическое воздействие может привести к переходу из одной области в другую, что коренным образом изменяет поведение сложной системы.

В кругу современных проблем особое место занимают энергетические,

экологические, социальные и другие задачи, решение которых требует, с одной стороны, привлечения огромных ресурсов, а с другой не может быть достигнуто методом проб и ошибок, поскольку системе невозможно навязать необходимое поведение. В связи с этим особую актуальность приобрели исследования коллективного поведения, проявляющегося в самоорганизации физических, биологических, социальных и других систем [6–13]. Благодаря тому, что их поведение может изменяться непредсказуемым образом в зависимости от состояния их составляющих и внешних условий, такие системы получили название *сложных* [4], [14–17].

Целью данной работы является исследование коллективного поведения сложных систем в рамках феноменологического и статистического представлений. В первом из них излагается феноменологическая теория самоорганизованной модуляции когерентного излучения и исследуется влияние шумов различной природы на автоколебательное поведение. В рамках микроскопического представления развиты деформированные полевые схемы сложных статистических систем, проведено описание мультифрактальных объектов, определены вероятности образования различных иерархических структур и рассмотрены примеры использования развитых методов.

**Актуальность темы.** В настоящее время осознано, что к сложным системам относится большинство макроскопических объектов. В физике твёрдого тела можно выделить ферромагнетики, спиновые стёкла, системы с аномальной диффузией Леви, гранулированные системы, твёрдые тела, подвергнутые ионной бомбардировке, и другие объекты. Кроме того, следует упомянуть такие физические системы как двумерная электронная плазма в турбулентном режиме, гравитационные системы, солнечные нейтрино, чёрные дыры, элементарные частицы, сталкивающиеся с высокой энергией, квантовые системы, проявляющие эффекты запутывания, и многие другие объекты (см. [18] и приведенные там ссылки). Функция распределения данных систем часто приобретает либо далекодействующие степенные асимптотики, либо обрезается

на конечных значениях энергии. В химии наиболее популярный пример сложных систем даёт реакция Белоусова-Жаботинского [19], проявляющая характерное автоколебательное поведение. Очевидный пример представляют биологические объекты, наиболее ярким проявлением сложности которых является их иерархическое строение. Этот ряд можно продолжить многочисленными примерами из теории информации, экономики, социологии, а также других наук и прикладных областей деятельности [20–24].

В связи с этим исследование свойств сложных систем, а именно описание их автоколебательных свойств, развитие статистической картины и исследование иерархической структуры сложных систем, представляет актуальную задачу теории твёрдого тела.

**Связь работы с научными программами и темами.** Работа выполнена в научно-исследовательской лаборатории "Синергетика конденсированной среды" кафедры нанoeлектроники Сумского государственного университета и связана с выполнением госбюджетных тем № 0106U001940 "Синергетическая теория сложных систем экономического типа"(срок исполнения: 2006–2008 гг.); № 0109U001386 "Статистическая теория иерархических структур дефектов кристаллического строения"(срок исполнения: 2009–2011 гг.).

**Цель и основные задачи исследования.** Целью диссертационной работы является развитие феноменологического и статистического описания сложных систем физики твёрдого тела. В этом направлении следует провести исследование автоколебательных свойств нелинейных наносистем под действием различных шумов; на основе деформированных исчислений развить теоретико-полевые статистические методы описания наносистем; разработать методику исследования твердотельных объектов, обладающих самоподобным строением; построить теорию иерархического строения дефектов твёрдого тела. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- исследовать условия когерентного излучения ансамбля квантовых точек;

- построить статистическую картину предельного цикла в неравновесных стационарных системах, подверженных влиянию шумов различной природы;
- основываясь на деформированных исчислениях, построить статистическую теорию наносистем;
- развить статистическую теорию твердотельных объектов, обладающих самоподобным строением;
- провести обобщение теории мультифракталов для многократно деформированных структур;
- разработать методику рентгеноструктурных исследований твёрдого тела, обладающего сложным строением;
- построить теоретико-вероятностную картину, позволяющую описать иерархические структуры дефектов твёрдого тела.

*Объект исследования* представляют процессы самоорганизации сложных систем физики твёрдого тела.

*Предметом исследования* является статистическая теория сложных систем, проявляющих эффекты самоорганизации.

**Методы исследования.** При описании автоколебательного поведения сложных систем использовался формализм теории зарождения предельного цикла в результате бифуркации Хопфа [25]. Исследование воздействия стохастических источников основывалось на статистической теории нелинейных динамических систем [26]. Теоретико-полевые статистические схемы и описание иерархических фазовых пространств сложных систем развиты с использованием аппарата неаддитивной [27] и базово-деформированной [28] статистик.

### **Научная новизна полученных результатов**

1. Показано, что когерентное излучение ансамбля квантовых при экспериментально наблюдаемых значениях параметров системы, протекает в

импульсном режиме. В рамках исследования автоколебательного поведения нелинейных систем впервые определены условия когерентного излучения ансамбля квантовых точек.

2. Развита статистическая картина влияния шумов различной природы на автоколебания, возникающие в твёрдых телах, обладающих наноскопическим масштабом.
3. Исследована статистическая картина автоколебаний в условиях, при которых процессы переноса протекают в режиме аномальной диффузии. Показано, что трансформация гауссовых шумов в полёты Леви подавляет автоколебательное поведение.
4. На основе базово- и алгебраически деформированных исчислений развиты теоретико-полевые подходы, позволяющие провести статистическое описание твердотельных наносистем конечного размера. Установлено, что для таких систем зависимость термодинамических величин от логарифма деформации имеет симметричную форму относительно точки отсутствия деформации. Совместно с линейной зависимостью дисперсии свободного поля от деформации это указывает на самоподобие базово-деформированных наносистем.
5. В рамках алгебраически деформированных исчислений впервые определены термодинамические величины и корреляторы свободных полей. Показано, что конечно-разностное исчисление, которое следует использовать при наличии потенциала, обладающего сингулярностью на малых расстояниях, не приводит к существенной деформации физических величин. Использование исчисления Каниадакиса позволяет учесть релятивистские эффекты при гиперзвуковых исследованиях твёрдого тела.
6. Впервые развита теория самоподобно распределённых статистических полей, основанная на исчислении Цаллиса. Она показывает, что моменты

первого и второго порядков определяют глобальную меру неопределённости информации и локальную меру информации, запасённой системой.

7. В рамках концепции многократно деформированных множеств проведено обобщение теории мультифракталов. Это позволило провести развёрнутое исследование самоподобной структуры твердотельных покрытий. Кроме того, на основе метода мультифрактального флуктуационного анализа разработана методика обработки рентгенограмм, фон которых обладает фрактальной структурой.
8. Впервые построена последовательная картина, позволяющая находить вероятности образования произвольных иерархических структур, образуемых дефектами твёрдого тела. В основе этой картины лежит формализм, описывающий строение фазового пространства сложных систем.
9. Развита суперсимметричная теория бозе-эйнштейновской конденсации фермионных пар атомов щелочных металлов.

**Обоснованность и достоверность научных положений, выводов и рекомендаций.** Полученные в работе теоретические результаты представлены в аналитическом и графическом виде. Во всех случаях они согласуются с литературными данными по исследованию поведения самоорганизованных сложных систем.

**Научное и практическое значение полученных результатов.** С научной точки зрения наиболее значимыми являются статистическая теория деформированных полей, теория многократно деформированных мультифракталов и теория зарождения иерархических структур. Применительно к физике твёрдого тела использование деформированных полей позволяет провести статистическое описание наносистем конечного размера и конденсированных сред, обладающих дальнедействующими силами и эффектами долговременной памяти (к ним относятся квантовые точки, спиновые и структурные стёкла, а также другие



объекты так называемой мягкой конденсированной среды). Разработанная в диссертации теория многократно деформированных мультифракталов даёт геометрическое и статистическое описание сложных структур твёрдого тела (например, поверхностных конденсатов, обладающих самоподобной структурой). Впервые развитая в работе теория зарождения иерархических структур позволяет определить вероятность образования кластера дефектов твёрдого тела, обладающего произвольной конфигурацией. Принципиально роль в экспериментальных исследованиях твёрдого тела, обладающего сложным строением, должна играть разработанная в диссертации методика обработки фоновой составляющей рентгенограмм, обладающей фрактальным строением. При обработке экспериментальных данных важное значение может играть статистическая картина взрывной кристаллизации и теория бозе-эйнштейновской конденсации атомов щелочных элементов.

Кроме того, полученные результаты могут быть использованы для феноменологического описания процессов в самоорганизованных сложных системах и для нахождения статистических характеристик разнообразных сложных сред и объектов. Формализм, разработанный в рамках феноменологического подхода, может быть применён для описания самоорганизованной модуляции когерентного излучения лазеров, работающих в детерминистическом и стохастическом режимах, а также для описания эпидемий [29–31], динамики популяции "хищник-жертва" [32, 33], динамики изменения общественного мнения [34], биохимических часов [35, 36], генетических сетей [37], циклических реакций в системах, фазовое пространство которых обладает ловушками, [38] и т.д. Кроме того, разработанные теоретико-полевые статистические подходы могут найти применение в таких областях физики как чёрные дыры и анионные сверхпроводники [39], конформная квантовая механика, ядерная физика и физика высоких энергий, неаддитивная статистическая физика, релятивистская статистическая теория и эконофизика (см. [18, 27, 40, 41] и имеющиеся там ссылки). И наконец, предложенный

метод описания иерархических структур представляет основу статистической теории сложных систем, обладающих иерархическим фазовым пространством, а именно ферромагнетиков, спиновых стёкол, двумерной электронной плазмы в турбулентном режиме, систем с аномальной диффузией Леви, гранулированных систем, твердых тел, подвергнутых ионной бомбардировке, гравитационных систем, солнечных нейтрино, чёрных дыр, элементарных частиц, сталкивающихся с высокой энергией, квантовых систем, проявляющих эффекты запутывания, и других объектов [18, 42].

**Личный вклад соискателя.** Личный вклад автора в получении результатов, которые выносятся на защиту является определяющим. Диссертанту принадлежит постановка и развитие основных научных проблем, выбор адекватных теоретических методов их решения, проведение в полном объеме необходимых аналитических вычислений, получение, проверка и интерпретация конечных результатов. Монография [43], в которой изложен материал диссертации, подготовлена вместе с научным консультантом. В обзоре [44] соискателем написаны разделы 1 – 4, выводы, обобщенные теоретические и экспериментальные данные, в [45] – выбор объектов анализа обзора, написание разделов 1, 3 принадлежат автору. Постановка задачи, аналитические решения уравнений, анализ и сравнения численных результатов в работах [46–54] и [58] выполнены диссертантом. Интерпретация результатов проведена вместе с научным консультантом. В [55–57], [59] описание метода мультифрактального флуктуационного анализа и аналитические выкладки сделаны автором. В [60–67] автору принадлежит постановка задачи, теоретическое решение, подготовка и оформление текста. Экспериментальные данные, используемые в работах [55], [57] и [58] получены Данильченко С.Н., Перекрестовым В.И. и Шведовым Е.В.

**Апробация результатов диссертации.** Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях: 5-й Международной школе-конференции "Актуальные проблемы физики полупроводников" (Дрогобыч, 2005 г.); Международной конференции "Statis-

tical Physics 2005: Modern Problems and New Applications" (Львов, 2005 г.); XI Всеукраинской (VI Международной) научной конференции СНКПМІ-2008 (Львов, 2008 г.); International Conference in Statistical Physics (Kolympari-Chania, Greece, 2008); Международной конференции "Statistical Physics 2009: Modern Trends and Applications" (Львов, 2009 г.); Ukrainian-German Symposium on Physics and Chemistry of Nanostructures and on Nanobiotechnology (Beregove, Crimea, Ukraine, 2010); Международной научной конференции "Современные проблемы физики конденсированного состояния" (Киев, 2010 г.); 19-й Международной конференции по физике радиационных явлений и радиационному материаловедению, (Алушта, 2010 г.); 20-й Международной конференции "СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии" (Севастополь, 2010 г.); научно-технических конференциях сотрудников, преподавателей и студентов СумГУ (г. Сумы, 2007, 2008, 2010 гг.).

**Публикации.** Результаты диссертационной работы изложены в 1 монографии, 2 обзорах, 22 статьях, опубликованных в специализированных научных журналах, которые удовлетворяют требованиям ВАК Украины, и 14 сборниках научных трудов и тезисов конференций.

**Структура диссертации.** Содержание диссертации можно разделить на четыре части. Первая сводится к разделу 1, в котором приводятся основы феноменологической теории самоорганизации и картина структурных превращений конденсированной среды, где основное внимание акцентируется на описании сложности. Вторая часть содержит феноменологическую теорию когерентного излучения. В отличие от стандартной синергетической картины работы лазера [6] мы исследуем условия самоорганизованной модуляции когерентного излучения в детерминистическом (разд. 2) и стохастическом (разд. 3) режимах. Основное место — как по объёму, так и по значимости — занимает третья часть, посвящённая изложению последних результатов статистической теории сложных систем (разделы 4–6). Первый из этих разделов посвящен развитию полевого формализма, использование которого позволяет наиболее

полным и универсальным методом описать статистические системы [79]. В разделе 5 исследуются мультифрактальные объекты, описание которых достигается как обобщением стандартной аналитической процедуры [80], так и использованием последних алгоритмов численного анализа временных рядов. Раздел 6 посвящен описанию иерархических структур, в рамках которого регулярное и вырожденное иерархические деревья представляются аналитически, а самоподобное дерево – на основе численной процедуры, для которой проводится обобщение на случай дерева произвольной конфигурации. Последнюю часть диссертации составляет раздел 7, в котором развивается микроскопическая теория сложных систем и рассматривается её приложение к двум задачам, которые приобрели особую актуальность в связи с развитием современных технологий.

Представим содержание каждого из указанных разделов по отдельности.

Раздел 1 представляет литературный обзор, который содержит изложение основ феноменологической теории самоорганизации (подраздел 1.1) и картину самоорганизации структуры конденсированной среды (подраздел 1.2). В пункте 1.1.1 приводятся необходимые сведения из феноменологической теории самоорганизации, основанной на рассмотрении системы Лоренца, которая представляет основу *синергетики*. Пункт 1.1.2 посвящён обзору динамических моделей одномодовых твердотельных лазеров. В пункте 1.2.1 на основе концепции перестраиваемого потенциального рельефа изложена теоретико-полевая схема, показывающая, что полный потенциал упруго-пластического поля разделяется на материальную компоненту, связанную с распределением атомов, и калибровочную составляющую, представляющую упругое поле. Пункт 1.2.2 посвящён развитию синергетической картины эволюции однородного ансамбля дефектов кристаллического строения на мезоскопическом уровне. При этом основное внимание уделяется рассмотрению материалов, подверженных интенсивному внешнему воздействию. Их отличительная особенность состоит в достижении столь высоких плотностей дефектов, что между ними устанавливается иерархическая связь. В результате дефекты нижнего структурного уровня

автолокализованно образуют структурный элемент более высокого уровня (например, кластеризация вакансий приводит к образованию дислокационных петель, а скопление дислокаций — к появлению границ разориентировки и дисклинаций). Учёт иерархического строения дефектных структур достигается, с одной стороны, рассмотрением пространства с ультраметрической топологией, а с другой требует использования теории фрактальных множеств. Как показано в пункте 1.2.3, это позволяет характеризовать развитую дефектную структуру величиной *сложности*, которая по аналогии с энтропией характеризует беспорядок в распределении дефектов в иерархическом ансамбле.

В разделе 2 проводится рассмотрение самоорганизованной модуляции когерентного излучения на основе самосогласованного представления эволюции диссипирующих гидродинамических мод квантовых генераторов. В отличие от стандартного сценария, в рамках которого явление самоорганизации отвечает зарождению одной или нескольких притягивающих точек в пространстве состояний, здесь основное внимание уделено исследованию более сложного случая, когда перестройка коллективного поведения выражается в появлении *предельного цикла*, по состояниям которого происходит эволюция системы. Центральное место занимает подраздел 2.1, посвящённый изложению формальных основ теории зарождения предельного цикла в результате *бифуркации Хопфа*, а также её приложению к исследованию модулированного когерентного излучения на основе наиболее популярных моделей лазеров. Подраздел 2.2 посвящён исследованию нетривиальных систем, в которых процесс самоорганизации выражается в наличии серии резонансов, отвечающих периодическому распределению множества предельных циклов. В заключительном подразделе 2.3 проводится фазовый анализ гигантского импульса когерентного излучения ансамбля квантовых точек.

Раздел 3 посвящен аналитическому исследованию влияния шума на колебательное поведение стохастических систем: в подразделе 3.1 рассматриваются гауссовы шумы, а в подразделе 3.2 — полёты Леви. В рамках

такого подхода пункт 3.1.1 посвящён описанию стохастических систем конечного размера, вектор состояния которых представляется суммой детерминистической и стохастической составляющих. В пункте 3.1.2 на основе пары стохастических уравнений с нелинейными силами и мультипликативными шумами исследуются условия образования предельного цикла. Пункты 3.1.3 и 3.1.4 посвящены рассмотрению этих условий для стохастической системы Лоренца с различными режимами соподчинения основных переменных. В подразделе 3.2 исследуется действие шума Леви на самоорганизованное квазипериодическое поведение, отвечающее предельному циклу. Поскольку формализм, представляющий действие мультипликативного шума Леви, носит достаточно сложный характер, то рассмотрение начинается с изложения основных положений теории стохастических процессов Леви в пункте 3.2.1. Непосредственному рассмотрению предельного цикла посвящён пункт 3.2.2, в котором исследуется решение пары стохастических уравнений с произвольными силами и мультипликативными шумами Леви.

Как уже упоминалось, центральное место занимает раздел 4, посвящённый рассмотрению сложных стохастических систем в рамках полевого формализма, который представляет один из наиболее мощных инструментов исследования. В подразделе 4.1 даётся введение в теорию самоподобных статистических ансамблей, результатом которой является определение показателя однородной функции, характеризующей свойство самоподобия. Подраздел 4.2 посвящён построению теоретико-полевой схемы статистических систем Цаллиса. В подразделе 4.3 развиты полевые представления, отвечающие базово-деформированному и конечно-разностному исчислениям, а также процедурам деформации, предложенным Цаллисом, Абе и Каниадакисом и обобщённой Наудсом.

Раздел 5 посвящён исследованию мультифрактальных объектов. В подразделе 5.1 на основе базово-деформированного исчисления проведено обобщение статистической суммы и показателя масс многократно деформированного мультифрактала, а также найдено среднее значение

случайной переменной, распределенной по самоподобному множеству. Последующие подразделы 5.2–5.4 посвящены приложению метода мультифрактального флуктуационного анализа к исследованию различных временных рядов, рентгеновских дифрактограмм сложных конденсированных сред и мультифрактальных поверхностей конденсатов, полученных методом магнетронного распыления.

В разделе 6 исследуются статистические особенности образования иерархических структур разного типа. Согласно подразделу 6.1, эффективные энергии иерархических уровней являются аддитивными величинами, а набор вероятностей образования этих уровней теряет свойства аддитивности и мультипликативности. В подразделе 6.2 устанавливается связь между вероятностями образования иерархических уровней и вероятностями объединения этих уровней в единую структуру. Показано, что последовательная картина требует использования деформированной алгебры, основные правила которой изложены в Приложении Б. Подразделы 6.3 и 6.4 посвящены аналитическому определению вероятностей образования регулярного и вырожденного деревьев, а в подразделе 6.5 эти вероятности найдены численно для дерева Фибоначчи и самоподобной структуры. Произвольное дерево рассматривается в подразделе 6.6 и подраздел 6.7 содержит обсуждение полученных результатов. В Приложении Д содержится вычисление суммы членов деформированной геометрической прогрессии, необходимость в использовании которой возникает при рассмотрении вырожденного дерева.

Раздел 7 посвящен микроскопическому описанию сложных систем, основой которого является исследование фазового пространства, проведенное в подразделе 7.1. На основе бинарного мультифрактала Кантора проведено тестирование методов покрытий и множителей, а также разработан алгоритм численного моделирования мультифрактального фазового пространства, обладающего произвольной структурой. Подраздел 7.2 посвящен развитию микроскопической модели изменения структуры аморфных и многокомпонентных

тонких плёнок под воздействием импульсной фотонной обработки. Показано, что при выделении тепла, превышающем критическое значение, появляется стационарное состояние, в котором скорость фронта кристаллизации приобретает аномально большие значения. В подразделе 7.3 развито суперсимметричное представление бозе-эйнштейновской конденсации фермионных пар. Построена суперсимметричная теория, в рамках которой компоненты поля сводятся к квадратному корню плотности бозе-конденсата, амплитуде её флуктуаций и грассмановым полям, определяющим плотность ферми-частиц.



## РАЗДЕЛ 1

### ОСНОВЫ ТЕОРИИ САМООРГАНИЗАЦИИ

Настоящий раздел представляет литературный обзор, посвящённый изложению основ феноменологической теории самоорганизации [81] и картины перестройки структуры конденсированной среды под интенсивным внешним воздействием [45] (см. подразделы 1.1 и 1.2 соответственно).

#### 1.1. Феноменологическая теория самоорганизации

В пункте 1.1.1 приводятся необходимые сведения из феноменологической теории самоорганизации, основанной на рассмотрении системы Лоренца, которая представляет основу синергетики. Пункт 1.1.2 посвящён приложению этой теории к описанию динамических моделей одномодовых твердотельных лазеров [44].

1.1.1. Основы синергетической схемы. Формальную основу синергетики представляет феноменологическая теория самоорганизации, архетипом которой является система Лоренца

$$\begin{aligned}
 \dot{\eta} &= -\eta + h, \\
 \sigma \dot{h} &= -h + \eta S, \\
 \epsilon \dot{S} &= (S_e - S) - \eta h.
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

Она определяет эволюцию параметра порядка  $\eta$ , сопряжённого поля  $h$  и управляющего параметра  $S$  в зависимости от параметра накачки  $S_e$  и отношений  $\sigma$  и  $\epsilon$  характерных времён изменения величин  $h$  и  $S$  к масштабу изменения  $\eta$  (здесь и далее точка над символом означает дифференцирование по времени  $t$ ). Если времена изменения сопряжённого поля и управляющего параметра намного меньше масштаба изменения параметра порядка, то в уравнениях (1.1) можно положить  $\sigma, \epsilon \ll 1$ . Это означает, что величины  $h(t) \simeq h(\eta(t))$  и  $S(t) \simeq S(\eta(t))$

следуют за изменением параметра порядка  $\eta(t)$ , и в двух последних уравнениях (1.1) левые части становятся исчезающе малыми. В результате получаем равенства

$$h = S_e \frac{\eta}{1 + \eta^2}, \quad S = \frac{S_e}{1 + \eta^2}, \quad (1.2)$$

выражающие сопряженное поле и управляющий параметр через параметр порядка. При  $\eta \ll 1$  первое из этих соотношений имеет линейный вид, характеризуемый восприимчивостью  $\chi \equiv \partial h / \partial \eta = S_e$ . С возрастанием параметра порядка до значения  $\eta = 1$  зависимость  $h(\eta)$  выходит на насыщение, а при  $\eta > 1$  проявляет спадающий характер, который отвечает отрицательной восприимчивости  $\chi$ , означающей неустойчивость системы. Что касается последнего равенства (1.2), то оно описывает спадание управляющего параметра от максимального значения  $S = S_e$  при  $\eta = 0$  до минимальной величины  $S = S_e/2$  при  $\eta = 1$ . Очевидно, спадающий характер зависимости  $S(\eta)$  является проявлением принципа Ле-Шателье.

Подставляя (1.2) в (1.1), приходим к уравнению Ландау-Халатникова

$$\dot{\eta} = -\frac{\partial E}{\partial \eta} \quad (1.3)$$

с синергетическим потенциалом

$$E = \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{S_e}{2} \ln(1 + \eta^2). \quad (1.4)$$

Если параметр внешнего воздействия  $S_e$  меньше критического значения  $S_e = 1$ , то зависимость  $E(\eta)$  имеет монотонно возрастающий характер с минимумом в точке  $\eta_0 = 0$ , и система не упорядочивается. В закритической области  $S_e > 1$  синергетический потенциал приобретает минимум при ненулевом значении

параметра порядка

$$\eta_0 = \sqrt{S_e - 1}, \quad (1.5)$$

которое возрастает корневым образом. При резком переходе в закритическую область  $S_e > 1$  параметр порядка за время

$$\tau = (S_e - 1)^{-1} \quad (1.6)$$

приобретает стационарное значение (1.5) по дебаевскому закону

$$\eta = \eta_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right). \quad (1.7)$$

1.1.2. Динамика одномодовых твердотельных лазеров. Согласно [82], можно выделить четыре класса лазеров, которые отвечают различным соотношениям между временами релаксации напряжённости поля излучения  $\tau_E$ , поляризации среды  $\tau_P$  и разности заселённостей уровней  $\tau_S$ . Для лазеров класса  $A$ , которому принадлежит большинство атомарных газовых лазеров и лазеры на растворах органических красителей, выполняются соотношения  $\tau_P, \tau_S \leq \tau_E$ , при которых фазовый портрет сводится к одномерным траекториям, сбегающим в притягивающий узел/фокус стационарного состояния. Для лазеров класса  $B$  выполняются соотношения  $\tau_P \ll \tau_E \ll \tau_S$ , благодаря которым их динамика приобретает колебательный характер (к этому классу принадлежат твердотельные лазеры на кристаллах и стекле, легированных неодимом и другими редкоземельными элементами, а также волоконные, полупроводниковые и молекулярные газовые лазеры низкого давления). Релаксационные параметры лазеров класса  $C$ , к которым принадлежат газовые лазеры, определяются соотношениями  $\tau_E \approx \tau_P \leq \tau_S$ , при которых фазовый портрет может сводиться к странному аттрактору. И наконец, лазеры класса

$D$  характеризуются наиболее экзотическим соотношением времён релаксации  $\tau_E \leq \tau_P, \tau_S$ , которое удовлетворяется в пучковых лазерах.

Среди классических моделей динамики твердотельных лазеров наибольшее распространения получила система Статца-Демарса, которая в безразмерной форме имеет вид [82]

$$\begin{aligned} \dot{I} &= I(S - 1), \\ \epsilon \dot{S} &= S_e - S(1 + I). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Здесь  $I = |E|^2$  — интенсивность излучения,  $S_e$  — параметр накачки, время отнесено к масштабу  $\tau_E$ ,  $\epsilon \equiv \tau_S/\tau_E$ . Уравнения (1.8) следуют из системы (1.1), где параметр порядка  $\eta \equiv E$  и сопряжённое поле  $h \equiv P$  сводятся к напряжённости поля излучения и поляризации активной среды, в условиях, выполняющихся для лазеров класса  $B$ , где поляризация определяется равенством  $P = ES$ .

Несмотря на многообразие активных сред и методов получения инверсной заселённости, все лазеры обладают активной средой, системой накачки и резонатором, поведение которых определяет картину излучения [82]. Так, в лазере с фильтром, изменяющим добротность резонатора, вычитаемое в скобках первого уравнения (1.8) равно отношению безразмерной частоты  $\tau_E \omega$  к добротности  $Q$ . Определение последней приводит к зависимости  $\tau_E \omega / Q = 1 + \beta / (1 + \gamma I)$  с параметрами фильтра  $\beta, \gamma$ , задающими спадание коэффициента поглощения света под действием генерированного излучения.<sup>1</sup> Если кроме модулятора потерь используется нелинейный элемент, то система (1.8) принимает дробно-рациональную форму

$$\begin{aligned} \dot{I} &= I \left[ S - \left( 1 + \frac{\beta}{1 + \gamma I} + gI \right) \right], \\ \epsilon \dot{S} &= S_e - S(1 + I) \end{aligned} \tag{1.9}$$

<sup>1</sup>В твердотельных лазерах нелинейные фильтры выполняются на основе органических красителей, в молекулярных газовых лазерах используются нелинейно поглощающие газовые среды.

с коэффициентом нелинейности  $g$ .

С другой стороны, самосогласованное рассмотрение двухуровневой модели показывает [82], что перенормировка разности заселённостей уровней приводит систему (1.8) к виду

$$\begin{aligned} \dot{I} &= I \left\{ \frac{S}{\Delta - \sigma S} - [1 + \varphi(I)] \right\}, \\ \epsilon \dot{S} &= S_e - S \left( 1 + \frac{I}{\Delta - \sigma S} \right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь  $\sigma = \tau_P/\tau_E$ ,  $\Delta = (1 + \sigma) + \delta^2/(1 + \sigma)$ ,  $\delta = \tau_E(\omega_0 - \omega_c)$  — отклонение собственной частоты резонатора от центра спектральной линии; в соответствии с теорией катастроф [83] нелинейная функция  $\varphi(I)$  может принимать одну из форм  $\varphi = aI^2 - bI$ ,  $\varphi = aI^3 - bI$ ,  $\varphi = I^4 + aI^2 + bI$ , определяемых параметрами  $a$  и  $b$ . При  $\sigma \rightarrow 0$  и  $\varphi(I) = 0$  система (2.27) приобретает вид (1.8), где нелинейные слагаемые перенормированы множителем  $(1 + \delta^2)^{-1}$ .

Использование методов, развитых в пункте 2.1.1, показывает, что в отсутствие нелинейности ( $g = 0$ ) стационарное состояние дробно-рациональной системы (1.9) отвечает притягивающему узлу/фокусу [44]. Согласно рис. 1.1, предельный цикл образуется при достаточно больших значениях параметра накачки в области В, ширина которой быстро возрастает с величиной  $S_e$ . Фазовые портреты, отвечающие точкам 1, 4, отмеченным на рис. 1.1, имеют вид, изображённый на рис. 1.2. Из него видно, что с ростом параметра накачки  $S_e$  в интервале изменения параметра нелинейности  $g$ , ограниченном сверху и снизу, притягивающий фокус трансформируется в предельный цикл, охватывающий этот фокус. Детали этого цикла представлены на полях а и б рисунка 1.3, взятых в различных масштабах изменения интенсивности излучения и инверсии.

Наиболее ярко предельный цикл проявляется на линии бифуркации, где фазовый портрет имеет вид, представленный на рис. 1.4. Из него видно, что в точке бифуркации, где декремент  $\lambda$  приобретает нулевое значение, траектории

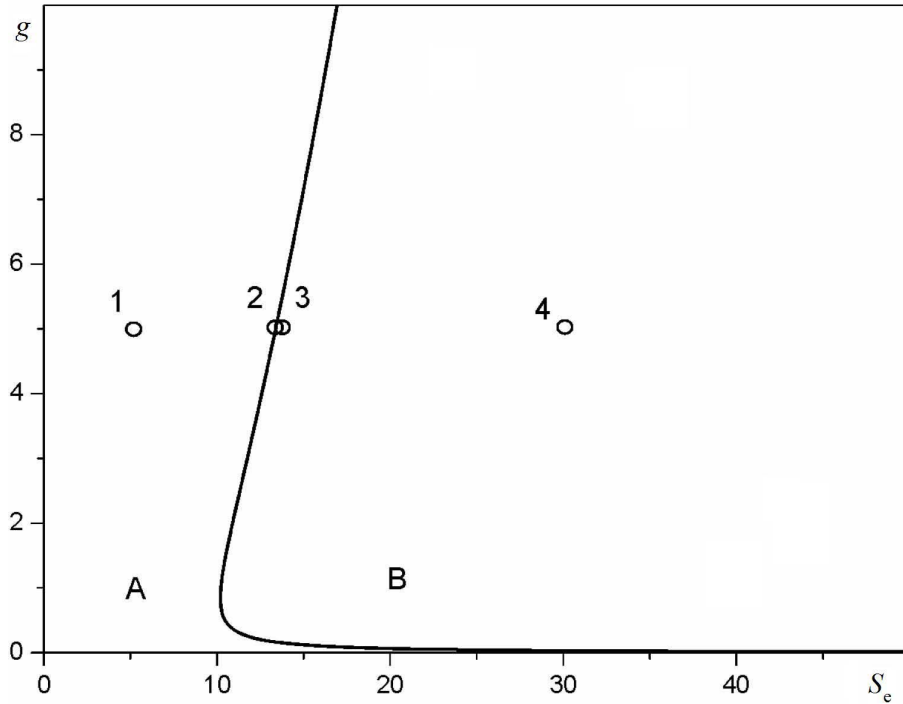


Рис. 1.1. Бифуркационная диаграмма лазера с квадратичной нелинейностью при  $\epsilon = 1$ ,  $S_e = 1 + \beta$  (предельный цикл реализуется в области В, точка 2 лежит на линии бифуркации)

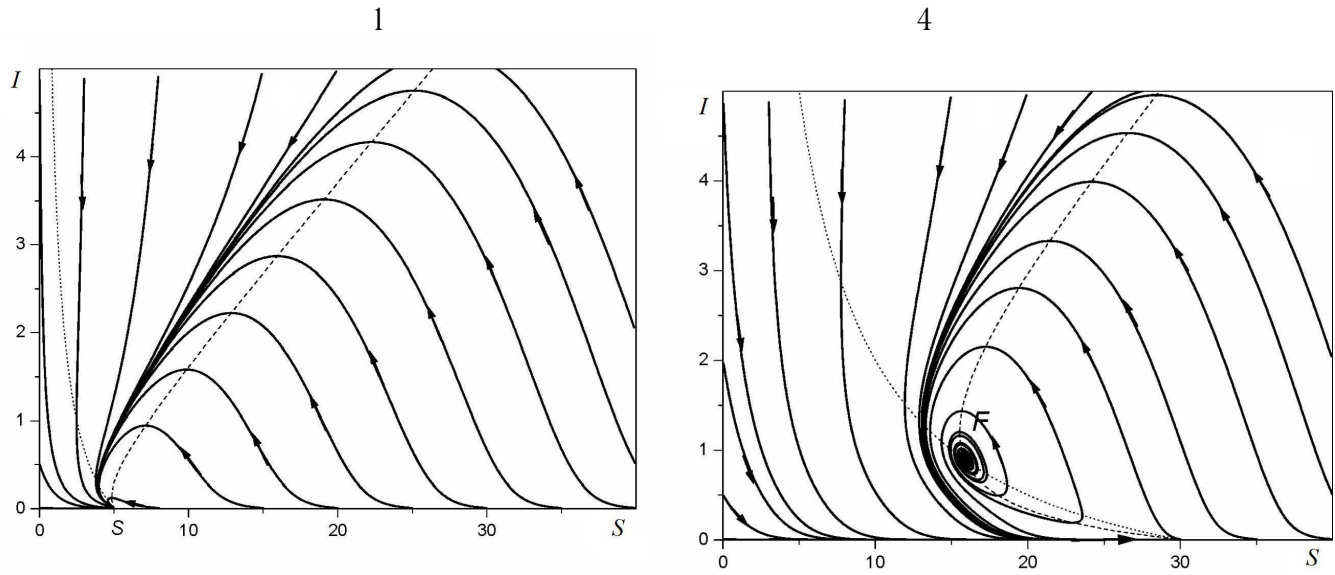


Рис. 1.2. Фазовые портреты, отвечающие точкам 1 и 4 на рис. 1.1

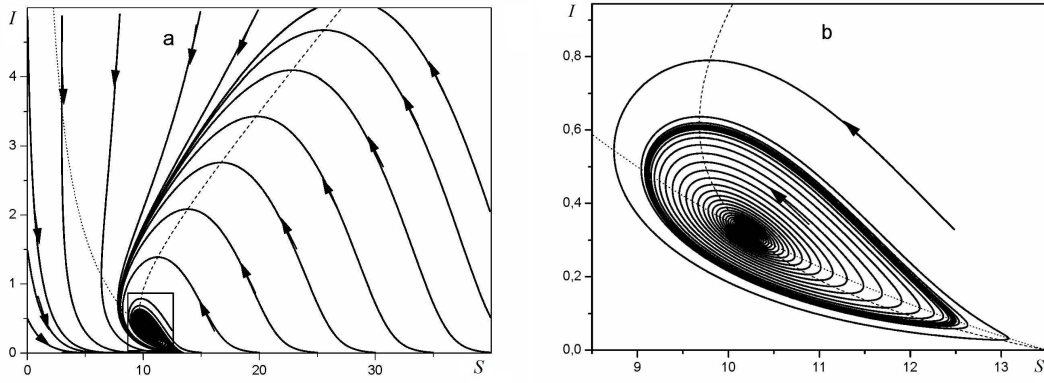


Рис. 1.3. Предельный цикл, отвечающий точке 3 на рис. 1.2 (поле (b) даёт увеличенный масштаб фрагмента, отмеченного рамкой на поле (a))

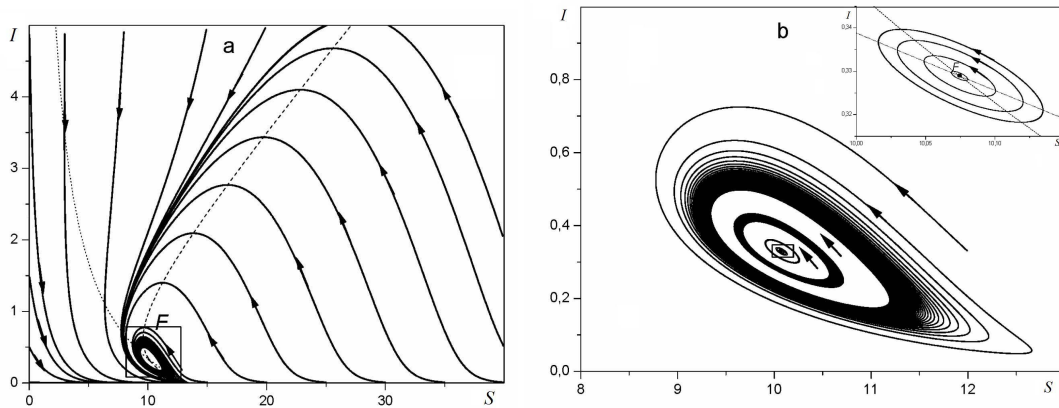


Рис. 1.4. Предельный цикл, отвечающий точке бифуркации 2 на рис. 1.2 (поле (b) и вставка на нём дают увеличенные масштабы предельного цикла)

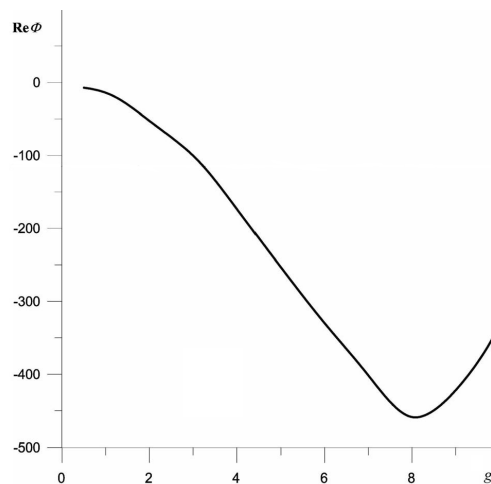


Рис. 1.5. Зависимость показателя Флоке  $\Re \Phi$  от коэффициента нелинейности  $g$

системы имеют вид концентрических эллипсов, которые отвечают незатухающим колебаниям. С удалением от бифуркационной кривой в область В фокус  $F$  становится отталкивающим, и стационарное поведение системы определяется предельным циклом. Из рис. 1.5, на котором показана зависимость показателя Флоке  $\Re\Phi$  от коэффициента нелинейности  $g$ , видно, что рост последнего сначала повышает устойчивость предельного цикла, а затем понижает её.

Исследование полуклассической модели (2.27) с нелинейностью  $\varphi = aI^2 - bI$  показывает, что в этом случае бифуркационная диаграмма рождения предельного цикла имеет вид, показанный на рис. 1.6. Из этого рисунка

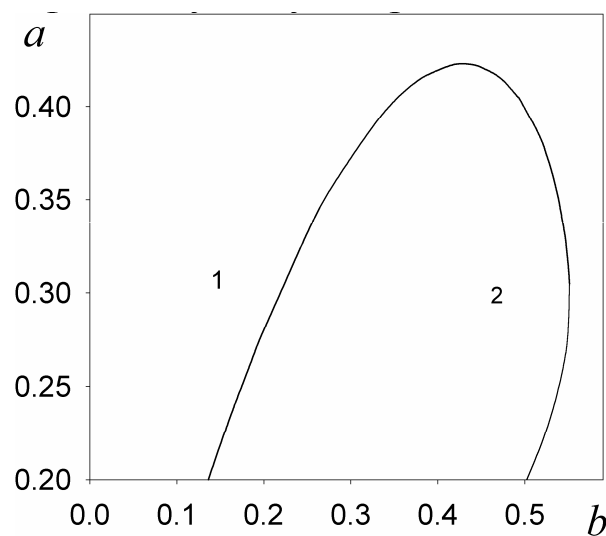


Рис. 1.6. Бифуркационная диаграмма рождения предельного цикла (область 2) модели (2.27) с квадратичной нелинейностью  $\varphi = aI^2 - bI$  при  $S_e = 2$ ,  $\epsilon = 2.5 \cdot 10^{-3}$ ,  $\sigma = 0.1$ ,  $\Delta = 1.9$

видно, что при заданных величинах  $S_e$ ,  $\epsilon$ ,  $\sigma$ ,  $\Delta$  на плоскости управляющих параметров  $a$ ,  $b$  формируется область 2, в которой показатель Флоке принимает отрицательные значения. Характерно, что такая ситуация реализуется только при малых интенсивностях затухания излучения, отвечающих небольшим значениям параметра  $a$ , и интенсивностях генерации фотонов в модуляторе, соответствующих интервалу изменения параметра  $b$ , ограниченному сверху и снизу. Таким образом, исследуемый режим излучения характеризуется реверсивной бифуркацией Хопфа.



Фазовые портреты, приведенные на рис. 1.7, подтверждают этот вывод.

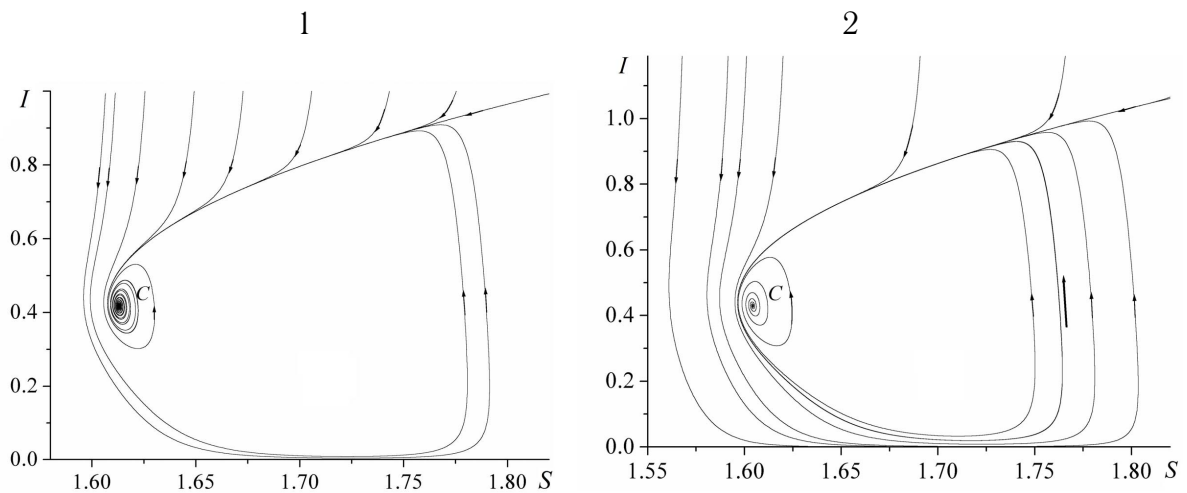


Рис. 1.7. Фазовые портреты, отвечающие областям 1 и 2 на рис. 1.6

Совершенно отличная ситуация наблюдается, если уравнения (2.27) содержат кубическую нелинейность  $\varphi = aI^3 + bI$ . Согласно рис. 1.8, в этом случае предельный цикл устойчив только в узкой области, расположенной между пунктирной и сплошной линиями. Действительно, в области, лежащей ниже пунктирной линии, стационарное состояние определяется единственной особой точкой  $S_0$ , расположенной на линии  $I = 0$  (см. рис. 1.9a). С переходом в область устойчивости предельного цикла зарождаются седло  $S$  и неустойчивый фокус  $C$ , который охватывается предельным циклом (рис. 1.9b, c). И наконец, с пересечением сплошной линии точка  $C$  трансформируется в устойчивый фокус (рис. 1.9d).

## 1.2. Самоорганизация структуры конденсированной среды

Согласно третьему началу термодинамики, при нулевой температуре и отсутствии внешнего воздействия конденсированная среда представляет идеальную периодическую структуру, простейшим примером которой является кристалл. Повышение температуры или внешнее воздействие типа механической деформации или радиационного облучения приводят к образованию и эволюции дефектной структуры, представленной вакансиями, межузельными атомами,

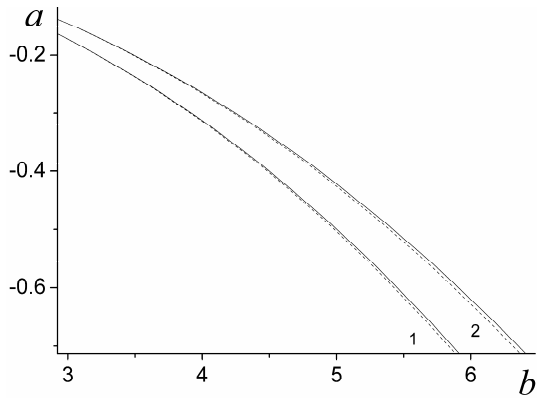


Рис. 1.8. Бифуркационные диаграммы модели (2.27) с кубической нелинейностью  $\varphi = aI^3 + bI$  при  $S_e = 22$  (кривые 1) и  $S_e = 25$  (кривые 2);  $\epsilon = 1, \sigma = 0, \delta = 1/3$

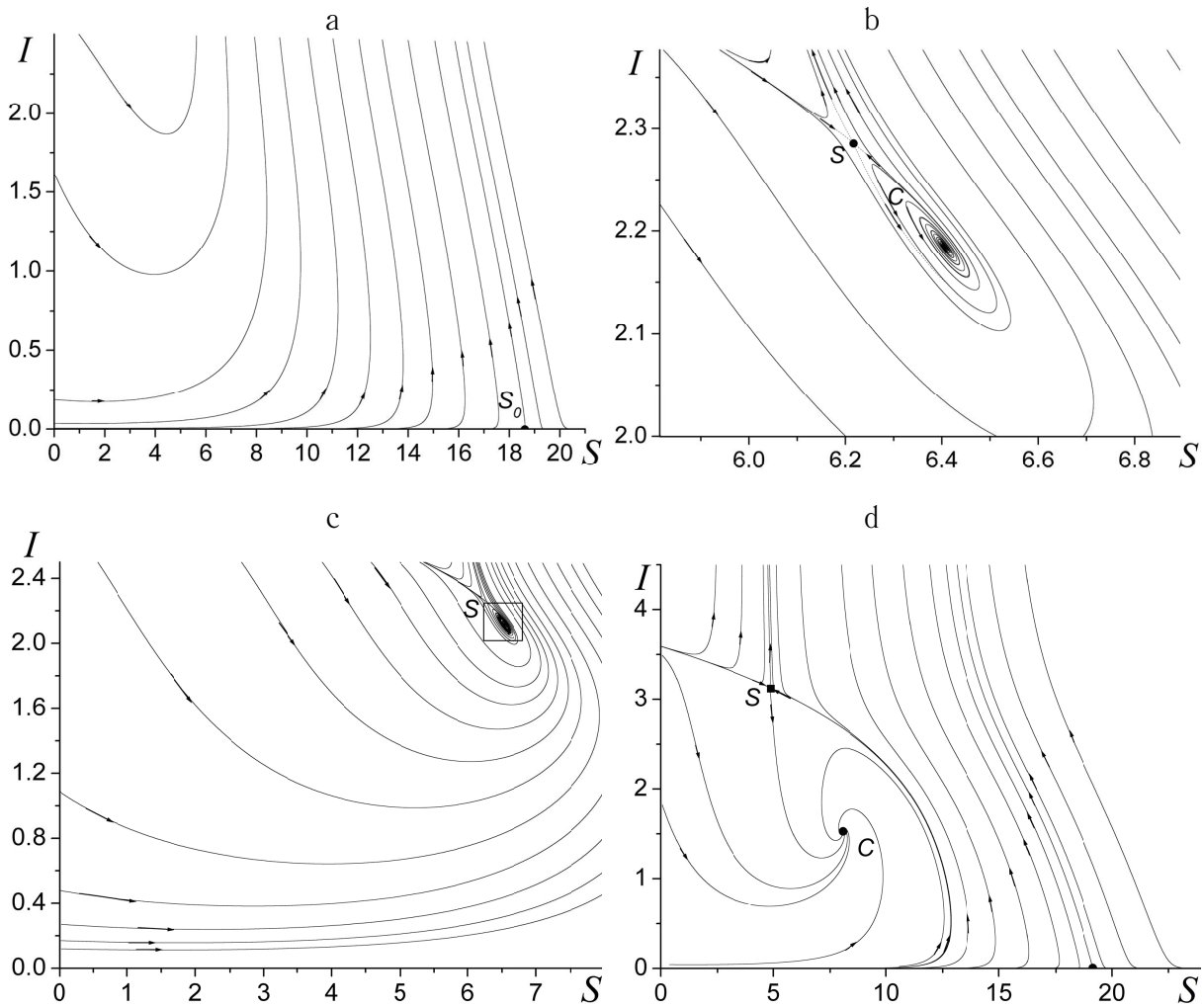


Рис. 1.9. Фазовые портреты, отвечающие областям рис. 1.8, лежащим ниже пунктирной (a), между пунктирной и сплошной (b), на сплошной (c) и выше сплошной линии (d)

дислокациями, границами раздела, порами, включениями различных фаз, зёрнами и т.д. Обычно при описании такой структуры ограничиваются рассмотрением одной её стороны — например, описывают геометрические модели одиночных дефектов. При всей своей необходимости такое представление является весьма фрагментарным, поскольку дефектная структура реальных кристаллов настолько сложна, что требует представления на нескольких *структурных уровнях*. Мы ограничимся рассмотрением трёх таких уровней, которые различаются прежде всего масштабами распределения дефектов: на *микроскопическом уровне* представлено строение одиночных дефектов, на *мезоуровне* описывается коллективное поведение дефектов, приводящее к зарождению нового уровня, и на *макроуровне* даётся статистическое описание иерархически соподчинённого ансамбля дефектов.

В отличие от геометрического представления решение первой из указанных задач достигается на основе концепции перестраиваемого потенциального рельефа, изложенной в пункте 1.2.1. В рамках теоретико-полевой схемы такое представление приводит к разделению полного потенциала упруго-пластического поля на материальную компоненту, связанную с распределением атомов, и калибровочную составляющую, представляющую упругое поле.

Пункт 1.2.2 посвящён развитию синергетической картины эволюции однородного ансамбля дефектов кристаллического строения на мезоскопическом уровне. Отличительная особенность материалов, подверженных интенсивному внешнему воздействию, состоит в достижении столь высоких плотностей дефектов, что между ними устанавливается иерархическая связь. При этом дефекты нижнего структурного уровня автолокализованно образуют структурный элемент более высокого уровня (например, кластеризация вакансий приводит к образованию дислокационных петель, а скопление дислокаций — к появлению границ разориентировки и дисклинаций). Такое отличие в коллективном поведении дефектов от обычной картины фазовых превращений обусловлено сильной неравновесностью ансамбля дефектов, в связи с чем следует использовать методы

синергетики. В настоящее время эти методы с успехом прилагаются к решению различных задач физики, химии, экономики, биологии, социологии и других наук.

Характерная особенность иерархических дефектных структур состоит в том, что они определяются такой зависимостью термодинамического потенциала от конфигурационных координат, на которой дефектам нижнего структурного уровня отвечают более узкие и мелкие минимумы, чем супердефектам верхних уровней. В результате иерархическая соподчиненность приводит к фрактальной структуре распределения термодинамического потенциала в конфигурационном пространстве. Учёт этой структуры достигается, с одной стороны, рассмотрением пространства с ультраметрической топологией, а с другой требует использования теории фрактальных множеств. Учёт указанных особенностей в пункте 1.2.3 позволяет характеризовать развитую дефектную структуру величиной *сложности (complexity)*, которая по аналогии с энтропией характеризует беспорядок в распределении дефектов в иерархическом ансамбле.

1.2.1. Теоретико-полевое представление одиночных дефектов. В рамках синергетической картины ядро дефекта представляет автолокализованную область, обладающую повышенной пластичностью, а его периферия сохраняет кристаллическую структуру, слабо деформированную упругим полем ядра. При этом основная проблема сводится к выяснению физической природы параметра порядка, величина которого определяет различие между упругим и пластическим состояниями. Для нахождения этого параметра рассмотрим потенциальный рельеф, в котором движется пробная частица под действием атомов кристалла. В отличие от потенциала межатомного взаимодействия, определяющего макроскопические свойства, этот рельеф задаёт движение атомов при их колебаниях и элементарные акты флуктуационного преодоления барьера в процессе диффузии (см. рис. 1.10а). Однако при этом молчаливо подразумевается, что кристалл является идеальной упругой средой,

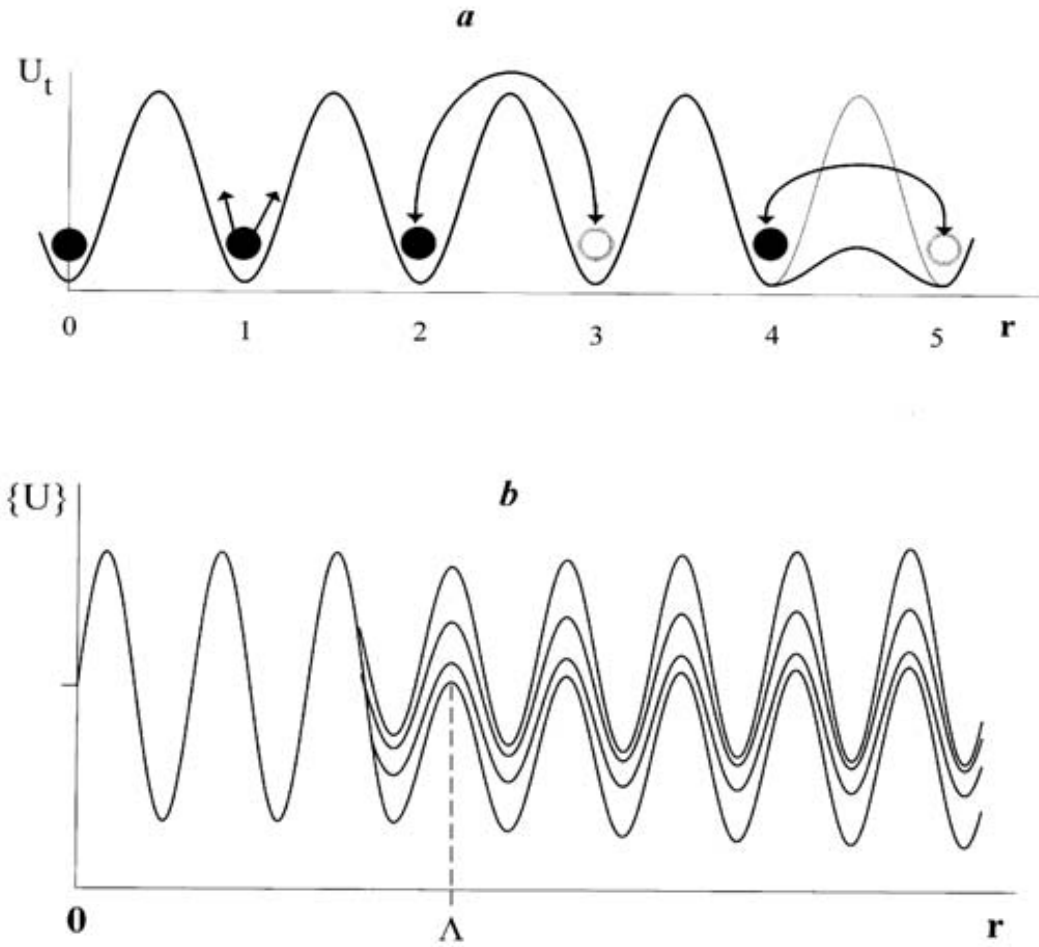


Рис. 1.10. (а) Элементарные акты колебаний (узел 1), диффузионного перескока (узлы 2, 3) и пластического течения (узлы 4, 5); (б) ансамбль потенциальных рельефов (область  $r \ll \Lambda$  отвечает упругому состоянию, область  $r > \Lambda$  — пластическому)

потенциальный рельеф которой не изменяется со временем. В действительности кроме упругого состояния реализуются зоны пластического течения типа полосы Людерса, где перескок атома из одного узла в другой осуществляется безактивационно — за счёт флуктуационного проседания потенциального барьера (на рис. 1.10а такой перескок осуществляется между узлами 4 и 5). В результате описание вязко-упругого состояния твёрдого тела требует использования потенциального рельефа  $U_t(\mathbf{r})$ , изменяющего свою форму со временем  $t$ . Если различные состояния системы образуют статистический ансамбль, в котором выполняется эргодическая гипотеза, то от временной зависимости  $U_t(\mathbf{r})$  можно перейти к набору потенциальных рельефов  $\{U(\mathbf{r})\}$  типа показанного на рис. 1.10б. В результате описание вязко-упругой среды сводится к статистической теории распределения потенциальных рельефов по ансамблю  $\{U(\mathbf{r})\}$ .

Переходя к формальному представлению системы, рассмотрим распределение атомов, определяемое пространственно-временной зависимостью их плотности  $n(\mathbf{r}, t)$  [84]. Если этому распределению отвечает энергия  $E(t)$ , то потенциальный рельеф определяется вариационной производной

$$U_t(\mathbf{r}) = \frac{\delta E(t)}{\delta n(\mathbf{r}, t)}. \quad (1.11)$$

Переходя от временной зависимости к ансамблю рельефов  $\{U(\mathbf{r})\}$ , вводим усреднённый рельеф  $\langle U(\mathbf{r}) \rangle$ , отклонение от него  $\delta U(\mathbf{r}) \equiv U(\mathbf{r}) - \langle U(\mathbf{r}) \rangle$  и структурный фактор

$$S(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \delta U(\mathbf{r}) \delta U(\mathbf{r}') \rangle. \quad (1.12)$$

Если при бесконечном удалении точек  $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$  коррелятор (1.12) не сводится к нулю, то перестройка потенциального рельефа в одной из них сказывается на его форме во всём кристалле. Иными словами, твёрдое тело испытывает вязко-упругий переход,

определяемый квадратом параметра порядка

$$|\varepsilon(\mathbf{r})|^2 \equiv \lim_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \rightarrow \infty} \frac{S(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{S(\mathbf{r}, \mathbf{r})}. \quad (1.13)$$

Параметр упруго-пластической перестройки твёрдого тела представляется комплексной функцией

$$\Psi(\mathbf{r}, t) \equiv \varepsilon(\mathbf{r}, t) e^{i\phi(\mathbf{r}, t)} \quad (1.14)$$

с модулем  $\varepsilon(\mathbf{r}, t)$ , определённым соотношением (1.13), и фазой  $\phi(\mathbf{r}, t)$  (здесь учтена временная зависимость, проявляющаяся на мезоскопическом масштабе эволюции неравновесной системы). С теоретико-полевой точки зрения [79] параметр порядка (1.14) представляет материальное поле, 4-потенциал  $A_m^\mu = (\varphi_m, \mathbf{a}_m)$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$  которого обладает временной и пространственной компонентами

$$\varphi_m = i\Psi^* \left( \frac{\partial}{c\partial t} \right) \Psi, \quad \mathbf{a}_m = -i\Psi^* \nabla \Psi, \quad (1.15)$$

где  $c$  — характерная скорость звука. Эти компоненты определяют векторы сдвига и поворота

$$\vec{\chi}_m = -\frac{\partial \mathbf{a}_m}{c\partial t} - \text{grad } \varphi_m, \quad \vec{\omega}_m = \text{rot } \mathbf{a}_m, \quad (1.16)$$

первый из которых обусловлен образованием дислокаций, а второй дисклинациями, зародившимися при упруго-пластической перестройке среды. Их эволюция определяется 4-током  $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$ , временная компонента которого задаёт пространственную плотность дефектов  $\rho$ , а пространственная  $\mathbf{j}$  — их поток.

Характерная особенность представленной схемы состоит в том, что изначально введенный параметр перестройки среды (1.13) не зависит от фазы  $\phi$  комплексного параметра порядка (1.14), пространственно-временное

распределение которого определяет 4-ток  $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$  дефектов, образовавшихся в результате такой перестройки. Эта особенность порождается *калибровочной инвариантностью*, которая означает неизменность полевой схемы при одновременных заменах [79]

$$\Psi \rightarrow \Psi e^{ie\alpha}, \quad A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \alpha, \quad \partial^\mu \rightarrow D^\mu \equiv \partial^\mu - ieA^\mu. \quad (1.17)$$

Согласно (1.17) изменение фазы  $\phi$  на произвольную величину  $e\alpha$ , определённую обобщённым зарядом  $e$ , не изменяет полевые уравнения, если к 4-потенциалу  $A^\mu = (\varphi, \mathbf{a})$  добавить 4-производную этой добавки  $\partial^\mu \alpha$ , а саму производную  $\partial^\mu$  заменить выражением  $D^\mu \equiv \partial^\mu - ieA^\mu$ , удлинённым за счёт действия 4-потенциала. Хотя этому потенциалу отвечают поля сдвига и кручения, определённые выражениями типа (1.16), он вовсе не сводится к материальной составляющей, действие которой компенсируется калибровочным вкладом  $A_e^\mu = (\varphi_e, \mathbf{a}_e)$  с компонентами

$$\varphi_e \equiv \varphi - \varphi_m, \quad \mathbf{a}_e \equiv \mathbf{a} - \mathbf{a}_m, \quad (1.18)$$

представляющими разность между полным 4-потенциалом  $A^\mu = (\varphi, \mathbf{a})$  и материальной составляющей  $A_m^\mu = (\varphi_m, \mathbf{a}_m)$ . Компоненты (1.18) определяются уравнениями теории поля, которые в нашем случае задают упругие составляющие сдвига  $\vec{\chi}_e \equiv \vec{\chi} - \vec{\chi}_m$  и поворота  $\vec{\omega}_e \equiv \vec{\omega} - \vec{\omega}_m$  упруго-пластической среды.

Для нахождения уравнений упругого поля следует определить лагранжиан, инвариантный относительно указанной калибровки. Согласно [84], этот лагранжиан определяется слагаемыми

$$L = (L_g + L_f + L_{fm}) - L_m, \quad (1.19)$$

первые три из которых играют роль кинетической энергии, а последнее



представляет потенциальную. По физическому смыслу слагаемое

$$L_g = \frac{\beta}{2}|D^\mu\Psi|^2, \quad D^\mu \equiv \partial^\mu - ieA^\mu, \quad \beta = \text{const} > 0 \quad (1.20)$$

обусловлено неоднородностью системы, вклад которой удлинён действием калибровочного поля. Чисто полевая составляющая

$$L_f = \frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)^2 \quad (1.21)$$

определяется квадратом антисимметричного тензора поля, взаимодействие поля с материальной составляющей даётся членом

$$L_{fm} = -\frac{1}{c}A^\mu j_\mu, \quad (1.22)$$

а чисто материальная компонента представляется разложением Ландау

$$L_m = \frac{A}{2}|\Psi|^2 + \frac{B}{2}|\Psi|^4 \quad (1.23)$$

со знакопеременным параметром  $A$  и  $B > 0$ .

Полевые уравнения, определяющие перестройку вязко-упругой среды, получаются подстановкой выражений (1.19)–(1.23) в уравнение Эйлера

$$\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial q_{a,\mu}} - \frac{\partial L}{\partial q_a} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\mu}, \quad (1.24)$$

где  $q_a \equiv (A_\mu, \Psi)$ ,  $q_{a,\mu} \equiv \partial_\mu q_a$ , точка означает дифференцирование по времени и введена диссипативная функция

$$R = \frac{1}{2\gamma}|\dot{\Psi}|^2, \quad (1.25)$$

определяемая кинетическим коэффициентом  $\gamma > 0$ . В общем случае

пространственно неоднородной диссипативной среды получаем

$$\begin{aligned}\gamma^{-1}\dot{\Psi} + \beta\partial_\mu\partial^\mu\Psi &= -(A - \beta e^2 A_\mu A^\mu)\Psi - B|\Psi|^2\Psi, \\ \partial_\mu\partial^\mu A^\mu &= c^{-1}j_{tot}^\mu,\end{aligned}\tag{1.26}$$

где  $\partial_\mu\partial^\mu = \partial^2/(c\partial t)^2 - \nabla^2$ . Полный поток

$$j_{tot}^\mu \equiv j^\mu + j_m^\mu + j_f^\mu\tag{1.27}$$

состоит из трёх составляющих: слагаемого  $j^\mu$ , обусловленного внешним воздействием, материальной компоненты

$$j_m^\mu = \frac{i}{2}\beta\text{ec}(\Psi\partial^\mu\Psi^* - \Psi^*\partial^\mu\Psi)\tag{1.28}$$

и полевого вклада

$$j_f^\mu = -\beta e^2 c|\Psi|^2 A^\mu.\tag{1.29}$$

Как показывает анализ уравнений (1.26), поведение системы задаётся соотношением характерных масштабов

$$\lambda = \frac{1}{e}\sqrt{\frac{B}{|A|\beta}}, \quad \xi = \sqrt{\frac{\beta}{|A|}},\tag{1.30}$$

определяющих изменение упругого поля и параметра порядка, соответственно. Учёт феноменологического выражения  $\lambda = \eta/\rho_m c$  приводит к определению упругого заряда

$$e = \frac{1}{\eta}\sqrt{\frac{\mu\rho_m B}{\beta|A|}}\tag{1.31}$$

через сдвиговую вязкость  $\eta$ , модуль сдвига  $\mu$  и плотность среды  $\rho_m$ . Если параметр

Гинзбурга-Ландау

$$\kappa \equiv \frac{\lambda}{\xi} = \sqrt{\frac{B}{e\beta}} = \sqrt{\eta} \left( \frac{|A|B}{\beta\mu\rho} \right)^{1/4} \quad (1.32)$$

принимает малые значения ( $\kappa < 2^{-1/2}$ ), то в стационарном состоянии  $\dot{\Psi} = 0$ ,  $\Psi = 0$ ,  $j^\mu = 0$ ,  $A < 0$  параметр порядка определяется выражением

$$\Psi_0 = \sqrt{1 + \frac{\beta e^2}{|A|} A_\mu A^\mu} \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 \equiv \sqrt{\frac{|A|}{B}}, \quad (1.33)$$

а упругое поле описывается уравнением

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\mu = -\beta e^2 |\Psi|^2 A^\mu. \quad (1.34)$$

Очевидно, такое состояние отвечает полосе Людерса, в которой осуществляется однородное пластическое течение кристалла.

Для нас основной интерес представляет противоположный случай  $\kappa \gg 2^{-1/2}$ , в котором стационарные уравнения (1.26) принимают форму Гинзбурга-Ландау

$$\begin{aligned} \kappa^{-2} \nabla^2 \varepsilon &= -(1 - \mathbf{u}^2) \varepsilon + |\varepsilon|^2 \varepsilon, \\ \text{rot}^2 \mathbf{u} &= -|\varepsilon|^2 \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Здесь  $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$  — скальвующая компонента тензора пластической деформации, отнесённая к стационарному значению  $\varepsilon_0$ , вектор упругого смещения среды  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$  и координата  $\mathbf{r}$  измерены в масштабе  $\lambda$ . Исследование уравнений (1.35) показывает [84], что в рамках калибровочной теории, отвечающей группе  $U(1)$ , представляются возможными два типа цилиндрических солитонов. Первый из них является носителем сдвиговой компоненты поля, а упругие напряжения изменяются как  $\chi_e \propto r^{-1}$  — естественно положить, что такое решение отвечает

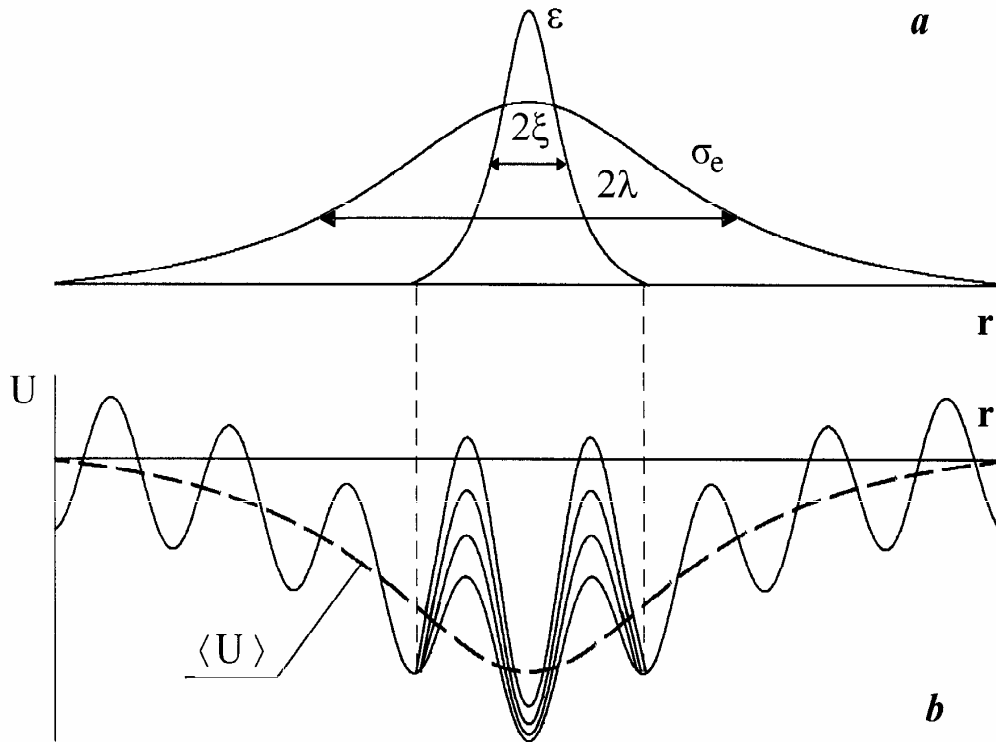


Рис. 1.11. Профили скалывающих компонент тензоров пластической деформации  $\varepsilon$  и упругих напряжений  $\sigma_e$  вблизи дислокации/дисклинации (а) и соответствующее распределение потенциального рельефа (b)

краевой дислокации. Солитон второго типа служит носителем компоненты поворота, где упругое поле изменяется как  $\omega_e \propto \ln r$  — очевидно, он представляет дисклинацию. В этой связи интересно отметить, что точечный дефект, кажущийся на первый взгляд наиболее простым, требует использования нетривиального аппарата, отвечающего неабелевой группе  $SU(2)$ . Благодаря некоммутативности преобразований этой группы материальное поле приобретает две компоненты, а в определении напряженности упругого поля появляются слагаемые, нелинейные по потенциалу  $A_\mu$  [79]. В результате точечный дефект представляется автолокализованным образованием — так называемым ежом Полякова, стабилизация которого имеет существенно нелинейную природу.

На рис. 1.11а показаны пространственные профили скальвующих компонент тензоров пластической деформации  $\varepsilon(\mathbf{r})$  и упругих напряжений  $\sigma_e(\mathbf{r})$  вблизи цилиндрического солитона. Из соответствующей картины потенциального рельефа вблизи дислокации/дисклинации (рис. 1.11b) видно, что упругие напряжения плавно изменяют уровень его отсчёта, тогда как переход в вязкое состояние в области ядра дефекта размывает потенциальный рельеф, способствуя снижению его эффективной высоты. Именно этим обстоятельством объясняются повышенные значения коэффициента трубочной диффузии по ядрам линейных дефектов.

Развитая схема позволяет описать также элементарный носитель разрушения, представленный на рис. 1.12. Анализ полевых уравнений типа (1.35) показывает, что в этом случае выполняется условие  $\kappa < 2^{-1/2}$ , препятствующее автолокализации тёмных солитонов, профиль которых отвечает штриховой линии  $\varepsilon_s^2(r)$ . За счёт накачки фононов в образце возникают локализованные области флуктуаций дилатации  $\Delta\varepsilon_d$  (дилатоны, отвечающие пунктирной линии) и сдвиговой деформации  $\Delta\varepsilon_s$  (штрих-пунктир). Согласно рисункам 1.12b и 1.12c это означает, что элементарный носитель разрушения образован внешней оболочкой повышенной пластичности (на рисунке она заштрихована) и внутренней областью разрушенных межатомных связей (она затушёвана).

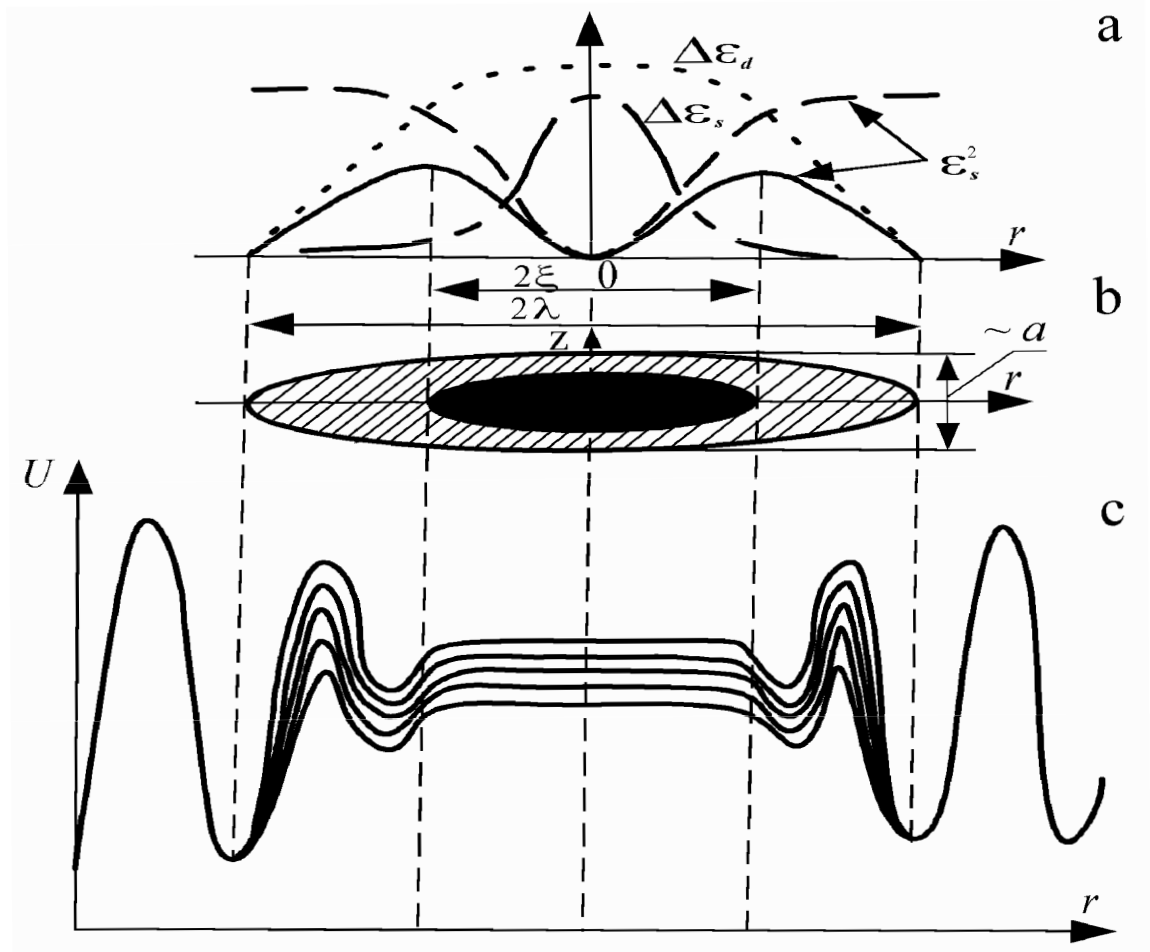


Рис. 1.12. (а) Координатные зависимости амплитуды флуктуаций дилатации  $\Delta\epsilon_d$  (пунктир) и сдвиговой деформации  $\Delta\epsilon_s$  (штрих-пунктир), а также квадрата сдвиговой деформации  $\epsilon_s^2$  в однородной системе (штриховая) и в дилатоне (сплошная); (б) модель элементарного носителя разрушения (затушёвана область флуктуаций сдвиговых напряжений, заштрихована зона пластичного состояния); (с) соответствующее распределение потенциального рельефа

1.2.2. Коллективное поведение ансамбля дефектов. Как правило, в процессе пластической деформации и разрушения твёрдого тела дефекты кристаллического строения рассматриваются как автономные объекты, которые, взаимодействуя между собой и испытывая действие внешних полей, остаются самостоятельными структурными образованиями, обладающими присущими им свойствами (геометрической конфигурацией, распределением упругих полей и т.д.). В рамках такой концепции поведение системы представляется как результат эргодической эволюции ансамбля дефектов, траектории которых с течением времени заполняют все фазовое пространство. С другой стороны, предполагается отсутствие иерархической соподчиненности в поведении дефектов под действием силовых полей и термостата. В такой постановке зависимость термодинамического потенциала от конфигурационных координат имеет вид регулярного распределения минимумов, наиболее глубокий из которых отвечает устойчивому состоянию, а остальные метастабильным. В результате эволюция системы представляется как цепочка дебаевских процессов термофлуктуационного преодоления барьеров между минимумами термодинамического потенциала со временами релаксации, определяемыми аррениусовским соотношением.

Представленная картина реализуется в кристаллических материалах, подверженных слабому внешнему воздействию. В противоположном случае — а именно он, как правило, реализуется на практике — плотность дефектов достигает столь высоких значений, что проявляются коллективные эффекты в их поведении. Это означает установление когерентной связи в ансамбле дефектов типа той, что обуславливает фазовые и кинетические превращения. Однако, если для первых характерно гомогенное распределение, то при кинетических превращениях установление когерентной связи в ансамбле дефектов одного структурного уровня приводит к автолокализованному образованию, играющему роль структурного элемента на более высоком уровне. Так, кластеризация вакансий может приводить к образованию дислокационных петель, скопление дислокаций — к появлению границ разориентировки и дисклинаций. Данное

отличие в коллективном поведении дефектов от обычной картины фазовых превращений обусловлено сильной неравновесностью ансамбля дефектов, в связи с чем реализуется не термостатическое, а кинетическое превращение. Автолокализованный характер продуктов этого превращения (супердефектов) является следствием потери эргодичности, которая приводит к иерархической соподчиненности, означающей, что супердефект образуется в результате когерентной связи дефектов, принадлежащих более низким структурным уровням.

Поскольку на зависимости термодинамического потенциала от конфигурационных координат исходным дефектам отвечают более мелкие и узкие минимумы, чем супердефектам, то иерархическая соподчиненность означает фрактальную структуру распределения термодинамического потенциала в конфигурационном пространстве. Как показывают примеры спиновых стекол, мартенситных превращений, политипных структур и ползучести кристаллов, фрактальный характер системы коренным образом изменяет ее термодинамические и кинетические свойства. Это обусловлено разбиением конфигурационного пространства на множество областей (долин), каждой из которых отвечает свой статистический ансамбль. В результате определение средних производится в два этапа: сначала усреднением по чистому ансамблю данной долины, а затем — по набору долин. Кинетическое поведение такой системы обусловлено слабым восстановлением эргодичности в процессе объединения долин в кластеры более крупных компонент. Этот процесс представляется движением по узлам иерархического дерева Кейли, которые отвечают долинам, к его стволу.

Основное отличие кристалла, содержащего различные дефекты, от аморфных систем состоит в том, что число структурных уровней в кристалле сравнительно невелико: по характерному масштабу  $l_\alpha$  принято выделять микроскопический уровень ( $a \ll l_1 \ll d$ ,  $a$  — межатомное расстояние,  $d$  — размер однородно ориентированной области типа ячейки или фрагмента), мезоскопический ( $d \ll l_2 \ll D$ ,  $D$  — размер слабо разориентированной



области, например зерна) и макроскопический ( $D \ll l_3 \ll L$ ,  $L$  – характерный размер образца). На каждом из представленных уровней пластическая деформация осуществляется путем однородного течения дефектов – точечных, дислокаций, дисклинаций, планарных и т.д. Микроскопический уровень отвечает однородному распределению точечных дефектов, дислокаций и дисклинаций, мезоскопический – распределению ячеек и фрагментов, макроскопический – неоднородно ориентированным зернам, текстурным компонентам и т.д. С ростом степени пластической деформации каждый последующий структурный уровень зарождается в недрах предыдущего, когда тот за счёт повышения однородной плотности дефектов исчерпает ресурс своего эволюционного развития. Так, первые границы ячеек зарождаются, когда критического значения достигает плотность дислокаций; частичные дисклинации (границы фрагментов) возникают при уменьшении размеров слабо разориентированных ячеек до 0.2мкм; ножевые границы, оканчивающиеся дисклинацией, появляются с формированием развитой фрагментированной структуры с большими разориентировками. С течением времени рост характерного масштаба выше критического  $l_\alpha$  приводит к неустойчивости однородного распределения дефектов на расстояниях  $x > l_\alpha$  и автолокализованному образованию носителя пластической деформации на  $l_{\alpha+1}$ -ом структурном уровне. Так, при  $l > l_1$  пластическая неустойчивость приводит к образованию дислокаций, дисклинаций и их комплексов, при  $l > l_2$  – полос сильных сдвигов-поворотов, при  $l > l_3$  – макроскопических ротационно-сдвиговых полей. Включение каждого последующего структурного уровня не носит эволюционный характер, поскольку оно обусловлено спонтанным появлением новых гидродинамических (трансляционных и ротационных) мод при  $l = l_\alpha$ . Разумеется, после зарождения структуры, отвечающей  $(\alpha + 1)$ -му уровню, занимаемый ею объем будет плавно возрастать за счет уменьшения объемов структур, соответствующих уровням 1, 2, ...,  $\alpha$  (здесь ситуация аналогична фазовому равновесию в термодинамике). Кроме того, функция распределения по уровням может меняться таким образом, что будет существенна лишь узкая группа

таких уровней (так, при хрупком разрушении определяющими являются только уровни  $\alpha = 1, 2$ ).

Изложим количественную картину зарождения и эволюции структурного уровня. С учётом сильной неравновесности системы наиболее перспективным представляется использование синергетического подхода, в рамках которого коллективное поведение дефектов задаётся гидродинамической модой — например, плотностью поляризованных дислокаций, образующих малоугловую границу в стохастическом ансамбле разориентированных дислокаций. При этом сопряжённое поле сводится к скалывающим компонентам тензора упругих напряжений, а управляющий параметр представляет степень внешнего воздействия (в простейшем случае — давление внешней среды). Использование такого подхода позволяет представить основные особенности экспериментальной картины структурообразования, в частности, причины реализации перехода первого рода, при котором в матричной фазе зарождается и растёт новый структурный уровень.

При высокой плотности  $\rho$  из ансамбля дислокаций, ведущих себя автономным образом, выделяется коллективная составляющая плотностью  $\rho_{col} \leq \rho$ . При этом поля взаимодействия дислокаций становятся соизмеримыми с внешними напряжениями, и возникает долгоживущая гидродинамическая мода со временем релаксации  $t_d \gg \omega_D^{-1}$  и амплитудой  $d \sim b\sqrt{\rho_{col}}$  (здесь  $\omega_D$  — дебаевская частота,  $b$  — параметр решетки). В автономном режиме релаксация этой моды протекает по дебаевскому закону  $\dot{d} = -d/t_d$ . Однако когерентная связь между дефектами приводит к релаксации сдвиговых напряжений  $\tau$ , а уравнение для  $d$  дополняется положительным вкладом  $\tau\varepsilon$  пластической деформации  $\varepsilon$ , обусловленной коллективными эффектами. Соответственно, к дебаевскому уравнению  $\dot{\tau} = (\tau_e - \tau)/t_\tau$  для напряжений, релаксация которых происходит не к нулевому значению  $\tau$ , а к стационарному  $\tau_e(\sigma_{ext})$ , определенному внешними напряжениями  $\sigma_{ext}$ , добавляется отрицательный вклад  $-d\varepsilon$  моды дефектов в поле деформации. Полная система уравнений, определяющих временное поведение

величин  $\tau$ ,  $d$ ,  $\varepsilon$ , замыкается уравнением Максвелла для вязко-упругой среды [13]

$$\begin{aligned}\dot{\tau} &= (\tau_e - \tau)/t_\tau - g_\tau \varepsilon d, \\ \dot{d} &= -d/t_d + g_d \varepsilon \tau, \\ \dot{\varepsilon} &= -\varepsilon/t_\varepsilon + g_\varepsilon d.\end{aligned}\tag{1.36}$$

Здесь  $t_\tau$ ,  $t_d$ ,  $t_\varepsilon$  — времена релаксации величин  $\tau$ ,  $d$ ,  $\varepsilon$ ;  $g_\tau$ ,  $g_d$ ,  $g_\varepsilon$  — положительные константы связи. Характерное время релаксации напряжений  $t_\tau$  задается дебаевским масштабом:  $t_\tau \sim \omega_D^{-1} \sim 10^{-13}$ с; время релаксации моды дефектов  $t_d$  определяется термоактивируемыми процессами их миграции:  $t_d \sim \omega_D^{-1} \exp(Q/T)$ , где энергия  $Q$  имеет порядок электронвольта; и наконец, время релаксации деформации  $t_\varepsilon \sim \eta/\mu$  определяется сдвиговой вязкостью  $\eta$  и соответствующим модулем упругости  $\mu$ .

Приведенные оценки показывают, что наибольшим значением обладает время релаксации деформации, величина которой  $\varepsilon$  определяет значения  $\tau$ ,  $d$  в уравнениях (1.36). Такая иерархия времен релаксации позволяет использовать принцип соподчинения эволюции управляющего параметра  $\tau(t)$  и сопряженного поля  $d(t)$  параметру порядка  $\varepsilon(t)$ . Математически это выражается в пренебрежении скоростями  $\dot{\tau}$ ,  $\dot{d}$  в уравнениях (1.36), после чего величины  $\tau$ ,  $d$  задаются равенствами

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{\tau_e}{1+(\varepsilon/\varepsilon_m)^2}, \quad \varepsilon_m^{-2} \equiv A_d A_\tau; \quad A_i = t_i g_i, \quad i = \tau, d, \varepsilon; \\ d &= A_d \tau_e \frac{\varepsilon}{1+(\varepsilon/\varepsilon_m)^2}, \quad \tau_e = \tau_e(\sigma_{ext}).\end{aligned}\tag{1.37}$$

Зависимость  $\varepsilon(t)$  выражается уравнением регрессии Ландау-Халатникова

$$t_\varepsilon \dot{\varepsilon} = -\frac{\partial V}{\partial \varepsilon}\tag{1.38}$$

с синергетическим потенциалом

$$V = \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon_m^2 \tau_e}{2 \tau_c} \ln[1 + (\varepsilon/\varepsilon_m)^2], \quad \tau_c \equiv (A_\varepsilon A_d)^{-1}. \quad (1.39)$$

Вид зависимости  $V(\varepsilon)$  задаётся внешними напряжениями  $\sigma_{ext}$ , определяющими значение  $\tau_e(\sigma_{ext})$  сдвиговой компоненты внутренних напряжений. Оставляя в стороне определение зависимости  $\tau_e(\sigma_{ext})$ , приводящее к отдельной задаче, укажем, что при нагрузке  $\sigma_{ext}$ , не обеспечивающей условие  $\tau_e > \tau_c$ , зависимость (1.39) имеет монотонно возрастающий характер. Это означает релаксацию в стационарное состояние  $\varepsilon_0 = 0$ , в котором коллективное поведение дислокационного ансамбля не сказывается на величине пластической деформации. С физической точки зрения малость напряжений  $\tau_e(\sigma_{ext})$ , связанных с внешним воздействием, обусловлена процессами релаксации и упрочнения. При выполнении условия  $\tau_e > \tau_c$  синергетический потенциал приобретает минимум в точке  $\varepsilon_0$ , определяющей добавку

$$\varepsilon_0 = \sqrt{\tau_e/\tau_c - 1} \quad (1.40)$$

к деформации, обусловленной автономным поведением дефектов. Согласно соотношениям (1.37), при этом коллективная составляющая напряжений сводится к критическому значению  $\tau_c$ , а выражение для деформационной моды отличается от  $\varepsilon_0$  множителем  $A_d \tau_c$ . Эффективное время перехода в когерентное состояние

$$t_{ef} = t_\varepsilon (\tau_e/\tau_c - 1)^{-1} \quad (1.41)$$

монотонно спадает с ростом разности между напряжением  $\tau_e$  и критическим значением  $\tau_c$ .

Основной результат проведенного анализа состоит в том, что при автокаталитическом размножении дефектов в поле напряжений  $\tau_e(\sigma_{ext}) > \tau_c$

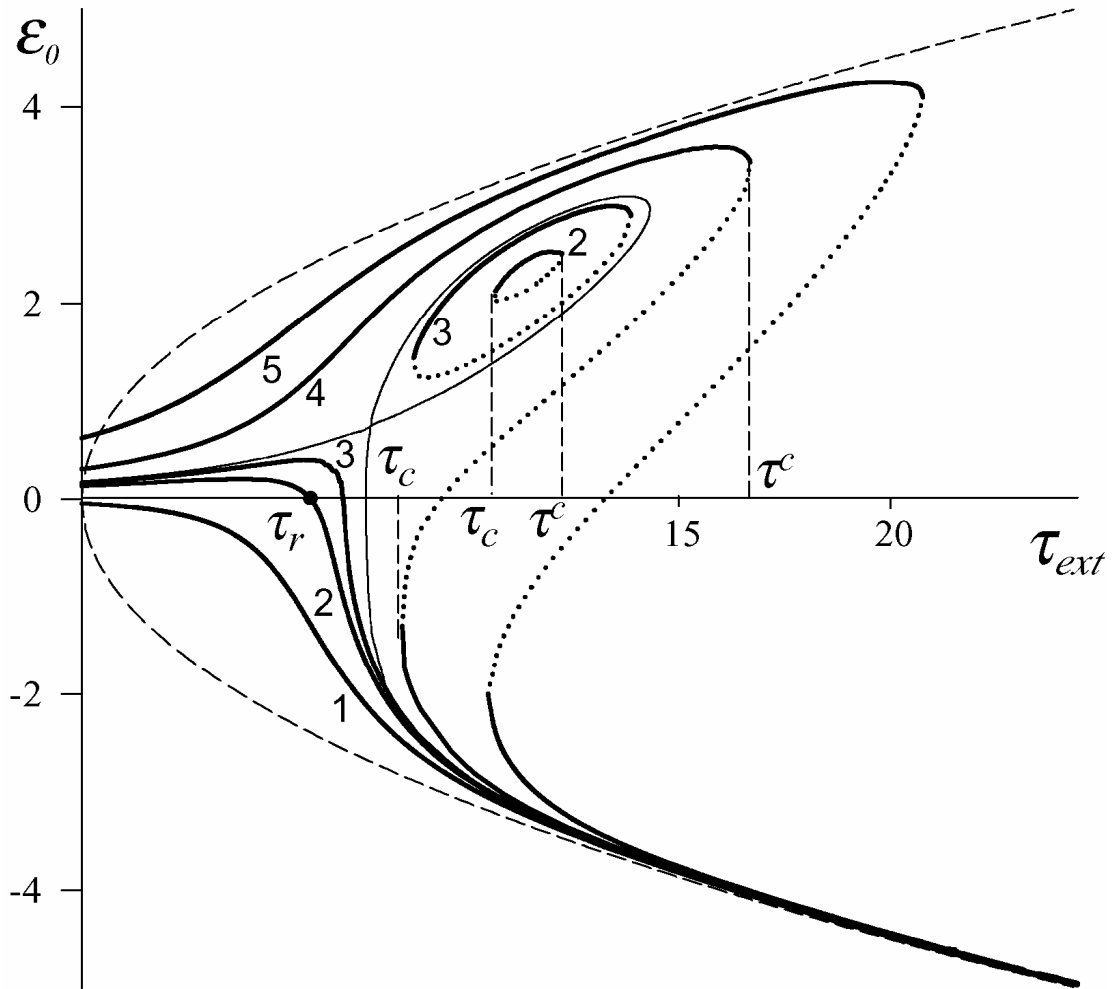


Рис. 1.13. Зависимость параметра порядка от внешних напряжений при временах кросс-корреляций, возрастающих при переходе от кривой 1 к 5 (штриховая линия отвечает затравочной зависимости (1.40), пунктирная — неустойчивым решениям)

за время  $t \sim t_{ef}$  устанавливается когерентная связь, и дефекты ведут себя коллективным образом. При этом деформация, обусловленная автономными дефектами, получает вклад

$$\varepsilon = \varepsilon_0[1 - \exp(-t/t_{ef})], \quad (1.42)$$

нарастающий с течением времени  $t \gg t_{ef}$  до стационарного значения (1.40).

Для оценки основных параметров задачи учтём, что максимальная деформация  $\varepsilon_m \sim 1$ , а из последнего уравнения (1.36) для безразмерного параметра  $A_\varepsilon = t_\varepsilon g_\varepsilon$  следует  $A_\varepsilon \sim 1$ . Тогда  $A_d = (A_\varepsilon \tau_c)^{-1} \sim \tau_c^{-1} \sim (10^1 \div 10^2)\mu^{-1}$ ,  $A_\tau = (\varepsilon_m^2 A_d)^{-1} \sim A_d^{-1} \sim \tau_c \sim (10^{-2} \div 10^{-1})\mu$ . С учётом оценок характерных времён, приведенных после уравнений (1.36), окончательно находим  $g_\varepsilon = A_\varepsilon/t_\varepsilon \sim t_\varepsilon^{-1} \sim \mu/\eta$ ,  $g_d = A_d/t_d \sim (\omega_D/\tau_c) \exp(-Q/T)$ ,  $g_\tau = A_\tau/t_\tau \sim \tau_c \omega_D$ .

Выше мы использовали простейшую модель, позволяющую представить самоорганизацию дефектов в полосе пластической деформации по механизму непрерывного кинетического превращения. В реальных условиях зарождение полосы может протекать по механизму фазового перехода первого рода. Для описания такого перехода требуется учесть зависимость времени релаксации  $t_\varepsilon$  от деформации. При этом картина превращения не претерпевает существенных изменений, и мы оставляем в стороне соответствующее рассмотрение [81].

Проведём теперь явный учёт влияния стохастических источников и пространственной неоднородности в распределении полей  $\tau(\mathbf{r})$ ,  $d(\mathbf{r})$ ,  $\varepsilon(\mathbf{r})$ . С этой целью добавим в правые части уравнений (1.36) градиентные слагаемые, определённые масштабами  $l_\tau$ ,  $l_\varepsilon$ ,  $l_d$ , и ланжевенские источники  $\zeta_\tau$ ,  $\zeta_\varepsilon$ ,  $\zeta_d$  с интенсивностями  $\sigma_\tau^2$ ,  $\sigma_\varepsilon^2$ ,  $\sigma_d^2$  (при этом полагается, что эти источники отвечают процессам Орнштейна-Уленбека с временами автокорреляции  $\tau_\tau$ ,  $\tau_\varepsilon$ ,  $\tau_d$ ). В результате поведение ансамбля дефектов задаётся системой стохастических

уравнений

$$\begin{aligned}
 t_\varepsilon \dot{\varepsilon} &= -\varepsilon + d + l_\varepsilon^2 \nabla^2 \varepsilon + \sigma_\varepsilon \zeta_\varepsilon, \\
 t_d \dot{d} &= -d + \varepsilon \tau + l_d^2 \nabla^2 d + \sigma_d \zeta_d, \\
 t_\tau \dot{\tau} &= (\tau_e - \tau) - \varepsilon d + l_\tau^2 \nabla^2 \tau + \sigma_\tau \zeta_\tau.
 \end{aligned}
 \tag{1.43}$$

Здесь деформация  $\varepsilon$  отнесена к масштабу  $\varepsilon_m$ , амплитуда коллективной моды  $d$  – к характерному значению  $d_m = A_d \tau_c \varepsilon_m$ , а величина напряжений  $\tau$  – к критическому значению  $\tau_c$ .

При изменении коллективной моды на характерных длинах  $l_d$  наиболее существенное влияние на поведение системы оказывают кросс-корреляции шумов [85] (принимается, что неупорядоченная фаза отвечает хаотическому распределению дислокаций, а упорядочение системы приводит к спонтанному появлению когерентной связи дислокаций с одинаковым направлением векторов Бюргерса). В отсутствие кросс-корреляций происходит кластеризация дефектов, отвечающая пунктирной линии на рис. 1.13. Включение кросс-корреляций нарушает симметрию распределения плотности вероятности, приводя к её возрастанию в области отрицательных значений параметра порядка (кривая 1 на рис. 1.13). Кроме того, в двукратно ограниченной области значений управляющего параметра  $(\tau_c, \tau^c)$  может появиться метастабильная фаза, характеризующаяся положительной ориентацией вектора Бюргерса. Это означает, что в ходе пластической деформации определённая часть дислокаций испытывает мгновенную переориентацию векторов Бюргерса при напряжениях  $\tau_e > \tau_c$ , а с их ростом до верхнего предела  $\tau_e = \tau^c$  происходит обратная переориентация. С другой стороны, совместное влияние кросс-корреляций, нелинейности и неоднородности распределения дефектов приводит к изменению знака вектора Бюргерса при малых деформациях (кривая 2 на рис. 1.13). При этом рост времён кросс-корреляций способствует формированию гистерезисной петли, при наличии которой происходит скачкообразная переориентация векторов Бюргерса

дислокаций с плавным ростом внешней нагрузки.

1.2.3. Сложность иерархического ансамбля дефектов. Несмотря на достигнутое понимание экспериментальной ситуации построение полной картины эволюции дефектной структуры сдерживалось тем, что до последнего времени не осознавалась её иерархическая природа. На рис. 1.14 она проявляется в том, что с изменением масштаба увеличения электронно-микроскопической фотографии, рост которого отвечает переходу на более глубокий структурный уровень, закономерности грубой структуры определяют более тонкие её детали. Согласно рис. 1.15, каждому структурному уровню можно сопоставить горизонтальную линию иерархического дерева Кейли, которой отвечает определённый уровень разрешения минимумов термодинамического потенциала. В результате эволюция системы может быть представлена в рамках фрактальной кинетики иерархизованных структур. Следует однако иметь в виду одно важное обстоятельство. Основная концепция теории спиновых стёкол [3], основанная на использовании континуального ультраметрического пространства, предполагает, что число уровней бесконечно велико, а характер связи между ними не существенен и важна только структура дерева. В нашем случае число структурных уровней (отвечающих дислокациям, дисклинациям, зернам, их конгломератам, ..., образцу) заведомо невелико и принципиально важен характер их связи. Поэтому полное описание картины эволюции дефектной структуры не может быть достигнуто в рамках аналитического подхода, и следует использовать численные методы, в рамках которых поле деформации на данном уровне определяется стандартным образом, а связь со следующим структурным уровнем задаётся через граничные условия.

С формальной точки зрения эволюция самоподобной дефектной структуры сводится к аномальной диффузии в ультраметрическом пространстве



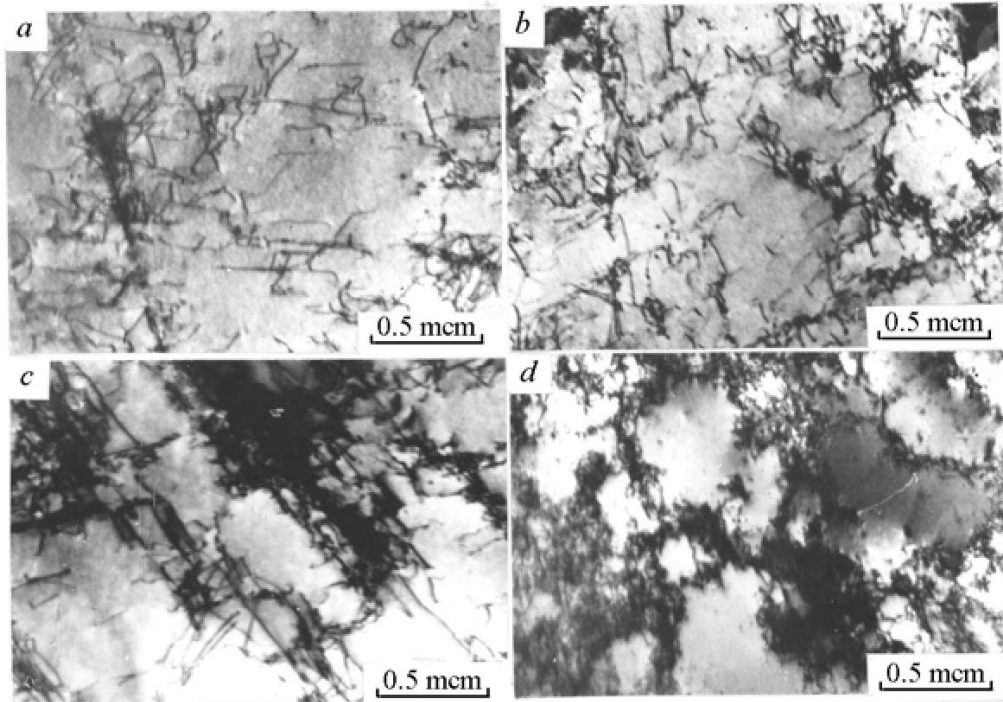


Рис. 1.14. Дислокационная структура сплава  $\text{Ni}_3\text{Fe}$  при деформациях 0.05, 0.05, 0.16, 0.28 ((a), (b), (c), (d) соответственно) [45]

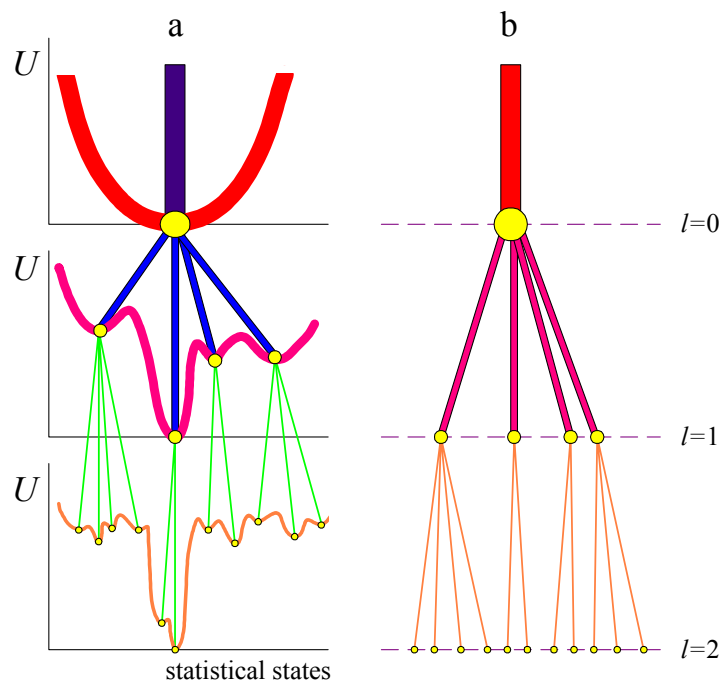


Рис. 1.15. (a) Распределение термодинамического потенциала по состояниям различных структурных уровней; (b) дерево Кейли, определяющее иерархическую связь этих состояний

иерархической системы, геометрическим образом которой является дерево Кейли [86, 87]. Основная особенность случайных иерархических систем состоит в том, что при переходе на более глубокий уровень каждый статистический ансамбль разделяется на более мелкие подансамбли, которые, в свою очередь, состоят из ещё более мелких субансамблей следующего уровня, и т.д. Со статистической точки зрения набор указанных (под)ансамблей определяется *сложностью* системы, которая по аналогии с энтропией характеризует беспорядок иерархической связи [88, 89].

Статистическая теория самоподобных структур основывается на использовании деформированных функций логарифма и экспоненты, которые сохраняют свои свойства при соответствующем деформировании операций суммирования и умножения [18, 27]. Для демонстрации необычности такого произведения на рис. 1.16 приведена зависимость произведения  $p = 2 \otimes_q 2$

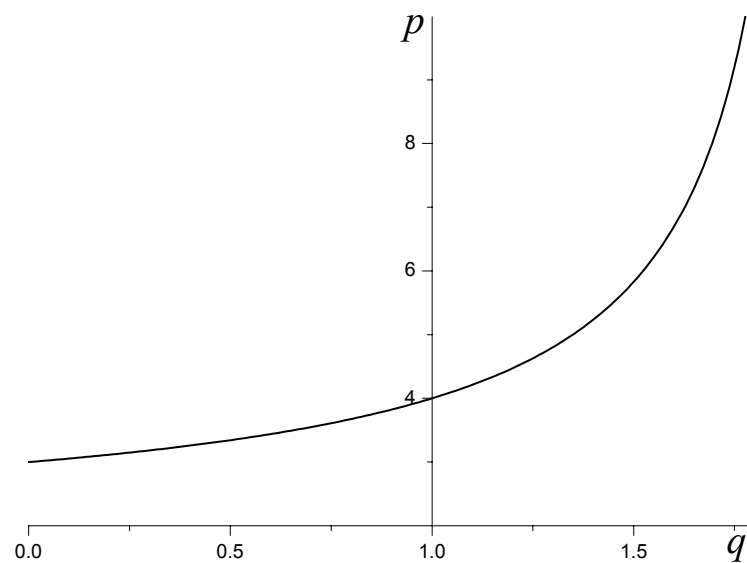


Рис. 1.16. Зависимость деформированного произведения  $p = 2 \otimes_q 2$  от параметра  $q$  от параметра деформации  $q$ . Из рисунка видно, что обычное значение  $p = 4$  получается только в отсутствие деформации ( $q = 1$ ), тогда как при минимальном значении  $q = 0$  имеем  $p = 3$ , а при  $q = 2$  получаем  $p = \infty$ .

Использование деформированных полиномиальных коэффициентов приводит к следующей связи между сложностями ближайших иерархических

уровней [88, 89]

$$C_Q(p_{11}, \dots, p_{nm_m}) - C_Q(p_1, \dots, p_m) = \frac{1}{Q-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_i} (p_i^{Q-1} p_{ij} - p_{ij}^Q). \quad (1.44)$$

Здесь положено, что каждое состояние верхнего уровня разделяется на  $m$  групп  $i$ , занятых с вероятностью  $p_i$ ; каждая из них содержит узлы  $ij$ , которые заполняются с вероятностями  $p_{ij}$  на нижнем уровне иерархического кластера; кроме того, введен физический параметр неаддитивности  $Q \equiv 2 - q$ , принимающий значения  $1 \leq Q \leq 2$ . Если статистические состояния распределены по микроканоническим ансамблям, то вероятности и соответствующие сложности определяются номером уровня  $l$ :

$$\begin{aligned} \{p_{ij}\} &\Rightarrow p_{l+1}, & \{p_i\} &\Rightarrow p_l; \\ C_Q(p_{11}, \dots, p_{mm_m}) &\Rightarrow C(l+1), & C_Q(p_1, \dots, p_m) &\Rightarrow C(l). \end{aligned} \quad (1.45)$$

В результате равенство (1.44) принимает простой вид

$$C(l+1) - C(l) = \frac{M_l}{Q-1} p_{l+1} (p_l^{Q-1} - p_{l+1}^{Q-1}), \quad (1.46)$$

где число узлов распределено по уровням согласно степенному закону

$$M_l = (l+1)^a \quad (1.47)$$

с показателем  $a > 1$ , для которого условие самоподобия даёт

$$a = \frac{1}{Q-1}. \quad (1.48)$$

При этом вероятности реализации состояний на соседних иерархических уровнях

определяются рекуррентным соотношением

$$p_{l+1} - p_l = -p_l^Q / \Delta, \quad l = 0, 1, \dots, n, \quad (1.49)$$

где  $n$  — число иерархических уровней. При  $l \gg 1$  это соотношение сводится к стационарному уравнению Фоккера-Планка.

Для определения сложности дефектной структуры проще всего воспользоваться в равенстве (1.46) распределением Цаллиса [18, 27]

$$p_l = \left[ p_0^{-(Q-1)} + \frac{Q-1}{\Delta} l \right]^{-\frac{1}{Q-1}}; \quad p_0 \equiv \left( \frac{2-Q}{\Delta} \right)^{\frac{1}{2-Q}}, \quad 0 \leq l \leq n, \quad (1.50)$$

применимым в континуальном пределе  $l \gg 1$  (параметр  $\Delta$  характеризует ширину разброса статистических состояний). При этом вероятности заполнения соседних уровней связаны соотношениями

$$p_{l+1}^{Q-1} - p_l^{Q-1} \simeq \frac{d}{dl} p_{l+1}^{Q-1} = (Q-1) p_{l+1}^{Q-2} \frac{dp_{l+1}}{dl} \simeq -\frac{Q-1}{\Delta} p_{l+1}^{2(Q-1)}, \quad (1.51)$$

в последнем из которых учтена связь (1.49), представленная в континуальном приближении. Подстановка (1.51) в (1.46) даёт

$$C(l+1) - C(l) \simeq \frac{M_l}{\Delta} p_{l+1}^{2Q-1}. \quad (1.52)$$

Полагая  $C(l+1) - C(l) \simeq dC/dl$ , с учётом (1.50), (1.47) сводим разностное уравнение (1.52) к дифференциальному

$$\frac{dC}{dl} = \frac{l^a}{\Delta} \left[ p_0^{-(Q-1)} + \frac{Q-1}{\Delta} l \right]^{-\frac{2Q-1}{Q-1}}, \quad (1.53)$$

где проведена замена  $l+1$  на  $l$ . В предельном случае  $a \rightarrow 1$  решение этого

уравнения приводит к зависимости

$$C(n) = \frac{\Delta}{Q} p_0 \left[ 1 - \left( \frac{p_n}{p_0} \right)^Q \right] - n p_n^Q, \quad (1.54)$$

где использовано начальное условие  $C(0) = 0$ . Она означает, что с ростом  $n$  сложность монотонно нарастает до предельного значения

$$C(\infty) = \frac{(2-Q)^{\frac{1}{2-Q}}}{Q} \Delta^{-\frac{Q-1}{2-Q}}, \quad (1.55)$$

спадающего с увеличением параметра неаддитивности  $Q$  и дисперсии  $\Delta$ .

В общем случае решение уравнения (1.53) выражается через гипергеометрическую функцию:

$$C(n) = \frac{p_0^{2Q-1}}{\Delta} \frac{n^{1+a}}{1+a} F \left( \frac{2Q-1}{Q-1}, 1+a; 2+a; -\nu n \right), \quad \nu \equiv \frac{Q-1}{\Delta} p_0^{Q-1}. \quad (1.56)$$

Анализ правой части уравнения (1.53) показывает, что в пределе  $n \rightarrow \infty$  его решение не принимает бесконечных значений, если показатель  $a$  не превышает максимальной величины

$$a_{max} = \frac{Q}{Q-1}. \quad (1.57)$$

С другой стороны, должно выполняться условие самоподобия (1.48). Тогда нечётные аргументы гипергеометрической функции совпадают, и она принимает простой вид [90]

$$F \left( \frac{2Q-1}{Q-1}, \frac{Q}{Q-1}; \frac{2Q-1}{Q-1}; -\nu n \right) = (1 + \nu n)^{-\frac{Q}{Q-1}}. \quad (1.58)$$

В результате сложность (1.56) сводится к выражению

$$C(n) = \frac{Q-1}{Q} \frac{p_0^{Q-1}}{\Delta} p_n^Q n^{\frac{Q}{Q-1}}. \quad (1.59)$$

Как и для вырожденного дерева ( $a \rightarrow 1$ ), эта величина монотонно нарастает с числом иерархических уровней до максимального значения

$$C(\infty) = \frac{(2-Q)^{\frac{Q-1}{2-Q}}}{Q(Q-1)^{\frac{1}{Q-1}}} \Delta^{\frac{Q+|Q_-|}{(Q-1)(2-Q)}} (Q_+ - Q), \quad (1.60)$$

где корни  $Q_{\pm} \equiv (1 \pm \sqrt{5})/2$  представляют *золотое сечение*. С ростом параметра неаддитивности максимальная сложность монотонно спадает от бесконечного значения при  $Q = 1$  до нулевого при  $Q = 2$ . Однако в отличие от (1.55) зависимость от дисперсии  $\Delta$  становится немонотонной: при значениях параметра неаддитивности, ограниченных верхним пределом  $Q_+ = 1.618$ , максимальная сложность с ростом  $\Delta$  увеличивается, а при  $Q > Q_+$  — уменьшается. Характер изменения сложности  $C$  в зависимости от числа иерархических уровней  $n$ , параметра неаддитивности  $Q$  и дисперсии  $\Delta$  приведен на рисунках 1.17, 1.18.

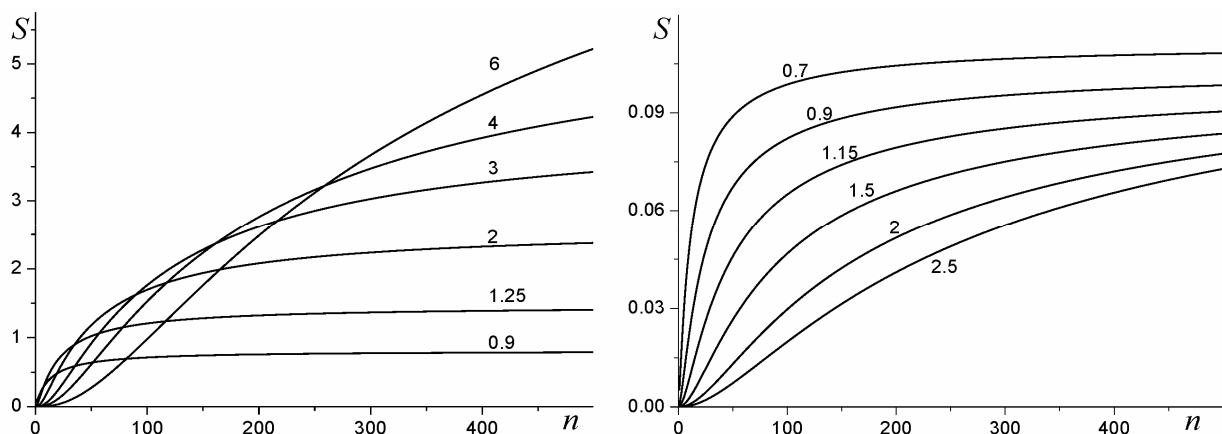


Рис. 1.17. Зависимость сложности от числа иерархических уровней при  $Q = 1.5$  и  $Q = 1.7$  (цифры у кривых указывают значения  $\Delta$ )

Изложенное рассмотрение показывает, что установление иерархической

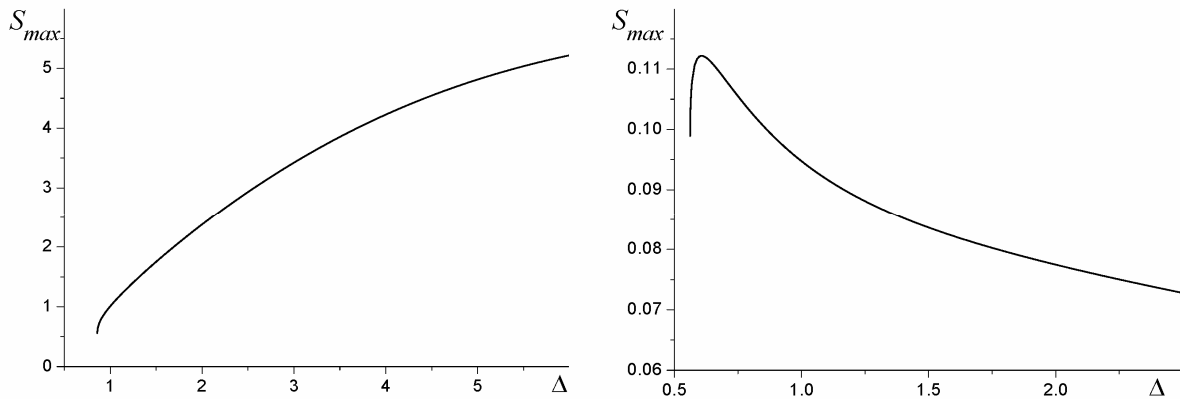


Рис. 1.18. Зависимость максимальной сложности от дисперсии иерархического ансамбля при  $Q = 1.5$  и  $Q = 1.7$

связи быстро повышает сложность статистического ансамбля до предельного значения. Хотя величина сложности определяется энтропией Цаллиса, их физическая природа совершенно различна: если для простых систем эта энтропия характеризует беспорядок в распределении наименьших структурных единиц (например, атомов), то в иерархических системах их роль играют подансамбли, на которые разделяется полный статистический ансамбль.

В общем случае поведение сложной системы определяется кластерной структурой всех иерархических уровней, однако свойство самоподобия позволяет ограничиться заданием типичного кластера и номера уровня  $n$ . Исследование различных иерархических деревьев показало [91], что возможны три их основных типа: вырожденное дерево, у которого на каждом уровне ветвится единственный узел, благодаря чему с ростом  $n$  число узлов нарастает по линейной зависимости; регулярное дерево, на каждом уровне которого все узлы ветвятся одинаковым образом и их число увеличивается экспоненциально; самоподобное дерево, у которого число узлов нарастает по степенному закону  $(1+n)^a$  с показателем  $a > 1$ . В первом случае вероятность реализации состояний на различных иерархических уровнях изменяется логарифмически медленно, во втором экспоненциально быстро и только в последнем обнаруживает присущее самоподобным системам степенное поведение с показателем, определяющим фрактальную размерность

ультраметрического пространства, геометрическим образом которого является иерархическое пространство. Согласно (1.48), параметр неаддитивности  $Q = (a + 1)/a$  определяется показателем ветвления  $a$ : регулярное ( $a = \infty$ ) и вырожденное ( $a = 1$ ) деревья характеризуются предельными значениями  $Q = 1$  и  $Q = 2$ , а самоподобное распределение (1.50) с показателем  $1 < Q < 2$  реализуется при  $\infty > a > 1$ . Такая связь объясняет бесконечное нарастание сложности при параметре неаддитивности  $Q \rightarrow 1$  — при этом неограниченно возрастает показатель ветвления иерархического дерева ( $a \rightarrow \infty$ ), обеспечивая предельную сложность системы.

Выше мы рассмотрели самоподобные иерархические ансамбли. При произвольном распределении по узлам иерархического дерева, не обладающего свойством самоподобия, разностное уравнение (1.46) приводит к более сложному выражению

$$C(n) = \frac{1}{Q-1} \sum_{l=1}^n C_l, \quad C_l \equiv \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^{m_{i_1}} \dots \sum_{i_l=1}^{m_{i_1 i_2 \dots i_{l-1}}} p_{i_1 \dots i_{l-1} i_l} \left( p_{i_1 \dots i_{l-1}}^{Q-1} - p_{i_1 \dots i_{l-1} i_l}^{Q-1} \right), \quad (1.61)$$

где вероятность  $p_{i_1 \dots i_{l-1}}$  сводится к значению  $p_0$  при  $l = 1$ . В (1.61) подразумевается, что на уровне  $l$  иерархического дерева, обладающего  $n > 1$  уровнями, состояния  $i_1 \dots i_{l-1} 1, i_1 \dots i_{l-1} 2, \dots, i_1 \dots i_{l-1} m_{i_1 \dots i_{l-1}}$  образуют кластер, которому отвечает узел  $i_1 \dots i_{l-1}$  на более высоком уровне  $l - 1$ . Поэтому при вычислении сложности (1.61) следует сначала провести суммирование по узлам  $i_1 \dots i_{n-1} i_n$  нижнего уровня  $n$ , принадлежащих кластеру, который отвечает узлу  $i_1 \dots i_{n-1}$  следующего уровня  $n - 1$ . Затем выполняется суммирование по узлам уровня  $n$ , принадлежащим всем остальным кластерам, и процедура повторяется для каждого последующего уровня иерархии  $l < n$  (при определении сложности слабо ветвящихся деревьев более удобно проводить суммирование не по кластерам, а по ветвям иерархического дерева).

Выражение (1.61) является основой численного определения сложности



произвольного иерархического ансамбля (в частности, развитой дефектной структуры твёрдого тела, подверженного интенсивному внешнему воздействию типа пластической деформации или жёсткого облучения). Для определения сложности реальной структуры следует сначала разделить дефекты по иерархическим уровням  $l = 0, 1, \dots, n$ , затем на каждом из них провести подсчёт числа дефектов  $N_{i_1 \dots i_{l-1}}$ , принадлежащих кластеру  $i_1 \dots i_{l-1}1, i_1 \dots i_{l-1}2, \dots, i_1 \dots i_{l-1}m_{i_1 \dots i_{l-1}}$ , и приписать вероятность

$$p_{i_1 \dots i_{l-1}} = \frac{N_{i_1 \dots i_{l-1}}}{N} \quad (1.62)$$

узлу  $i_1 \dots i_{l-1}$  следующего уровня  $l - 1$ . При этом полное число дефектов всех уровней определяется равенством

$$N = \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^{m_{i_1}} \dots \sum_{i_n=1}^{m_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}} N_{i_1 \dots i_n}, \quad n > 1, \quad (1.63)$$

где  $m_{i_1 \dots i_{l-1}}$  — число возможных состояний  $i_1 \dots i_l$  в кластере, отвечающем узлу  $i_1 \dots i_{l-1}$  (при  $n = 1$  следует положить  $m_{i_1 \dots i_{n-1}} = m$ ). В общем случае распределение  $m_{i_1 \dots i_l}$  состояний по кластерам определяет их число на данном уровне  $l$  согласно равенству

$$M_l = \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^{m_{i_1}} \dots \sum_{i_l=1}^{m_{i_1 \dots i_{l-1}}} m_{i_1 \dots i_l}. \quad (1.64)$$

Для регулярного дерева, каждый узел которого ветвится с одинаковым показателем  $m > 1$ , отсюда следует  $M_l = m^l \equiv \exp[\ln(m) \cdot l]$ . Переход к нерегулярному самоподобному дереву трансформирует это выражение в биномиальную зависимость  $M_l = [1 + (\ln m/a) \cdot l]^a$ , которая в пределе  $a \rightarrow \infty$  воспроизводит указанную экспоненту, а при показателе  $a = \ln m$  сводится к степенному закону (1.47).

Подстановка вероятностей  $\{p_{i_1 \dots i_l}\}$ ,  $l = 1, 2, \dots, n$  в (1.61) даёт сложность иерархически соподчинённой дефектной структуры. Очевидно, величина этой сложности задаёт такие феноменологические параметры как прочность и пластичность твёрдого тела. Характерно, что определение структурной сложности не может быть достигнуто использованием одних экспериментальных методов (например, электронной микроскопии) и требует последующей компьютерной обработки согласно изложенному алгоритму.

### 1.3. Выводы к разделу 1

Проведенный анализ литературных источников приводит к следующим выводам.

1. Феноменологическое описание самоорганизованных сложных систем (например, твердотельных лазеров) достигается использованием уравнений эволюции с нелинейными силами. Исследование самоорганизации дефектов кристаллического строения показывает, что её представление требует использования уравнений, включающих градиентные и стохастические слагаемые.

2. Типичный пример сложной системы представляет конденсированная среда, подверженная интенсивному внешнему воздействию. Эволюция её структуры начинается с образования одиночных дефектов, которые выстраиваются затем в супердефекты на мезоскопическом уровне, образуя в результате иерархическую дефектную структуру.

3. Описание первой стадии эволюции структуры достигается на основе концепции перестраиваемого потенциального рельефа, вторая требует использования синергетической схемы, а для описания иерархических структур следует вводить понятия фрактальных множеств, пространств с ультраметрической топологией и сложности иерархических ансамблей.

## РАЗДЕЛ 2

### САМООРГАНИЗОВАННАЯ МОДУЛЯЦИЯ КОГЕРЕНТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Простейший пример самоорганизации представляют фазовые переходы, в процессе которых упорядочение выделенной подсистемы практически не влияет на состояние содержащего её термостата (например, выстраивание спинов магнетика не сказывается на температуре внешней среды и величине приложенного поля). Намного более сложный пример даёт химическая реакция Белоусова-Жаботинского, при которой в течение длительного времени периодически пробегает волна, изменяющая один цвет жидкости на другой. Такое поведение означает, что хаотически движущиеся молекулы жидкости периодически включаются в самосогласованный процесс, который быстро развивается по объёму, изменяя коллективное поведение системы. Подобные изменения коллективного поведения наблюдаются в больших сообществах живых организмов (стаях птиц и зверей, косяках рыбы и т.п.), а также в социуме — при войнах и революциях, втягивающими огромные массы людей. Циклические процессы самоорганизации наблюдаются также при возникновении смерчей, в течениях океана и циклонах, в поведении клеток организма при морфогенезе и т.д.

Несмотря на столь широкое распространение, в настоящее время отсутствует микроскопическая картина самоорганизации, поскольку она требует понимания механизмов процесса, которые в каждом частном случае имеют различную природу. Так, для реакции Белоусова-Жаботинского недостаточно известны детали промежуточных реакций, их константы, условия выбора реагентов и т.д. С другой стороны, возможность появления колебательного режима следует уже из рассмотрения простых моделей. В этой связи возникает вопрос: почему эти модели позволяют объяснить такое сложное коллективное явление как самоорганизация? Ответ на этот вопрос состоит в том, что множество возможных степеней свободы сложной системы разделяется

на два класса — бесконечное множество *микроскопических* степеней и небольшое число *макроскопических* (для обозначения последних принят термин *гидродинамические моды*). Согласно синергетическому принципу соподчинения [6], в ходе эволюции системы гидродинамические моды подавляют поведение микроскопических степеней свободы, полностью определяя картину самоорганизации. В результате коллективное поведение задаётся несколькими параметрами, которые представляют амплитуды гидродинамических мод. С другой стороны, в самоорганизации неравновесной системы должна играть принципиально важную роль диссипация, обусловленная процессами диффузии, вязкости и теплопроводности, которые обеспечивают переход в стационарное состояние.

Настоящая глава посвящена рассмотрению самоорганизованной модуляции когерентного излучения на основе самосогласованного представления эволюции диссипирующих гидродинамических мод квантовых генераторов. В отличие от стандартного сценария, в рамках которого явление самоорганизации отвечает зарождению одной или нескольких притягивающих точек в пространстве состояний, здесь основное внимание уделено исследованию более сложного случая, когда перестройка коллективного поведения выражается в появлении *предельного цикла*, по состояниям которого происходит эволюция системы. Центральное место занимает подраздел 2.1, посвящённый изложению формальных основ теории зарождения предельного цикла в результате *бифуркации Хопфа* и её приложению к исследованию модулированного когерентного излучения на основе системы Лоренца [46, 49]. Подраздел 2.2 посвящён исследованию нетривиальных систем, в которых процесс самоорганизации выражается в наличии серии резонансов, отвечающих периодическому распределению множества предельных циклов [47, 48]. В заключительном подразделе 2.3 проводится фазовый анализ гигантского импульса когерентного излучения ансамбля квантовых точек [64].

## 2.1. Автоколебания, обусловленные рождением предельного цикла.

С формальной точки зрения термодинамическое превращение отвечает простейшим типам перестройки пространства состояний: при непрерывном фазовом переходе происходит бифуркация неупорядоченного состояния в пару точек упорядоченной фазы, которые отвечают разным знакам параметра порядка; в случае перехода первого рода кроме точки, соответствующей неупорядоченному состоянию, на фазовом портрете зарождаются седла, отвечающие энергетическим барьерам, и узлы упорядоченной фазы [81]. Вне зависимости от этих различий термодинамическое превращение характеризуется тем, что при фазовом переходе минимум синергетического потенциала неупорядоченной фазы трансформируется в *локальные* минимумы упорядоченного состояния системы.

Настоящий подраздел посвящён исследованию более сложной картины, когда бифуркация Хопфа приводит к трансформации локального минимума упорядоченной фазы в континуальный набор минимумов автомодулированного состояния (см. рис.2.1). Очевидно, при этом на фазовом портрете образуется предельный цикл, описывающий модуляцию параметра порядка [82]. В этом подразделе мы исследуем наиболее простой случай, в котором бифуркация Хопфа приводит к одиночному предельному циклу [44, 46, 49], а в подразделе 2.2 рассмотрим более сложную ситуацию, когда перестройка системы выражается в появлении набора предельных циклов, отвечающих множественному резонансу [47, 48].

2.1.1. Формализм бифуркации Хопфа. Согласно теореме о центральном многообразии [25], вблизи точки бифуркации эволюция системы, обладающей  $n > 2$  степеней свободы, определяется временными зависимостями пары действительных переменных  $X_1(t)$ ,  $X_2(t)$ . Поэтому задача сводится к определению

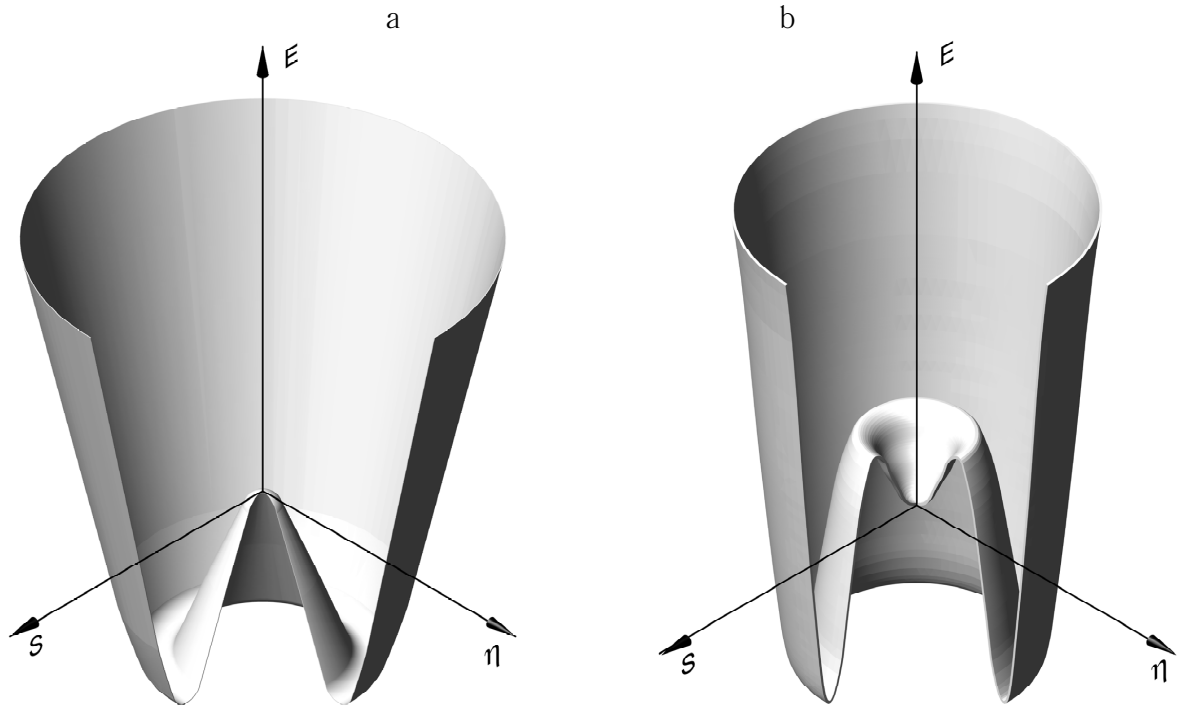


Рис. 2.1. Характерный вид синергетического потенциала, отвечающего бифуркации Хопфа в отсутствие (а) и при наличии (б) неустойчивого цикла условий, при которых уравнения движения этих переменных

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= F^{(1)}, & F^{(1)} &= F^{(1)}(X_1, X_2); \\ \dot{X}_2 &= F^{(2)}, & F^{(2)} &= F^{(2)}(X_1, X_2) \end{aligned} \quad (2.1)$$

приводят к решению, отвечающему предельному циклу (здесь и далее точка над символом означает дифференцирование по времени, правые части уравнений (2.1) представляют обобщённые силы, сопряжённые соответствующим степеням свободы). Простейший пример предельного цикла даёт система линейных уравнений Лотки-Вольтерра

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= \lambda X_1 - \omega X_2, \\ \dot{X}_2 &= \omega X_1 + \lambda X_2, \end{aligned} \quad (2.2)$$

определённая вещественными параметрами  $\lambda$ ,  $\omega$ . Действительно, деление одного из этих уравнений на другое с последующим интегрированием при условии  $\lambda = 0$

приводит к уравнению окружности  $X_1^2 + X_2^2 = \text{const}$  с постоянной, определяющей её радиус. Отсюда видно, что в общем случае уравнения (2.1) дают предельный цикл, если их линейная составляющая сводится к системе (2.2). Это означает, что в стационарном состоянии  $X_1 = X_{10}$ ,  $X_2 = X_{20}$ , где пропадает зависимость от времени, матрица Якоби

$$\Lambda_{\alpha\beta} \equiv \left. \frac{\partial F^{(\alpha)}}{\partial X_\beta} \right|_{X_\beta = X_{\beta 0}} ; \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad (2.3)$$

сводящаяся к обратной восприимчивости, принимает каноническую форму

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & -\omega \\ \omega & \lambda \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

которая несмотря на простоту имеет самый общий вид. Действительно, на диагональные компоненты матрицы (2.4) накладывается требование, чтобы они одновременно обращались в нуль в критической точке, отвечающей зарождению предельного цикла. Поэтому они могут различаться только численным коэффициентом, от которого легко избавиться за счёт выбора единиц измерения. Что касается недиагональных компонент, то совпадение их абсолютных величин является следствием условия Онзагера на симметрию кинетических коэффициентов в уравнениях (2.2), а выбор противоположных знаков обеспечивает самоорганизацию системы.

Уравнениям (2.1) удобно придать векторную форму

$$\dot{\vec{X}} = \vec{F}, \quad (2.5)$$

используя представление

$$\vec{X} \equiv \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{F} \equiv \begin{pmatrix} F^{(1)} \\ F^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

В рамках такого представления определяющую роль играют собственные значения  $\Lambda$ ,  $\bar{\Lambda}$  и векторы  $e_\alpha$ ,  $e_\alpha^+$  матрицы (2.3), которые задаются сопряжёнными уравнениями

$$\sum_{\beta=1}^2 \Lambda_{\alpha\beta} e_\beta = \Lambda e_\alpha, \quad \sum_{\beta=1}^2 e_\beta^+ \Lambda_{\beta\alpha} = \bar{\Lambda} e_\alpha^+. \quad (2.7)$$

Здесь показатель Ляпунова

$$\Lambda \equiv \lambda + i\omega, \quad (2.8)$$

задаваемый инкрементом  $\lambda$  и частотой  $\omega$ , определяется равенством

$$\Lambda = \frac{1}{2} \left[ \text{Spur } \hat{\Lambda} \pm \sqrt{(\text{Spur } \hat{\Lambda})^2 - 4 \det \hat{\Lambda}} \right], \quad (2.9)$$

где  $\text{Spur } \hat{\Lambda}$  и  $\det \hat{\Lambda}$  означают след и определитель матрицы (2.3). В каноническом случае (2.4) собственное значение (2.8) отвечает векторам

$$\vec{e} \equiv |e\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \vec{e}^+ \equiv \langle e| = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ i), \quad (2.10)$$

которые удовлетворяют условию нормировки

$$\vec{e}^+ \vec{e} \equiv \langle e|e\rangle \equiv \sum_{\alpha=1}^2 e_\alpha^+ e_\alpha = 1. \quad (2.11)$$

Для придания канонического вида уравнениям (2.5) введём псевдовектор

$$\vec{x} \equiv |x\rangle = \vec{X} - \vec{X}_0, \quad (2.12)$$



отсчитанный от стационарного состояния  $\vec{X}_0$ , и нелинейную составляющую силы

$$\vec{f} = \vec{F} - \hat{\Lambda}\vec{x}. \quad (2.13)$$

В результате (2.5) сводится к виду

$$\dot{\vec{x}} = \hat{\Lambda}\vec{x} + \vec{f}(\vec{x}). \quad (2.14)$$

Определим комплексно-сопряжённые переменные

$$\begin{aligned} z \equiv (e|x) &= \sum_{\alpha=1}^2 x_{\alpha} e_{\alpha}^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 + ix_2), \\ \bar{z} \equiv (x|e) &= \sum_{\alpha=1}^2 x_{\alpha} e_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 - ix_2), \end{aligned} \quad (2.15)$$

представляющие проекцию вектора состояния (2.12) на собственные векторы (2.10) матрицы (2.4). Они получаются действием оператора проектирования

$$\hat{P} \equiv |e\rangle \langle e| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

на исходный псевдовектор (2.12), записанный в компонентной форме (2.6):

$$\hat{P}\vec{x} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{x_1 + ix_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \equiv z\vec{e}. \quad (2.17)$$

Умножая это равенство на  $\vec{e}^{+}$ , получаем матричное выражение определений (2.15)

$$\begin{aligned} z &= \vec{e}^{+} \hat{P}\vec{x} \equiv (e|\hat{P}|x), \\ \bar{z} &= \vec{x}^{+} \hat{P}\vec{e} \equiv (x|\hat{P}|e), \end{aligned} \quad (2.18)$$

последнее из которых представляет результат комплексного сопряжения первого с учётом эрмитовости оператора  $\hat{P}$ . Используя выражения (2.16), (2.10), (2.4), легко убедиться в основных свойствах оператора проектирования:

$$\hat{P}\vec{e} = \vec{e}, \quad \vec{e}^+\hat{P} = \vec{e}^+; \quad \hat{P}^2 = \hat{P}, \quad \hat{P}^+ = \hat{P}, \quad \hat{P}\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}\hat{P}. \quad (2.19)$$

С учётом последнего действие оператора (2.16) на уравнение (2.14) с последующими умножением на  $(e| \equiv \vec{e}^+$  и суммированием по компонентам даёт каноническую форму Пуанкаре

$$\dot{z} = \Lambda z + v(z, \bar{z}), \quad v(z, \bar{z}) \equiv \vec{e}^+\hat{P}\vec{f} = (e|\hat{P}|f), \quad (2.20)$$

в которой выделена линейная составляющая обобщённой силы.

Легко убедиться, что переход от компонентного представления

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= F^{(1)}(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= F^{(2)}(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (2.21)$$

к каноническому уравнению движения для комплексной переменной

$$z \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + ix_2), \quad (2.22)$$

определённой равенствами (2.15), (2.18), достигается представлением правой части (2.20) комплексной силой

$$F = F(z, \bar{z}) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ F^{(1)}(x_1(z, \bar{z}), x_2(z, \bar{z})) + iF^{(2)}(x_1(z, \bar{z}), x_2(z, \bar{z})) \right]. \quad (2.23)$$

Её нелинейная составляющая  $v \equiv F - \Lambda z$  даётся рядом<sup>2</sup>

$$v(z, \bar{z}) = \sum_{2 \leq m+n \leq 3} \frac{v_{mn}}{m!n!} z^m \bar{z}^n + O(|z|^4), \quad |z|^2 \equiv z\bar{z} \quad (2.24)$$

с коэффициентами

$$v_{mn} \equiv \left. \frac{\partial^{m+n} v(z, \bar{z})}{\partial z^m \partial \bar{z}^n} \right|_{z, \bar{z}=0} = \left. \frac{\partial^{m+n} F(z, \bar{z})}{\partial z^m \partial \bar{z}^n} \right|_{z, \bar{z}=0}. \quad (2.25)$$

Учёт равенства (2.23) и связей между производными

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial x_1}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

приводит выражение (2.25) к виду

$$v_{mn} = 2^{-\frac{1+m+n}{2}} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^m \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^n \left[ F^{(1)}(x_1, x_2) + i F^{(2)}(x_1, x_2) \right]_{x_1, x_2=0}. \quad (2.27)$$

Отсюда при различных  $m, n$  получаем

$$v_{11} = 2^{-3/2} \left[ \left( F_{11}^{(1)} + F_{22}^{(1)} \right) + i \left( F_{11}^{(2)} + F_{22}^{(2)} \right) \right], \quad (2.28)$$

$$\begin{pmatrix} v_{20} \\ v_{02} \end{pmatrix} = 2^{-3/2} \left[ \left( F_{11}^{(1)} - F_{22}^{(1)} \pm 2F_{12}^{(2)} \right) + i \left( F_{11}^{(2)} - F_{22}^{(2)} \mp 2F_{12}^{(1)} \right) \right], \quad (2.29)$$

---

<sup>2</sup>Мы не останавливаемся на причинах выбора верхних пределов суммирования в (2.24), (2.32), предполагая их интуитивно ясными. Математически строгое обоснование такого выбора можно найти в [25].

$$v_{21} = \frac{1}{4} \left\{ \left[ \left( F_{111}^{(1)} + F_{122}^{(1)} \right) + \left( F_{112}^{(2)} + F_{222}^{(2)} \right) \right] + i \left[ \left( F_{111}^{(2)} + F_{122}^{(2)} \right) - \left( F_{112}^{(1)} + F_{222}^{(1)} \right) \right] \right\}, \quad (2.30)$$

где обозначено

$$F_{\alpha\beta}^{(\delta)} \equiv \frac{\partial^2 F^{(\delta)}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \Big|_{\vec{x}=0}, \quad F_{\alpha\beta\gamma}^{(\delta)} \equiv \frac{\partial^3 F^{(\delta)}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} \Big|_{\vec{x}=0}; \quad \alpha, \beta, \gamma; \delta = 1, 2. \quad (2.31)$$

Перейдём теперь к комплексному параметру порядка  $\phi$ , связь которого с переменной  $z$  задаётся равенствами

$$z = \phi + \chi(\phi, \bar{\phi}), \quad \chi \equiv \sum_{2 \leq m+n \leq 4} \frac{\chi_{mn}}{m!n!} \phi^m \bar{\phi}^n. \quad (2.32)$$

Коэффициенты  $\chi_{mn}$  определяются таким образом, чтобы уравнение (2.20) приняло вид Гинзбурга-Ландау (в математической терминологии – нормальную форму Пуанкаре, не содержащую квадратичных слагаемых)

$$\dot{\phi} = \Lambda\phi + C|\phi|^2\phi + O(|\phi|^4), \quad |\phi|^2 \equiv \phi\bar{\phi}. \quad (2.33)$$

Задача сводится к выражению параметра нелинейности  $C$  через структурные константы  $v_{mn}$ , определённые равенствами (2.25).

Дифференцирование сложной функции  $z(t) = \phi(t) + \chi(\phi(t), \bar{\phi}(t))$  даёт

$$\dot{z} = \dot{\phi} + \chi_\phi \dot{\phi} + \chi_{\bar{\phi}} \dot{\bar{\phi}}; \quad \chi_\phi \equiv \frac{\partial \chi}{\partial \phi}, \quad \chi_{\bar{\phi}} \equiv \frac{\partial \chi}{\partial \bar{\phi}}. \quad (2.34)$$

Вычитая (2.33) из (2.20), приходим к равенству

$$\chi_\phi \dot{\phi} + \chi_{\bar{\phi}} \dot{\bar{\phi}} = \Lambda\chi(\phi, \bar{\phi}) + [v(z, \bar{z}) - C|\phi|^2\phi] + O(|\phi|^5), \quad (2.35)$$

левая часть которого следует из (2.34), а в правой учтено первое равенство (2.32). Выражая временные производные из (2.33), с точностью до кубических слагаемых

находим уравнение

$$\phi\Lambda\chi_\phi + \bar{\Lambda}\bar{\phi}\chi_{\bar{\phi}} - \Lambda\chi = \sum_{2 \leq m+n \leq 3} \frac{v_{mn}}{m!n!} (\phi + \chi)^m (\bar{\phi} + \bar{\chi})^n - (C\phi + C\chi_\phi\phi + \bar{C}\chi_{\bar{\phi}}\bar{\phi}) |\phi|^2, \quad (2.36)$$

в котором учтено разложение (2.24). Согласно последнему выражению (2.32), левая часть этого уравнения имеет вид

$$\phi\Lambda\chi_\phi + \bar{\Lambda}\bar{\phi}\chi_{\bar{\phi}} - \Lambda\chi = \sum_{2 \leq m+n \leq 4} \frac{\chi_{mn} (m\Lambda + n\bar{\Lambda} - \Lambda)}{m!n!} \phi^m \bar{\phi}^n. \quad (2.37)$$

Для определения коэффициентов  $\chi_{mn}$  с  $m + n = 2$  рассмотрим уравнение (2.36), удерживая члены второго порядка по  $\phi, \bar{\phi}$ . Согласно (2.37) при этом левая часть записывается в виде

$$\sum_{m+n=2} \frac{\chi_{mn} (m\Lambda + n\bar{\Lambda} - \Lambda)}{m!n!} \phi^m \bar{\phi}^n = \frac{\chi_{20}}{2} \Lambda \phi^2 + \chi_{11} \bar{\Lambda} \phi \bar{\phi} + \frac{\chi_{02}}{2} (2\bar{\Lambda} - \Lambda) \bar{\phi}^2. \quad (2.38)$$

Сравнивая её множители при  $\phi^2, \phi\bar{\phi}$  и  $\bar{\phi}^2$  с соответствующими коэффициентами в выражении

$$\frac{v_{20}}{2} \phi^2 + v_{11} \phi \bar{\phi} + \frac{v_{02}}{2} \bar{\phi}^2, \quad (2.39)$$

к которому сводится правая часть (2.36), находим

$$\chi_{20} = \frac{v_{20}}{\Lambda}, \quad \chi_{11} = \frac{v_{11}}{\bar{\Lambda}}, \quad \chi_{02} = \frac{v_{02}}{2\bar{\Lambda} - \Lambda}. \quad (2.40)$$

Далее следует выделить в (2.36) слагаемые, содержащие  $|\phi|^2\phi$ . При этом в сумму (2.37) даёт вклад только член, отвечающий  $m = 2, n = 1$ , и левая часть уравнения (2.36) принимает вид

$$\chi_{21} \frac{2\Lambda + \bar{\Lambda} - \Lambda}{2!1!} \phi^2 \bar{\phi} = \frac{\chi_{21}}{2} (\Lambda + \bar{\Lambda}) |\phi|^2 \phi = \chi_{21} \Re \Lambda |\phi|^2 \phi. \quad (2.41)$$

Соответственно, сумма в правой части содержит слагаемые

$$\frac{v_{20}}{2}(\phi + \chi)^2 + v_{11}(\phi + \chi)(\bar{\phi} + \bar{\chi}) + \frac{v_{02}}{2}(\bar{\phi} + \bar{\chi})^2 + \frac{v_{21}}{2}(\phi + \chi)^2(\bar{\phi} + \bar{\chi}), \quad (2.42)$$

приводящие к множителю перед  $|\phi|^2\phi$

$$v_{20}\chi_{11} + v_{11}(\chi_{20} + \bar{\chi}_{11}) + v_{02}\bar{\chi}_{02} + \frac{v_{21}}{2} = 2v_{11}v_{20}\frac{\Re\Lambda}{|\Lambda|^2} + \frac{|v_{11}|^2}{\Lambda} + \frac{|v_{02}|^2}{2\Lambda - \bar{\Lambda}} + \frac{v_{21}}{2}, \quad (2.43)$$

где последнее равенство учитывает вид коэффициентов (2.40). Поскольку члены уравнения (2.36), содержащие  $\chi_\phi|\phi|^2\phi$  и  $\chi_{\bar{\phi}}|\phi|^2\bar{\phi}$ , дают вклад более высокого порядка, чем  $|\phi|^2\phi$ , то их можно опустить, и равенства (2.40), (2.41) и (2.43) выражают параметр нелинейности уравнения (2.33) в виде

$$C = 2v_{11}v_{20}\frac{\Re\Lambda}{|\Lambda|^2} + \frac{|v_{11}|^2}{\Lambda} + \frac{|v_{02}|^2}{2\Lambda - \bar{\Lambda}} + \frac{v_{21}}{2} - \chi_{21}\Re\Lambda. \quad (2.44)$$

Найденное выражение (2.44) является неполным, поскольку содержит неизвестный коэффициент  $\chi_{21}$ , определение которого требует учёта не только членов, пропорциональных  $|\phi|^2\phi$ , но и кубических слагаемых  $\phi^3$ ,  $|\phi|^2\bar{\phi}$ ,  $\bar{\phi}^3$  [25]. Следует однако учесть, что параметр нелинейности содержится только в слагаемом высшего порядка ряда (2.33), где полагается равным нулю действительное значение показателя Ляпунова  $\Lambda \equiv \lambda + i\omega$ . Тогда из (2.44) следует выражение для показателя Флоке  $\Phi \equiv C|_{\lambda=0}$

$$\Phi = \frac{1}{2}v_{21} - \frac{i}{\omega_0} \left( |v_{11}|^2 + \frac{1}{3}|v_{02}|^2 \right), \quad (2.45)$$

где введена характерная частота  $\omega_0 \equiv \omega|_{\lambda=0}$ . Стационарная точка, порождающая предельный цикл, становится неустойчивой при условии  $\Re\Phi < 0$ , сводящемся к неравенству  $\Re v_{21} < 0$ . В результате условие образования предельного цикла

принимает вид

$$\left(F_{111}^{(1)} + F_{122}^{(1)}\right) + \left(F_{222}^{(2)} + F_{112}^{(2)}\right) < 0, \quad (2.46)$$

где учтено равенство (2.30).

Укажем, что в монографии [25] вместо (2.45) получено выражение

$$\Phi = \frac{1}{2}v_{21} - \frac{i}{\omega_0} \left( |v_{11}|^2 + \frac{1}{6}|v_{02}|^2 - \frac{1}{2}v_{20}v_{11} \right). \quad (2.47)$$

Однако при этом в определениях (2.28) – (2.30) структурных констант  $v_{\alpha\beta}$  вместо (2.21) использовалось уравнение  $\dot{\vec{y}} = \vec{\mathcal{F}}(\vec{y})$ , в котором отклонение от стационарного состояния  $\vec{X}_0$  определялось разностью (2.12), комбинированной с последующим поворотом:

$$\vec{y} \equiv \mathcal{P}\vec{x}, \quad \vec{x} \equiv \vec{X} - \vec{X}_0. \quad (2.48)$$

Соответствующая матрица

$$\hat{\mathcal{P}} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\Lambda_{11}}{\omega_0} & -\frac{\Lambda_{12}}{\omega_0} \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

приводит комплексную силу (2.23) к виду

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{P}F. \quad (2.50)$$

В результате найденный в [25] критерий образования предельного цикла

выражается весьма громоздким неравенством

$$\begin{aligned}
2\omega_0 \left[ \left( \mathcal{F}_{111}^{(1)} + \mathcal{F}_{122}^{(1)} \right) + \left( \mathcal{F}_{222}^{(2)} + \mathcal{F}_{112}^{(2)} \right) \right] < \\
\left( \mathcal{F}_{11}^{(1)} + \mathcal{F}_{22}^{(1)} \right) \left( \mathcal{F}_{11}^{(2)} - \mathcal{F}_{22}^{(2)} - 2\mathcal{F}_{12}^{(1)} \right) + \\
\left( \mathcal{F}_{11}^{(2)} + \mathcal{F}_{22}^{(2)} \right) \left( \mathcal{F}_{11}^{(1)} - \mathcal{F}_{22}^{(1)} + 2\mathcal{F}_{12}^{(2)} \right).
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Здесь в отличие от (2.46) нижние индексы указывают дифференцирование по компонентам преобразованной координаты  $\vec{y}$ , а не исходной  $\vec{x}$ .

2.1.2. Динамика лазеров, отвечающих системе Лоренца. Для подтверждения правомерности критерия (2.46) исследуем систему Лоренца применительно к лазеру, спонтанное излучение которого определяется уравнениями эволюции напряжённости поля излучения  $E$ , поляризации среды  $P$  и разности заселённостей уровней  $S$  [6]. В этом случае режим самоорганизуемой модуляции возможен только при условии, что уравнение для напряжённости приобретает нелинейный вклад [92]

$$\varphi(E) \equiv \frac{\kappa E}{1 + E^2/E_\tau^2}, \tag{2.52}$$

константы которого  $\kappa > 0$ ,  $E_\tau$  определяют дисперсию времени релаксации напряжённости поля излучения. В результате поведение системы описывается уравнениями

$$\begin{aligned}
\tau_E \dot{E} &= -E + a_E P - \varphi(E), \\
\tau_P \dot{P} &= -P + a_P E S, \\
\tau_S \dot{S} &= (S_e - S) - a_S E P.
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Здесь  $\tau_E$ ,  $\tau_P$ ,  $\tau_S$  — масштабы изменения величин, указанных индексами,  $a_E$ ,  $a_P$ ,  $a_S$  — положительные константы связи,  $S_e$  — параметр накачки. Будем измерять величины  $t$ ,  $E$ ,  $P$ ,  $S$  в масштабах  $\tau_E$ ,  $E_s = (a_P a_S)^{-1/2}$ ,  $P_s = (a_E^2 a_P a_S)^{-1/2}$ ,  $S_s =$



$(a_E a_P)^{-1}$ . Тогда уравнения (2.53) принимают вид

$$\begin{aligned}\dot{E} &= -E + P - \varphi(E), \\ \sigma \dot{P} &= -P + ES, \\ \epsilon \dot{S} &= (S_e - S) - EP,\end{aligned}\tag{2.54}$$

где введены соотношения характерных времён  $\sigma \equiv \tau_P/\tau_E$ ,  $\epsilon \equiv \tau_S/\tau_E$ .

При выполнении адиабатического условия  $\tau_P \ll \tau_E$  левую часть второго уравнения (2.54) можно положить равной нулю, в результате чего поляризация выражается равенством  $P = ES$ . Подставляя его в оставшиеся уравнения (2.54), получаем систему

$$\begin{aligned}\dot{E} &= -E(1 - S) - \varphi(E), \\ \dot{S} &= \epsilon^{-1} [S_e - S(1 + E^2)].\end{aligned}\tag{2.55}$$

Стационарные состояния отвечают неупорядоченному  $(0, S_e)$  и упорядоченному  $(E_0, S_0)$  состояниям, где стационарные значения напряжённости и накачки определяются равенствами

$$E_0 = E_{00} \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{E_\tau^2}{E_{00}^4} [S_e - (1 + \kappa)]} \right\}^{1/2}, \quad E_{00}^2 \equiv \frac{1}{2} [(S_e - 1) - (1 + \kappa) E_\tau^2],\tag{2.56}$$

$$S_0 = \frac{(1 + E_{00}^2) - \sqrt{(1 + E_{00}^2)^2 - (1 - E_\tau^2) S_e}}{1 - E_\tau^2}.\tag{2.57}$$

Как показывает дальнейшее рассмотрение, поведение системы определяется

производными функции  $\varphi(E)$  в первом из уравнений (2.54):

$$\begin{aligned}\varphi'(E) &= \kappa \frac{1 - E^2/E_\tau^2}{(1 + E^2/E_\tau^2)^2}, \\ \varphi''(E) &= -\frac{2\kappa (E/E_\tau)(3 - E^2/E_\tau^2)}{E_\tau (1 + E^2/E_\tau^2)^3}, \\ \varphi'''(E) &= -\frac{6\kappa (1 - 6(E/E_\tau)^2 + (E/E_\tau)^4)}{E_\tau^2 (1 + E^2/E_\tau^2)^4}.\end{aligned}\tag{2.58}$$

При этом элементы матрицы Якоби выражаются в виде

$$\begin{aligned}\Lambda_{11} &= S - \Lambda_c, \quad \Lambda_c \equiv 1 + \varphi'(E); \quad \Lambda_{12} = E; \\ \Lambda_{21} &= -2\epsilon^{-1}SE; \quad \Lambda_{22} = -\epsilon^{-1}(1 + E^2),\end{aligned}\tag{2.59}$$

где роль переменных  $X_1, X_2$  играют величины  $E, S$ , которым следует придать значения  $0, S_e$  в неупорядоченном состоянии и (2.56), (2.57) в упорядоченном. В первом из них

$$\Lambda_{11} = S_e - S_c, \quad \Lambda_{12} = \Lambda_{21} = 0, \quad \Lambda_{22} = -\epsilon^{-1}.\tag{2.60}$$

Уравнение на собственные значения (2.7) даёт инкремент

$$\lambda = \frac{1}{2} [(S - \Lambda_c) - \epsilon^{-1}(1 + E^2)]\tag{2.61}$$

и характерную частоту

$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt{8\epsilon^{-1}E^2S - [(S - \Lambda_c) + \epsilon^{-1}(1 + E^2)]^2}.\tag{2.62}$$

Стационарное состояние теряет устойчивость при условии

$$\epsilon(S - \Lambda_c) > 1 + E^2,\tag{2.63}$$

а колебательное поведение проявляется при

$$8\epsilon E^2 S > [\epsilon(S - \Lambda_c) + (1 + E^2)]^2. \quad (2.64)$$

Для неупорядоченного состояния  $(0, S_e)$  первое из этих условий принимает вид

$$S_e > S_c + \epsilon^{-1}, \quad (2.65)$$

а второе никогда не выполняется. Это означает, что предельный цикл не может зародиться из неупорядоченного состояния, и далее мы рассмотрим только упорядоченное.

Для проверки критерия зарождения цикла (2.46) выпишем входящие в него ненулевые производные обобщённых сил:

$$\begin{aligned} F_{11}^{(1)} &= -\varphi''(E_0), & F_{12}^{(1)} &= 1; \\ F_{11}^{(2)} &= -2\epsilon^{-1}S_0, & F_{12}^{(2)} &= -2\epsilon^{-1}E_0; \\ F_{111}^{(1)} &= -\varphi'''(E_0); & F_{112}^{(2)} &= -2\epsilon^{-1}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Тогда с учётом (2.58) неравенство (2.46) принимает вид

$$3 \frac{\epsilon \kappa}{E_\tau^2} \frac{1 - 6(E_0/E_\tau)^2 + (E_0/E_\tau)^4}{(1 + E_0^2/E_\tau^2)^4} < 1. \quad (2.67)$$

Значения параметров  $S_e$ ,  $\kappa$  при которых реализуется это условие, показаны на рис.2.2. Из него видно, что предельный цикл образуется при значительной накачке  $S_e$  и больших параметрах нелинейности  $\kappa$  (согласно [92], рост параметра  $E_\tau$  также расширяет область самоорганизуемой модуляции). Характерно, что значения параметров  $S_e$ ,  $\kappa$  и  $E_\tau$ , при которых реализуется режим самоорганизуемой модуляции, не всегда задаются условием  $\Re\Phi < 0$ , которое в согласии с (2.67) определяет устойчивость предельного цикла (на рис.2.2 этому условию отвечает нижняя сплошная линия). При больших  $\kappa$  нижняя граница зарождения

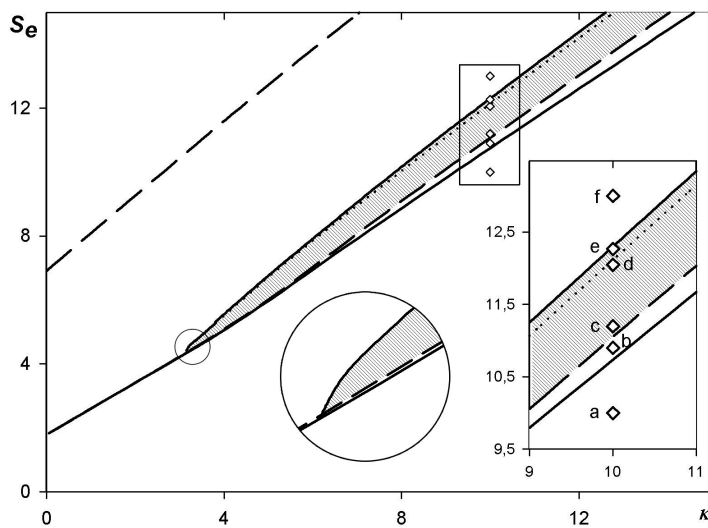


Рис. 2.2. Фазовая диаграмма, определяющая область устойчивого предельного цикла (выделена штриховкой) при  $E_\tau = 0.9$ . Нижняя сплошная линия задаётся условием  $\Phi = 0$ , верхняя – равенством  $C = 0$  при  $\lambda < 0$ ; штриховые линии определяются условием  $\Im\omega = 0$ , пунктирная – равенством  $\lambda = 0$

предельного цикла (штриховая линия) определяется условием  $\Im\omega = 0$ , обеспечивающим колебательное поведение с частотой (2.62). С другой стороны, несмотря на устойчивость упорядоченного состояния с инкрементом  $\lambda < 0$  выше пунктирной линии может реализоваться режим самоорганизуемой модуляции, в который упорядоченная система переходит по сценарию фазового перехода первого рода. В этом случае верхняя граница предельного цикла определяется условием  $C = 0$  при  $\lambda < 0$ , которое накладывается на параметр нелинейности (2.44), задаваемый при отрицательном значении инкремента (2.61).

Для подтверждения правомерности найденных условий было проведено численное решение уравнений (2.55) при значениях параметров, отвечающих точкам а–f на рис.2.2. Выбор этих точек определяется следующими условиями

$(\kappa, E_\tau = \text{const})$ :

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \lambda < 0, \quad \Im\omega \neq 0, \quad \Phi > 0; \\
 b) \quad & \lambda > 0, \quad \Im\omega \neq 0, \quad \Phi < 0; \\
 c) \quad & \lambda > 0, \quad \Im\omega = 0, \quad \Phi < 0; \\
 d) \quad & \lambda > 0, \quad \Im\omega = 0, \quad \Phi < 0; \\
 e) \quad & \lambda < 0, \quad \Im\omega = 0, \quad C < 0; \\
 f) \quad & \lambda < 0, \quad \Im\omega = 0, \quad C > 0.
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

Согласно рис.2.3, предельный цикл образуется в точках с, d, e и отсутствует в состояниях a, b, f. В соответствии с рис.2.2 это полностью подтверждает критерии (2.46), (2.63) и (2.64) применительно к системе Лоренца (2.54).

Завершая исследование самоорганизуемой модуляции, рассмотрим вид зависимости  $\varphi(E)$  силы от параметра порядка, которая обеспечивает выполнение условия (2.46). Согласно теории катастроф [83], сила  $\varphi_{\text{ext}} \equiv -\partial V_{\text{ext}}/\partial E$  определяется потенциалом

$$V_{\text{ext}} = AE + \frac{B}{2}E^2 + \frac{C}{3}E^3 + \frac{D}{4}E^4 + \frac{F}{5}E^5, \tag{2.69}$$

вид которого задаётся выбором параметров  $A, B, C, D, F$ . При этом возможные сценарии поведения системы исчерпываются тремя типами универсальных деформаций – *складкой, сборкой или ласточкиным хвостом*. Первая из них обеспечивается, если в (2.69) положить  $B = D = F = 0$ , а параметры  $A, C$  считать произвольными. В случае сборки имеем  $C = F = 0$ , а постоянные  $A, B, D$  произвольны. Для ласточкина хвоста  $D = 0$ , а параметры  $A, B, C, F$  являются свободными. Исследование универсальных деформаций показало [46], что любая из них обеспечивает только вырожденный случай, в котором условие образования

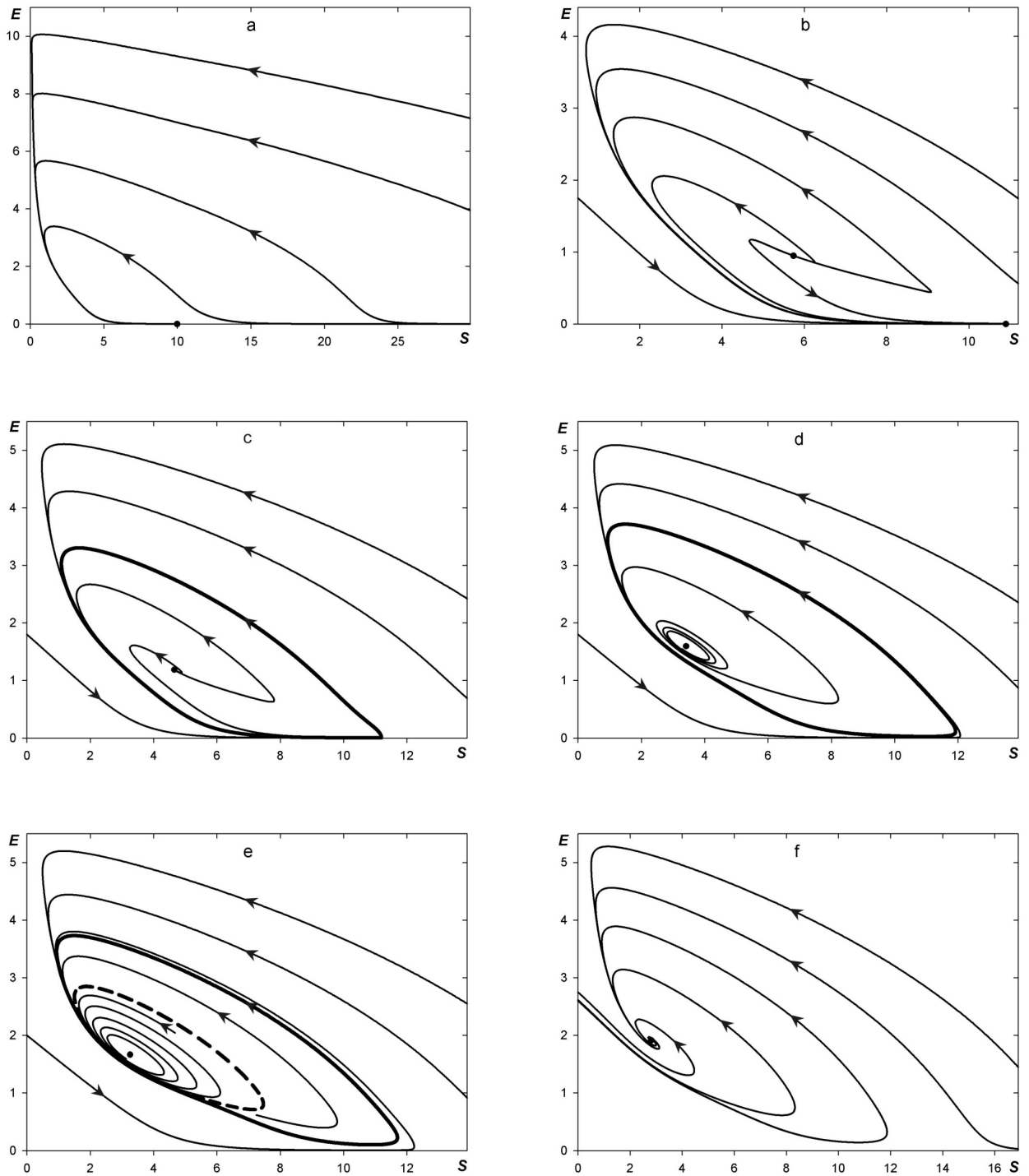


Рис. 2.3. Вид фазовых портретов, отвечающих точкам а–f на рис.2.2 (толстая сплошная линия отвечает устойчивому предельному циклу, штриховая — неустойчивому)

предельного цикла  $\Re\Phi = 0$  сопровождается выполнением требования  $\lambda = 0$  потери устойчивости узла, охватываемого этим циклом. Характерно, что оба указанных условия обеспечиваются только при фиксированных значениях параметров  $A, B, C, D, F$ , выбор которых ограничен линией в образуемом ими пространстве, причём ни при каком выборе этих параметров не выполняется условие устойчивости предельного цикла  $\Re\Phi < 0$ . Таким образом, ни одна из универсальных деформаций не приводит к предельному циклу. С физической точки зрения это обусловлено тем, что потенциал (2.69), задающий эти деформации, определяется только внешним воздействием и не зависит от состояния самоорганизующейся системы.

Как показывает изложенная схема, совершенно иная ситуация складывается при включении нелинейной силы (2.52): её действие приводит сначала к фазовому переходу первого рода [92], а затем к бифуркации Хопфа, порождающей модуляцию параметра порядка  $E$  и управляющего параметра  $S$ . Представление уравнения Гинзбурга-Ландау (2.33) в форме Ландау-Халатникова (1.3) показывает, что картина самоорганизующейся модуляции определяется эффективным потенциалом

$$V_{\text{eff}} = -\Lambda|\phi|^2 - \frac{C}{2}|\phi|^4, \quad (2.70)$$

параметры которого задаются выражениями (2.8), (2.44). С изменением модуля параметра порядка  $\eta \equiv |\phi|$  действительная часть этого потенциала

$$|V_{\text{eff}}| = -\lambda\eta^2 - \frac{\Phi}{2}\eta^4, \quad \lambda \equiv \Re\Lambda, \quad \Phi \equiv \Re C|_{\lambda=0} \quad (2.71)$$

приобретает минимум в точке  $\eta_0 = \sqrt{-\lambda/\Phi}$ , если выполняются условия

$$\lambda > 0, \quad \Phi < 0. \quad (2.72)$$

Выше мы видели, что эти условия определяют зарождение предельного цикла для

потенциала, представленного на рис.2.1а.

## 2.2. Периодическое множество предельных циклов

В подразделе 2.1 было показано, что бифуркация Хопфа приводит к быстрым изменениям пары сопряжённых переменных, которые определяют картину предельного цикла. Если кроме быстро изменяющихся переменных имеются связанные с ними медленные, то бифуркация Хопфа может привести к существенной перестройке их динамики. Покажем это, исходя из уравнений Гамильтона

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad \{q_i\} = q, Q, \quad \{p_i\} = p, P \quad (2.73)$$

для быстрых и медленных координат  $q, Q$  и сопряжённых им импульсов  $p, P$  (здесь и далее точка над переменной означает её дифференцирование по времени, малые буквы  $q, p$  отвечают быстрым переменным, большие  $Q, P$  – медленным). Соответствующий гамильтониан

$$H(q, p; Q, P) = H_s(Q, P) + H_f(q, p; Q) \quad (2.74)$$

разделяется на составляющую  $H_s(Q, P)$ , которая зависит от медленных переменных, и вклад  $H_f(p, q; Q)$ , величина которого определяется не только быстрыми переменными, но и медленной координатой.

Следуя стандартной схеме [93], перейдём от быстрых переменных  $q, p$  к канонической паре, которая сводится к быстро изменяющемуся углу  $\varphi$  и медленно изменяющемуся действию  $I$ . Этот переход сохраняет неизменным первое слагаемое гамильтониана (2.74), преобразуя второе согласно соотношению

$$H'_f(\varphi; I, Q) = H_f(q, p; Q) + \dot{Q} \frac{\partial \Psi(q; I, Q)}{\partial Q}, \quad (2.75)$$



вид которого задаётся производящей функцией  $\Psi(q; I, Q)$ , определяемой следующими связями:

$$\frac{\partial \Psi(q; I, Q)}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial \Psi(q; I, Q)}{\partial Q} = P, \quad \frac{\partial \Psi(q; I, Q)}{\partial I} = \varphi. \quad (2.76)$$

Учитывая быстрые изменения угла  $\varphi$ , естественно усреднить по ним слагаемое (2.75):

$$H'(I, Q) \equiv \langle H'_f(\varphi; I, Q) \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H'_f(\varphi; I, Q) d\varphi. \quad (2.77)$$

Для нахождения гамильтониана (2.77) следует вместо многозначной производящей функции  $\Psi(q; I, Q)$  использовать однозначно определённую

$$\Phi(\varphi; I, Q) \equiv \Psi(q(\varphi; I, Q); I, Q), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (2.78)$$

Тогда последнее слагаемое в равенстве (2.75) определяется соотношением

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Q} = \frac{\partial \Psi}{\partial Q} + p \frac{\partial q}{\partial Q}. \quad (2.79)$$

Его использование приводит к следующей форме среднего (2.77):

$$H'(I, Q) = H(I, Q) + \dot{Q} \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial Q} - p \frac{\partial q}{\partial Q} \right\rangle, \quad H(I, Q) \equiv \langle H_f(q, p; Q) \rangle. \quad (2.80)$$

В результате использование канонической пары переменных *действие-угол* даёт усреднённое значение гамильтониана (2.74) в виде

$$H_{ef}(I; Q, P) \equiv \langle H'(\varphi, I; P, Q) \rangle = \quad (2.81)$$

$$= \mathcal{H}(I; Q, P) + \dot{Q} \left( \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial Q} \right\rangle - \left\langle p \frac{\partial q}{\partial Q} \right\rangle \right), \quad (2.82)$$

где первое слагаемое

$$\mathcal{H}(I; Q, P) \equiv H(I, Q) + H_s(Q, P) \quad (2.83)$$

зависит только от медленно изменяющихся переменных.

Уравнения движения этих переменных определяются условием экстремума эффективного действия [93]

$$S_{ef}\{Q(t), P(t); I(t)\} \equiv \int_{t_{in}}^{t_f} \left[ P(t)\dot{Q}(t) - H_{ef}(I(t); Q(t), P(t)) \right] dt, \quad (2.84)$$

форма которого задаётся гамильтонианом (2.82) (здесь  $t_{in}$ ,  $t_f$  представляют начальный и конечный моменты времени). Вариация этого выражения по обобщённому импульсу приводит к уравнению движения

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\alpha}, \quad (2.85)$$

которое сохраняет начальную форму (2.73) (здесь и далее предполагается, что медленные переменные представляют векторные величины с компонентами  $Q_\alpha$ ,  $P_\alpha$ ). С другой стороны, вариация действия (2.84) по медленной координате даёт уравнение

$$\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_\alpha} + F_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\beta}, \quad (2.86)$$

содержащее добавку, обусловленную действием эффективного поля, напряжённость которого задаётся антисимметричным тензором

$$F_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial A_\beta}{\partial Q_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial Q_\beta} \quad (2.87)$$

с векторным потенциалом

$$A_\alpha \equiv \left\langle p_\beta \frac{\partial q_\beta}{\partial Q_\alpha} \right\rangle. \quad (2.88)$$

Здесь используется правило суммирования по повторяющимся греческим индексам.

Полученные соотношения (2.86) – (2.88) означают, что быстрые изменения величин, которые зависят от медленных переменных, индуцируют эффективное поле, потенциал которого определяется корреляцией (взятой по изменению угла) между изменениями быстрого импульса и скорости изменения быстрой координаты с ростом медленной [94]. В полной аналогии с вращением сверхтекучего  $\text{He}^4$  это означает, что бифуркация Хопфа приводит к вращению не только конфигурационной точки, но и всей области фазового пространства, ограниченной предельным циклом. Таким образом, фазовая плоскость системы ведёт себя не как математический, а как физический объект [47, 48].

Отметим, что указанный результат получен для гамильтоновых систем, тогда как уравнения Лоренца, лежащие в основе рассмотрения, приведенного в подразделе 2.1, описывают диссипативную систему. Однако из соотношений (2.73) – (2.88) легко видеть, что проведенное рассмотрение требует гамильтоновой динамики только для быстрых переменных, а медленные могут изменяться произвольным образом. Имея в виду это обстоятельство, рассмотрим конечную область фазовой плоскости, которая образуется координатой  $q$  и импульсом  $p$  и вращается с угловой скоростью  $\vec{\omega}_0$  и моментом инерции  $I$ . С физической точки зрения величина  $\vec{\omega}_0$  определяет частоту внешнего поля, а момент инерции  $I$  сводится к полному действию вращающейся фазовой плоскости. Если она ведёт себя как твёрдый диск, то фазовая точка с координатой  $\mathbf{r}$ , отсчитанной от центра вращения, имеет линейную скорость  $\mathbf{v}_n = [\vec{\omega}_0, \mathbf{r}]$ .

Выше мы показали, что бифуркация Хопфа приводит к образованию предельного цикла, который индуцирует эффективное поле, определённое

потенциалом (2.88) и напряжённостью (2.87). Для фазовой плоскости их величины сводятся к линейной и угловой скоростям  $\mathbf{w}$  и  $\vec{\omega}$  соответственно. Благодаря действию эффективного поля эти скорости не совпадают с величинами  $\mathbf{v}_n$  и  $\vec{\omega}_0$ , обусловленными вращением фазовой плоскости как целого. Действительно, если образование предельного цикла представить как упорядочение, определяемое комплексным параметром порядка  $\phi = \eta e^{i\varphi}$ , то градиент фазы  $\mathbf{v}_s \equiv s\nabla\varphi$  с  $\nabla \equiv \partial/\partial\mathbf{r}$  и элементарным действием  $s$  направлен таким образом, чтобы компенсировать вращение фазового пространства вне предельного цикла, где скорость  $\mathbf{w} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ . Формально это выражается в удлинении градиента  $\nabla \Rightarrow \nabla - (i/s)\mathbf{w}$  калибровочным полем  $\mathbf{w}$ . В отличие от твердотельного вращения фазовой плоскости его действие приводит к нелинейной связи  $\vec{\omega} = (1/2)\text{rot}\mathbf{w}$  между угловой  $\vec{\omega}$  и линейной  $\mathbf{w}$  компонентами скорости вращения.

Хорошо известный пример такого поведения представляет сверхтекучий  $\text{He}^4$ , помещённый во вращающийся сосуд [95, 96]. По аналогии с этим случаем плотность эффективной энергии фазовой плоскости, вращающейся вместе с набором предельных циклов, имеет вид [97]

$$E = e(\eta) + \frac{1}{2} \left| (-is\nabla - \mathbf{w})\eta \right|^2 + \frac{I}{2}\omega^2. \quad (2.89)$$

В рамках феноменологической схемы плотность энергии, обусловленная образованием предельных циклов, сводится к разложению Ландау

$$e(\eta) = a\eta^2 + \frac{b}{2}\eta^4 \quad (2.90)$$

с коэффициентами  $a \equiv (1 - S_e)/2$ ,  $b \equiv S_e/2$ . Второе слагаемое в правой части (2.89) определяет энергию неоднородности с градиентом, удлинённым за счёт векторного потенциала калибровочного поля  $\mathbf{w}$ , а последний член представляет кинетическую энергию вращающейся плоскости.

При наличии внешнего воздействия с частотой  $\vec{\omega}_0$  поведение системы

задаётся плотностью эффективного потенциала

$$\tilde{E} = E - (I\vec{\omega}_0 + \mathbf{M}) \vec{\omega}_0, \quad (2.91)$$

величина которого определена по отношению к плоскости, вращающейся с угловым моментом  $\mathbf{M} = I(\vec{\omega} - \vec{\omega}_0)$ . Стационарные распределения параметра порядка  $\eta(\mathbf{r})$  и относительной скорости  $\mathbf{w}(\mathbf{r})$  задаются условием экстремума эффективной энергии

$$\mathcal{E}\{\eta(\mathbf{r}), \mathbf{w}(\mathbf{r})\} = \int \tilde{E}(\eta(\mathbf{r}), \mathbf{w}(\mathbf{r})) d\mathbf{r}, \quad (2.92)$$

где интегрирование проводится по всей фазовой плоскости. При этом граничные условия принимают вид:

– вдали от предельного цикла

$$\eta = 0, \quad \nabla\eta = 0, \quad \mathbf{w} = [\vec{\omega}_0, \mathbf{r}], \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}_0; \quad (2.93)$$

– внутри предельного цикла

$$\eta = \eta_0, \quad \nabla\eta = 0, \quad \mathbf{w} = 0, \quad \vec{\omega} = 0; \quad (2.94)$$

– на линии предельного цикла

$$\mathbf{n}(-is\nabla - \mathbf{w})\eta = 0. \quad (2.95)$$

Здесь  $\mathbf{n}$  – единичный вектор, перпендикулярный предельному циклу,  $\eta_0 = \sqrt{-a/b}$  – стационарное значение параметра порядка, отвечающее минимуму зависимости (2.90).

Согласно приведенным выражениям, плотность энергии неупорядоченной

фазы, которая бесконечно удалена от предельного цикла, равна  $\tilde{E}(0) = -(I/2)\vec{\omega}_0^2$ , тогда как для упорядоченной области, ограниченной этим циклом, имеем  $\tilde{E}(\eta_0) = -(|a|/2)\eta_0^2$ . В результате условие фазового равновесия  $\tilde{E}(\eta_0) = \tilde{E}(0)$  определяет характерное значение угловой скорости

$$\omega_c \equiv \sqrt{\frac{|a|\eta_0^2}{I}} = \sqrt{\frac{a^2}{Ib}}, \quad (2.96)$$

которое задаёт масштаб энергии  $E_c \equiv I\omega_c^2 = |a|\eta_0^2 = a^2/b$ . Кроме того, определим характерные длины  $\lambda$ ,  $\xi$  и их отношение  $\kappa = \lambda/\xi$ :

$$\lambda \equiv \sqrt{\frac{Ib}{4|a|}}, \quad \xi \equiv \sqrt{\frac{s^2}{2|a|}}, \quad \kappa \equiv \sqrt{\frac{I}{I_0}}, \quad I_0 \equiv \frac{2s^2}{b}. \quad (2.97)$$

После этого удобно измерять плотность энергии  $\tilde{E}$  в единицах  $E_c$ , величину параметра порядка  $\eta$  относить к  $\eta_0$ , угловую скорость  $\vec{\omega}$  к  $\omega_c$ , линейные скорости  $\mathbf{v}_n$ ,  $\mathbf{w}$  к  $2\sqrt{2}\lambda\omega_c$ , угловой момент  $\mathbf{M}$  к  $2\sqrt{2}I\lambda\omega_c$ , расстояние  $r$  к  $\lambda$ . Тогда плотность энергии (2.91) сводится к простейшему виду

$$\tilde{E} = \left| (-i\kappa^{-1}\nabla - \mathbf{w}) \eta \right|^2 - \left( \eta^2 - \frac{1}{2}\eta^4 \right) - \left( \vec{\omega}_0 - \frac{1}{2}\vec{\omega} \right) \vec{\omega}. \quad (2.98)$$

Подставляя это равенство в полную энергию (2.92) и варьируя получающийся функционал, приходим к уравнениям

$$\kappa^{-2}\nabla^2\eta = - (1 - \mathbf{w}^2) \eta + \eta^3, \quad (2.99)$$

$$\text{rot rot } \mathbf{w} = -\eta^2\mathbf{w}. \quad (2.100)$$

Согласно [95, 96], их решение определяется параметром  $\kappa$ , который задаётся парой последних равенств (2.97). Обычно область изменений быстрых переменных

настолько мала, что выполняется условие  $\kappa \leq 2^{-1/2}$ , и самоорганизация системы приводит к образованию единственного предельного цикла. Более интересная ситуация реализуется в том случае, когда фазовая плоскость настолько велика, что выполняется обратное условие  $\kappa > 2^{-1/2}$ . Тогда в интервале угловых скоростей  $\omega_{c1} < \omega_0 < \omega_{c2}$ , ограниченных предельными значениями

$$\omega_{c1} \equiv \frac{\ln \kappa}{\sqrt{2\kappa}} \omega_c = \frac{|a|}{4s} \left( \frac{I}{I_0} \right)^{-1} \ln \frac{I}{I_0}, \quad (2.101)$$

$$\omega_{c2} \equiv \sqrt{2\kappa} \omega_c = |a|/s, \quad (2.102)$$

образуется смешанное состояние, которое представляет набор вращающихся круговых предельных циклов, периодически распределённых по площади фазовой плоскости, которая покоится несмотря на действие внешнего момента. Каждому из этих циклов отвечает элементарное действие  $2\pi s$ , а их плотность на единицу площади достигает максимальной величины  $N_{\max} = 1/\pi\xi^2$  при внешней частоте  $\omega_0 = \omega_{c2}$ . При спадании частоты в интервале  $0 < \omega_{c2} - \omega_0 \ll \omega_{c2}$  плотность предельных циклов уменьшается согласно равенству

$$\frac{N}{N_{\max}} = \frac{\omega_0}{\kappa} - \frac{\overline{\eta^2}}{2\kappa^2}, \quad (2.103)$$

в котором среднее по фазовой плоскости  $\overline{\eta^2}$  связано с частотой  $\omega_0$  соотношением

$$\overline{\eta^2} = \frac{2\kappa}{\beta(2\kappa^2 - 1)} (\kappa - \omega_0), \quad \beta \equiv \overline{\eta^4}/(\overline{\eta^2})^2 = 0.1596. \quad (2.104)$$

При этом средняя частота

$$\overline{\omega} = \omega_0 - \overline{\eta^2}/2\kappa = \omega_0 - (\kappa - \omega_0)/\beta(2\kappa^2 - 1) \quad (2.105)$$

меньше внешней  $\omega_0$  на величину

$$\bar{M} = -\bar{\eta}^2/2\kappa = -(\kappa - \omega_0)/\beta(2\kappa^2 - 1), \quad (2.106)$$

равную средней поляризации фазовой плоскости благодаря вращению предельных циклов. Максимальная величина угловой скорости достигается в их центрах, а минимальное значение  $\omega_{\min} = \omega_0 - \sqrt{2}(\kappa - \omega_0)/(2\kappa^2 - 1)$  – в центрах треугольников, образуемых решёткой предельных циклов (см. рис.2.4). Среднее

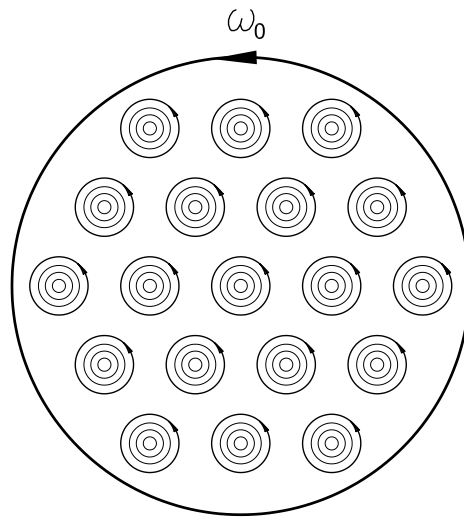


Рис. 2.4. Распределение вращающихся предельных циклов по фазовой плоскости при  $\kappa > 2^{-1/2}$ ,  $\omega_{c1} < \omega_0 < \omega_{c2}$

изменение эффективной энергии (2.92), обусловленное вращением предельных циклов,

$$\bar{\mathcal{E}} = I\omega_c^2 \left( \frac{1}{2} + \bar{\omega}^2 - \frac{\bar{\eta}^4}{2} \right) = I\omega_c^2 \left[ \frac{1}{2} + \bar{\omega}^2 - \frac{(\kappa - \bar{\omega})^2}{1 + \beta(2\kappa^2 - 1)} \right] \quad (2.107)$$

определяется средней скоростью  $\bar{\omega}$ , дифференцирование по которой приводит к (2.105).

Вблизи нижней границы  $\omega_{c1}$  плотность предельных циклов  $N = (\kappa/2\pi)\bar{\omega}$



невелика, и их можно рассматривать независимым образом. Принимая во внимание, что  $w(r)$  изменяется на расстояниях  $r \sim 1$ , а  $\eta(r)$  — на длинах  $r \sim \kappa^{-1} \ll 1$ , для относительной скорости будем использовать уравнение (2.100) с  $\eta^2 \approx 1$  и  $\kappa \gg 1$ :

$$w = -\kappa^{-1}K_1(r), \quad (2.108)$$

где  $K_1(\mathbf{r})$  — функция Ганкеля мнимого аргумента. Соответственно, параметр порядка определяется уравнением (2.99) с  $w = -1/\kappa r$ :

$$\begin{aligned} \eta &\simeq cr \quad \text{при } r \ll \kappa^{-1}, \\ \eta^2 &\simeq 1 - (\kappa r)^{-2} \quad \text{при } r \gg \kappa^{-1}, \end{aligned} \quad (2.109)$$

где  $c$  — положительная константа. Из (2.108) следует

$$\begin{aligned} w &\approx -1/\kappa r \quad \text{при } r \ll 1; \\ w &\approx -\sqrt{\pi/2\kappa^2} r^{-1/2} e^{-r} \quad \text{при } r \gg 1. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Зависимость  $\bar{\omega}(\omega_0)$  характеризуется монотонно восходящей кривой, которая при  $\omega_0 = \omega_{c1}$  имеет вертикальную касательную, а с ростом  $\omega_0$  выходит на прямую линию  $\bar{\omega} = \omega_0$ . Эффективная энергия одного предельного цикла составляет  $(2\pi/\kappa^2) \ln \kappa$ , а угловая скорость  $\omega$  в его центре вдвое больше  $\omega_{c1}$ .

Проведенное рассмотрение показывает, что образование предельного цикла в результате бифуркации Хопфа представляет фазовый переход, определённый комплексным параметром порядка  $\phi = \eta e^{i\varphi}$ . Его амплитуда  $\eta$  сводится к медленно изменяющейся переменной (выше она была обозначена как  $Q$ ), а угол  $\varphi$  быстро изменяется со временем, распределяясь в пространстве таким образом, что градиент  $\mathbf{v}_s \equiv s\nabla\varphi$  компенсирует скорость  $\mathbf{v}_n = [\bar{\omega}_0, \mathbf{r}]$  вращения фазовой плоскости как целого. Благодаря этому упорядочение способствует спаданию линейной скорости  $\mathbf{w} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$  ниже значения  $\mathbf{v}_n$ . Поскольку угловая и линейная

составляющие связаны соотношением  $\vec{\omega} = (1/2)\text{rot}\mathbf{w}$ , присущим напряжённости и потенциалу калибровочного поля, то указанная компенсация приводит также к редукции внешнего значения  $\vec{\omega}_0$  к внутреннему  $\vec{\omega} < \vec{\omega}_0$ .

Обычно область изменения координаты и импульса, отвечающая предельному циклу, занимает всю фазовую плоскость, благодаря чему параметр  $\kappa = \sqrt{I/I_0}$  принимает значения  $\kappa \sim 1$ . При этом бифуркация Хопфа приводит к образованию единственного предельного цикла, представляющего периодические изменения состояния самоорганизующейся системы. В противоположном случае область изменения быстрых переменных, отвечающая предельному циклу, намного меньше полной площади фазовой плоскости, и выполняется условие  $\kappa \gg 1$ . Если при этом система подвержена периодическому воздействию, частота которого  $\omega_0$  ограничена интервалом  $\omega_{c1} \div \omega_{c2}$ , определённым равенствами (2.101), (2.102), то процесс самоорганизации приводит к множественному резонансу с внешним полем (при частотах  $\omega_0 < \omega_{c1}$  бифуркация Хопфа не реализуется, а при  $\omega_0 > \omega_{c2}$  предельный цикл расплывается по всей фазовой плоскости, обеспечивая колебания, заданные внешним полем). В интервале  $\omega_{c1} \div \omega_{c2}$  средние величины координаты и импульса, отвечающие данному резонансу, определяются положением соответствующего предельного цикла, а амплитуда их колебаний задаётся корреляционной длиной  $\xi$ , определённой вторым равенством (2.97). С ростом внешней частоты первый из указанных резонансов появляется при  $\omega_0 = \omega_{c1}$ , а их максимальное число  $N_{\max} \sim \xi^{-2}$  достигается при частоте  $\omega_0 = \omega_{c2}$ . При этом плотность предельных циклов изменяется по закону (2.103), а средняя частота резонанса задаётся равенством (2.105).

### 2.3. Фазовый анализ когерентного излучения ансамбля квантовых точек

Явление когерентного излучения света атомами и молекулами хорошо известно и подробно исследовано (см., например, [98, 99]). В последнее время когерентное излучение наблюдалось также для бозе-эйнштейновских конденсатов

атомов [100], спинов ядер [101] и магнитных молекул [102]. В работе [103] было предположено, что если расстояния между квантовыми точками или ямами не превышают длину излучения, то между ними возникает эффективное взаимодействие через электромагнитное поле, благодаря чему наноструктуры также могут переходить в режим когерентного излучения. Развитие современных технологий позволило сформировать ансамбли нанообъектов с плотностью, достаточной для обеспечения такого режима [104]. В результате когерентное излучение было обнаружено для квантовых точек [105], полупроводниковых гетероструктур [106] и фотонных кристаллов [107].

С физической точки зрения такое поведение объясняется тем, что движение носителей заряда в квантовых ямах, нитях и точках ограничено в одном, двух или трёх направлениях. Благодаря этому указанные нанообъекты обладают квантовыми уровнями энергии, которые характерны для изолированных атомов и молекул (в этой связи квантовые точки принято называть "искусственными атомами") [108, 109]. Поскольку с ростом размерностей нанообъектов плотность их электронных состояний значительно падает, то наиболее эффективными носителями квантовых свойств являются квантовые точки, а с переходом к нитям и ямам эти свойства значительно ослабляются.

Микроскопическая теория когерентного излучения квантовых точек показывает [110], что эволюция системы сводится к следующим стадиям:

- в течение короткого интервала  $10^{-15} \div 10^{-14}$  с развивается *флуктуационный режим*, в котором квантовые точки, представляющие электрические диполи, начинают автономное излучение электромагнитных волн, но взаимодействие между ними ещё отсутствует;
- до момента времени  $10^{-14} \div 10^{-13}$  с протекает *квантовая стадия*, в течение которой диполи начинают эффективный обмен фотонами, но когерентность не успевает развиться;
- на *когерентной стадии*, протекающей до времени  $t_{coh} \sim 10^{-13} \div 10^{-12}$  с,

квантовые точки эммитируют импульс когерентного излучения (максимум импульса достигается по истечении времени задержки порядка  $5t_{coh}$ , а его длительность составляет примерно  $2t_{coh}$ );

- после испускания импульса электромагнитного излучения, система за время  $T \sim 10^{-9}$  с релаксирует в *некогерентное состояние*;
- при  $t > T$  в ансамбле квантовых точек, не подверженном внешней накачке или состоящем из слабо взаимодействующих диполей, устанавливается *стационарное состояние*, отвечающее притягивающему узлу фазовой плоскости; в обратном случае реализуется последовательность, состоящая примерно из 10 импульсов, следующих с периодом порядка  $10^{-13}$  с.

Особенность подхода [110] состоит в том, что при переходе от микроскопических величин к макроскопическим использованы две принципиально разные процедуры усреднения: в рамках первой производится перебор статистических состояний квантовой системы, при котором используется среднеполевое расщепление всех корреляторов; при последующем усреднении по стохастическим изменениям динамических величин удерживаются парные корреляторы амплитуд флуктуаций этих величин. Такой подход позволил последовательным образом учесть коллективные эффекты, приводящие к перенормировке эффективных значений параметров системы (в отличие от когерентного излучения атомов и молекул эти эффекты играют основную роль в ансамбле полупроводниковых нанобъектов).

Использование схемы [110] даёт описание не только развитого режима когерентного излучения, но и последовательно представляет механизм выхода на этот режим благодаря усилению электромагнитного излучения. При этом оказывается недостаточным использовать одномодовое приближение, поскольку непротиворечивая картина явления требует учёта полного набора поперечных мод излучения, по которым следует провести пространственное усреднение. В результате были получены динамические уравнения, связывающие

скорости изменения поляризации ансамбля квантовых точек  $P$  и разности заселённостей электронных уровней  $S$  со значениями самих величин  $P$  и  $S$  [110]. Численное решение этих уравнений показывает, что при определённых соотношениях параметров система может генерировать как одиночные импульсы электромагнитного излучения, так и их последовательности. Однако при этом использовались значения параметров, не реализуемые в полупроводниковых нанобъектах (так, при получении немонотонных временных зависимостей, показанных на рис.3 работы [110], принято аномально большое значение параметра затухания разности заселённостей уровней). Поэтому представляется актуальным более подробное исследование возможных режимов генерации электромагнитного излучения ансамблем квантовых точек.

Как известно из синергетики [6], наиболее просто такое исследование достигается использованием метода фазовой плоскости, в рамках которого вместо временных зависимостей  $P(t)$  и  $S(t)$  рассматривается самосогласованное изменение самих величин  $P$  и  $S$ , выражающееся фазовым соотношением  $P(S)$ . Настоящий подраздел посвящён проведению такого исследования: сначала даётся краткое изложение схемы [110], которая приводит к динамическим уравнениям для поляризации  $P$  и разности заселённостей уровней  $S$ ; затем на основе этих уравнений проводится исследование условий когерентного излучения, приводящее к заключению о возможных режимах при реальных значениях параметров квантовых точек.

Согласно [110], микроскопическое поведение системы определяется временными зависимостями операторов псевдоспина  $\sigma_i^-(t)$ ,  $\sigma_i^+(t)$ ,  $\sigma_i^z(t)$ , распределённых по узлам  $i = 1, \dots, N$ , векторным потенциалом и напряжённостями электромагнитного поля излучения, а также токами, которые индуцируются квантовыми точками и содержащей их полупроводниковой средой. При этом поведение псевдоспинов задаётся уравнениями Гейзенберга, а электромагнитное поле подчиняется операторным уравнениям Максвелла. Решение последних позволяет выразить потенциал поля через соответствующие

токи, в результате чего он представляется суммой вкладов, обусловленных самодействием дипольных моментов квантовых точек, их излучением и стохастической составляющей, связанной со случайными изменениями полей диполей и содержащей их среды. Использование этого потенциала приводит к замкнутой системе уравнений для псевдоспинов, взаимодействующих через электромагнитное поле излучения.

Макроскопическое поведение системы определяется квантовыми средними напряжённости поля излучения

$$E_i(t) = 2 \langle \sigma_i^-(t) \rangle, \quad (2.111)$$

поляризации

$$P_i(t) = (2/N) \sum_{j(\neq i)} \langle \sigma_i^+(t) \sigma_j^-(t) + \sigma_i^-(t) \sigma_j^+(t) \rangle \quad (2.112)$$

и разности заселённостей уровней

$$S_i(t) = 2 \langle \sigma_i^z(t) \rangle. \quad (2.113)$$

Поскольку расстояние между квантовыми точками намного меньше длины волны излучения, то можно перейти от суммирования по узлам к интегрированию по координате. С другой стороны, размеры пространства, в котором происходит излучение, намного превышают длину волны, благодаря чему удобно представить пространство излучения в виде цилиндра, вдоль оси  $z$  которого направлен волновой вектор  $\mathbf{k}$ . Тогда можно провести усреднение всех пространственных зависимостей по направлению, перпендикулярному оси цилиндра, а продольную зависимость поля излучения представить плоской волной  $e^{i(kz-\omega t)}$  с частотой  $\omega$ . В

результате эффективная сила, действующая на квантовую точку, принимает вид

$$f = Fe^{-i\omega t} + \xi(t), \quad (2.114)$$

где амплитуда  $F$  определяет детерминистическую составляющую, а слагаемое  $\xi(t)$  – стохастический вклад, обусловленный случайными изменениями полей диполей и полупроводниковой среды.

Уравнения движения, полученные в результате указанных преобразований, необходимо усреднить по стохастической добавке  $\xi(t)$ . При этом следует иметь в виду принципиально важное обстоятельство: если квантовое усреднение, обозначенное выше угловыми скобками, предполагает расцепление корреляторов псевдоспинов, отвечающих различным узлам, то при усреднении по шуму  $\xi(t)$  необходимо принять  $\overline{\xi^*(t)\xi(t')} \neq 0$  при  $\overline{\xi(t)} = 0$  (здесь и далее черта над символами означает среднее по  $\xi(t)$ ). В результате уравнения движения, описывающие стохастическое излучение квантовых точек, принимают вид [110]

$$\frac{dE}{dt} = -[i\Omega(S) + \Gamma_P(S)] E + fS, \quad (2.115)$$

$$\frac{dP}{dt} = -2\Gamma_P(S)P + (f^*E + E^*f)S, \quad (2.116)$$

$$\frac{dS}{dt} = -\gamma_S(S - S_e) - g_P\gamma_P P - \frac{1}{2}(f^*E + E^*f)S. \quad (2.117)$$

Здесь коллективная частота излучения  $\Omega = \Omega(S)$  и эффективный декремент затухания  $\Gamma_P = \Gamma_P(S)$  определяются выражениями

$$\Omega \equiv \omega_0 + g_S\gamma_P S, \quad \Gamma_P \equiv \gamma_P(1 - g_P S), \quad (2.118)$$

где  $\omega_0$  — собственная частота резонатора,  $\gamma_P$ ,  $\gamma_S$  и  $g_P$ ,  $g_S$  — параметры затухания и константы связи величин  $P$ ,  $S$ .

При рассмотрении системы (3.14) — (3.16) обращает на себя внимание наличие большого множителя  $\Omega(S)$  в правой части уравнения (3.14). Поэтому в предположении

$$\frac{\gamma_S}{\omega_0} \ll 1, \quad \frac{\gamma_P}{\omega_0} \ll 1 \quad (2.119)$$

можно принять, что поле  $E(t)$  изменяется намного быстрее поляризации  $P(t)$  и разности заселённостей уровней  $S(t)$ . Это позволяет провести интегрирование уравнения (3.14), полагая две последние величины постоянными. В результате получаем временную зависимость напряжённости поля излучения в следующем виде [110]:

$$E = \left( E_0 - \frac{FS}{\delta + i\Gamma_P} \right) e^{-(i\Omega + \Gamma_P)t} + \frac{FS}{\delta + i\Gamma_P} e^{-i\omega t} + S \int_0^t \xi(t') e^{-(i\Omega + \Gamma_P)(t-t')} dt'. \quad (2.120)$$

Здесь величина

$$\delta \equiv \omega - \Omega = \Delta - g_S \gamma_P S \quad (2.121)$$

задаётся девиацией частоты  $\Delta \equiv \omega - \omega_0$ .

При подстановке выражения (3.19) в уравнения (3.15), (3.16) появляются слагаемые, пропорциональные коррелятору  $\overline{\xi^*(t)\xi(t')}$ , быстро изменяющемуся в зависимости от времён  $t$  и  $t'$ . Проводя усреднение по ним, приходим к декременту



затухания

$$\gamma \equiv \Re \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_0^t \overline{\xi^*(t)\xi(t')} e^{-(i\Omega + \Gamma_P)(t-t')} dt'. \quad (2.122)$$

При этом уравнения (3.15), (3.16) принимают вид

$$\frac{dP}{dt} = -2\gamma_P (1 - g_P S) P + 2\Gamma S^2, \quad (2.123)$$

$$\frac{dS}{dt} = \gamma_S S_e - (\gamma_S + \Gamma) S - g_P \gamma_P P, \quad (2.124)$$

где введён эффективный декремент затухания

$$\Gamma \equiv \gamma + \frac{|F|^2 \Gamma_P}{\Gamma_P^2 + \delta^2} (1 - e^{-\Gamma_P t}) \simeq \gamma + \frac{|F|^2 \Gamma_P}{\Gamma_P^2 + \delta^2}, \quad (2.125)$$

принимающий постоянное значение при  $t \gg \Gamma_P^{-1}$ .

При анализе системы уравнений (3.28), (3.29) удобно измерять время  $t$  в масштабе  $\omega_0^{-1}$ , частоту  $\omega$ , декременты затухания  $\gamma_P$ ,  $\gamma_S$ ,  $\gamma$ ,  $\Gamma$  и амплитуду поля  $F$  относить к собственной частоте  $\omega_0$ , поляризацию  $P$  — к  $g_P^{-2}$ , а разность заселённостей уровней  $S$  — к  $g_P^{-1}$ . Тогда уравнения (3.28), (3.29) принимают упрощённую форму

$$\frac{dP}{dt} = -2\gamma_P (1 - S) P + 2\Gamma S^2, \quad (2.126)$$

$$\frac{dS}{dt} = \gamma_S S_e - (\gamma_S + \Gamma) S - \gamma_P P, \quad (2.127)$$

где введен эффективный декремент затухания

$$\Gamma \simeq \gamma + \frac{\gamma_P |F|^2 (1 - S)}{\gamma_P^2 (1 - S)^2 + [(\omega - 1) - g\gamma_P S]^2} \quad (2.128)$$

с отношением констант связи  $g \equiv g_S/g_P \sim 1$ .

Согласно методике [49], характер решений уравнений (2.126), (2.127) определяется стационарным состоянием  $P = P_0$ ,  $S = S_0$ , в котором поляризация и разность заселённостей уровней теряют зависимость от времени. При этом система (2.126), (2.127) приводит к уравнениям

$$P = \frac{\gamma_S}{\gamma_P} (S_e - S) S, \quad (2.129)$$

$$(1 - S) (S_e - S) = \frac{\Gamma(S)}{\gamma_S} S, \quad (2.130)$$

где эффективный декремент затухания  $\Gamma = \Gamma(S)$  даётся выражением (2.128). В общем случае аналитическое решение этих уравнений не представляется возможным ввиду сложности зависимости  $\Gamma(S)$ . Из предельных случаев слабой и сильной расстройек резонатора

$$\Gamma \approx \gamma + \begin{cases} \frac{|F|^2(1-S)}{\gamma_P[(1-S)^2+g^2S^2]}, & |\omega - 1| \ll \gamma_{P,S}S_e, \\ \frac{\gamma_P|F|^2}{(\omega-1)^2}(1-S), & |\omega - 1| \gg \gamma_{P,S}S_e \end{cases} \quad (2.131)$$

видно, что благодаря условию  $|F|^2 \ll \gamma_P$  всегда можно использовать оценку  $\Gamma(S) \approx \gamma$ . В результате для стационарных значений разности заселённостей уровней и поляризации получаем

$$S_0 \approx p_+ - \sqrt{p_+^2 - S_e}, \\ P_0 \approx \frac{\gamma_S}{\gamma_P} \left( -p_- + \sqrt{p_+^2 - S_e} \right) \left( p_+ - \sqrt{p_+^2 - S_e} \right), \quad (2.132)$$

где  $p_{\pm} = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\gamma}{\gamma_S} \right) \pm S_e \right]$ . Учёт зависимости  $\Gamma(S)$  показывает, что с ростом расстройки  $|\omega - 1|$  величина  $S_0$  слабо нарастает, изменяясь тем в большей степени, чем меньше декремент  $\gamma_S$ , а стационарная поляризация  $P_0$  спадает тем сильнее, чем ниже значение  $\gamma_P$ . Поскольку  $\gamma_S \ll \gamma_P \lesssim \gamma$ , то стационарные значения даются оценками

$$S_0 \approx \frac{\gamma_S}{\gamma} S_e, \quad P_0 \approx \frac{\gamma_S^2}{\gamma \gamma_P} S_e^2, \quad (2.133)$$

которые показывают, что в стационарном состоянии квантовых точек устанавливается разность заселённостей уровней, которая намного меньше уровня накачки, а поляризация оказывается пропорциональной его квадрату с ещё меньшим коэффициентом.

Для анализа устойчивости стационарного состояния (3.63) удобно записать уравнения (2.126), (2.127) в символической форме  $\dot{x}_\alpha = f_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , где точка означает дифференцирование по времени, координаты  $x_\alpha$  сводятся к поляризации  $P$  и разности заселённостей уровней  $S$ , а силы  $f_\alpha$  представляют правые части указанных уравнений. Тогда устойчивость стационарного состояния  $x_\beta = x_{\beta 0}$  определяется матрицей Якоби [25]

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \left. \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\beta} \right|_{x_\beta = x_{\beta 0}}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad (2.134)$$

которая для уравнений (2.126), (2.127) принимает вид

$$\hat{\Lambda} \approx \begin{pmatrix} -2\gamma_P & 4\gamma_S S_e \\ -\gamma_P & -(\gamma + \gamma_S) \end{pmatrix}, \quad (2.135)$$

Вблизи стационарного состояния закон движения выражается экспоненциальной зависимостью  $x_\alpha - x_{\alpha 0} \propto e^{\lambda t}$ , подстановка которой в уравнения движения (2.126), (2.127) даёт показатели Ляпунова  $\lambda_P \approx -2\gamma_P$ ,  $\lambda_S \approx -\gamma$ . Их отрицательные

значения указывают на то, что стационарное состояние (3.63) отвечает притягивающему узлу фазовой плоскости, благодаря чему когерентное излучение квантовых точек оказывается устойчивым как к флуктуациям поляризации, так и к разности заселённостей уровней.

Эволюция системы представляется фазовыми портретами, показанными на рис. 2.5. Из этих портретов видно, что при реальном соотношении параметров  $|F|^2 \ll \gamma_P$ ,  $\gamma_S \ll \gamma_P \lesssim \gamma$  и наличии накачки  $S_e$  когерентное излучение

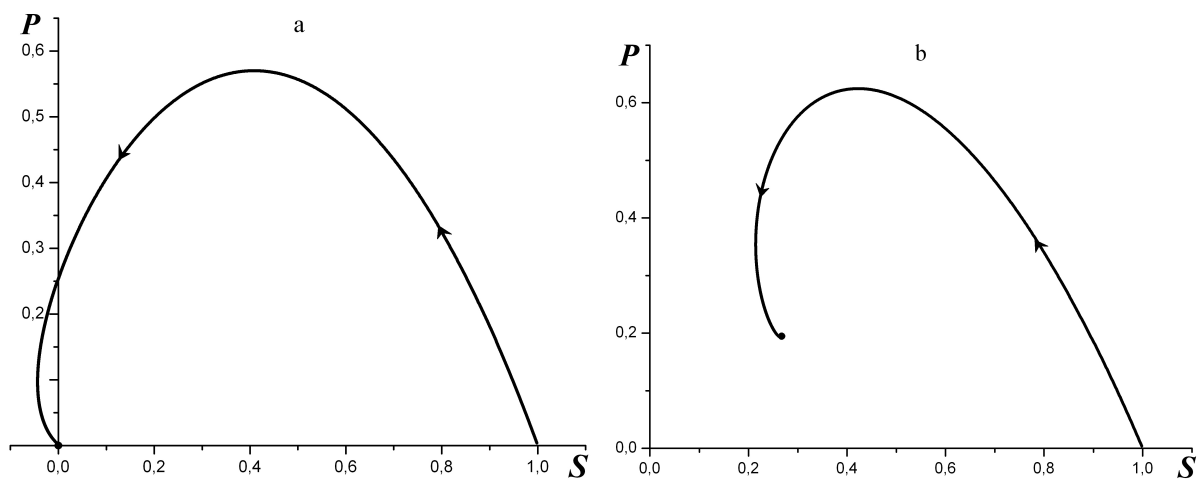


Рис. 2.5. Фазовые портреты когерентного излучения квантовых точек при  $\gamma_P = 10^{-1}$ ,  $\gamma = 2 \cdot 10^{-1}$ ,  $\omega = 1$ ,  $F = 10^{-2}$ ,  $g = 1$ ,  $S_e = 1$  и  $\gamma_S = 10^{-3}$  (a),  $\gamma_S = 10^{-1}$  (b)

квантовых точек протекает в режиме гигантского импульса [82] вне зависимости от расстройки резонатора  $\omega - 1$  и параметров связи  $F$ ,  $g$ . Характерно, что увеличение параметра затухания разности заселённостей уровней вплоть до anomalно больших значений  $\gamma_S \sim \gamma_P$  приводит только к слабой немонотонности в изменении величин  $P$  и  $S$  и повышению их стационарных значений (3.63). Однако затухающие осцилляции, обнаруженные в работе [110], при этом не проявляются.

На рис. 2.6 приведены временные зависимости поляризации  $P(t)$  и разности заселённостей уровней  $S(t)$ , отвечающие фазовым портретам на рис. 2.5. Эти зависимости подтверждают вывод о том, что рост параметра затухания заселённостей уровней до anomalно больших значений  $\gamma_S = \gamma_P = 10^{-1}$  приводит к слабой немонотонности в изменении поляризации и разности заселённостей

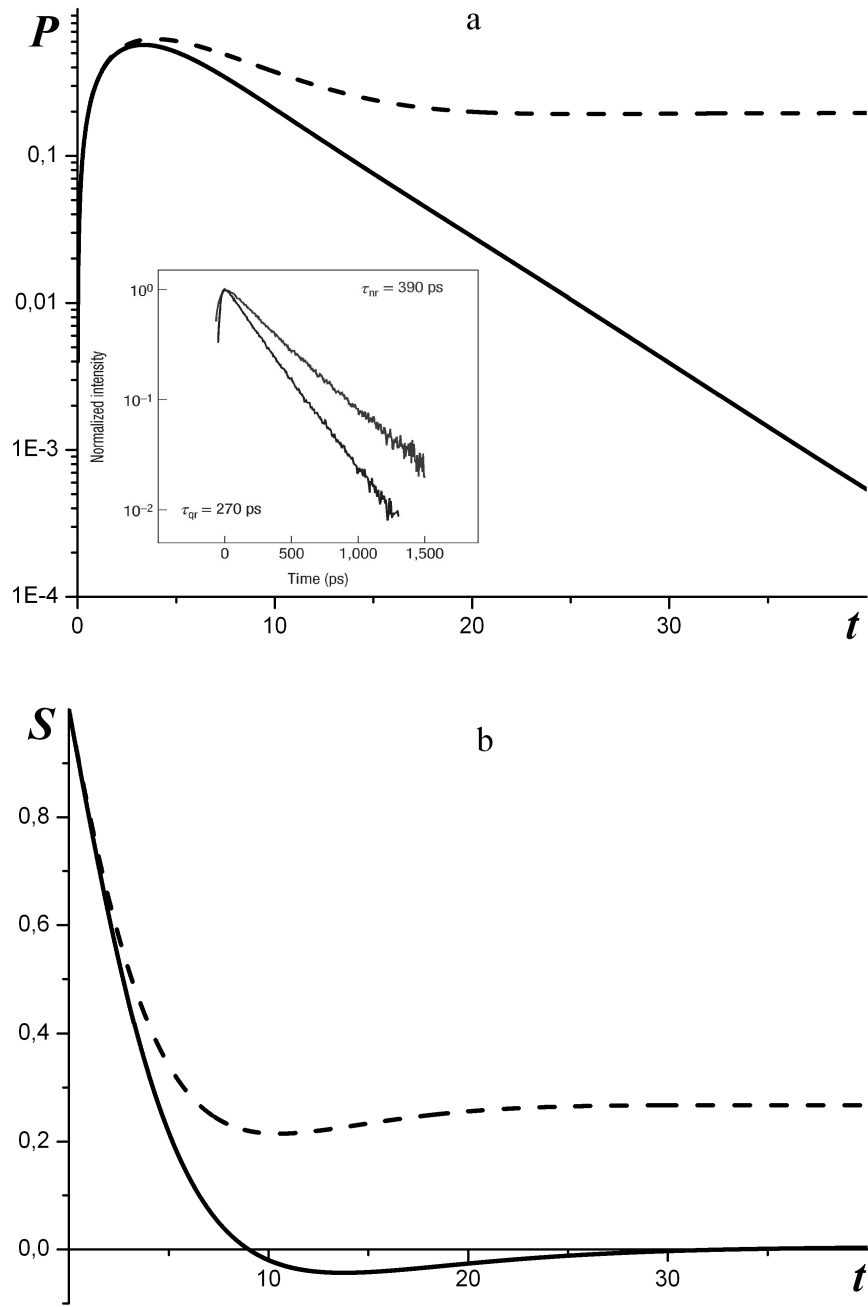


Рис. 2.6. Зависимости поляризации (а) и разности заселённостей уровней (b) от времени, измеренного в единицах  $\omega_0^{-1}$ , при  $\gamma_P = 10^{-1}$ ,  $\gamma = 2 \cdot 10^{-1}$ ,  $\omega = 1$ ,  $F = 10^{-2}$ ,  $g = 1$ ,  $S_e = 1$  (сплошные линии отвечают  $\gamma_S = 10^{-3}$ , штриховые —  $\gamma_S = 10^{-1}$ ); на вставке рис. 2.6а показаны импульсы поляризации, полученные в эксперименте [105] (нижний пик отвечает резонансным условиям, верхний — отсутствию резонанса)

уровней и росту их стационарных значений. Что касается осциллирующей зависимости, приведенной на рис. 3 работы [110], то нам не удалось воспроизвести её при переборе различных значений  $\gamma_S$ ,  $\gamma_P$ ,  $\gamma$ ,  $\omega$ ,  $F$ ,  $g$  и  $S_e$  (кроме аномально больших значений коэффициента затухания  $\gamma_S$ , это может быть связано с выбором параметра связи  $F$ , обозначенного в [110] как  $\nu_1$ , и частоты  $\omega$ , значения которых в работе [110] не указаны).

Проведенный фазовый анализ показывает, что при наличии накачки  $S_e \neq 0$  и соотношениях параметров  $|F|^2 \ll \gamma_P$ ,  $\gamma_S \ll \gamma_P \lesssim \gamma$ , реализующихся в ансамбле квантовых точек, когерентное излучение протекает в режиме гигантского импульса вне зависимости от расстройки резонатора  $\omega - 1$  и параметров связи  $F$ ,  $g$ . Данный вывод подтверждается экспериментальными данными работы [105], где были обнаружены только одиночные импульсы, форма которых совпадает с найденной в настоящей работе (см. рис. 2.6а).

## 2.4. Выводы к разделу 2

1. Использование формализма бифуркации Хопфа позволяет найти упрощённые условия образования предельного цикла детерминистической системы, определение которых не требует дополнительного преобразования динамических переменных.

2. Если область изменения обобщённых координаты и импульса, отвечающая предельному циклу, занимает малую часть фазовой плоскости и система подвержена периодическому воздействию, частота которого принадлежит ограниченному интервалу, то бифуркация Хопфа приводит к образованию периодического множества предельных циклов. В этом случае процесс самоорганизации сводится к множественному резонансу с внешним полем.

3. Вне зависимости от расстройки резонатора когерентное излучение ансамбля квантовых точек протекает в режиме гигантского импульса.

### РАЗДЕЛ 3

## АВТОКОЛЕБАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Взаимное влияние шума и нелинейности [26] может приводить к критическим изменениям поведения систем, испытывающих индуцированные шумом переходы [111, 112], реверсивные превращения [85, 113], стохастический резонанс [114, 115], индуцированное шумом формирование структур [116, 117] и перенос, стимулированный шумом [112, 118]. Действие шума играет конструктивную роль в динамических системах, испытывающих переходы между различными аттракторами [119, 120], стабилизирует аттрактор Лоренца вблизи порога формирования [121, 122], а также способствует резонансу, связанному с предельным циклом, образующимся в результате бифуркации Хопфа [121]. Такого рода поведение характерно для конечных систем, состоящих из большого (но конечного!) набора элементарных составляющих (наиболее ярким примером являются экологические системы, в которых роль таких составляющих играют отдельные индивиды, случайно формирующие популяцию). Установлено также критическое влияние внутреннего шума на течение эпидемий [123–125], динамику системы хищник-жертва [126, 127], картину появления общественного мнения [128], биохимические часы [129, 130], генетические сети [131], циклические реакции с ловушками [132] и т.д.

Конструктивное действие флуктуаций на циклическое поведение системы [126] было осознано достаточно давно [133]. Установлена связь между поведением системы со стационарной точкой и стохастическими колебаниями, отвечающими предельному циклу [134]. Было найдено, что колебательное поведение проявляют лабильные [135] и бистабильные [136] системы, а также близкие к порогу бифуркации [137]. Благодаря тому, что близость генерируемого сигнала к периодическому зависит резонансным образом от интенсивности шума [138], указанные колебания получили название *когерентного резонанса* [135] или *стохастической когерентности* [139]. Поскольку режим когерентного

резонанса определяется характером запаздывающей обратной связи, то меняя её, можно изменять регулярность колебаний [140]. Характерно, что стохастические колебания могут быть генерированы и без входящего сигнала при условии, что сама нелинейная система обладает каким-либо временным масштабом. Если этот масштаб индуцируется мультипликативным шумом, действие которого трансформирует одноямный потенциал в многоямный, то возникает *двойной стохастический резонанс* [141].

### 3.1. Индуцированные шумом осцилляции стационарных стохастических систем

Как неоднократно указывалось выше, фазовые переходы представляют простейший случай самоорганизации, в котором стационарные состояния системы определяются изолированными точками фазовой плоскости. Следуя предыдущей главе, здесь мы рассматриваем более сложные системы, поведение которых определяется предельным циклом, образующимся в результате бифуркации Хопфа [25, 142]. Однако при этом основное внимание будет уделено исследованию влияния шума на колебательное поведение стохастической системы [52, 65]. Особенность нашего рассмотрения состоит в том, что оно основывается на аналитическом представлении [134] стохастических систем конечного размера, в которых шум оказывает принципиальное влияние на условия появления самоорганизованных колебаний. Будет показано, что характер поведения неравновесной системы в стационарном состоянии определяется соотношением между характерными временами в изменениях гидродинамических мод, параметризующих систему. В отличие от двойного когерентного резонанса [141], мы рассматриваем случай, когда набор состояний определяется не только действием мультипликативных шумов, но и неравновесным характером системы.

Пункт 3.1.1 посвящён описанию стохастических систем конечного размера, вектор состояния которых представляется суммой детерминистической



составляющей, пропорциональной их объёму, и стохастической компонентой, пропорциональной квадратному корню из размера системы. В пункте 3.1.2 на основе пары стохастических уравнений с нелинейными силами и мультипликативными шумами исследуются условия образования предельного цикла [52]. Пункты 3.1.3 и 3.1.4 посвящены рассмотрению этих условий для стохастической системы Лоренца с различными режимами соподчинения основных переменных. Простейший случай отсутствия предельного цикла исследован в пункте 3.1.3. Согласно пункту 3.1.4, предельный цикл образуется в случае, если наиболее быстрое изменение испытывает переменная, связанная нелинейным образом с двумя или более другими степенями свободы.

3.1.1. Описание стохастических систем конечного размера. Рассмотрим сумму

$$S_\alpha = \sum_{i=1}^N \xi_\alpha^i, \quad (3.1)$$

включающую  $1 \ll N < \infty$  случайных векторов состояний  $\vec{\xi}^i$  с компонентами  $\xi_\alpha^i$ ,  $\alpha = 1, \dots, d$ . Если интервал времени  $\tau$  и число измерений  $N$  подчиняются условиям  $1 \ll N\tau \ll N$ , то изменение суммы (3.1) за этот интервал представляется выражением [143]

$$S_\alpha(t + \tau) = S_\alpha(t) + (N\tau)F^{(\alpha)}(\vec{s}) + \sigma\sqrt{(N\tau)F^{(\alpha)}(\vec{s})}, \quad (3.2)$$

имеющим форму уравнения Ланжевена. Согласно (3.2), изменение  $S_\alpha(t + \tau) - S_\alpha(t)$  суммы большого числа слагаемых  $N$  за время  $\tau$  складывается из среднего значения, пропорционального произведению  $N\tau$ , и дисперсии, определённой коэффициентом  $\sigma$  и пропорциональной квадратному корню из этого произведения. Коэффициенты  $F^{(\alpha)}(\vec{s})$  являются гладкими функциями величины  $\vec{s} \equiv \vec{S}/N = N^{-1} \sum_{i=1}^N \vec{\xi}^i$ , приходящейся на одно слагаемое.

Прямое использование закона больших чисел позволяет представить сумму (3.1) равенством

$$S_\alpha = NX_\alpha + \sqrt{N}x_\alpha, \quad (3.3)$$

в котором первое слагаемое определяется средним значением  $X_\alpha$ , а второе – стохастической добавкой  $x_\alpha$ . Из записи

$$s_\alpha = X_\alpha + \frac{1}{\sqrt{N}}x_\alpha \quad (3.4)$$

видно, что в пределе  $N \rightarrow \infty$  удельное значение  $s_\alpha = S_\alpha/N$  стремится к среднему  $X_\alpha$ . Наша задача состоит в нахождении уравнений, определяющих временные зависимости  $X_\alpha(t)$ ,  $x_\alpha(t)$ .

Подстановка равенств (3.3), (3.4) в (3.2) приводит к уравнению

$$X_\alpha(t + \tau) + \frac{1}{\sqrt{N}}x_\alpha(t + \tau) = X_\alpha(t) + \frac{1}{\sqrt{N}}x_\alpha(t) + \tau F^{(\alpha)} \left[ \vec{X}(t) + \frac{1}{\sqrt{N}}\vec{x}(t) \right] + \sigma \sqrt{\frac{\tau}{N}} \sqrt{F^{(\alpha)} \left[ \vec{X}(t) + \frac{1}{\sqrt{N}}\vec{x}(t) \right]}, \quad (3.5)$$

в котором коэффициенты  $F^{(\alpha)}$  могут быть представлены разложением

$$F^{(\alpha)} \left( \vec{X} + \frac{1}{\sqrt{N}}\vec{x} \right) = F^{(\alpha)}(\vec{X}) + \frac{1}{\sqrt{N}}F_{\beta}^{(\alpha)}(\vec{X})x_\beta + \frac{1}{2N}F_{\beta\gamma}^{(\alpha)}(\vec{X})x_\beta x_\gamma + \dots \quad (3.6)$$

Здесь обозначено  $F_{\beta}^{(\alpha)} \equiv dF^{(\alpha)}/dx_\beta$ ,  $F_{\beta\gamma}^{(\alpha)} \equiv d^2F^{(\alpha)}/dx_\beta dx_\gamma$  и по повторяющимся греческим индексам подразумевается суммирование от 1 до  $d$ . Удерживая в (3.5) только слагаемые, не зависящие от числа частиц  $N \gg 1$ , получаем уравнение

$$X_\alpha(t + \tau) - X_\alpha(t) = \tau F^{(\alpha)} \left( \vec{X}(t) \right), \quad (3.7)$$

определяющее изменение среднего значения суммы (3.1). В пределе  $\tau \rightarrow 0$  оно

принимает дифференциальную форму

$$\frac{dX_\alpha}{dt} = F^{(\alpha)}, \quad (3.8)$$

из которой видно, что коэффициенты  $F^{(\alpha)} = F^{(\alpha)}(\vec{X})$  играют роль компонент эффективной силы, величина которой определяется средним значением  $\vec{X}$ .

Вычитая почленно (3.7) из (3.5), находим уравнение для стохастической составляющей:

$$\begin{aligned} x_\alpha(t + \tau) - x_\alpha(t) = \tau\sqrt{N} \left\{ F^{(\alpha)} \left[ \vec{X}(t) + \frac{1}{\sqrt{N}}\vec{x}(t) \right] - F^{(\alpha)}(\vec{X}(t)) \right\} \\ + \sigma \sqrt{F^{(\alpha)} \left[ \vec{X}(t) + \frac{1}{\sqrt{N}}\vec{x}(t) \right]} \sqrt{\tau}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

В пределе  $\tau \rightarrow 0$ , когда величина  $\sigma/\sqrt{\tau} \rightarrow \zeta$  играет роль стохастического источника, выражение (3.9) принимает вид уравнения Ланжевена

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = f^{(\alpha)} + g_\alpha \zeta, \quad (3.10)$$

где эффективная сила  $f^{(\alpha)} = f^{(\alpha)}(\vec{X}, \vec{x})$  и амплитуда шума  $g_\alpha = g_\alpha(\vec{s})$  определяются равенствами

$$f^{(\alpha)} \equiv \sqrt{N} \left[ F^{(\alpha)} \left( \vec{X} + \frac{1}{\sqrt{N}}\vec{x} \right) - F^{(\alpha)}(\vec{X}) \right], \quad g_\alpha^2 \equiv F^{(\alpha)}(\vec{s}). \quad (3.11)$$

Характерно, что сила  $f^{(\alpha)}$  стремится к нулю вместе со стохастической переменной  $x_\alpha$ , тогда как амплитуда шума  $g_\alpha$  остаётся конечной при произвольных значениях  $X_\alpha, x_\alpha$ . Использование разложения (3.6) приводит выражения (3.11) к виду

$$\begin{aligned} f^{(\alpha)} = F_\beta^{(\alpha)}(\vec{X}) x_\beta + \frac{1}{2\sqrt{N}} F_{\beta\gamma}^{(\alpha)}(\vec{X}) x_\beta x_\gamma + \dots, \\ g_\alpha^2 = F^{(\alpha)}(\vec{X}) + \frac{1}{\sqrt{N}} F_\beta^{(\alpha)}(\vec{X}) x_\beta + \frac{1}{2N} F_{\beta\gamma}^{(\alpha)}(\vec{X}) x_\beta x_\gamma + \dots \end{aligned} \quad (3.12)$$

Кроме того, определения (3.11) означают наличие связи

$$f^{(\alpha)}(\vec{X}, \vec{x}) = \sqrt{N} \left[ g_{\alpha}^2 \left( \vec{X} + \frac{1}{\sqrt{N}} \vec{x} \right) - g_{\alpha}^2(\vec{X}) \right] \quad (3.13)$$

между эффективной силой и интенсивностью шума.

3.1.2. Статистическая картина предельного цикла. Согласно теореме о центральном многообразии [25], полное представление предельного цикла достигается использованием пары переменных  $x_{\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Как выяснено в предыдущем пункте, стохастическая эволюция этих переменных определяется уравнениями Ланжевена

$$\dot{x}_{\alpha} = f^{(\alpha)} + \mathcal{G}_{\alpha} \zeta(t), \quad \alpha = 1, 2, \quad (3.14)$$

где силы  $f^{(\alpha)} = f^{(\alpha)}(x_1, x_2)$  и амплитуды шумов  $\mathcal{G}_{\alpha} = \mathcal{G}_{\alpha}(x_1, x_2)$  являются функциями стохастических переменных  $x_{\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2$ , а белый шум  $\zeta(t)$  определяется стандартными условиями [144]

$$\langle \zeta(t) \rangle = 0, \quad \langle \zeta(t) \zeta(t') \rangle = \delta(t - t'). \quad (3.15)$$

Если переходы между микроскопическими состояниями, отвечающими различным переменным  $x_{\alpha}$ , не коррелируют между собой (см. далее), то функция распределения вероятностей  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(x_1, x_2; t)$  реализации этих переменных в момент времени  $t$  определяется уравнением Фоккера-Планка

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} + \frac{\partial J^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = 0, \quad (3.16)$$

где компоненты потока вероятностей имеют вид

$$J^{(\alpha)} \equiv \mathcal{F}^{(\alpha)} \mathcal{P} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (\mathcal{G}_{\alpha} \mathcal{G}_{\beta} \mathcal{P}). \quad (3.17)$$

Эффективные силы

$$\mathcal{F}^{(\alpha)} = f^{(\alpha)} + \lambda \frac{\partial (\mathcal{G}_\alpha \mathcal{G}_\beta)}{\partial x_\beta} \quad (3.18)$$

определяются выбором параметра исчисления  $\lambda \in [0, 1]$  (для случаев Ито и Стратоновича  $\lambda = 0$  и  $\lambda = 1/2$  соответственно). В стационарном состоянии компоненты потока вероятностей принимают постоянные значения  $J_0^{(\alpha)}$ , и поведение системы определяется уравнениями

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (\mathcal{G}_1^2 \mathcal{P}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \mathcal{P}) - 2\mathcal{F}^{(1)} \mathcal{P} = -2J_0^{(1)}, \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \mathcal{P}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\mathcal{G}_2^2 \mathcal{P}) - 2\mathcal{F}^{(2)} \mathcal{P} = -2J_0^{(2)}. \quad (3.20)$$

Умножая первое из них на  $\mathcal{G}_2$ , а второе на  $\mathcal{G}_1$  и вычитая результаты, приходим к явному выражению функции распределения вероятностей:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x_1, x_2) &= \frac{J_0^{(1)} \mathcal{G}_2(x_1, x_2) - J_0^{(2)} \mathcal{G}_1(x_1, x_2)}{\mathcal{D}(x_1, x_2)}, \\ \mathcal{D}(x_1, x_2) &\equiv \left( \mathcal{G}_2 \mathcal{F}^{(1)} - \mathcal{G}_1 \mathcal{F}^{(2)} \right) + \frac{1}{2} \left[ \left( \mathcal{G}_1^2 \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial x_1} - \mathcal{G}_2^2 \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial x_2} \right) - \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \left( \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial x_2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Эта функция принимает бесконечные значения при условии

$$2 \left( \mathcal{G}_1 \mathcal{F}^{(2)} - \mathcal{G}_2 \mathcal{F}^{(1)} \right) = \left( \mathcal{G}_1^2 \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial x_1} - \mathcal{G}_2^2 \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial x_2} \right) - \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \left( \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial x_2} \right), \quad (3.22)$$

которое определяет форму предельного цикла. Поскольку в области, ограниченной кривой этого цикла, плотность вероятностей  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(x_1, x_2)$  принимает отрицательные значения, то физически это означает появление области запрещенных значений стохастических переменных  $x_\alpha$ . Характерно, что замкнутая линия предельного цикла может быть определена, если знаменатель  $\mathcal{D}(x_1, x_2)$

дроби (3.21) содержит чётные степени обеих переменных  $x_1$  и  $x_2$ .<sup>3</sup>

Следует иметь в виду, что аналитическое выражение (3.21) функции распределения вероятностей достигается благодаря специальному выбору потока вероятностей (3.17), в котором эффективный коэффициент диффузии принимает мультипликативную форму  $\mathcal{D}_{\alpha\beta} = \mathcal{G}_\alpha \mathcal{G}_\beta$ . В общем случае этот коэффициент определяется выражением [145]

$$\mathcal{D}_{\alpha\beta} = \sum_{ab} I_{ab} g_\alpha^a g_\beta^b, \quad (3.23)$$

где ядро  $I_{ab}$  задаёт интенсивность переходов между микроскопическими состояниями  $a$  и  $b$ , а множители  $g_\alpha^a$  и  $g_\beta^b$  представляют затравочные амплитуды шумов переменных  $x_\alpha$ , зависящие от этих состояний. Выше мы ограничились рассмотрением простейшего случая, в котором интенсивность переходов  $I_{ab} = I$  одинакова для всех микроскопических состояний. Благодаря этому коэффициент диффузии (3.23) принимает использованную выше форму  $\mathcal{D}_{\alpha\beta} = \mathcal{G}_\alpha \mathcal{G}_\beta$  с кумулятивными амплитудами шумов  $\mathcal{G}_\alpha \equiv \sqrt{I} \sum_a g_\alpha^a$  и  $\mathcal{G}_\beta \equiv \sqrt{I} \sum_b g_\beta^b$ .

3.1.3. Стохастическая система Лоренца без предельного цикла. Наиболее простой и популярный случай самоорганизации, реализуемой в результате бифуркации Хопфа, представляет модулированное излучение лазера [82]. Его поведение определяется, как известно, напряжённостью поля  $E$ , поляризацией среды  $P$  и разностью заселённостей уровней  $S$  [6]. Временные зависимости  $E(t)$ ,  $P(t)$ ,  $S(t)$  этих величин задаются системой Лоренца, которая с учётом стохастических источников принимает вид

$$\begin{aligned} \tau_E \dot{E} &= -E + a_E P + g_E \zeta(t), \\ \tau_P \dot{P} &= -P + a_P E S + g_P \zeta(t), \\ \tau_S \dot{S} &= (S_e - S) - a_S E P + g_S \zeta(t). \end{aligned} \quad (3.24)$$

<sup>3</sup>Прообразом замкнутой кривой является окружность  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ .

Здесь точка означает дифференцирование по времени  $t$ ;  $\tau_E, \tau_P, \tau_S$  — масштабы изменения величин, указанных индексами;  $a_E, a_P, a_S$  — положительные константы связи;  $S_e$  — параметр накачки;  $g_E, g_P, g_S$  — амплитуды шумов соответствующих величин;  $\zeta(t)$  — белый шум, определённый условиями (3.15). Будем измерять величины  $t, E, P, S, \zeta, g_E, g_P, g_S$  в следующих масштабах:

$$\begin{aligned} \tau_E; \quad E_s = (a_P a_S)^{-1/2}, \quad P_s = (a_E^2 a_P a_S)^{-1/2}, \quad S_s = (a_E a_P)^{-1}; \\ \zeta_s = \tau_E^{-1/2}; \quad g_E^s = (\tau_E / a_P a_S)^{1/2}, \quad g_P^s = (\tau_E / a_E^2 a_P a_S)^{1/2}, \quad g_S^s = \tau_E^{1/2} / a_E a_P. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Тогда с учётом действия самосогласованной силы  $\varphi = \varphi(E)$ , для которой  $\varphi(0) = 0$ , уравнения (3.24) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{E} &= -E + P - \varphi(E) + g_E \zeta(t), \\ \sigma \dot{P} &= -P + ES + g_P \zeta(t), \\ \varepsilon \dot{S} &= (S_e - S) - EP + g_S \zeta(t), \end{aligned} \quad (3.26)$$

где введены соотношения характерных времён

$$\sigma \equiv \tau_P / \tau_E, \quad \varepsilon \equiv \tau_S / \tau_E. \quad (3.27)$$

Как известно [6], режим спонтанного излучения, обладающего постоянной напряжённостью  $E$ , реализуется в результате обычной бифуркации, которая может быть описана в адиабатическом приближении, предполагающем, что величина  $E(t)$  изменяется наиболее медленно в сравнении с поляризацией  $P(t)$  и разностью заселённостей  $S(t)$ :  $\tau_P, \tau_S \ll \tau_E$ . В этом случае введение нелинейной добавки

$$\varphi(E) \equiv \frac{\kappa E}{1 + E^2 / E_\tau^2}, \quad (3.28)$$

параметры которой  $\kappa, E_\tau$  учитывают дисперсию времени релаксации  $\tau_E$  с

изменением  $E$ , позволяет описать не только мягкий, но и жёсткий режимы возбуждения лазера, реализуемые по непрерывному и прерывистому механизмам фазовых переходов [92]. В стационарном состоянии основные параметры спонтанного излучения принимают значения

$$\begin{aligned} E_0 &= E_{00} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{E_\tau^2}{E_{00}^4} (S_e - S_c)} \right]^{1/2}, \\ S_0 &= \frac{(1 + E_{00}^2) - \sqrt{(1 + E_{00}^2)^2 - (1 - E_\tau^2) S_e}}{1 - E_\tau^2}, \\ P_0 &= E_0 S_0; \quad E_{00}^2 \equiv \frac{1}{2} [(S_e - 1) - (1 + \kappa) E_\tau^2], \quad S_c \equiv 1 + \kappa. \end{aligned} \quad (3.29)$$

При внешнем воздействии, ограниченном интервалом  $(S_c^0, S_c)$  с нижним пределом

$$S_c^0 = 1 + E_\tau^2(\kappa - 1) + 2E_\tau \sqrt{\kappa(1 - E_\tau^2)}, \quad (3.30)$$

эффективный потенциал обладает барьером, который приводит к прерывистому превращению, а при закритической накачке  $S_e > S_c$  фазовый переход становится непрерывным. Такая картина реализуется, если параметр нелинейности превышает значение  $\kappa_{min} = E_\tau^2 / (1 - E_\tau^2)$ .

Совершенно иной сценарий самоорганизации реализуется, если достаточно медленно изменяется не одна из величин  $E(t)$ ,  $P(t)$  и  $S(t)$ , а их пара — именно этот случай отвечает бифуркации Хопфа, обеспечивающей зарождение предельного цикла [25]. Покажем, что действие нелинейной силы (3.28) хотя и стабилизирует жёсткий режим возбуждения, но не может привести к предельному циклу, если выполняется соотношение времён релаксации  $\tau_P \ll \tau_E, \tau_S$ .

При выполнении адиабатического условия  $\tau_P \ll \tau_E$  левую часть второго уравнения (3.26) можно положить равной нулю, в результате чего поляризация выражается равенством

$$P = ES + g_P \zeta(t). \quad (3.31)$$



Подставляя его в (3.26), получаем систему

$$\begin{aligned}\dot{E} &= - [E(1 - S) + \varphi(E)] + G_E \zeta(t), \\ \dot{S} &= \varepsilon^{-1} [S_e - S(1 + E^2)] + G_S \zeta(t),\end{aligned}\tag{3.32}$$

поведение которой определяется эффективными амплитудами шумов

$$G_E \equiv \sqrt{g_P^2 + g_E^2}, \quad G_S \equiv \varepsilon^{-1} \sqrt{g_S^2 + g_P^2 E^2}.\tag{3.33}$$

Эти выражения следуют из свойства аддитивности дисперсий гауссовских процессов [144], тогда как прямая подстановка (3.31) в (3.26) даёт соотношения  $G_E = g_P + g_E$ ,  $G_S = g_S - g_P E$ , последнее из которых явно нефизично ввиду зануления интенсивности  $G_S$  при напряжённости  $E = g_S/g_P$ . Согласно (3.33) параметр порядка, сводящийся к напряжённости поля  $E$ , обладает аддитивным шумом, а шум управляющего параметра, представляющего разность заселённостей уровней  $S$ , является мультипликативным.

Система уравнений (3.32) имеет вид (3.14), где переменные  $X_1, X_2$  сводятся к напряжённости  $E$  и разности заселённостей уровней  $S$ , а обобщённые силы (3.18) определяются равенствами

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{(1)} &\equiv \mathcal{F}^{(E)} = - [E(1 - S) + \varphi(E)], \\ \mathcal{F}^{(2)} &\equiv \mathcal{F}^{(S)} = \varepsilon^{-1} [(S_e - S) - S E^2] + \lambda \frac{g_P^2}{\varepsilon} E \sqrt{\frac{1 + (g_E/g_P)^2}{(g_S/g_P)^2 + E^2}}.\end{aligned}\tag{3.34}$$

С учётом (3.33) функция распределения (3.21) принимает бесконечное значение при условии

$$\begin{aligned}\frac{(g_S/g_P)^2 + E^2}{1 + (g_E/g_P)^2} [\varphi(E) + E(1 - S)] + \sqrt{\frac{(g_S/g_P)^2 + E^2}{1 + (g_E/g_P)^2}} [S_e - S(1 + E^2)] \\ + \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) g_P^2 E = 0.\end{aligned}\tag{3.35}$$

Тривиальное решение

$$E_0 = 0, \quad S_0 = S_e \quad (3.36)$$

отвечает неупорядоченному состоянию системы. Отсутствие чётных степеней разности заселённостей уровней  $S$  приводит к тому, что уравнение (3.35) не обладает решениями, отвечающими замкнутым кривым. Более того, такие решения не появляются и в более сложном уравнении, отвечающем максимуму функции распределения (3.21).

Таким образом, несмотря на наличие нелинейной силы (3.28), включение которой приводит к образованию предельного цикла в детерминистической системе [49], стохастические источники размывают его даже при бесконечном ослаблении их интенсивностей. Для проверки такого сценария самоорганизации была исследована временная зависимость функции распределения случайных величин  $E$ ,  $S$ , следующая из уравнения Фоккера-Планка (3.16) при условии, что в начальный момент  $t = 0$  она принимает ненулевые значения только на предельном цикле детерминистической системы. Оказалось, что с течением времени происходит размытие предельного цикла, в результате которого функция распределения приобретает при  $t \rightarrow \infty$  стационарную форму (3.21), которая, не обнаруживая особенностей, присущих предельному циклу, достигает бесконечных значений на линии, определённой уравнением (3.35).

3.1.4. Самоорганизуемая модуляция в стохастической системе Лоренца. Покажем, что даже в отсутствие нелинейной силы (3.28) предельный цикл образуется, если выполняются соотношения времён релаксации  $\tau_E \ll \tau_P, \tau_S$ . В этом случае удобно измерять время в масштабе релаксации поляризации  $P$ , что приведёт к замене  $\tau_E$  на  $\tau_P$  в определениях (3.25). Тогда уравнения (3.24)

принимают вид

$$\begin{aligned}\sigma^{-1}\dot{E} &= -E + P + g_E\zeta(t), \\ \dot{P} &= -P + ES + g_P\zeta(t), \\ (\varepsilon/\sigma)\dot{S} &= (S_e - S) - EP + g_S\zeta(t),\end{aligned}\tag{3.37}$$

где соотношения времён релаксации определены равенствами (3.27). Условие  $\tau_E \ll \tau_P$  позволяет положить равной нулю левую часть первого уравнения (3.37), в результате чего напряжённость электрического поля выражается равенством

$$E = P + g_E\zeta(t).\tag{3.38}$$

Подставляя его в (3.37), приходим к системе

$$\begin{aligned}\dot{P} &= -P(1 - S) + G_P\zeta(t), \\ \dot{S} &= (\sigma/\varepsilon) [(S_e - S) - P^2] + G_S\zeta(t),\end{aligned}\tag{3.39}$$

с эффективными амплитудами мультипликативных шумов

$$G_P \equiv \sqrt{g_P^2 + g_E^2 S^2}, \quad G_S \equiv (\sigma/\varepsilon) \sqrt{g_S^2 + g_E^2 P^2}.\tag{3.40}$$

Система (3.39) сводится к уравнениям Ланжевена (3.14) с эффективными силами

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{(1)} \equiv \mathcal{F}^{(P)} &= -P(1 - S) + \lambda \frac{g_E^2}{\varepsilon/\sigma} S \sqrt{\frac{(g_S/g_E)^2 + P^2}{(g_P/g_E)^2 + S^2}}, \\ \mathcal{F}^{(2)} \equiv \mathcal{F}^{(S)} &= (\sigma/\varepsilon) [(S_e - S) - P^2] + \lambda \frac{g_E^2}{\varepsilon/\sigma} P \sqrt{\frac{(g_P/g_E)^2 + S^2}{(g_S/g_E)^2 + P^2}}.\end{aligned}\tag{3.41}$$

С учётом (3.40) плотность вероятности (3.21) принимает бесконечное значение

даже в простейшем случае исчисления Ито ( $\lambda = 0$ ), если выполняется условие

$$\begin{aligned} & \left( \frac{g_S^2}{g_E^2} + P^2 \right) \sqrt{\frac{g_P^2}{g_E^2} + S^2 P(1-S)} + \left( \frac{g_P^2}{g_E^2} + S^2 \right) \sqrt{\frac{g_S^2}{g_E^2} + P^2} [(S_e - S) - P^2] \\ & + \frac{g_E^2 \sigma}{2 \varepsilon} \left( \frac{g_S^2}{g_E^2} + P^2 \right)^{\frac{3}{2}} S - \frac{g_E^2}{2} \left( \frac{g_P^2}{g_E^2} + S^2 \right)^{\frac{3}{2}} P = 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Вид функции распределения на рис. 3.1 показывает, что она принимает ненулевые

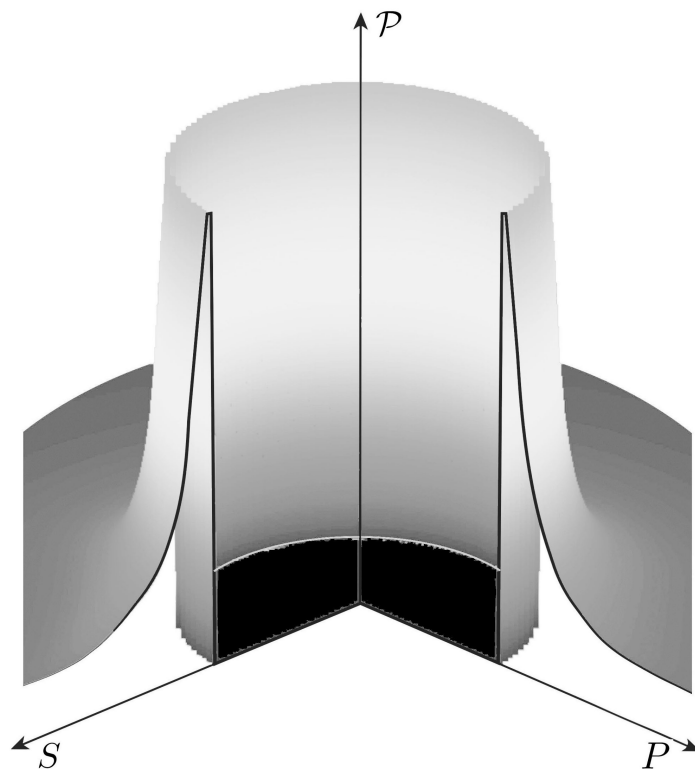


Рис. 3.1. Стационарная функция распределения решений системы (3.39) при  $\sigma = \varepsilon$ ,  $J_0^{(1)} = 1$ ,  $J_0^{(2)} = 10$ ,  $S_e = 0.5$ ,  $g_E = 0.5$ ,  $g_P = 1.376$ ,  $g_S = 2.5$ .

значения только за внешней границей предельного цикла. Таким образом, если в детерминистических системах образование предельного цикла обусловлено неустойчивостью стационарного состояния, заключённого внутри этого цикла, то в стохастических это означает появление области запрещённых значений случайных величин, ограниченных предельным циклом. Граница этой области при различных значениях амплитуд шумов  $g_E$ ,  $g_P$ ,  $g_S$  и накачки  $S_e$  показана на рис. 3.2. Из него видно, что усиление накачки  $S_e$  расширяет область запрещённых значений, а

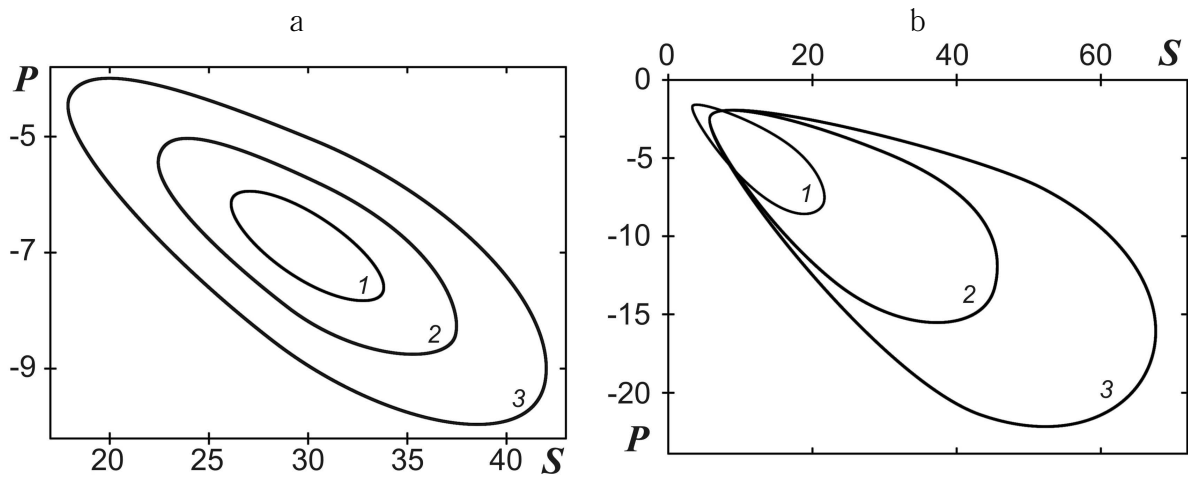


Рис. 3.2. Форма предельного цикла при: (а)  $g_E = 0.5$ ,  $g_P = 11$ ,  $g_S = 6$  (кривые 1-3 отвечают  $S_E = 0.5, 1.0, 2.0$ ); (б)  $S_e = 0.5$ ,  $g_P = 7.5$ ,  $g_S = 6.5$  (кривые 1-3 отвечают  $g_E = 1.0, 0.6, 0.5$ )

возрастание амплитуды  $g_E$  флуктуаций напряжённости наоборот сужает. С другой стороны, фазовые диаграммы, приведенные на рис. 3.3, показывают, что усиление

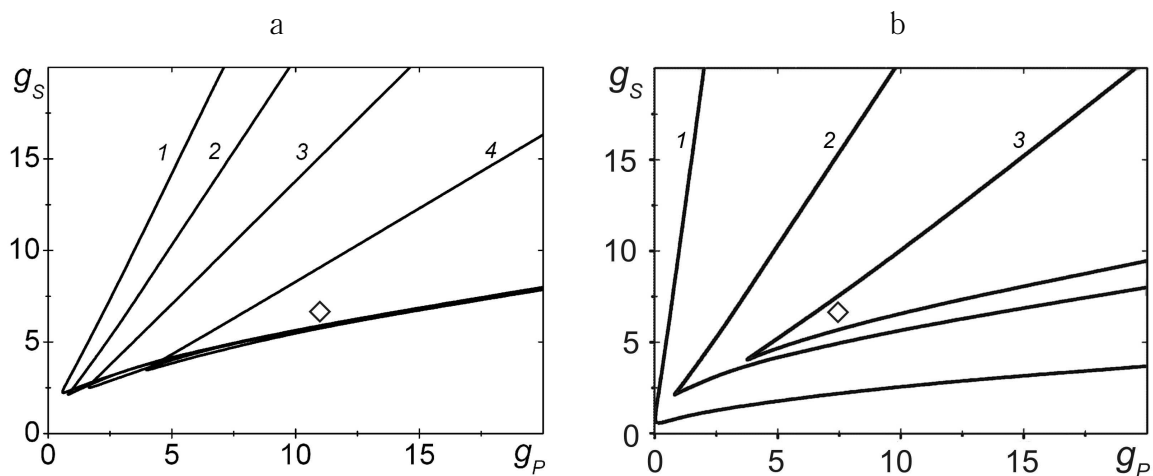


Рис. 3.3. Области существования предельного цикла, определённого уравнением (3.42): (а)  $g_E = 0.5$ , кривые 1-4 отвечают  $S_e = 0.0, 0.5, 1.0, 2.0$ ; (б)  $S_e = 0.5$ , кривые 1-3 отвечают  $g_E = 0.1, 0.5, 1.0$  (ромбиками указаны значения  $g_P$  и  $g_S$ , при которых построены фазовые портреты на рис. 3.2)

шумов поляризации  $P$  и разности заселённости уровней  $S$  расширяет область существования предельного цикла (при этом шум напряжённости  $E$  сужает эту область как сверху, так и снизу, а повышение уровня накачки  $S_e$  — только сверху).

Проведенное исследование системы Лоренца показывает, что стохастизация разрушает предельный цикл детерминистической системы, если обобщённые силы и амплитуды эффективных шумов не содержат двузначных комбинаций типа чётных степеней переменных, параметризующих процесс самоорганизации. Наличие таких комбинаций в обобщённых силах достигается включением в схему лазера активных ячеек типа модуляторов добротности резонатора, нелинейной нагрузки, фильтров излучения и т.п. [82]. Очевидно, такие особенности обеспечивают образование предельного цикла как в детерминистических, так и стохастических системах.

Более сложный сценарий самоорганизации реализуется в том случае, когда ни обобщённые силы, ни затравочные амплитуды шумов не содержат указанных особенностей (например, шумы изначально являются аддитивными). Исследование различных режимов иерархического соподчинения величин, параметризующих процесс самоорганизации, показывает, что если одна из них изменяется намного быстрее остальных, то это может привести к зависимости эффективных амплитуд шумов медленных степеней свободы, в результате чего они становятся мультипликативными. Однако пример, рассмотренный в пункте 3.1.3, показывает, что появление такой зависимости не обязательно приводит к предельному циклу, поскольку адиабатическое условие  $\tau_P \ll \tau_E$  обеспечивает двузначные зависимости амплитуды шума  $G_S(E)$  и обобщённой силы  $\mathcal{F}^{(S)}(E)$ , определённых выражениями (3.33), (3.34), только от квадрата напряжённости  $E^2$ . Очевидно, предельный цикл образуется лишь в том случае, если наиболее быстро изменяется степень свободы, которая связана нелинейным образом не менее чем с парой остальных. Так, при соотношении времён релаксации  $\tau_E \ll \tau_P, \tau_S$ , исследованном в настоящем пункте, быстрые изменения напряжённости  $E$  в нелинейных членах последних уравнений (3.37) обеспечивают двузначные зависимости (3.40) амплитуд шумов  $G_P, G_S$  поляризации и разности заселённостей уровней от квадратов их значений  $S^2, P^2$ .

### 3.2. Подавление осцилляций шумами Леви

Характерной особенностью проведенного рассмотрения является ограничение простейшим случаем *гауссова шума*, который, согласно равенствам (3.15), характеризуется средним значением, равным нулю, и единичной дисперсией. Более общий случай представляют *процессы Леви* [146], для которых распределение вероятностей характеризуется медленным спаданием – по степенному закону – при больших значениях стохастической переменной (спадание гауссовых шумов происходит экспоненциально быстро). Такое различие обусловлено тем, что при броуновском движении, отвечающем гауссовым процессам, частица может совершать только бесконечно малые случайные скачки, тогда как *полёты Леви* имеют произвольную длину (вплоть до бесконечной). Благодаря этому среднеквадратичное смещение частицы, представляющее дисперсию стохастического процесса, является конечным в первом случае и бесконечным во втором [147]. В настоящее время выяснено, что стохастические процессы Леви являются не просто умозрительным построением, а представляют аномальную диффузию, процессы которой играют важную роль в естественных дисциплинах (физике, биологии, геологии и т.д.) и социальных науках (управление рисками, финансы и т.п.).

Согласно [148], совместное действие нелинейности и шума Леви может привести к фазовому переходу, который отвечает появлению стационарной точки на фазовой плоскости состояний системы. В связи с этим возникает естественный вопрос: может ли действие шума Леви привести к самоорганизованному квазипериодическому поведению, отвечающему предельному циклу? Настоящий подраздел посвящён ответу на этот вопрос в рамках аналитического представления. Поскольку формализм, представляющий действие мультипликативного шума Леви, носит достаточно сложный характер [149, 150], мы начинаем рассмотрение с изложения основных положений теории стохастических процессов Леви в пункте 3.2.1. Непосредственному рассмотрению

предельного цикла посвящён пункт 3.2.2, в котором исследуется решение пары стохастических уравнений с произвольными силами и мультипликативными шумами Леви [60, 65]. В результате мы приходим к заключению, что полёты Леви подавляют квазипериодическое движение.

3.2.1. Статистическое представление мультипликативных шумов Леви. Статистическое описание процессов Леви достигается использованием одно- и двухточечной функций распределения: плотность вероятности  $P(x, t)$  определяет частоту попадания частицы в бесконечно малую окрестность точки  $x$  в момент времени  $t$ , а условная плотность  $p(x, t|x_0, t_0)$  задаёт вероятность того же события при условии, что в предшествующий момент времени  $t_0$  частица находилась в окрестности точки  $x_0$ . Для марковских процессов, отвечающих статистически независимым перемещениям частицы, указанные функции связаны равенством

$$P(x, t) = \int dx_0 p(x, t|x_0, t_0)P(x_0, t_0), \quad (3.43)$$

которое означает, что перебор всех исходных состояний условной плотности вероятности приводит к её полному значению. С другой стороны, условные плотности вероятности марковских процессов связаны между собой уравнением Чепмена-Колмогорова

$$p(x, t + dt|x_0, t_0) = \int dy p(x, t + dt|y, t)p(y, t|x_0, t_0). \quad (3.44)$$

В основе этого равенства лежит свойство перемножения вероятностей независимых процессов, однако в отличие от (3.43) здесь интегрирование означает перебор не начальных, а промежуточных состояний  $y$ , реализуемых в момент времени  $t$ , предшествующий последующему времени  $t + dt$ .

Описание стохастических процессов достигается наиболее простым образом при использовании характеристической функции, представляющей



преобразование Фурье

$$p(k, t + dt|y, t) = \int dx e^{ik(x-y)} p(x, t + dt|y, t). \quad (3.45)$$

Поскольку здесь начальный и конечный моменты времени разделены бесконечно малым интервалом  $dt$ , то можно предположить, что характеристическая функция (3.45) незначительно отличается от единицы, и это отличие сводится к бесконечно малой величине элементарного кумулянта  $dK_X(k, dt|y, t)$  стохастического процесса  $X(t)$ . В результате приходим к выражению

$$p(k, t + dt|y, t) := e^{dK_X(k, dt|y, t)}, \quad (3.46)$$

в котором кумулянт  $dK_X(k, dt|y, t)$  подлежит определению.

В пределе  $dt \rightarrow 0$  использование равенства (3.44) и тождества

$$p(x, t|x_0, t_0) = \int dy p(y, t|x_0, t_0) \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ik(x-y)} \quad (3.47)$$

приводит к цепочке равенств

$$\begin{aligned} & p(x, t + dt|x_0, t_0) - p(x, t|x_0, t_0) \\ &= \int dy p(y, t|x_0, t_0) \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ik(x-y)} [e^{dK_X(k, dt|y, t)} - 1] \\ &\simeq \int dy p(y, t|x_0, t_0) \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ik(x-y)} dK_X(k, dt|y, t) \\ &= \int dy dK_X(x - y, t) p(y, t|x_0, t_0) \\ &\equiv dK_X(x, t) \star p(x, t|x_0, t_0), \end{aligned} \quad (3.48)$$

где знак  $\star$  обозначает свертку обратных фурье-образов

$$\begin{aligned} dK_X(x-y, t) &= \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ik(x-y)} dK_X(k, dt|y, t), \\ p(x, t+dt|y, t) &= \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ik(x-y)} p(k, t+dt|y, t). \end{aligned} \quad (3.49)$$

С учетом определения инкремента

$$\mathcal{L}(x) := \frac{dK_X(x, t)}{dt} \quad (3.50)$$

равенства (3.48) приводят к символическому представлению уравнения Фоккера-Планка

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t|x_0, t_0) = \mathcal{L}(x) \star p(x, t|x_0, t_0). \quad (3.51)$$

Явный вид инкремента  $\mathcal{L}(x)$  следует из уравнения Ланжевена

$$dX = f dt + g dL, \quad (3.52)$$

где сила  $f = f(x)$  и амплитуда шума  $g = g(x)$  являются функциями стохастической переменной  $x$ , отвечающей процессу Леви  $L = L(t)$ . В рамках исчисления Ито этот процесс определяется элементарной характеристической функцией

$$\langle e^{ikdL} \rangle := e^{dK_L(k, dt|y, t)} \quad (3.53)$$

которая задаётся кумулянтном Леви [146]

$$\Lambda(k) := \frac{dK_L(k, dt|y, t)}{dt} = ik\gamma - D|mk|^\alpha e^{-i\varphi(\alpha)}. \quad (3.54)$$

Здесь угол асимметрии  $\varphi$  и модуль  $m$  определены выражениями

$$\begin{aligned}\tan[\varphi(\alpha)] &= \beta \operatorname{sgn}(gk) \tan(\pi\alpha/2), \\ m^\alpha &= \sqrt{1 + \beta^2 \tan^2(\pi\alpha/2)},\end{aligned}\tag{3.55}$$

показатель Леви  $\alpha \in (0, 2)$  характеризует асимптотический хвост  $x^{-(\alpha+1)}$  распределения Леви при  $1 \neq \alpha < 2$  (случай  $\alpha = 2$  отвечает распределению Гаусса), параметр  $\beta \in [-1, +1]$  определяет асимметрию распределения, величина  $-\infty < \gamma < +\infty$  задаёт среднее значение стохастической переменной  $X$  при  $\alpha > 1$ , угловые скобки означают усреднение по шумам Леви  $L(t)$ .

Кумулянт Леви (3.54) определяет стохастический процесс в отсутствие силы  $f$  при постоянной амплитуде шума  $g = 1$ . Для нахождения полного кумулянта, отвечающего процессу (3.52), перепишем соответствующую характеристическую функцию в пределах  $dt \rightarrow 0$  и  $dL(t) \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned}e^{dK_X(k, dt|y, t)} &:= \langle e^{ikdX} \rangle = \langle e^{ik(fdt + gdL)} \rangle \\ &\simeq 1 + ik \langle fdt + gdL \rangle = 1 + ik (\bar{f}dt + \langle gdL \rangle) \\ &\simeq e^{ik(\bar{f}dt + \langle gdL \rangle)} \simeq e^{ik\bar{f}dt} \langle e^{i(kg)dL} \rangle := e^{ik\bar{f}dt} e^{dK_L(\bar{g}k, dt|y, t)},\end{aligned}\tag{3.56}$$

где  $\bar{f} \equiv \langle f(X, t) \rangle$  и  $\bar{g} \equiv \langle g(X, t) \rangle$  – средние значения силы и амплитуды шума, а также учтено равенство (3.53). Подобно определению (3.54) элементарный кумулянт

$$dK_X(k, dt|y, t) := \mathcal{L}(k, x)dt\tag{3.57}$$

определяется инкрементом

$$\mathcal{L}(k, x) = ik\bar{f}(x) + \Lambda(\bar{g}(x)k)\tag{3.58}$$

который в явном виде принимает форму [149, 150]

$$\mathcal{L}(k, x) = ik [\bar{f}(x) + \gamma\bar{g}(x)] - |m\bar{g}(x)k|^\alpha e^{-i\varphi(\alpha)}. \quad (3.59)$$

Здесь усреднённая амплитуда шума  $\bar{g}(x)$  перенормированна таким образом, чтобы исключить масштабный фактор  $D$ .

С учетом выражений (3.43) и (3.51) одноточечная функция распределения определяется уравнением Фоккера-Планка

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \mathcal{L}(x) \star P(x, t) \equiv \int dy \mathcal{L}(x - y, x) P(y, t). \quad (3.60)$$

Умножая на  $e^{ikx}$  и проводя интегрирование по переменной  $x$ , придадим этому выражению более удобный вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{P}(k, t) = \mathcal{L}(k, x) \tilde{P}(k, t), \quad (3.61)$$

где ядро

$$\mathcal{L}(k, x) \equiv \mathcal{F}\{\mathcal{L}(k, x - y)\}(k, t) = \int d(x - y) \mathcal{L}(k, x - y) e^{ik(x-y)} \quad (3.62)$$

определено равенством (3.59) и введена характеристическая одноточечная функция

$$\tilde{P}(k, t) \equiv \mathcal{F}\{P(x, t)\}(k, t) = \int dx P(x, t) e^{ikx}. \quad (3.63)$$

Здесь и далее используется символическое обозначение  $\mathcal{F}$  для прямого преобразования Фурье и  $\mathcal{F}^{-1}$  — для обратного. Принципиально важно, что ядро  $\mathcal{L}(k, x)$ , представляющее обратное преобразование первого выражения (3.49) по разности  $x - y$ , зависит от координаты  $x$  через силу  $f(x)$  и амплитуду шума  $g(x)$  [149].

Переход от фурье-образов к соответствующим зависимостям в прямом пространстве достигается использованием формальных соотношений

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha} h(x) \right\} &= -|k|^\alpha \tilde{h}(k), \\ \mathcal{F} \{ |x|^{2m+1} h(x) \} &= i(-1)^m \frac{\partial^{2m+1}}{\partial |k|^{2m+1}} \tilde{h}(k) \end{aligned} \quad (3.64)$$

для произвольной функции  $h(x)$  и производных Рунда целого  $2m+1$ ,  $m = 0, 1, \dots$  и дробного  $\alpha$  порядков. В случае симметричных процессов Леви ( $\gamma = 0$ ,  $\varphi(\alpha) = 0$  и  $m = 1$ ), подверженных действию силы  $f = x^{2m+1}$ , использование второго равенства (3.64) в стационарном уравнении (3.61) приводит к асимптотике  $\tilde{P} \propto x^{-(\alpha+2m+1)}$ , первоначально найденной в работе [151].

В результате равенства (3.61) и (3.59) приводят к уравнению Фоккера-Планка процесса Леви [149, 150]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(x, t) &= -\frac{\partial}{\partial x} [f(x) + \gamma g(x)] P(x, t) \\ &+ \left[ \frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha} + \beta \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial |x|^{\alpha-1}} \right] |g(x)|^\alpha P(x, t). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Это выражение допускает очевидное обобщение на многомерный случай симметричных процессов Леви:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\vec{x}, t) = -\nabla \left[ \vec{f}(\vec{x}) + \hat{g}(\vec{x}) \cdot \vec{\gamma} \right] P(\vec{x}, t) - \left[ -\hat{\Delta} : \vec{g}(\vec{x}) \vec{g}(\vec{x}) \right]^{\alpha/2} P(\vec{x}, t). \quad (3.66)$$

Здесь точки между символами означают суммирование по осям  $i, j$ , которые выбраны таким образом, что матрица амплитуд шумов  $\hat{g}$  принимает диагональный вид  $g_{ij} = g_i \delta_{ij}$ ; компоненты  $g_i, x_i$  формируют псевдовекторы  $\vec{g}, \vec{x}$ . В компонентной форме выражение (3.66) принимает вид уравнения непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\vec{x}, t) + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} J_i(\vec{x}) = 0 \quad (3.67)$$

с потоками вероятностей

$$J_i(\vec{x}) = \left\{ \left[ f_i(\vec{x}) + g_i(\vec{x})\gamma_i \right] + \frac{\partial^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\partial x_i^{\frac{\alpha}{2}-1}} \sum_j \left( -\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \left[ g_i(\vec{x})g_j(\vec{x}) \right]^{\frac{\alpha}{2}} \right\} P(\vec{x}). \quad (3.68)$$

В общем случае несимметричных полетов Леви компоненты двумерного потока (3.68) выражаются фурье-образами

$$\begin{aligned} J_1 &= \{ (f_1 + g_1\gamma_1) + \\ &+ i|m_1g_1|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-i\varphi_1(\frac{\alpha}{2})} |k_1|^{\frac{\alpha}{2}-2} k_1 \left[ |m_1g_1k_1|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-i\varphi_1(\frac{\alpha}{2})} + |m_2g_2k_2|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-i\varphi_2(\frac{\alpha}{2})} \right] \} \tilde{P}, \\ J_2 &= \{ (f_2 + g_2\gamma_2) + \\ &+ i|m_2g_2|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-i\varphi_2(\frac{\alpha}{2})} |k_2|^{\frac{\alpha}{2}-2} k_2 \left[ |m_1g_1k_1|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-i\varphi_1(\frac{\alpha}{2})} + |m_2g_2k_2|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-i\varphi_2(\frac{\alpha}{2})} \right] \} \tilde{P}, \end{aligned} \quad (3.69)$$

где использованы параметры (3.55). Соответствующие выражения в прямом пространстве приведены в приложении А, которое показывает, что при этом аналитическое рассмотрение оказывается невозможным.

3.2.2. Статистическая картина предельного цикла. Как упоминалось в пункте 3.1.2, теорема о центральном многообразии показывает, что описание предельного цикла требует использования пары степеней свободы, отвечающих стохастическим переменным  $X_i$ ,  $i = 1, 2$ . Таким образом, для наших целей достаточно ограничиться уравнениями Ланжевена [144]

$$dX_i = f_i dt + g_i dL_i, \quad i = 1, 2 \quad (3.70)$$

с произвольными силами  $f_i = f_i(x_1, x_2)$  и амплитудами шумов  $g_i = g_i(x_1, x_2)$ , которые являются функциями обеих переменных  $x_i$ ,  $i = 1, 2$ ; стохастические слагаемые отвечают процессам Леви  $L_i = L_i(t)$ . Согласно (3.56) – (3.59), в рамках исчисления Ито эти процессы определяются парой элементарных

характеристических функций

$$\langle e^{ik_i dX_i} \rangle := e^{\mathcal{L}_i dt} \quad (3.71)$$

с инкрементами  $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_i(k_1, k_2; x_1, x_2)$  вида [149]

$$\mathcal{L}_i = ik_i (f_i + \gamma_i g_i) - |m_i g_i k_i|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-i\varphi_i(\frac{\alpha}{2})} \sum_{j=1}^2 |m_j g_j k_j|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-i\varphi_j(\frac{\alpha}{2})}. \quad (3.72)$$

Здесь  $k_i$  – волновые числа, сопряжённые стохастическим переменным  $x_i$ , имеющим средние значения  $\gamma_i$ , параметры  $\varphi_i$  и  $m_i$  для каждой степени свободы  $i = 1, 2$  определены равенствами (3.55),  $1 < \alpha \leq 2$  – показатель Леви. Согласно рассмотрению, проведенному в предыдущем пункте, характеристическая функция

$$\tilde{P}(k_1, k_2; t) \equiv \mathcal{F}\{P(x_1, x_2)\}(k_1, k_2; t) := \iint_{-\infty}^{+\infty} dx_1 dx_2 P(x_1, x_2; t) e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} \quad (3.73)$$

процесса Леви, определённого выражением (3.70), подчиняется уравнению Фоккера-Планка

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} = \sum_{i=1}^2 \left[ i(f_i + \gamma_i g_i) k_i - |m_i g_i k_i|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-i\varphi_i(\frac{\alpha}{2})} \sum_{j=1}^2 |m_j g_j k_j|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-i\varphi_j(\frac{\alpha}{2})} \right] \tilde{P} \quad (3.74)$$

типа (3.61) с инкрементом (3.59). Характерная особенность уравнения (3.74) состоит в том, что его правая часть является функцией волновых чисел  $k_1$  и  $k_2$ , тогда как обе силы  $f_i = f_i(x_1, x_2)$  и амплитуды мультипликативных шумов  $g_i = g_i(x_1, x_2)$  зависят от координат  $x_1$  и  $x_2$ .

Согласно уравнению непрерывности (3.67), компоненты потока вероятностей в стационарном состоянии удовлетворяют условию  $\sum_i \partial J_i / \partial x_i = 0$ . Это означает, что первая компонента  $J_1 = J_1(x_2)$  является функцией только переменной  $x_2$ , а вторая  $J_2 = J_2(x_1)$  зависит лишь от  $x_1$ . В результате поведение

системы определяется уравнениями

$$\left\{ (f_1 + g_1\gamma_1) + i|m_1g_1|^{\frac{\alpha}{2}}e^{-i\varphi_1(\frac{\alpha}{2})}|k_1|^{\frac{\alpha}{2}-2}k_1 \left[ |m_1g_1k_1|^{\frac{\alpha}{2}}e^{-i\varphi_1(\frac{\alpha}{2})} + |m_2g_2k_2|^{\frac{\alpha}{2}}e^{-i\varphi_2(\frac{\alpha}{2})} \right] \right\} \tilde{P} = 2\pi J_1(k_2)\delta(k_1), \quad (3.75)$$

$$\left\{ (f_2 + g_2\gamma_2) + i|m_2g_2|^{\frac{\alpha}{2}}e^{-i\varphi_2(\frac{\alpha}{2})}|k_2|^{\frac{\alpha}{2}-2}k_2 \left[ |m_1g_1k_1|^{\frac{\alpha}{2}}e^{-i\varphi_1(\frac{\alpha}{2})} + |m_2g_2k_2|^{\frac{\alpha}{2}}e^{-i\varphi_2(\frac{\alpha}{2})} \right] \right\} \tilde{P} = 2\pi J_2(k_1)\delta(k_2). \quad (3.76)$$

Поскольку эти уравнения определяют одну и ту же функцию  $\tilde{P}(k_1, k_2)$ , то должно соблюдаться условие согласования

$$\begin{aligned} & \left[ (f_1 + g_1\gamma_1) + ie^{-i\varphi_1(\alpha)}|m_1g_1|^{\alpha}|k_1|^{\alpha-2}k_1 \right] \delta(k_2)J_2(k_1) = \\ & = \left[ (f_2 + g_2\gamma_2) + ie^{-i\varphi_2(\alpha)}|m_2g_2|^{\alpha}|k_2|^{\alpha-2}k_2 \right] \delta(k_1)J_1(k_2), \end{aligned} \quad (3.77)$$

которое ограничивает выбор компонент потока вероятностей  $J_1(k_2)$  и  $J_2(k_1)$ .

Умножая (3.75) на  $|m_2g_2|^{\frac{\alpha}{2}}e^{-i\varphi_2(\frac{\alpha}{2})}$ , а (3.76) на  $|m_1g_1|^{\frac{\alpha}{2}}e^{-i\varphi_1(\frac{\alpha}{2})}$  и вычитая результаты, получаем равенство

$$\begin{aligned} & \left\{ F + i|m_1m_2g_1g_2|^{\frac{\alpha}{2}}e^{-i[\varphi_1(\frac{\alpha}{2})+\varphi_2(\frac{\alpha}{2})]} \right\} \times \\ & \times \left[ |m_1g_1k_1|^{\frac{\alpha}{2}}e^{-i\varphi_1(\frac{\alpha}{2})} + |m_2g_2k_2|^{\frac{\alpha}{2}}e^{-i\varphi_2(\frac{\alpha}{2})} \right] \left( |k_1|^{\frac{\alpha}{2}-2}k_1 - |k_2|^{\frac{\alpha}{2}-2}k_2 \right) \tilde{P} = \\ & = 2\pi \left[ J_1(k_2)\delta(k_1)|m_2g_2|^{\frac{\alpha}{2}}e^{-i\varphi_2(\frac{\alpha}{2})} - J_2(k_1)\delta(k_2)|m_1g_1|^{\frac{\alpha}{2}}e^{-i\varphi_1(\frac{\alpha}{2})} \right], \end{aligned} \quad (3.78)$$

в котором введено обозначение

$$F \equiv (f_1 + \gamma_1g_1)|m_2g_2|^{\frac{\alpha}{2}}e^{-i\varphi_2(\frac{\alpha}{2})} - (f_2 + \gamma_2g_2)|m_1g_1|^{\frac{\alpha}{2}}e^{-i\varphi_1(\frac{\alpha}{2})}. \quad (3.79)$$



Уравнение (3.78) даёт явное выражение функции распределения вероятностей

$$P(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_2}{2\pi} \frac{J_1(k_2) |m_2 g_2|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-i[k_2 x_2 + \varphi_2(\frac{\alpha}{2})]}}{F_2 - i |g_1|^{\frac{\alpha}{2}} |m_2 g_2|^{\alpha} e^{-i\varphi_2(\alpha)} |k_2|^{\alpha-2} k_2} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_1}{2\pi} \frac{J_2(k_1) |m_1 g_1|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-i[k_1 x_1 + \varphi_1(\frac{\alpha}{2})]}}{F_1 + i |g_2|^{\frac{\alpha}{2}} |m_1 g_1|^{\alpha} e^{-i\varphi_1(\alpha)} |k_1|^{\alpha-2} k_1}, \quad (3.80)$$

где эффективные силы  $F_{1,2}$  определяются выражением (3.79) при  $m_{2,1} = 1$  и  $\varphi_{2,1} = 0$  соответственно.

Выше мы выяснили, что в стационарном состоянии первая компонента потока вероятностей  $J_1 = J_1(x_2)$  является функцией только переменной  $x_2$ , а вторая  $J_2 = J_2(x_1)$  зависит лишь от  $x_1$ . Благодаря этому соответствующие фурье-образы выражаются равенствами  $J_1(k_2) = 2\pi J_1^{(0)} \delta(k_2)$ ,  $J_2(k_1) = 2\pi J_2^{(0)} \delta(k_1)$  с постоянными множителями  $J_i^{(0)} = \text{const}$ . В результате условие согласования (3.77) принимает вид  $(f_1 + g_1 \gamma_1) J_2^{(0)} = (f_2 + g_2 \gamma_2) J_1^{(0)}$ , эффективная сила (3.79) равна  $F_0 = (f_1 + \gamma_1 g_1) |g_2|^{\frac{\alpha}{2}} - (f_2 + \gamma_2 g_2) |g_1|^{\frac{\alpha}{2}}$ , а плотность вероятности (3.80) записывается в форме

$$P = \frac{J_1^{(0)} |g_2|^{\frac{\alpha}{2}} - J_2^{(0)} |g_1|^{\frac{\alpha}{2}}}{F_0}. \quad (3.81)$$

Граничный цикл образуется при условии, что эта функция расходится на замкнутой кривой. Это возможно только при выполнении равенства  $F_0 = 0$ , которое совместно с условием согласования приводит к выражению

$$\frac{J_1^{(0)}}{J_2^{(0)}} = \frac{f_1 + \gamma_1 g_1}{f_2 + \gamma_2 g_2} = \left| \frac{g_1}{g_2} \right|^{\frac{\alpha}{2}}. \quad (3.82)$$

Из него видно, что числитель и знаменатель плотности вероятностей (3.81) одновременно принимают нулевые значения. В результате мы приходим к выводу, что образование предельного цикла в стационарном состоянии, в котором обе

компоненты потока вероятностей  $J_1(x_1, x_2)$  и  $J_2(x_1, x_2)$  принимают постоянные значения, оказывается невозможным.

Рассмотрим теперь общий случай, в котором потоки вероятностей не сводятся к постоянным значениям, так что их фурье-образы выражаются произвольными зависимостями  $J_1(k_2)$ ,  $J_2(k_1)$ . Задача сводится к вычислению интегралов в выражении (3.80), в котором удобно записать  $|k| = \text{sgn}(k)k = e^{i\pi\theta(-k)}k$ , где  $\theta(k)$  – ступенька Хевисайда. В результате имеем  $|k|^{\alpha-2}k = e^{-i\pi\theta(-k)(2-\alpha)}k^{\alpha-1}$ , и положения полюсов подынтегральных выражений в (3.80) определяются равенством

$$K_{1,2} = \left( \frac{F_{1,2}}{|m_{1,2}g_{1,2}|^\alpha |g_{2,1}|^{\frac{\alpha}{2}}} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \times \exp \left\{ i \frac{\varphi_{1,2}(\alpha) + (2-\alpha)\pi\theta(-\Re K_{1,2})}{\alpha-1} + \frac{(\pi/2)\text{sgn}(\Im K_{1,2})}{\alpha-1} \right\}. \quad (3.83)$$

Наличие знакопеременного слагаемого  $(\pi/2)\text{sgn}(\Im K_{1,2})$  в показателе экспоненты показывает, что полюсы  $K_{1,2}$  расположены в различных полуплоскостях комплексных переменных  $k_{1,2}$ . Поскольку основной вклад в интегралы (3.80) вносят окрестности полюсов, то можно воспользоваться разложением

$$k^{\alpha-1} = K^{\alpha-1} \left( 1 + \frac{k-K}{K} \right)^{\alpha-1} \approx K^{\alpha-1} + (\alpha-1)K^{\alpha-2}(k-K). \quad (3.84)$$

Однако наличие абсолютных значений  $|k_{1,2}|$  не позволяет замкнуть контуры интегрирования, целиком охватывая верхнюю или нижнюю полуплоскости.

Для выяснения ситуации определим вклад полюса, расположенного в верхней полуплоскости комплексной переменной  $k$ . С этой целью разделим эту полуплоскость на две части, отвечающие положительным и отрицательным значениям действительной части  $k$ . Согласно рисунку 3.4, интегралы в выражении

(3.80) могут быть преобразованы следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(k)}{k-K} dk \equiv \int_{AB} \frac{f(k)}{k-K} dk + \int_{DE} \frac{f(k)}{k-K} dk = \oint_{ABC} \frac{f(k)}{k-K} dk \\
& - \left[ \int_{BC} \frac{f(k)}{k-K} dk + \int_{CA} \frac{f(k)}{k-K} dk \right] + \oint_{DEF} \frac{f(k)}{k-K} dk - \left[ \int_{EF} \frac{f(k)}{k-K} dk + \int_{FD} \frac{f(k)}{k-K} dk \right] \\
& = \oint_{ABC} \frac{f(k)}{k-K} dk + \oint_{DEF} \frac{f(k)}{k-K} dk \\
& - \left[ \int_{BC} \frac{f(k)}{k-K} dk + \int_{FD} \frac{f(k)}{k-K} dk \right] - \left[ \int_{CA} \frac{f(k)}{k-K} dk + \int_{EF} \frac{f(k)}{k-K} dk \right].
\end{aligned} \tag{3.85}$$

С устремлением радиусов дуг  $CA$  и  $EF$  к бесконечности, оба интеграла в последних квадратных скобках исчезают. С другой стороны, сближение полуосей  $BC$  и  $FD$  приводит к условию  $\int_{BC} = -\int_{FD}$ , благодаря которому слагаемые в предпоследних квадратных скобках также сокращаются. Более того, интеграл по контуру  $DEF$  равен нулю в силу того, что этот контур не охватывает никакого полюса. В результате получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(k)}{k-K} dk = \oint_{ABC} \frac{f(k)}{k-K} dk = \operatorname{sgn}(\Im K) 2\pi i f(K), \tag{3.86}$$

где последнее равенство следует из теоремы о вычетах. В результате использование интеграла Коши (3.86) приводит к выражению распределения вероятностей (3.80) в виде

$$P(x_1, x_2) = F_1^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} P_1 e^{-i(K_1 x_1 - \phi_1)} + F_2^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} P_2 e^{-i(K_2 x_2 - \phi_2)}, \tag{3.87}$$

где введены обозначения

$$P_{1,2} \equiv \frac{J_{2,1}(K_{1,2})}{(\alpha - 1) |g_{2,1}|^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}} |m_{1,2} g_{1,2}|^{\frac{\alpha(3-\alpha)}{2(\alpha-1)}}, \quad (3.88)$$

$$\phi_{1,2} \equiv \frac{3 - \alpha}{\alpha - 1} \varphi_{1,2} \left( \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{\pi}{2} \frac{2 - \alpha}{\alpha - 1} [\operatorname{sgn}(\Im K_{1,2}) + 2\theta(-\Re K_{1,2})].$$

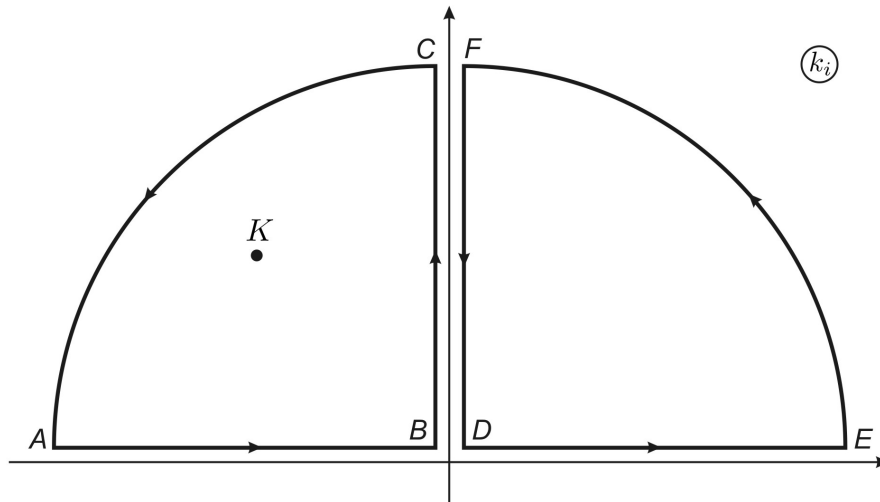


Рис. 3.4. К вычислению интегралов в выражениях (3.85), (3.86)

В подразделе 3.1 мы провели исследование условий образования предельного цикла в стохастической системе Лоренца с гауссовыми шумами. Было показано, что квазипериодические колебания возникают, если наиболее быстрое изменение испытывает гидродинамическая мода, связанная нелинейным образом с двумя или более другими степенями свободы. Условие проявления такого поведения сводится к расходимости функции распределения вероятностей, которая оказывается обратно пропорциональной эффективной силе типа (3.79). Поэтому обращение этой силы в нуль в точках замкнутой кривой, локализованной на фазовой плоскости, означает, что с бесконечной вероятностью эволюция системы развивается по статистическим состояниям предельного цикла.

Проведенный выше анализ поведения системы, обладающей двумя степенями свободы, находящихся под действием мультипликативных шумов Леви, показал, что её неравновесное стационарное состояние определяется функцией

распределения вероятностей (3.87). Эта функция содержит эффективную силу (3.79) в положительной степени  $(2 - \alpha)/(\alpha - 1)$ . Поэтому следует заключить, что полёты Леви подавляют стационарное квазипериодическое движение, отвечающее предельному циклу. Физическая причина столь резкого отличия в поведении стохастических систем, находящихся под действием шумов Леви и Гаусса, состоит в том, что в пределе  $\Delta t \rightarrow 0$  характерное изменение  $\Delta L \sim (\Delta t)^{1/\alpha}$  стохастической переменной в процессе Леви, отвечающей степени  $\alpha < 2$ , пренебрежимо мало в сравнении с гауссовой вариацией  $\Delta W \sim (\Delta t)^{1/2}$ .

Отметим, что указанное отличие устраняет проблему выбора исчисления. Как известно [144], эта проблема обусловлена нерегулярностью временной зависимости  $X(t)$  стохастической переменной (для простоты здесь мы возвращаемся к рассмотрению одномерного случая). Действительно, интегрирование уравнения движения (3.70) приводит к выражению

$$X(t) = \int_0^t f(x(t')) dt' + \int_{L(0)}^{L(t)} g(x(\tilde{t}')) dL(t'), \quad (3.89)$$

в котором можно взять амплитуду шума  $g(x(\tilde{t}'))$  в любой момент времени

$$\tilde{t}' = t' + \lambda \Delta t'; \quad \lambda \in [0, 1], \quad \Delta t' \rightarrow 0 \quad (3.90)$$

не совпадающий со временем интегрирования  $t'$  благодаря ненулевому значению параметра исчисления  $\lambda \in [0, 1]$  [144]. Из (3.90) и (3.70) следует разложение

$$\begin{aligned} g(x(\tilde{t})) &\simeq g(x(t)) + \lambda g'(x(t)) \Delta X(t) \\ &\simeq g(x(t)) + \lambda g'(x(t)) f(x(t)) \Delta t + \lambda g'(x(t)) g(x(t)) \Delta L(t), \end{aligned} \quad (3.91)$$

где штрих обозначает дифференцирование по  $x$ . После его подстановки в (3.89) первое слагаемое в последней строчке (3.91) отвечает обычному случаю исчисления Ито ( $\lambda = 0$ ). Подстановка второго слагаемого даёт добавку, порядок

которой  $\Delta L \cdot \Delta t \sim (\Delta t)^{1+(1/\alpha)} \ll \Delta t$  выше, чем у предыдущего слагаемого, и вкладом этого слагаемого можно пренебречь (та же ситуация имеет место и для гауссова процесса). Наконец, подстановка последнего слагаемого (3.91) в (3.89) даёт добавку порядка  $(\Delta L)^2 \sim (\Delta t)^{2/\alpha}$ . В случае гауссова шума ( $\alpha = 2$ ), показатель  $2/\alpha$  этой добавки совпадает с показателем первого слагаемого (3.89), в результате чего физическая сила  $f(x)$  перенормируется слагаемым  $\lambda g(x)g'(x)$ . Принципиально отличная ситуация возникает для процессов Леви, когда показатель  $\alpha < 2$ , и благодаря условию  $(\Delta t)^{2/\alpha} \ll \Delta t$  указанная добавка оказывается пренебрежимо малой в сравнении с физической силой.

### 3.3. Выводы к разделу 3

1. Исследование системы Лоренца показывает, что предельный цикл не реализуется в стационарном состоянии стохастической системы, если обобщённые силы и амплитуды эффективных шумов не содержат двузначных комбинаций типа чётных степеней переменных, параметризующих процесс самоорганизации.

2. В стохастической системе, находящейся в стационарном состоянии, предельный цикл образуется в том случае, если наиболее быстро изменяется степень свободы, связанная нелинейным образом не менее чем с парой остальных.

3. Шумы Леви подавляют образование предельного цикла стохастической системы.

## РАЗДЕЛ 4

## СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

В последние годы значительно возрос интерес к исследованию сложных статистических систем (см. [18, 27, 40, 41] и имеющиеся там ссылки). Поведение таких систем определяется дальнедействующим взаимодействием, эффектами долговременной памяти и замедленной кинетикой, наличие которых способствует формированию мультифрактального фазового пространства. С формальной точки теория сложных систем основывается на деформации логарифмической и экспоненциальной функций, которая модифицирует энтропию Больцмана-Гиббса таким образом, что функция распределения приобретает либо дальнедействующие степенные асимптотики [152, 155–157, 159], либо обрезается на конечных значениях энергии [160, 161]. Характерной особенностью сложных систем является самоподобие их фазового пространства, объём которого остаётся неизменным при деформации, комбинирующей сжатие (растяжение) координаты и растяжение (сжатие) импульса [162].

С другой стороны, деформация перестановочных соотношений в квантовой теории позволила развить нетривиальные физические представления таких объектов как чёрные дыры и анионные сверхпроводники [39]. Эти представления основаны на формализме квантовых групп, который сводится к так называемому  $q$ -исчислению [163–165], впервые введенному Хейне и Джексоном [166, 167] при изучении базово-деформированных гипергеометрических рядов [168]. С математической точки зрения  $q$ -исчисление представляет наиболее удобный формализм для описания мультифрактальных множеств, которые образуются в результате многократного действия оператора дилатации, определяющего производную Джексона [162]. Более того, оказывается [155, 169], что для  $q$ -деформированных бозонов и фермионов, естественное обобщение термостатистики основано на  $q$ -исчислении, а стационарное решение деформированного уравнения Фоккера-Планка представляет  $q$ -аналог экспоненциальной функции в



представлении базово-деформированных гипергеометрических рядов [160, 161]. Такого рода системы обнаруживают дискретную масштабную инвариантность, описание которой [170] достигается использованием производной и интеграла Джексона (например, свободная энергия спиновых систем, определённых на иерархической решетке, сводится к однородной функции, представляющей  $q$ -интеграл [171]).

Следует отметить ещё одну область приложений деформированных полей — статистическую теорию систем конечного размера, важность исследования которых возросла с развитием нанoeлектроники. Это связано с тем, что при конечном числе частиц  $N$  параметр неаддитивности принимает значение [172–174]

$$q = \left(1 - \frac{\alpha}{d} N^{-1}\right)^{-1}, \quad (4.1)$$

где  $\alpha$  — показатель подобия координатной зависимости гамильтониана (например, для гармонического осциллятора  $\alpha = 2$ ),  $d$  — размерность системы. Короткодействующие потенциалы ( $\alpha > 0$ ) характеризуются значениями  $q \geq 1$ , а дальнедействующим ( $-d \leq \alpha \leq 0$ ) отвечает величина  $q \leq 1$  (при  $\alpha < -d$  применима статистика Больцмана-Гиббса [41]). В термодинамическом пределе  $N \rightarrow \infty$  получаем значение  $q = 1$ , отвечающее обычной статистике, а со спаданием числа частиц  $N$  разность  $|q - 1|$  возрастает, достигая максимальной величины  $\alpha/(d - \alpha)$  при  $\alpha > 0$  и  $|\alpha|/(d + |\alpha|)$  при  $\alpha < 0$ .

Настоящая глава посвящена рассмотрению сложных стохастических систем в рамках полевого формализма, который, как известно из теории простых статистических систем [79], представляет один из наиболее мощных инструментов исследования. В подразделе 4.1 даётся введение в теорию самоподобных статистических ансамблей, результатом которой является определение показателя однородной функции, характеризующей свойство самоподобия [53]. Подраздел 4.2 посвящён построению теоретико-полевой схемы самоподобных статистических систем [54]. Основное место занимает подраздел 4.3, в рамках которого развиты

полевые представления, отвечающие базово-деформированному и конечно-разностному исчислениям, а также процедурам деформации, предложенным Цаллисом, Абе и Каниадакисом и обобщенной Наудсом [62].

#### 4.1. Показатель подобия сложного статистического ансамбля

Настоящий подраздел посвящён определению параметра  $q$ , представляющего, с одной стороны, степень неаддитивности в термостатистике Цаллиса, а с другой — показатель однородной функции в теории самоподобных систем.<sup>4</sup> Пункт 4.1.1 посвящён определению эскортной функции распределения вероятности, основанному на условии её мультипликативности применительно к сложным системам [175]. В согласии с предположением [154], мы показываем, что эта функция имеет степенную форму с дробным показателем, совпадающим с параметром неаддитивности Цаллиса. В пункте 4.1.2 приводятся основные положения теории квантовых групп применительно к описанию самоподобных систем. В рамках теории групп Ли [176] в пункте 4.1.3 мы показываем, что инвариантность самоподобных систем по отношению к многократному действию производной Джексона приводит к уравнению, которое определяет зависимость показателя самоподобия от дилатации системы. В заключительном пункте 4.1.4 проводится обобщение на случай аффинных преобразований, параметр дилатации которых изменяется на каждом шаге преобразований.

4.1.1. Параметр неаддитивности. Неаддитивная термостатистика основана на использовании обобщённого логарифма [18, 27]

$$\ln_q(x) := \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q}, \quad (4.2)$$

---

<sup>4</sup>В теории квантовых групп параметр  $q$  обозначает величину деформации. Во избежание путаницы здесь мы обозначим его буквой  $\lambda$ .

деформированного параметром неаддитивности  $q$ . Этот логарифм определяет энтропию Цаллиса

$$S := \langle \ln_q(1/p) \rangle = - \langle \ln_{2-q} p \rangle = - \sum_{i=1}^W p_i^q \ln_q p_i, \quad (4.3)$$

где вероятность  $p_i$  реализации  $i$ -ого состояния подчиняется условию нормировки и задаёт внутреннюю энергию  $E$ :

$$\sum_{i=1}^W p_i = 1, \quad \sum_{i=1}^W \varepsilon_i \mathcal{P}(f(p_i)) = E. \quad (4.4)$$

Характерно, что физически наблюдаемые величины типа внутренней энергии  $E$  определяются не исходной вероятностью  $p_i$ , а эскортным распределением

$$\mathcal{P}(f(p_i)) := \frac{f(p_i)}{\sum_{i=1}^W f(p_i)}, \quad \sum_{i=1}^W \mathcal{P}(f(p_i)) = 1, \quad (4.5)$$

где функция  $f(p_i)$  имеет степенной вид [154]

$$f(p_i) \propto p_i^q. \quad (4.6)$$

Следуя [175], покажем, что зависимость (4.6) вытекает из условия мультипликативности

$$f(p_{ij}^{AB}) = f(p_i^A) f(p_j^B) \quad (4.7)$$

для системы  $AB$ , состоящей из статистически независимых подсистем  $A$  и  $B$ , вероятности которых связаны условием  $p_{ij}^{AB} = p_i^A p_j^B$ . С этой целью подставим в

соотношение (4.7) ряд

$$f(x) = x^\delta \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n, \quad (4.8)$$

определённый дробной степенью  $0 < \delta < 1$  и коэффициентами  $C_n$ . В результате приходим к уравнению

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (C_m - \delta_{mn}) C_n (p_i^A)^m (p_j^B)^n = 0, \quad (4.9)$$

которое должно удовлетворяться при произвольных вероятностях  $p_i^A, p_j^B$ . Это возможно только при условии  $(C_m - \delta_{mn})C_n = 0$ , из которого следуют равенства  $C_m = C_n = 1$ , выполняющиеся для некоторого фиксированного слагаемого  $n$  ряда (4.8), тогда как для других  $n$  имеем  $C_n = 0$ . В результате приходим к соотношению (4.6) со степенью

$$q = n + \delta, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.10)$$

подлежащей определению. Далее будет показано, что условие инвариантности фазового пространства неаддитивной статистической системы относительно деформации позволяет представить вероятность (4.5), (4.6) как однородную функцию с показателем подобия (4.10).

4.1.2. Описание самоподобных систем. Введём оператор дилатации

$$D_x^\lambda := \lambda^{x\partial_x}, \quad \partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \quad (4.11)$$

где  $\lambda$  — произвольный положительный параметр. Проводя формальное разложение оператора (4.11) в ряд Тейлора, определим его действие на степенную

функцию:

$$D_x^\lambda x^n = \lambda^{x\partial_x} x^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[\ln(\lambda)(x\partial_x)]^m}{m!} x^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n \ln \lambda)^m}{m!} x^n = (\lambda x)^n. \quad (4.12)$$

Подобным образом для произвольной аналитической функции  $f(x)$  получаем

$$D_x^\lambda f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[\partial_x f(x)|_{x=0}]^m}{m!} D_x^\lambda x^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[\partial_x f(x)|_{x=0}]^m}{m!} (\lambda x)^m = f(\lambda x). \quad (4.13)$$

Определяя однородную функцию равенством

$$h(\lambda x) := \lambda^q h(x), \quad (4.14)$$

из (4.13) находим, что действие оператора дилатации (4.11) описывается уравнением на собственные значения:

$$D_\lambda h(x) = \lambda^q h(x). \quad (4.15)$$

Введём производную Джексона [167, 176]

$$\mathcal{D}_x^\lambda := \frac{D_x^\lambda - 1}{(\lambda - 1)x}, \quad (4.16)$$

которая связана с оператором дилатации коммутатором  $[\mathcal{D}_x^\lambda, x] = D_x^\lambda$ . Благодаря условию самоподобия (4.14) её действие на однородную функцию определяется равенством

$$(x\mathcal{D}_x^\lambda)h(x) = [q]_\lambda h(x), \quad (4.17)$$

где  $\lambda$ -деформированное число

$$[q]_\lambda := \frac{\lambda^q - 1}{\lambda - 1} \quad (4.18)$$

равно показателю  $q$  в отсутствие дилатации ( $\lambda = 1$ ) и возрастает как  $\lambda^{q-1}$  в пределе  $\lambda \rightarrow \infty$ . Согласно соотношениям (4.15), (4.17), однородная функция  $h(x)$  является собственной функцией как для оператора дилатации  $D_\lambda$ , так и производной Джексона  $x\mathcal{D}_x^\lambda$ , для которых собственные значения сводятся к степенной функции  $\lambda^q$  и  $\lambda$ -деформированному числу (4.18) соответственно.

Используя деформированное правило Лейбница для произвольных функций  $f(x), g(x)$  [168]

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_x^\lambda f(x)g(x) &= g(x)\mathcal{D}_x^\lambda f(x) + f(\lambda x)\mathcal{D}_x^\lambda g(x) \\ &= g(\lambda x)\mathcal{D}_x^\lambda f(x) + f(x)\mathcal{D}_x^\lambda g(x), \end{aligned} \quad (4.19)$$

легко видеть, что однородная функция, удовлетворяющая уравнению (4.17), в общем случае имеет вид

$$h(x) = A_\lambda(x)x^q, \quad (4.20)$$

где  $q > 0$ , а амплитуда  $A_\lambda(x)$  удовлетворяет условию

$$\mathcal{D}_x^\lambda A_\lambda(x) = 0. \quad (4.21)$$

Отсюда с учётом соотношений (4.16), (4.13) находим условие инвариантности амплитуды относительно деформации  $\lambda$

$$A_\lambda(\lambda x) = A_\lambda(x). \quad (4.22)$$

Легко видеть, что этому условию удовлетворяет ряд

$$A(x) = x^{-q} \sum_{m=-\infty}^{\infty} p(\lambda^m x) \lambda^{-qm}, \quad (4.23)$$

где  $p(x)$  – произвольная периодическая функция, которая обращается в нуль при  $x = 0$  вместе со всеми производными, порядок которых не превышает  $n + 1$ , где  $n \equiv [q]$  – целая часть  $q$ . Согласно (4.23), амплитуда однородной функции (4.20) изменяется периодически в логарифмических осях с периодом  $\ln \lambda$  [170]. В простейшем случае  $p(x) = 1 - \cos(x)$  получаем функцию Вейерштрасса-Мандельброта

$$h(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(\lambda^m x)}{\lambda^{qm}}, \quad (4.24)$$

график которой представляет фрактальное множество размерности  $2 - q$  [80]. Записывая показатель подобия в комплексной форме

$$q_m \equiv q + i \frac{2\pi}{\ln \lambda} m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4.25)$$

легко видеть, что однородная функция (4.20) может быть представлена рядом Меллина

$$h(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m x^{q_m}, \quad (4.26)$$

который, как известно, является атрибутом самоподобных систем. Вместе с тем зачастую оказывается более удобным использовать представление Фурье [17]

$$A_\lambda(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \exp\left(i \frac{2\pi}{\ln \lambda} m \ln x\right) \simeq A_0 + 2A_1 \cos\left(2\pi \frac{\ln x}{\ln \lambda}\right), \quad (4.27)$$

где последнее выражение записано с учётом того факта, что коэффициенты

$A_m = A_{-m}$  быстро спадают с ростом  $m$ . С физической точки зрения логарифмически осциллирующее поведение обусловлено переходами между различными уровнями иерархического дерева, которое отвечает многократным дилатациям самоподобной системы.

Проведенное рассмотрение показывает, что изложенный формализм позволяет адекватным образом представить свойства статистических систем, обладающих инвариантностью по отношению к конечным деформациям. Фазовое пространство таких систем формирует фрактальное множество, генерация которого обеспечивается многократным действием оператора дилатации (4.11), отвечающего растяжению ( $\lambda > 1$ ) или сжатию ( $\lambda < 1$ ) оси  $x$  в  $\lambda$  раз. Соответственно, набор  $\{h(x)\}$  однородных функций (4.20) образует функциональное пространство, отвечающее представлению Фока-Баргманна алгебры Вейля-Гейзенберга. Эта алгебра реализуется набором операторов рождения  $\hat{a}$  и уничтожения  $a$  частиц, дополненным оператором их числа  $N \equiv \hat{a}a$ , которые удовлетворяют коммутационным соотношениям [177]

$$[a, \hat{a}] = 1, \quad [N, \hat{a}] = \hat{a}, \quad [a, N] = a. \quad (4.28)$$

Переход к представлению Фока-Баргманна выражается следующим образом:

$$\hat{a} \rightarrow x, \quad a \rightarrow \partial_x, \quad N \rightarrow x\partial_x. \quad (4.29)$$

Интересно отметить, что однородные функции выделены в полном наборе функций таким же образом, как когерентные состояния выделены в наборе возможных квантовых состояний [162, 165]. Действительно, волновая функция когерентного



## СОСТОЯНИЯ

$$\begin{aligned}
|x\rangle &:= \exp(x\hat{a} - \bar{x}a) |0\rangle = \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\hat{a})^n}{n!} |0\rangle \\
&= \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x) |n\rangle,
\end{aligned} \tag{4.30}$$

представляет суперпозицию кет-векторов  $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \hat{a}^n |0\rangle$  с коэффициентами  $h_n(x) \equiv h(x)|_{q=n}$ , являющимися однородными функциями (4.20) с целочисленными значениями показателя подобия  $q = n$ . Согласно (4.13), деформированное когерентное состояние определяется равенством

$$D_x^\lambda |x\rangle = |\lambda x\rangle = \exp\left(-\frac{|\lambda x|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \tag{4.31}$$

Его сравнение с последним выражением (4.30) показывает, что с точностью до несущественного множителя  $1/\sqrt{n!}$  деформированная однородная функция

$$\tilde{h}_n(x) := D_x^\lambda h_n(x) = \frac{(\lambda x)^n}{\sqrt{n!}}, \tag{4.32}$$

отличается от недеформированной множителем  $\lambda^n$ , который отвечает сжатию в процессе генерации фрактального множества [80]. Таким образом, можно заключить, что многократные дилатации когерентного состояния (4.30) являются формальной реализацией итераций, образующих фрактальное множество.

Согласно соотношениям (4.29) при деформации алгебры Вейля-Гейзенберга (4.28) оператор  $a$  заменяется производной Джексона (4.16). Более того, как известно из квантовой оптики, удобно ввести оператор сжатия [162, 165]

$$S := \sqrt{\lambda} D_x^\lambda = \sqrt{\lambda} e^{(\ln \lambda)N}, \quad N \equiv x\partial_x, \tag{4.33}$$

в котором выделен множитель  $\sqrt{\lambda}$  перед оператором (4.11). При действительных

значениях  $x$  координате  $x$  и импульсу  $p = -i\partial_x$  сопоставляются эрмитово сопряженные операторы уничтожения и рождения

$$c := \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + a), \quad c^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} - a). \quad (4.34)$$

Сжатие преобразует их следующим образом:

$$\tilde{c} := S^{-1}cS = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda^{-1}\hat{a} + \lambda a) = \cosh(\ln \lambda)c - \sinh(\ln \lambda)c^\dagger, \quad (4.35)$$

$$\tilde{c}^\dagger := S^{-1}c^\dagger S = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda^{-1}\hat{a} - \lambda a) = \cosh(\ln \lambda)c^\dagger - \sinh(\ln \lambda)c. \quad (4.36)$$

Отсюда видно, что операция сжатия отвечает преобразованию Боголюбова, которое можно представить как поворот на угол  $\ln \lambda$  в плоскости, образуемой операторами  $c$  и  $c^\dagger$ . При этом канонически сопряженные значения координаты и импульса изменяются согласно соотношениям

$$\tilde{x} := S^{-1}xS = \lambda^{-1}x, \quad \tilde{p} := S^{-1}pS = \lambda p, \quad (4.37)$$

из которых следует условие сохранения объёма фазового пространства.

Рассмотрим наконец меру фрактального множества

$$M(\ell_m, R) = A_\lambda(\ell_m, R)\ell_m^d(\ell_m/R)^{-d_f}, \quad (4.38)$$

генерированного многократными преобразованиями дилатации [170] (здесь  $A_\lambda(\ell_m, R)$  — осциллирующая амплитуда типа  $A_\lambda(x)$  в однородной функции (4.20),  $R$  — характерный размер фрактальной области размерности  $d_f$ , заключенной в пространстве топологической размерности  $d \geq d_f$ ). Выражение (4.38) показывает, что фрактальная мера зависит степенным образом от линейных размеров  $\ell_m = \lambda^m$  шаров, покрывающих фрактальное множество на  $m$ -ом шаге генерации. Согласно (4.13), дилатация (4.11) преобразует размер  $\ell_m$  в  $\ell_{m+1} = \lambda\ell_m$ , в результате чего

получаем

$$D_\ell^\lambda M(\ell_m, R) = M(\ell_{m+1}, R) = \lambda^{d-d_f} M(\ell_m, R). \quad (4.39)$$

В пределе  $m \rightarrow \infty$  мера  $M(R) := \lim_{m \rightarrow \infty} M(\ell_m, R)$  зависит только от характерного размера фрактала  $R$ , и действие оператора  $D_R^\lambda$  представляется уравнением на собственные значения

$$D_R^\lambda M(R) = R^{d_f} M(R). \quad (4.40)$$

В результате оказывается, что использование генератора (4.11) группы дилатации позволяет найти разность  $d - d_f$  топологической и фрактальной размерностей в том случае, если изменяется масштаб  $\ell$ , и фрактальную размерность  $d_f$  — при изменении размера фрактала  $R$ . С другой стороны, использование комбинаций  $\ell \mathcal{D}_\ell^\lambda$  и  $R \mathcal{D}_R^\lambda$  с производной Джексона (4.16) приводит к базово-деформированным числам  $[d - d_f]_\lambda$  и  $[d_f]_\lambda$  соответственно.

Сложная система обладает мультифрактальным фазовым пространством, мера которого сводится к статистической сумме

$$Z_\lambda(\ell, R; q) := \sum_i^{N(\ell, R)} \ell^{\alpha q}, \quad (4.41)$$

где суммирование проводится по шарам  $i$ , полное число которых  $N := \ell^{-f(\alpha)}$  определяется спектральной функцией  $f(\alpha)$  с аргументом, сводящимся к показателю сингулярности  $\alpha$  [193]. Отсюда подобно (4.38) приходим к однородной функции

$$Z_\lambda(\ell, R; q) = A_\lambda(\ell, R; q) (\ell/R)^{\tau(q)} \quad (4.42)$$

где  $A_\lambda(\ell, R; q)$  — осциллирующая амплитуда,  $\tau(q)$  — показатель массы,

определяемый равенством

$$\tau(q) = \alpha_q q - f(\alpha_q), \quad (4.43)$$

в котором показатель сингулярности  $\alpha_q$  задаётся условиями применимости метода перевала

$$\left. \frac{df}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_q} = q, \quad \left. \frac{d^2 f}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=\alpha_q} < 0. \quad (4.44)$$

В результате приходим к равенству типа (4.40)

$$D_\ell^\lambda Z_\lambda(\ell, R; q) = \lambda^{\tau(q)} Z_\lambda(\ell, R; q), \quad (4.45)$$

которое определяет показатель масс  $\tau(q)$ . Как и выше, использование оператора  $\ell \mathcal{D}_\ell^\lambda$  позволяет найти базово-деформированное число  $[\tau(q)]_\lambda$ .

4.1.3. Определение показателя подобия. В рамках теории групп Ли [176] оператор  $x \mathcal{D}_x^\lambda$  представляет генератор преобразования

$$T_x^\lambda(t) := \exp[t(x \mathcal{D}_x^\lambda)], \quad (4.46)$$

определённый параметром  $t$ . С учётом (4.17) формальное разложение экспоненты (4.46) в ряд Тейлора даёт

$$T_x^\lambda(t)h(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m (x \mathcal{D}_x^\lambda)^m}{m!} h(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{([q]_\lambda t)^m}{m!} h(x) = e^{[q]_\lambda t} h(x). \quad (4.47)$$

Таким образом, оператор (4.46) имеет собственное значение  $e^{[q]_\lambda t}$ , определённое базово-деформированным числом (4.18), а собственная функция сводится к однородной (4.20).

Используя в качестве генератора преобразования группы Ли производную

Джексона  $\mathcal{D}_x^\lambda$  вместо комбинации  $x\mathcal{D}_x^\lambda$ , введём оператор

$$\mathcal{T}_x^\lambda(t) := \exp(t\mathcal{D}_x^\lambda) \quad (4.48)$$

вместо (4.46). Наше дальнейшее рассмотрение основывается на свойстве инвариантности самоподобной системы по отношению к  $(n + 1)$ -кратному действию оператора дифференцирования:<sup>5</sup>

$$(\mathcal{D}_x^\lambda)^{n+1} h(x) := x^{-(n+1)} h(x). \quad (4.49)$$

Подставляя сюда однородную функцию (4.20), с учётом (4.21) получаем

$$(\mathcal{D}_x^\lambda)^{n+1} x^q = \left( \prod_{m=0}^n [q - m]_\lambda \right) x^{q-(n+1)}. \quad (4.50)$$

В результате условие подобия (4.49) приводит к трансцендентному уравнению

$$\prod_{m=0}^n [q - m]_\lambda = 1. \quad (4.51)$$

С другой стороны, для оператора (4.48) находим цепочку равенств

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_x^\lambda(t)h(x) &= \left[ 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{m+1} (\mathcal{D}_x^\lambda)^{m+1}}{(m+1)!} \right] h(x) \\ &= \left[ 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\prod_{l=0}^m [q - l]_\lambda t^{m+1} x^{-(m+1)}}{(m+1)!} \right] h(x) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(t/x)^m}{m!} h(x) = e^{t/x} h(x). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Сравнение соотношений (4.47) и (4.52) при  $t = 1$  показывает, что генератор  $x\mathcal{D}_x^\lambda$

<sup>5</sup>Интересно отметить, что периодическая функция  $p(x)$ , задающая ряд (4.23), также имеет  $n+1$  первых производных, которые принимают нулевое значение в точке  $x = 0$ .

отвечает экспоненциальному собственному значению с показателем, сводящимся к базово-деформированному числу  $[q]_\lambda$ , тогда как использование в качестве генератора производной Джексона  $\mathcal{D}_x^\lambda$  с условием подобия (4.51) приводит к показателю  $1/x$ , представляющему обратное значение аргумента однородной функции. С физической точки зрения результат (4.52) означает, что дилатация экспоненциально усиливает однородную функцию (4.20) в области малых значений  $x$ . Принципиально важно, что при этом должно выполняться условие подобия (4.51).

Исследуем, когда выполняется это условие. В слабо деформированной системе ( $\lambda \rightarrow 1$ ) оно принимает простую форму

$$\prod_{m=0}^n (q - m) = 1. \quad (4.53)$$

При однократной дилатации ( $n = 0$ ), показатель подобия  $q_0 = 1$ , и однородная функция (4.20) отвечает прямопропорциональной зависимости. Гораздо более интересной представляется ситуация двукратной дилатации ( $n = 1$ ), когда показатель подобия сводится к *золотому сечению*

$$q_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1.618. \quad (4.54)$$

При кратности дилатации  $n > 1$  удобно использовать графическое представление (см. рис. 4.1а). Этот рисунок подтверждает, что показатель подобия сводится к параметру неаддитивности (4.10) с дробной добавкой  $0 < \delta < 1$ . В первом порядке по  $\delta$  уравнение (4.53) сводится к простому виду

$$n! \delta_n \approx 1, \quad (4.55)$$

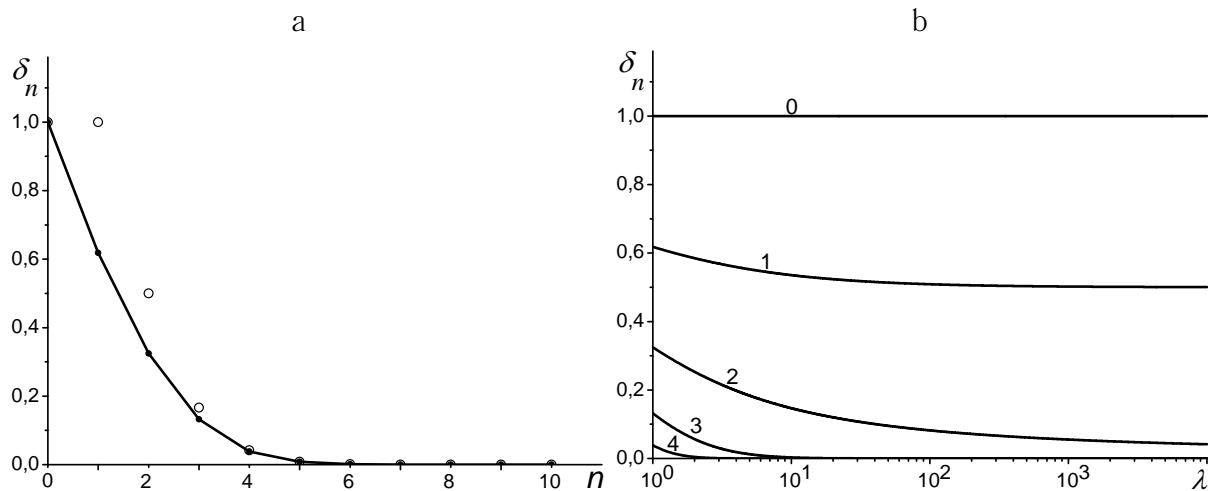


Рис. 4.1. (а) Зависимость показателя  $\delta_n = q_n - n$  от кратности  $n + 1$  преобразований слабо дилатированной системы,  $\lambda \rightarrow 1$  (точки, соединенные сплошной линией, отвечают численному решению уравнения (4.53), кружки — аналитическому (4.56)); (б) то же в зависимости от параметра дилатации  $\lambda$  при различных значениях  $n$  (указаны у соответствующих кривых)

и показатель подобия слабо дилатированной системы оценивается выражением

$$q_n \approx n + \frac{1}{n!}. \quad (4.56)$$

Рис. 4.1а показывает, что при  $n = 1$  эта оценка дает максимальную погрешность 47%, которая быстро спадает с ростом  $n$ , принимая значения меньше 1% при  $n > 3$ .

В случае произвольной дилатации  $\lambda$  комбинация равенств (4.51), (4.18) и (4.10) приводит к выражению

$$\delta_n \approx \frac{1}{\ln \lambda} \ln \left( 1 + \frac{\lambda - 1}{[n]_{\lambda}!} \right), \quad (4.57)$$

дающему показатель подобия

$$q_n \approx n + \frac{1}{\ln \lambda} \ln \left( 1 + \frac{\lambda - 1}{[n]_{\lambda}!} \right). \quad (4.58)$$

Значения  $\delta_n = q_n - n$  при различных  $n$  показаны на рис. 4.1b. Из него видно, что при  $n = 0$  показатель подобия  $q_0 = 1$  не зависит от дилатации  $\lambda$ , а при  $n > 0$  значения  $q_n(\lambda)$  монотонно спадают с ростом дилатации — тем быстрее, чем больше значение  $n$ . При этом оценка (4.58) даёт ошибку, не превышающую 1% при  $n > 3$ .

4.1.4. Заключительные замечания. Проведенное рассмотрение показывает, что самоподобные статистические ансамбли имеют фазовое пространство, объём которого остаётся неизменным благодаря тому, что деформации (4.37) отвечают сжатию координаты и равному ему расширению импульса (и наоборот). Согласно (4.13), в основе формализма, представляющего такие деформации, лежит оператор дилатации (4.11), определяющий производную Джексона (4.16). При этом распределение вероятностей сводится к однородной функции (4.20), которая является собственной функцией как для оператора дилатации, так и для производной Джексона, собственные значения которых  $\lambda^q$  и  $[q]_\lambda$  определяются показателем самоподобия  $q$ . С другой стороны, статистические состояния самоподобного ансамбля формируют (мульти)фрактальное множество, генерация которого обеспечивается многократной дилатацией (4.32) однородной функции, характеризуемой дробным показателем подобия. Согласно (4.40), (4.45), действие производной Джексона позволяет найти фрактальную размерность  $d_f$  и показатель масс  $\tau(q)$  фазового пространства.

Как показывает пункты 4.1.1 и 4.1.2, параметр неаддитивности (4.10) термостатистики Цаллиса совпадает с показателем подобия  $q$  однородной функции (4.20). Определяя эскортное распределение вероятности, эта функция устроена таким образом, что многократное действие (4.49) на неё производной Джексона сводится к умножению на степенной множитель при условии, что произведение (4.51) равно единице. В результате действие (4.52) преобразования группы Ли (4.48) сводится к экспоненциальному множителю, который усиливает степенную зависимость однородной функции при малых значениях аргумента. При этом уравнение (4.51) определяет зависимость показателя подобия  $q$  от дилатации  $\lambda$  при различной кратности  $n + 1$  действия дилатации.



В пределе слабой деформации  $\lambda \rightarrow 1$  однородная функция (4.20) сводится к линейной зависимости ( $q_0 = 1$ ) при однократной деформации ( $n = 0$ ). Принципиально другая ситуация возникает при двукратной деформации ( $n = 1$ ), когда показатель подобия равняется золотому сечению (4.54), которое, как известно, является атрибутом самоподобных систем [42]. Согласно (4.56), при  $n > 3$  показатель  $q_n$  слабо отличается от целого значения  $[q] = n$ . Как показывает рис. 4.1b, конечная дилатация  $\lambda \neq 1$  самоподобного статистического ансамбля сохраняет линейную форму однородной функции при однократной деформации ( $n = 0$ ). Увеличение числа итераций  $n > 0$  приводит к зависимостям  $q_n(\lambda)$ , которые логарифмически медленно спадают с ростом дилатации. В пределе  $n \gg 1$  это спадание подчиняется соотношению (4.58).

Подводя итог проведенного рассмотрения, следует иметь в виду, что мы ограничились использованием самоподобных преобразований, которые характеризуются единственным параметром дилатации  $\lambda$ , сохраняющим постоянное значение на всех шагах генерации фрактального множества. В общем случае *аффинных преобразований* следует использовать набор параметров дилатации  $\{\lambda_m\}$ , которые могут изменять свои значения на каждом шаге  $m$ . Более того, каждое преобразование может совершаться с удельным весом  $\alpha_m \geq 0$ , нормированным условием  $\sum_m \alpha_m = 1$ . В результате оператор дилатации (4.11) принимает вид

$$D_x := \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m D_x^{\lambda_m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m \lambda_m^{x \partial_x}, \quad (4.59)$$

согласно которому аффинные преобразования определяются равенством

$$D_x f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m f(\lambda_m x), \quad (4.60)$$

обобщающим однородную дилатацию (4.13).

Исследование аффинных множеств, инвариантных к преобразованиям

(4.60), показывает [178], что обратное преобразование Меллина координатной зависимости физической величины обладает полюсами на комплексной плоскости  $z$  при условии

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m^2 \lambda_m^{d_f + iz} = 1. \quad (4.61)$$

Эти полюсы образуют ряды, параллельные действительной оси, и ограничены областью  $1 - d_f \leq \Im z \leq 0$ , ширина которой задаётся фрактальной размерностью  $d_f$  самоаффинного множества. Решения уравнения (4.61)

$$z_n^m = -i\zeta_n + \frac{2\pi}{\ln \lambda_n} m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.62)$$

определяются набором параметров  $\lambda_n \geq 1$ ,  $0 \leq \zeta_n \leq d_f$ , отвечающих рядам полюсов  $n = 0, 1, \dots, \nu$  (целые значения  $m$  задают номера полюса в данном ряде). При этом амплитуда (4.23) однородной функции (4.20) принимает вид

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\nu} x^{-\zeta_n} p_n \left( \frac{\ln x}{\ln \lambda_n} \right). \quad (4.63)$$

В отличие от самоподобных систем зависимость (4.63) не только осциллирует логарифмически, но и спадает с ростом аргумента при условии  $\nu + 1 > 1$ .

В случае простых систем фазовое пространство является гладким, так что фрактальная размерность  $d_f = 1$  и все полюсы (4.62) чисто вещественны. В этом случае все значения  $\alpha_m = \lambda_m^{-1} = N^{-1}$  определяются полным числом  $N \rightarrow \infty$  шагов генерации фрактала, и полюсы задаются равенством

$$z_0^m = \frac{2\pi}{\ln N} m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.64)$$

При этом однородная функция (4.20) сводится к линейной форме ( $q = 1$ ) с

амплитудой, удовлетворяющей условию

$$p_0(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m p_0 \left( m \frac{\ln x}{\ln N} \right). \quad (4.65)$$

Как указывалось во введении к этому подразделу, далекодействующее взаимодействие и эффекты долговременной памяти, присущие сложным системам, способствуют формированию фрактального фазового пространства размерности  $d_f < 1$ . С усилением этих эффектов фрактальная размерность спадает, что приводит к расширению полосы комплексной плоскости, в которой сосредоточены ряды полюсов (4.62) с  $n > 0$ . Можно полагать, что этим полюсам отвечают кратности  $n$  процедуры деформирования (4.49), которая определяет показатель подобия  $q_n$  в зависимости от дилатации. Действительно, выше мы показали, что простые системы характеризуются однократной деформацией ( $n = 0$ ), которой отвечает линейная однородная функция с показателем подобия  $q_0 = 1$ , сопоставленным с рядом чисто вещественных полюсов (4.64) и логарифмически осциллирующей амплитудой (4.65). Переход к сложным системам, обусловленный далекодействием и эффектами памяти, приводит к появлению ряда мнимых полюсов (4.62), которые связаны с двукратной деформацией ( $n = 1$ ), определяющей неаддитивную термостатистику Цаллиса с показателем подобия  $q_1(\lambda)$ , значения которого уменьшаются с ростом дилатации от золотого сечения  $q_1(1) \simeq 1.618$  до минимальной величины  $q_1(\infty) = 1.5$ . Благодаря быстрому спаданию амплитуды (4.63) с ростом аргумента однородная функция (4.20), отвечающая термостатистике Цаллиса, представляется в форме

$$h(x) = p_0 x + p_1 \left( \frac{\ln x}{\ln \lambda_1} \right) x^Q, \quad Q \equiv q_1(\lambda_1) - \zeta_1. \quad (4.66)$$

Здесь мы учли, что в низшем порядке  $q_0 = 1$ , так что в пределе  $N \rightarrow \infty$  ряд (4.64) определяется единственным полюсом  $z_0^0 = 0$ , для которого логарифмически осциллирующая амплитуда (4.65) преобразуется в константу  $p_0$ , отвечающую

предельной дилатации  $\lambda_0 = N \rightarrow \infty$ .

Равенства (4.66) представляют основной результат настоящего подраздела. Они означают, что однородная функция самоаффинных систем, оставаясь инвариантной как при бесконечной  $\lambda_0 \rightarrow \infty$ , так и конечной  $\lambda_1 \neq 1$  дилатациях, сводится к линейному слагаемому и степенной добавке, деформированной логарифмически осциллирующей амплитудой. Показатель подобия  $Q = Q(\lambda_1)$  этой функции ограничен сверху золотым сечением и монотонно спадает с ростом дилатации  $\lambda_1$ .

Исследование предельно сложных систем, поведение которых определяется более чем одним рядом мнимых полюсов (4.62), выходит за рамки нашего рассмотрения.

#### 4.2. Статистическая теория самоподобно распределённых полей

Настоящий подраздел посвящён развитию статистической теории самоподобных систем, производящий функционал которых представляет преобразование Меллина деформированной экспоненты Цаллиса, а генератор масштабного преобразования сводится к производной Джексона [54]. При этом роль флуктуирующего параметра порядка играет деформированный логарифм амплитуды гидродинамической моды. В рамках такого подхода будут найдены деформированная статистическая сумма и низшие моменты параметра порядка. Мы получим также уравнения, которым подчиняется производящий функционал системы, обладающей симметрией и связями.

Методы квантовой теории поля длительное время используются в статистической физике [179, 180]. Формальной основой полевой схемы является производящий функционал, который представляет обобщённое преобразование Фурье-Лапласа, дающее переход зависимости статистической суммы от распределения флуктуирующего параметра порядка (амплитуды гидродинамической моды) к вспомогательному полю [79]. Благодаря

экспоненциальному характеру этого преобразования определение корреляторов параметра порядка достигается дифференцированием производящего функционала по указанному полю.

Представленная схема становится несостоятельной при переходе от простых к сложным статистическим системам, поскольку при этом фазовое пространство разбивается на отдельные области, а фазовый поток не обеспечивает статистического перемешивания [27]. Как известно из теории критических явлений, аналитическое описание сложных систем достигается только при наличии масштабной инвариантности [17]. Поскольку при этом роль базисной функции играет не экспоненциальная, а степенная зависимость, то при построении производящего функционала следует основываться на преобразовании Меллина. Кроме того в качестве генератора масштабного преобразования вместо обычного оператора дифференцирования необходимо использовать производную Джексона. Построению полевой схемы, основанной на использовании преобразования Меллина и производной Джексона, посвящён настоящий подраздел.

Приведём сначала необходимый минимум сведений из теории квантовых групп [181]. Её основу представляют оператор дилатации  $D_x^\lambda := \lambda^{x\partial_x}$ , определённый параметром  $\lambda$  и оператором дифференцирования  $\partial_x \equiv \partial/\partial x$ . Проводя формальное разложение оператора  $D_x^\lambda$  в ряд Тейлора, легко определить его действие на степенную функцию:  $D_x^\lambda x^n = (\lambda x)^n$ . Тогда подобное разложение аналитической функции  $f(x)$  показывает, что в соответствии с названием действие оператора  $D_x^\lambda$  приводит к дилатации её аргумента:  $D_x^\lambda f(x) = f(\lambda x)$ . Функциональный базис оператора дилатации сводится к однородной функции  $h(x)$ , определённой равенством  $D_\lambda h(x) = \lambda^q h(x)$  с показателем самоподобия  $q$ . В общем случае эта функция имеют форму  $h(x) = A_\lambda(x)x^q$ , где множитель  $A_\lambda(x)$  удовлетворяет условию инвариантности  $A_\lambda(\lambda x) = A_\lambda(x)$ . Производная Джексона определяется равенством

$$\mathcal{D}_x^\lambda := \frac{D_x^\lambda - 1}{(\lambda - 1)x} \quad (4.67)$$

и удовлетворяет коммутационному соотношению  $[\mathcal{D}_x^\lambda, x] = D_x^\lambda$ . Её действие на однородную функцию задаётся соотношениями

$$(x\mathcal{D}_x^\lambda)h(x) = [q]_\lambda h(x), \quad [q]_\lambda \equiv \frac{\lambda^q - 1}{\lambda - 1}. \quad (4.68)$$

Деформированный показатель подобия  $[q]_\lambda$  представляет обобщение показателя степенной функции.

Характерная особенность самоподобных статистических систем состоит в том, что они представляются деформированными функциями [27]

$$\ln_q(x) := \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q}, \quad \exp_q(x) := [1 + (1 - q)x]_+^{\frac{1}{1-q}}, \quad (4.69)$$

где обозначено  $[y]_+ \equiv \max(0, y)$ . Кроме того следует деформировать операции сложения и умножения:

$$x \oplus_q y = x + y + (1 - q)xy, \quad x \otimes_q y = [x^{1-q} + y^{1-q} - 1]_+^{\frac{1}{1-q}}; \quad (4.70)$$

здесь во втором случае  $x, y > 0$ . Деформированная степень определяется выражением

$$\underbrace{x \otimes_q x \otimes_q \dots \otimes_q x}_n = [nx^{1-q} - (n - 1)]_+^{\frac{1}{1-q}}. \quad (4.71)$$

Использование правил (4.70) показывает, что функции (4.69) удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \ln_q(x \otimes_q x) &= \ln_q x + \ln_q y, & \ln_q(xy) &= \ln_q x \oplus_q \ln_q y; \\ \exp_q(x + y) &= \exp_q(x) \otimes_q \exp_q(y), & \exp_q(x \oplus_q y) &= \exp_q(x) \exp_q(y). \end{aligned} \quad (4.72)$$

Как уже упоминалось, производящий функционал самоподобных систем

представляется преобразованием Меллина

$$\mathcal{Z}_q\{J\} := \int \mathcal{Z}_q\{\phi\} \phi^{J-1} \{d\phi\}, \quad \phi^{J-1} \{d\phi\} \equiv \prod_i \phi_i^{J_i-1} d\phi_i, \quad (4.73)$$

где индекс  $i$  нумерует узлы решётки, число которых  $N \rightarrow \infty$ . Согласно [27], статистическая сумма сводится к деформированной экспоненте

$$\mathcal{Z}_q\{\phi\} = \exp_q(-S\{\phi\}), \quad (4.74)$$

показатель которой определяется действием  $S = S\{\phi\}$ , заданным распределением параметра порядка. Функционал  $\mathcal{Z}_q\{J\}$  представляется деформированным рядом [28]

$$\mathcal{Z}_\lambda\{J\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[n]_\lambda!} \sum_{i_1 \dots i_n} \mathcal{Z}_{i_1 \dots i_n}^{(n)} (J_{i_1} - \lambda^0) (J_{i_2} - \lambda) \dots (J_{i_n} - \lambda^{n-1}), \quad (4.75)$$

где деформированный факториал  $[n]_\lambda! = [1]_\lambda [2]_\lambda \dots [n]_\lambda$  определяется произведением чисел (4.68), а коэффициенты

$$\mathcal{Z}_{i_1 \dots i_n}^{(n)} = \left( J_{i_1} \mathcal{D}_{J_{i_1}}^\lambda \right) \left( J_{i_2} \mathcal{D}_{J_{i_2}}^\lambda \right) \dots \left( J_{i_n} \mathcal{D}_{J_{i_n}}^\lambda \right) \mathcal{Z}_q\{J\} \Big|_{J_{i_1}, \dots, J_{i_n}=1} \quad (4.76)$$

задаются производной Джексона (4.67). По определению имеем

$$\left( J_i \mathcal{D}_{J_i}^\lambda \right) \phi^{J-1} \Big|_{J_i=1} = \frac{\phi_i^\lambda - \phi_i}{(\lambda - 1)\phi_i} \prod_{k \neq i} \phi_k^{J_k-1} \equiv \sigma(\phi_i) \prod_{k \neq i} \phi_k^{J_k-1}, \quad (4.77)$$

где обозначено  $\sigma(\phi_i) \equiv \ln_{2-\lambda}(\phi_i)$ . Тогда джексоновское дифференцирование функционала (4.73)

$$\left( J_i \mathcal{D}_{J_i}^\lambda \right) \mathcal{Z}_q\{J\} \Big|_{J_i=1} = \int \mathcal{Z}_q\{\phi\} \sigma_i(\phi_i) d\phi_i \prod_{k \neq i} \phi_k^{J_k-1} d\phi_k = \int \sigma_i(\phi_i) \mathcal{Z}_q(\phi_i) d\phi_i, \quad (4.78)$$

приводящее к функции  $\mathcal{Z}_q(\phi_i) \equiv \int \mathcal{Z}_q\{\phi\} \prod_{k \neq i} \phi_k^{J_k-1} d\phi_k$ , даёт первый момент деформированного параметра порядка:

$$\mathcal{S} \equiv \langle \sigma(\phi_i) \rangle := Z_q^{-1} \int \ln_{2-\lambda}(\phi) \mathcal{Z}_q(\phi) d\phi, \quad Z_q \equiv \mathcal{Z}_q\{\phi\}|_{\{\phi\}=1} = \int \mathcal{Z}_q\{\phi\} \{d\phi\}. \quad (4.79)$$

Он представляет энтропию Цаллиса, если поле  $\phi_i$  сводится к обратной вероятности реализации статистического состояния узла  $i$ . Соответственно, ядро (4.76) задаёт деформированный коррелятор произвольного порядка

$$\langle \sigma(\phi_1) \dots \sigma(\phi_n) \rangle := Z_q^{-1} \int \mathcal{Z}_q(\phi_1, \dots, \phi_n) \prod_{m=1}^n \sigma(\phi_{i_m}) d\phi_{i_m} = Z_q^{-1} \mathcal{Z}_{i_1 \dots i_n}^{(n)}, \quad (4.80)$$

где  $\mathcal{Z}_q(\phi_1, \dots, \phi_n) \equiv \int \mathcal{Z}_q\{\phi\} \prod_{k \neq i_1, \dots, i_n} \phi_k^{J_k-1} d\phi_k$ .

В рамках стандартной схемы действие  $S = S_0 + V$  разделяется на ангармоническую составляющую  $V = V\{\phi\}$  и квадратичную форму  $S_0 := \frac{1}{2\Delta^2} \sum_i \phi_i^2$ , которая в пренебрежении пространственной корреляцией задаётся дисперсией  $\Delta^2$ . Согласно (4.72), статистическая сумма определяется равенством  $\exp_q(-S) = \exp_q(-S_0) \otimes_q \exp_q(-V)$ , в котором разложение по ангармонизму с использованием правила (4.77) даёт выражение

$$\mathcal{Z}_q\{J\} = \exp_q(-V\{J\mathcal{D}_J\}) \otimes_q \mathcal{Z}_q^{(0)}\{J\} \quad (4.81)$$

генерирующего функционала

$$\mathcal{Z}_q\{J\} := \int \exp_q[-S\{\phi\}] \phi^{J-1} \{d\phi\} = \int \exp_q[-S\{\phi\}] \exp\{J \ln(\phi)\} \{d \ln(\phi)\} \quad (4.82)$$

через затравочную составляющую  $\mathcal{Z}_q^{(0)}\{J\}$ , отвечающую действию  $S_0$ . Принципиальное отличие равенства (4.81) от соответствующего выражения для простых систем состоит в деформации экспоненциального оператора возмущения и его действия на затравочный функционал. Явное выражение



генерирующего функционала (4.82) даёт разложение в деформированный ряд (4.75) с коэффициентами (4.76), определяющими корреляторы (4.80).

В гармоническом приближении, когда действие  $S_0 = \frac{1}{2\Delta^2} \sum_{i=1}^N \phi_i^2$  сводится к сумме  $N$  независимых составляющих, функционал  $\mathcal{Z}_q^{(0)}\{J\}$  выражается через узельные функции  $z_q^{(0)}(J_i)$  равенством  $\mathcal{Z}_q^{(0)}\{J\} = z_q^{(0)}(J_1) \otimes_q \cdots \otimes_q z_q^{(0)}(J_N)$ . В приближении среднего поля все сомножители совпадают, и использование равенства (4.71) приводит к выражению производящего функционала (4.82) через узельные функции:

$$\ln_q \left[ \mathcal{Z}_q^{(0)}\{J\} \right] \simeq N \ln_q \left[ z_q^{(0)}(J) \right]. \quad (4.83)$$

Как и следовало ожидать, логарифм статистической суммы оказывается аддитивной величиной, значение которой определяется узельной составляющей

$$z_q^{(0)}(J) = \frac{1}{2} \left( \frac{2\Delta^2}{1-q} \right)^{J/2} \text{B} \left( Q, \frac{J}{2} \right), \quad Q \equiv \frac{2-q}{1-q}, \quad (4.84)$$

в которой В-функция спадает как  $J^{-1}$  вблизи точки  $J = 0$  и переходит в степенную зависимость  $J^{-Q}$  при  $J \rightarrow \infty$ . В результате затравочная функция (4.84) быстро спадает с ростом  $J$  в окрестности точки  $J = 0$ , а затем экспоненциально нарастает. При  $J = 1$  равенство (4.84) даёт деформированную статсумму  $z_q^{(0)} = \sqrt{\Delta^2/2(1-q)} \text{B}(Q, 1/2)$ , приходящуюся на узел. В результате параметр Цаллиса (4.79) принимает в нулевом приближении вид

$$\mathcal{S}^{(0)} = -(\lambda - 1)^{-1} \left\{ 1 - \left[ \frac{\ln_q \left[ z_q^{(0)}(\lambda) \right]}{\ln_q \left( z_q^{(0)}(1) \right)} \right]_+^{\frac{1}{1-q}} \right\}. \quad (4.85)$$

В теории информации важную роль играет матрица информации Фишера, элементы которой представляют бинарный коррелятор производных по параметрам функции распределения от её логарифма (в отличие от энтропии

Цаллиса, задающей глобальную меру неопределённости, матрица Фишера определяет локальную меру информации, которой обладает система) [182]. В отсутствие пространственной корреляции такая мера задаётся моментом второго порядка  $\mathcal{C} \equiv \langle [\sigma(\phi_i)]^2 \rangle$ , для которого использование равенств (4.80), (4.76) приводит к выражению

$$\mathcal{C}^{(0)} = (\lambda - 1)^{-2} \left\{ 1 - 2 \left[ \frac{\ln_q [z_q^{(0)}(\lambda)]}{\ln_q (z_q^{(0)}(1))} \right]_+^{\frac{1}{1-q}} + \left[ \frac{\ln_q [z_q^{(0)}(\lambda^2)]}{\ln_q (z_q^{(0)}(1))} \right]_+^{\frac{1}{1-q}} \right\}. \quad (4.86)$$

При определении зависимости моментов (4.85), (4.86) от деформации  $\lambda$  следует иметь в виду, что параметры  $q$ ,  $Q$  не являются свободными, поскольку условие самоподобия ограничивает их значения уравнением [53]

$$(\lambda^{2-q} - 1) (\lambda^{1-q} - 1) = (\lambda - 1)^2 \quad (4.87)$$

и связью  $Q = (2 - q)/(1 - q)$ . В результате изменение параметра деформации  $\lambda$  от 1 до  $\infty$  приводит к возрастанию показателя  $q$  от 0.382 до 0.5, а  $Q$  изменяется в интервале [2.618, 3.0). Как видно из рис. 4.2, 4.3, при этом удельная статистическая

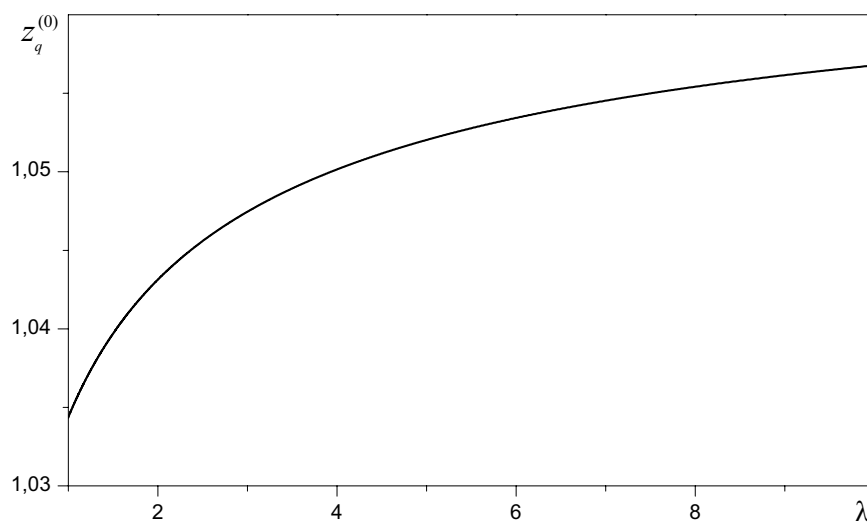


Рис. 4.2. Зависимость удельной статистической суммы от дилатации при  $\Delta = 1$

сумма  $z_q^{(0)} \sim 1$  слабо возрастает, а параметр (4.85) сохраняет нулевые значения до

$\lambda = 6.39$ , а затем также возрастает. В отличие от этого момент второго порядка (4.86) обнаруживает слабый максимум в области  $\lambda \geq 1$ , который после глубокого провала переходит в нарастающий участок. С точки зрения теории информации [182] это означает, что до  $\lambda = 6.39$  не возникает глобальной неопределённости информации  $\mathcal{S}$ , тогда как локальная мера  $\mathcal{C}$  значительно возрастает начиная с дилатации  $\lambda \sim 3$ .

Что касается корреляторов высших порядков, то в термодинамическом пределе они выражаются через низшие ( $n \leq 2$ ) перебором возможных расщеплений. В результате использование выражения (4.81) позволяет построить теорию возмущений по аналогии со стандартной схемой [79].

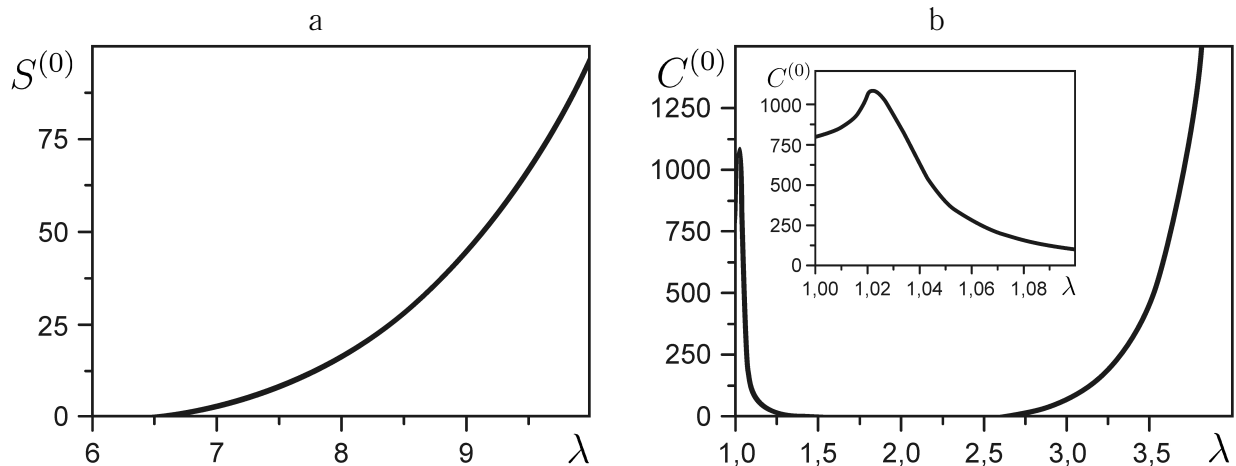


Рис. 4.3. Зависимость моментов (4.85), (4.86) первого (а) и второго (б) порядков от дилатации при  $\Delta = 1$

Если макроскопическая система состоит из независимых частей 1 и 2, то её действие подчиняется условию аддитивности  $S_{1,2} = S_1 + S_2$ , тогда как деформированная статсумма (4.82), ядро которой определяется правилом умножения  $\exp_q(-S_{1,2}) = \exp_q(-S_1) \otimes_q \exp_q(-S_2)$ , обладает свойством деформированной мультипликативности:  $\mathcal{Z}_q^{1,2} = \mathcal{Z}_q^1 \otimes_q \mathcal{Z}_q^2$ . Поэтому удобно перейти к генерирующему функционалу  $\mathcal{G}_q := \ln_q(\mathcal{Z}_q)$ , определённого через деформированный логарифм, который подчиняется равенству (4.72). В результате выполняется условие аддитивности  $\mathcal{G}_q^{1,2} = \mathcal{G}_q^1 + \mathcal{G}_q^2$ , позволяющее трактовать функционал  $\mathcal{G}_q = \mathcal{G}_q\{J\}$  как термодинамический потенциал. Поскольку он зависит

от пробного поля  $J$ , то для непосредственного рассмотрения параметра порядка  $\phi$  следует воспользоваться преобразованием Лежандра

$$\Gamma_q\{\phi\} := \sum_i J_i \sigma_i - \mathcal{G}_q\{J\}, \quad \sigma_i \equiv \ln_{2-q}(\phi_i). \quad (4.88)$$

Оно связывает сопряжённую пару термодинамических потенциалов  $\mathcal{G}_q\{J\}$  и  $\Gamma_q\{\phi\}$ , использование которых приводит к уравнениям состояния

$$\sigma_i = \mathcal{D}_{J_i}^\lambda \mathcal{G}_q \Leftrightarrow J_i = \mathcal{D}_{\sigma_i}^\lambda \Gamma_q. \quad (4.89)$$

Подобно статистической сумме эти потенциалы представляются деформированными рядами

$$\mathcal{G}_q\{J\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[n]_\lambda!} \sum_{i_1 \dots i_n} \mathcal{G}_{i_1 \dots i_n}^{(n)} J_{i_1} \dots J_{i_n}, \quad (4.90)$$

$$\Gamma_q\{\phi\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[n]_\lambda!} \sum_{i_1 \dots i_n} \Gamma_{i_1 \dots i_n}^{(n)} \eta_{i_1} \dots \eta_{i_n}, \quad \eta_i \equiv \sigma_i - \mathcal{G}_{i_1}^{(1)}, \quad (4.91)$$

где в отличие от (4.75) отсутствует слагаемое с  $n = 0$  (кроме того в (4.90) разложение проводится по самому полю  $J_{i_m}$ , а не по разности  $J_{i_m} - \lambda^{m-1}$ ,  $m = 1, \dots, n$ , а в (4.91) фигурирует разность  $\eta_i \equiv \sigma_i - \mathcal{G}_{i_1}^{(1)}$ ). С использованием уравнений состояния (4.89) легко видеть, что коэффициенты рядов (4.90), (4.91) связаны теми же равенствами, что и для простых систем [79]. В диаграммном представлении ядра  $\mathcal{G}_{i_1 \dots i_n}^{(n)}$  отвечают  $n$ -частичной функции Грина, а  $\Gamma_{i_1 \dots i_n}^{(n)}$  определяют их неприводимые части [79].

Покажем в заключение, что подобно простым системам генерирующий функционал (4.82) удовлетворяет ряду формальных уравнений. Первое из них связано с симметрией системы относительно вариации поля  $\delta \ln(\phi_i) =$

$\epsilon f_i\{\phi\}$ , пропорциональной произвольному функционалу  $f_i\{\phi\}$  в пределе  $\epsilon \rightarrow 0$ . Благодаря этой вариации подинтегральное выражение функционала (4.82) приобретает множитель  $1 + \epsilon [-\exp_q^q(-S)\partial S/\partial \ln(\phi_i) + J_i] f_i$ , а якобиан перехода от переменной  $\ln(\phi_i)$  к  $\ln(\phi_i) + \delta \ln(\phi_i)$  равен  $1 + \epsilon \partial f_i/\partial \ln(\phi_i)$  (по повторяющимся индексам подразумевается суммирование). Собирая множители при  $\epsilon$ , из условия инвариантности функционала (4.82) находим

$$\left( f_i \left\{ \frac{\delta}{\delta J} \right\} \left[ \exp_q^q \left( -S \left\{ \frac{\delta}{\delta J} \right\} \right) \frac{\partial S}{\partial \ln(\phi_i)} \left\{ \frac{\delta}{\delta J} \right\} - J_i \right] - \frac{\partial f_i}{\partial \ln(\phi_i)} \left\{ \frac{\delta}{\delta J} \right\} \right) \mathcal{Z}_q\{J\} = 0. \quad (4.92)$$

При  $f_i\{\phi\} = \text{const}$  это равенство принимает более простую форму, следующую из (4.82) после вариации по переменной интегрирования  $\ln(\phi)$ . Второе из указанных уравнений позволяет учесть произвольное условие  $F_i\{\ln(\phi)\} = 0$ , накладываемое на искомые поля. Учёт этого условия достигается введением  $\delta$ -функционала  $\delta\{F\}$  в подинтегральное выражение (4.82), в результате чего генерирующий функционал принимает удлинённую форму

$$\mathcal{Z}_q^{(F)}\{J\} := \int \exp_q[-S\{\phi\}] \exp\{J \ln(\phi) + \lambda F\{\ln(\phi)\}\} \{d\lambda\} \{d \ln(\phi)\}. \quad (4.93)$$

Варьирование этого выражения по переменной интегрирования  $\lambda$  приводит к искомому равенству

$$F_i \left\{ \frac{\delta}{\delta J} \right\} \mathcal{Z}_q^{(F)}\{J\} = 0. \quad (4.94)$$

### 4.3. Статистические полевые теории, деформированные в рамках различных исчислений

Как неоднократно отмечалось в предыдущих подразделах, исследование сложных систем потребовало развития новых статистических схем (см. [18, 27, 40, 41] и имеющиеся там ссылки). В рамках стандартного подхода [183]

такие схемы основываются на использовании второго начала термодинамики, согласно которому в равновесии энтропия достигает максимального значения. Однако, поскольку статистические состояния сложных систем распределены не по экспоненциальному закону Гиббса, то энтропия должна быть определена не логарифмом Больцмана, а некоторой деформированной функцией, которая в отсутствие деформации в простых статистических системах переходит в обычный логарифм. К настоящему времени различные процедуры деформации разработаны Цаллисом [152], Абе [155], Каниадакисом [156], Наудсом [158], а также в рамках формализма базовой деформации [159]. Вместе с тем следует отметить, что наиболее мощные методы исследования статистических систем основываются на методах квантовой теории поля [79, 184]. Использование теоретико-полевых методов в статистической теории сложных систем было предложено в работах [54, 62]. Применительно к статистике Цаллиса изложение этих методов проводилось в предыдущем подразделе, настоящий посвящён рассмотрению и обобщению возможных вариантов статистической теории поля сложных систем.

В пункте 4.3.1 приводятся основные соотношения из теории базово-деформированного и конечно-разностного исчислений, а также кратко излагаются процедуры деформации Цаллиса, Абе, Каниадакиса и Наудса. Пункты 4.3.2 – 4.3.4 посвящены построению производящих функционалов и нахождению их связи с корреляторами для базово-деформированного и конечно-разностного исчислений, а также исчисления Каниадакиса. В рамках простейшего гармонического приближения определены явные выражения для одноузельных статистических сумм и моментов параметра порядка в зависимости от параметров деформации. Кроме того, вводится пара аддитивных функционалов, разложение которых в деформированные ряды даёт набор многоточечных функций Грина и их собственно-энергетических частей. Найдены уравнения для производящего функционала систем, обладающих симметрией по отношению к некоторой вариации поля и связями. В пункте 4.3.5 проводится обобщение изложенных схем на случай произвольной деформации. Пункт 4.3.6 включает наше рассмотрение, а

приложение В содержит основные сведения о деформированных гамма-функциях, которые необходимы при вычислении одноузельных статистических сумм и моментов параметра порядка.

4.3.1. Введение в формализм деформированных исчислений. Приступая к изложению формализма базово-деформированного и конечно-разностного исчислений, а также статистических схем Цаллиса, Абе, Каниадакиса и Наудса, следует указать на принципиальное отличие между *базовыми* и *алгебраическими* деформациями (первая пара указанных исчислений относится к базовым деформациям, остальные — к алгебраическим). Базово-деформированный формализм отражает нетривиальную деформацию алгебраической структуры, которая трансформирует такие фундаментальные понятия как число (которое преобразуется в  $q$ - и  $h$ -деформированные числа), производная, интеграл и т.д. Формализм алгебраических деформаций сохраняет алгебраическую структуру в стандартном виде (например, вещественные и комплексные числа не меняют своей природы), но вводятся обобщённые операции типа деформированных суммы, произведения, преобразования Фурье и т.п. В обоих случаях используются деформированные функции, представляющие суперпозиции элементарных функций, которые формируют фундаментальные элементы соответствующих формализмов. При этом базовая деформация сохраняет функции, обладающие обычными свойствами: например, каждая базово-деформированная экспонента имеет дуального партнёра, для которого выполняется стандартное правило умножения; с другой стороны, базово-деформированный логарифм, представляющий функцию, обратную соответствующей экспоненте, и его дуальный партнёр удовлетворяют правилу аддитивности. В случае алгебраически деформированных функций ситуация кардинально усложняется, поскольку они не подчиняются правилам обычной алгебры.

1. Начнём изложение с *базово-деформированного исчисления*, определяя дуальную пару базовых экспонент рядами Тейлора [28]

$$e_q(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_q!}, \quad E_q(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_q!} q^{\frac{n(n-1)}{2}}. \quad (4.95)$$

Эти ряды задаются факториалами

$$[n]_q! = [1]_q \cdot [2]_q \cdot \dots \cdot [n-1]_q \cdot [n]_q \quad (4.96)$$

базовых чисел

$$[n]_q := \frac{q^n - 1}{q - 1}. \quad (4.97)$$

В пределе  $q \rightarrow 1$  имеем  $[n]_{q \rightarrow 1} = n$ , и функции (4.95) трансформируются в обычную экспоненту. Согласно (4.97), (4.96), выполняются соотношения  $[n]_{1/q} = [n]_q q^{-(n-1)}$ ,  $[n]_{1/q}! = [n]_q! q^{-\frac{n(n-1)}{2}}$ , которые дают связь

$$E_q(x) = e_{1/q}(x). \quad (4.98)$$

Дуальная пара базовых экспонент (4.95) подчиняется правилу умножения [28]

$$E_q(x)e_q(y) = e_q(x+y), \quad (4.99)$$

согласно которому

$$E_q(x)e_q(-x) = 1. \quad (4.100)$$

Определив базовые экспоненты (4.95), естественно ввести пару базовых логарифмических функций  $ln_q(x)$  и  $Ln_q(x)$ , являющихся обратными к указанным



экспонентам:

$$\ln_q(e_q(x)) = x, \quad L\ln_q(E_q(x)) = x. \quad (4.101)$$

Применяя операцию  $\ln_q$  к выражению (4.99), находим равенство

$$x + y = \ln_q(E_q(x)e_q(y)),$$

которое становится тождеством при условии, что пара дуальных  $q$ -логарифмов удовлетворяет правилу аддитивности

$$\ln_q(xy) = \ln_q(x) + L\ln_q(y). \quad (4.102)$$

Подобно тому, как обычная экспонента инвариантна относительно дифференцирования, экспоненты (4.95) сохраняют свою форму под действием производной Джексона

$$\mathcal{D}_x^q f(x) := \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}. \quad (4.103)$$

Действительно, для произвольных констант  $a, b$  имеем [28]

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_x^q e_q(ax + b) &= a e_q(ax + b), \\ \mathcal{D}_x^q E_q(ax + b) &= a E_q(qax + b). \end{aligned} \quad (4.104)$$

С другой стороны, правило Лейбница для аналитических функций  $f(x), g(x)$  записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_x^q [f(x)g(x)] &= g(qx)\mathcal{D}_x^q f(x) + f(x)\mathcal{D}_x^q g(x) \\ &= g(x)\mathcal{D}_x^q f(x) + f(qx)\mathcal{D}_x^q g(x). \end{aligned} \quad (4.105)$$

Полезно указать также выражения

$$\begin{aligned} e_q(q^n x) &= \left(1 + (q-1)x\right)_q^n e_q(x), \\ E_q(q^n x) &= \frac{E_q(x)}{\left(1 - (q-1)x\right)_q^n}, \end{aligned} \quad (4.106)$$

следующие из определения (4.103) и равенств (4.104) при  $a = 1, b = 0$ . Здесь мы используем базово-деформированный бином [28]

$$(x + y)_q^n := (x + y)(x + qy) \dots (x + q^{n-1}y). \quad (4.107)$$

Кроме базовых экспонент (4.95), инвариантных к действию производной Джексона (4.103), её собственными функциями являются *однородные функции*, определённые условием

$$h(qx) = q^\alpha h(x). \quad (4.108)$$

Здесь степень  $\alpha$  представляет показатель подобия, множитель  $q$  играет роль деформации самоподобных систем, однородные функции которых являются основой их статистической теории [40]. Согласно определению (4.103), собственные значения производной Джексона, определённые на множестве однородных функций, представляют базовые числа (4.97):

$$\mathcal{D}_x^q h(x) = [\alpha]_q h(x), \quad [\alpha]_q = \frac{q^\alpha - 1}{q - 1}. \quad (4.109)$$

Подобно стандартным правилам математического анализа, экспоненты (4.95) инвариантны не только относительно производной Джексона  $\mathcal{D}_x^q$ , но остаются неизменными под действием *базового интеграла*  $\mathcal{I}_x^q$ , определённого

суммой [28]

$$\mathcal{I}_x^q f(x) \equiv \int f(x) d_q x := (1 - q)x \sum_{n=0}^{\infty} f(q^n a) q^n. \quad (4.110)$$

Понимая под операторами  $\mathcal{D}_x^q, \mathcal{I}_x^q$  преобразования группы Ли, введём генераторы

$$\begin{aligned} u_x^q &:= \ln_q(\mathcal{D}_x^q), & j_x^q &:= \ln_q(\mathcal{I}_x^q), \\ U_x^q &:= L\ln_q(\mathcal{D}_x^q), & J_x^q &:= L\ln_q(\mathcal{I}_x^q). \end{aligned} \quad (4.111)$$

Тогда базовое логарифмирование формального соотношения  $\mathcal{D}_x^q \mathcal{I}_x^q = 1$  с использованием равенства  $\ln_q(1) = 0$  и свойства (4.102) даёт уравнения  $u_x^q + J_x^q = 0$ ,  $U_x^q + j_x^q = 0$ , которые приводят к функциональным выражениям базового интеграла через производную Джексона:

$$\mathcal{I}_x^q = e_q(-L\ln_q(\mathcal{D}_x^q)) = E_q(-\ln_q(\mathcal{D}_x^q)). \quad (4.112)$$

Далее нам понадобятся определения несобственного интеграла [28]

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(x) d_q x &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \int_{q^{n+1}}^{q^n} f(x) d_q x, \\ \int_0^{\infty} f(x) d_q x &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \int_{q^n}^{q^{n+1}} f(x) d_q x \end{aligned} \quad (4.113)$$

первое из которых отвечает параметру деформации  $0 < q < 1$ , второе — значениям  $q > 1$ .

2. Рассмотрим теперь основные случаи деформаций, дополняющих базовую. Дуальная пара экспонент (4.95) задаётся базовыми числами  $[n]_q$  и  $[n]_{1/q}$ , определёнными выражением (4.97). В случае *симметричного  $q$ -исчисления*

соответствующее число

$$[n]_q := \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} \quad (4.114)$$

удовлетворяет условию  $[n]_{1/q} = [n]_q$ , благодаря которому дуальная экспонента  $E_q(x) = e_{1/q}(x)$  совпадает с исходной  $e_q(x)$ . Основываясь на симметрии  $q \leftrightarrow 1/q$ , Абе нашёл энтропию и построил термостатистику, основанную на симметричном базовом исчислении [155].

3. Следующий пример представляет *конечно-разностное  $h$ -исчисление*, которому отвечает  $h$ -экспонента [28]

$$e_h(x) := (1 + h)^{\frac{x}{h}}. \quad (4.115)$$

Обратная функция  $h$ -логарифма определяется выражением

$$\ln_h(x) = \frac{h \ln(x)}{\ln(1 + h)}, \quad (4.116)$$

где  $\ln(x)$  – натуральный (недеформированный) логарифм. Легко убедиться, что выражение (4.115) может быть представлено в виде ряда (4.95), в котором базовые числа (4.97) заменены на  $h$ -числа

$$[n]_h := \frac{hn}{\ln(1 + h)}. \quad (4.117)$$

Поскольку для наших целей достаточно использования положительных значений  $h$ , то естественно предположить симметрию по отношению к изменению знака  $h$ . Тогда  $h$ -экспонента (4.115) является самодуальной [ $E_h(x) := e_{-h}(x) = e_h(x)$ ], и правило умножения (4.99) приобретает упрощённый вид

$$e_h(x + y) = e_h(x)e_h(y). \quad (4.118)$$

В пределе  $h \rightarrow 0$   $h$ -исчисление, представляющее ни что иное как исчисление конечных разностей, сводится к анализу бесконечно малых величин.

Нетрудно видеть, что  $h$ -экспонента (4.115) инвариантна к действию  $h$ -производной [28]

$$D_x^h f(x) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (4.119)$$

Однако при этом равенства (4.104) принимают форму

$$\begin{aligned} D_x^h e_h(ax+b) &= d_h(a) e_h(ax+b), \\ d_h(a) &\equiv \frac{e_h(ah) - 1}{h} = \frac{(1+h)^a - 1}{h}, \end{aligned} \quad (4.120)$$

усложнённую множителем  $d_h(a)$ . Хотя этот множитель имеет предел  $d_{h \rightarrow 0}(a) \rightarrow a$ , действие  $h$ -производной (4.119) на экспоненту (4.115) не сводится к появлению множителя  $a$ , как это имеет место в равенстве (4.104). Поэтому вместо (4.119) более удобно использовать другое определение  $h$ -производной:

$$\mathcal{D}_x^h := [1]_h \partial_x, \quad [1]_h = \frac{h}{\ln(1+h)}, \quad \partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}. \quad (4.121)$$

Её действие на экспоненту (4.115) определяется первым равенством (4.104), в котором индекс  $q$  заменён на  $h$ .  $h$ -интеграл, действие которого обратно производной (4.121), имеет вид

$$\mathcal{I}_x^h f(x) = \int f(x) d_h x, \quad d_h x = [1]_h^{-1} dx. \quad (4.122)$$

4. Намного более сложный пример даёт *исчисление Цаллиса*, которому отвечает экспонента

$$\exp_q(x) := [1 + (1-q)x]_h^{\frac{1}{1-q}}, \quad (4.123)$$

определённая деформированным числом

$$\{n\}_q = \frac{n}{1 + (1 - q)(n - 1)}. \quad (4.124)$$

При этом дуальное число  $\{n\}_{1/q}$  отвечает экспоненте

$$\text{Exp}_q(x) := \exp_{1/q}(x) = [\exp_q(-x/q)]^{-q}, \quad (4.125)$$

обратное значение которой пропорционально экскуртной вероятности, представляющей основу термостатистики Цаллиса [27, 154].

Тот факт, что пара дуальных экспонент (4.123) и (4.125) удовлетворяет условию  $\text{Exp}_q^{1/q}(-qx) \exp_q(x) = 1$ , а не правилу умножения (4.99), указывает на принадлежность исчисления Цаллиса к алгебраически деформированному классу. Это означает, в частности, что следует положить экспоненту (4.123) самодуальной, а правило (4.99) заменить равенством [27]

$$\exp_q(x) \exp_q(y) = \exp_q(x \oplus_q y). \quad (4.126)$$

Здесь деформированные сумма и разность определены выражениями [185]

$$x \oplus_q y := x + y + (1 - q)xy, \quad x \ominus_q y := \frac{x - y}{1 + (1 - q)y}. \quad (4.127)$$

В соответствии с последним из них для бесконечно малой разности получаем  $d_q x \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (x + \Delta x) \ominus_q x := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{1 + (1 - q)x} = \frac{dx}{1 + (1 - q)x}$ . Таким образом, оператор дифференцирования Цаллиса записывается в виде

$$\mathcal{D}_x^q = [1 + (1 - q)x] \frac{d}{dx} = \exp_q^{1-q}(x) \frac{d}{dx}. \quad (4.128)$$

Легко видеть, что этот оператор не изменяет экспоненту Цаллиса (4.123), тогда как действие обычной производной даёт  $\frac{d}{dx} \exp_q(x) = \exp_q^q(x)$ .

Формально экспонента Цаллиса совпадает с  $h$ -экспонентой при параметре деформации  $q = 1 - h/x$ . Однако это не означает, что исчисление Цаллиса сводится к  $h$ -исчислению, поскольку первое требует постоянных значений  $q$ , тогда как в рамках второго постоянным должен быть параметр  $h$ . Соответственно, с ростом  $x$  экспонента Цаллиса изменяется по степенному закону (4.123), а  $h$ -экспонента (4.115) нарастает экспоненциально. В пределе  $q \rightarrow 1$  исчисление Цаллиса сводится к обычному случаю. Статистическая полевая теория [54], основанная на исчислении Цаллиса, изложена в подразделе 4.2.

5. Следующий пример представляет *деформация Каниадакиса*, для которой экспоненциальная и логарифмическая функции определены равенствами [156]

$$\exp_{\kappa}(x) := \left[ \kappa x + \sqrt{1 + (\kappa x)^2} \right]^{1/\kappa}, \quad (4.129)$$

$$\ln_{\kappa}(x) := \frac{x^{\kappa} - x^{-\kappa}}{2\kappa}. \quad (4.130)$$

Здесь параметр деформации  $\kappa$  принадлежит интервалу  $(-1, 1)$ , а предел  $\kappa \rightarrow 0$  даёт обычные функции  $\exp(x)$ ,  $\ln(x)$ . Экспонента (4.129) является самодуальной в том смысле, что она удовлетворяет условию  $\exp_{\kappa}(x) \exp_{\kappa}(-x) = 1$  типа (4.100). Однако правило умножения (4.99) принимает вид [186]

$$\exp_{\kappa}(x) \exp_{\kappa}(y) = \exp_{\kappa} \left( x \overset{\kappa}{\oplus} y \right), \quad (4.131)$$

где деформированная сумма определена равенством

$$x \overset{\kappa}{\oplus} y := x \sqrt{1 + (\kappa y)^2} + y \sqrt{1 + (\kappa x)^2}. \quad (4.132)$$

Укажем, что равенство типа (4.131) имеет место также для  $q$ -исчисления Цаллиса, где деформированная сумма (4.132) записывается в виде [185]

$$x \oplus_q y := x + y + (1 - q)xy. \quad (4.133)$$

С формальной точки зрения  $\kappa$ -экспонента (4.129) может быть представлена рядом Тейлора

$$\exp_\kappa(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!_\kappa} \quad (4.134)$$

с деформированным факториалом

$$\begin{aligned} n!_\kappa &= \frac{n!}{\nu_\kappa(n)}; \quad \nu_\kappa(0) = \nu_\kappa(1) = 1, \\ \nu_\kappa(n) &= \prod_{m=1}^{n-1} [1 - (2m - n)\kappa], \quad n > 1. \end{aligned} \quad (4.135)$$

Однако множитель  $\nu_\kappa(n)$  зависит от числа  $n$ , и  $\kappa$ -факториал (4.135) не сводится к форме (4.96).

Несложно видеть, что экспонента (4.129) инвариантна к действию оператора дифференцирования [186]

$$\mathcal{D}_x^\kappa \equiv \frac{\partial}{\partial_\kappa x} := \sqrt{1 + (\kappa x)^2} \frac{\partial}{\partial x}. \quad (4.136)$$

Более того, для произвольной константы  $a$  вместо (4.104), (4.120) получаем

$$\mathcal{D}_x^{a\kappa} \exp_\kappa(ax) = a \exp_\kappa(ax). \quad (4.137)$$

Оператор интегрирования, обратный производной (4.136), записывается в



псевдорелятивистской форме [186]

$$\mathcal{I}_x^\kappa f(x) := \int f(x) d_\kappa x, \quad d_\kappa x \equiv \frac{dx}{\sqrt{1 + (\kappa x)^2}}. \quad (4.138)$$

Далее мы покажем, что действие производной (4.137), дополненное определением интеграла (4.138), представляют формальную основу теоретико-полевой схемы, основанной на статистике Каниадакиса.

Обобщением логарифма (4.130) является трёхпараметрическая конструкция [186]

$$\ln_{\kappa\tau\varsigma}(x) := \frac{x^\tau [(\varsigma x)^\kappa - (\varsigma x)^{-\kappa}] - (\varsigma^\kappa - \varsigma^{-\kappa})}{(\kappa + \tau)\varsigma^\kappa + (\kappa - \tau)\varsigma^{-\kappa}}, \quad (4.139)$$

которая является решением функционального уравнения

$$\partial_x [x\Lambda(x)] = \lambda\Lambda(x/\alpha) + \eta \quad (4.140)$$

с параметрами

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(\frac{1+\tau-\kappa}{1+\tau+\kappa}\right)^{\frac{1}{2\kappa}}, \\ \lambda &= \frac{(1+\tau-\kappa)^{\frac{\tau+\kappa}{2\kappa}}}{(1+\tau+\kappa)^{\frac{\tau-\kappa}{2\kappa}}}, \\ \eta &= (\lambda - 1) \frac{\varsigma^\kappa - \varsigma^{-\kappa}}{(\kappa+\tau)\varsigma^\kappa + (\kappa-\tau)\varsigma^{-\kappa}}. \end{aligned} \quad (4.141)$$

Обобщённый логарифм (4.139) сводится к известным случаям различных деформаций: i) параметры  $\tau = 0$ ,  $\varsigma = 1$  и  $\kappa \in (-1, 1)$  отвечают деформации Каниадакиса [156]; ii) при  $\kappa = -\tau = (1 - q)/2$  реализуется деформация Цаллиса с параметром  $q$  [152]; iii)  $\kappa = (q - 1/q)/2$ ,  $\tau = (q + 1/q)/2$  и  $\varsigma = 1$  — деформация Абе с параметром  $q$  [155]; iv) выбор  $\varsigma = 1$  отвечает двухпараметрическому логарифму, предложенному Митталом, Шармой и Танейей [187, 188]; v) при  $\tau = 0$  реализуется случай масштабированного двухпараметрического логарифма Каниадакиса [186].

6. Приведём наконец пример функционально-деформированного логарифма [158]

$$\ln_{\phi}(x) := \int_1^x \frac{dx'}{\phi(x')}, \quad (4.142)$$

форма которого определяется заданием функции  $\phi(x)$ . Соответствующая экспоненциальная функция  $e_{\phi}(x)$  определяется условием  $e_{\phi}[\ln_{\phi}(x)] = x$ . Оператор дифференцирования  $D_x^{\phi}$  задаётся условием, что его действие сохраняет обобщённую экспоненту согласно соотношению  $D_x^{\phi}e_{\phi}(x) = \eta_{\phi}e_{\phi}(x)$ , в котором собственное значение  $\eta_{\phi}$  задаётся выбором функции  $\phi(x)$ .

Рассмотренные примеры показывают, что обобщение на случай произвольного исчисления проводится следующим образом.

1. Выбираем деформированную экспоненту  $e_{\lambda}(x)$  и её дуального партнёра  $E_{\lambda}(x)$  таким образом, чтобы выполнялось правило умножения

$$E_{\lambda}(x)e_{\lambda}(y) = e_{\lambda}(x + y). \quad (4.143)$$

Если указанные экспоненты могут быть разложены в ряд Тейлора типа (4.95), то их выбор определяется числами  $[n]_{\lambda}$ , обобщающими выражения (4.97), (4.114) и (4.117) с параметрами  $q, h$ , заменёнными деформацией  $\lambda$ . В случае алгебраических деформаций типа Каниадакиса следует использовать самодуальную экспоненту, удовлетворяющую правилу умножения

$$e_{\lambda}(x)e_{\lambda}(y) = e_{\lambda}\left(x \overset{\lambda}{\oplus} y\right), \quad (4.144)$$

которое определяется заданием деформированной суммы  $x \overset{\lambda}{\oplus} y$  [см. (4.132)].

2. Определяем оператор дифференцирования  $D_x^{\lambda}$  типа производной Джексона (4.103) согласно условию, что этот оператор не меняет форму обобщённых

экспонент  $e_\lambda(x)$ ,  $E_\lambda(x)$ .

3. Вводим деформированный оператор интегрирования согласно определениям

$$I_x^\lambda = e_\lambda [-\text{Ln}_\lambda (D_x^\lambda)] = E_\lambda [-\ln_\lambda (D_x^\lambda)], \quad (4.145)$$

обобщающим (4.112) [здесь деформированные логарифмы  $\ln_\lambda(x)$ ,  $\text{Ln}_\lambda(x)$  определены как обратные функции соответствующих экспонент  $e_\lambda(x)$ ,  $E_\lambda(x)$ ].

В результате указанных действий получаем формализм, лежащий в основе статистической теории поля, в рамках которой производящий функционал является обобщением характеристической функции [79, 184]. Эта функция представляет преобразование Фурье-Лапласа

$$p(j) := I_x^\lambda [p(x)E_\lambda(jx)] = \int p(x)E_\lambda(jx)d_\lambda x \quad (4.146)$$

исходного распределения вероятностей  $p(x)$ . Характерно, что деформированная экспонента, стоящая под интегралом характеристической функции (4.146), является собственной функцией деформированного оператора дифференцирования  $D_j^\lambda$ , имеющего собственное значение  $d_\lambda(x)$ . В результате многократное дифференцирование этой функции по вспомогательной переменной  $j$  сохраняет её экспоненциальную форму, приводя к моментам

$$\langle [d_\lambda(x)]^n \rangle_\lambda := \int [d_\lambda(x)]^n p(x)d_\lambda x = (D_j^\lambda)^n p(j) \Big|_{j=0} \quad (4.147)$$

параметра порядка  $d_\lambda(x)$ .

4.3.2. Базово-деформированная статистика. Рассмотрим статистическую систему, распределение которой по состояниям  $\mathbf{x} = \{\mathbf{r}_a, \mathbf{p}_a\}$  в фазовом пространстве частиц  $a = 1, \dots, N$ ,  $N \rightarrow \infty$  с координатами  $\mathbf{r}_a$  и импульсами  $\mathbf{p}_a$  определяется гамильтонианом  $H = H(\mathbf{x})$ . Задача состоит в определении пространственного распределения  $\phi(\mathbf{r})$  параметра порядка  $\phi$ . В

рамках макроскопического приближения термостатистика деформированной системы определяется производящим функционалом

$$\mathcal{Z}_q\{\phi\} := \int e_q[-\beta H(\mathbf{x})] \delta[\phi - \phi(\mathbf{x})] d_q \mathbf{x} \equiv e_q(-S\{\phi\}). \quad (4.148)$$

Здесь базово-деформированный дифференциал  $d_q \mathbf{x} = (q - 1)\mathbf{x}$ ,  $S = S\{\phi\}$  — эффективное действие, термостатистическое распределение базово-деформированной системы полагается пропорциональным  $q$ -деформированной экспоненте  $e_q[-\beta H(\mathbf{x})]$  с обратной температурой  $\beta$ , измеренной в энергетических единицах [161].

Основная особенность определения (4.148) состоит в использовании базово-деформированных экспоненты и интеграла по фазовому пространству  $\mathbf{x}$ . Кроме того, следует использовать базово-деформированное преобразование Лапласа

$$\mathcal{Z}_q\{J\} := \int \mathcal{Z}_q\{\phi\} E_q\{J \cdot \phi\} \{d_q \phi\} = \int e_q(-S\{\phi\} + J \cdot \phi) \{d_q \phi\}, \quad (4.149)$$

где последнее равенство вытекает из (4.99). При описания координатной зависимости удобно использовать решёточное представление с индексом  $i = 1, \dots, N$  и обозначениями  $J \cdot \phi \equiv \sum_i J_i \phi_i$ ,  $\{d_q \phi\} \equiv \prod_i d_q \phi_i$ .

Согласно (4.104),  $n$ -кратное дифференцирование последнего выражения в производящем функционале (4.149) даёт

$$(\mathcal{D}_{J_1}^q \dots \mathcal{D}_{J_n}^q) \mathcal{Z}_q\{J\} = \int (\phi_{i_1} \dots \phi_{i_n}) e_q(-S\{\phi\} + J \cdot \phi) \{d_q \phi\}. \quad (4.150)$$

Правая часть этого равенства определяет коррелятор

$$\langle \phi_{i_1} \dots \phi_{i_n} \rangle_q := \mathcal{Z}_q^{-1} \int (\phi_{i_1} \dots \phi_{i_n}) \mathcal{Z}_q\{\phi\} \{d_q \phi\}, \quad (4.151)$$

где коэффициент обратно пропорционален к статистической сумме

$$\mathcal{Z}_q := \int \mathcal{Z}_q\{\phi\} \{d_q\phi\} = \int e_q(-S\{\phi\}) \{d_q\phi\}. \quad (4.152)$$

Комбинирование последних равенств выражает произвольный коррелятор через базово-деформированные производные производящего функционала (4.149):

$$\langle \phi_{i_1} \dots \phi_{i_n} \rangle_q = \mathcal{Z}_q^{-1} (\mathcal{D}_{J_1}^q \dots \mathcal{D}_{J_n}^q) \mathcal{Z}_q\{J\} \Big|_{J_1, \dots, J_n=0}. \quad (4.153)$$

В рамках гармонического приближения эффективное действие выражается деформированной параболической формой

$$S^{(0)}\{\phi\} = \sum_i^N S^{(0)}\{\phi_i\}, \quad S^{(0)}\{\phi_i\} \equiv \frac{(\phi_i)_q^2}{[2]_q \Delta^2}, \quad (4.154)$$

определённой деформированным биномом (4.107), где  $[2]_q = 1 + q$ ,  $\Delta^2$  – обратная кривизна. Использование правила (4.99) для базово-деформированной экспоненты в производящем функционале (4.149) достигается предположением о наличии симметрии по отношению к замене параметра деформации  $q$  обратным значением  $1/q$ . Тогда удобно разделить всю решётку на четные  $i'$  и нечетные  $i''$  узлы и использовать выражение (4.99) для каждой пары  $i', i''$ . В результате экспонента в статистической сумме (4.152) преобразуется следующим образом:

$$e_q\left(-S^{(0)}\{\phi\}\right) = e_q\left(\sum_i^N S^{(0)}\{\phi_i\}\right) = \prod_{i'}^{[N/2]} e_q\left(S^{(0)}\{\phi_{i'}\}\right) \prod_{i''}^{[N/2]} e_{1/q}\left(S^{(0)}\{\phi_{i''}\}\right). \quad (4.155)$$

Здесь квадратные скобки означают целую часть дроби  $N/2$ .<sup>6</sup> В результате,

<sup>6</sup>Вообще говоря, статистический ансамбль может состоять из нечётного числа частиц  $N$ , что приведёт к несогласованному множителю в выражении (4.155). Однако этим множителем можно пренебречь в термодинамическом пределе  $N \rightarrow \infty$ .

производящий функционал (4.149) принимает мультипликативный вид

$$\mathcal{Z}_q^{(0)}\{J\} = \prod_{i'}^{[N/2]} z_q^{(0)}(J_{i'}) \prod_{i''}^{[N/2]} z_{1/q}^{(0)}(J_{i''}). \quad (4.156)$$

Как показывают вычисления в приложении В, каждый из одноузельных множителей определяется выражением

$$z_q^{(0)}(J) = \frac{2\Delta}{\sqrt{[2]_q}} \gamma_q \left( \frac{1}{2} \right) E_q \left[ \frac{q}{[2]_q} (\Delta J)^2 \right], \quad (4.157)$$

где базово-деформированная  $\gamma$ -функция задаётся первым равенством (Б.1). Соответственно, удельная статистическая сумма  $z_q^{(0)} \equiv z_q^{(0)}(J=0)$  записывается в виде

$$z_q^{(0)} = \frac{2\Delta}{\sqrt{[2]_q}} \gamma_q \left( \frac{1}{2} \right). \quad (4.158)$$

Из рис. 4.4а видно, что в логарифмических осях зависимость статсуммы от параметра деформации имеет симметричный куполообразный вид с максимумом в точке  $q = 1$ . Согласно (4.153), в рамках гармонического приближения первый момент параметра порядка равен

$$\langle \phi \rangle_q^{(0)} = \frac{q}{[2]_q} \frac{(1+q) - q^2(q-1) \frac{\Delta^2 J^2}{[2]_q}}{\left(1 - q(q-1) \frac{\Delta^2 J^2}{[2]_q}\right)_q} E_q \left[ \frac{q}{[2]_q} (\Delta J)^2 \right] \Delta^2 J \Bigg|_{J=0} = 0, \quad (4.159)$$

где использовано второе равенство (4.106). Громоздкие, но простые вычисления дают дисперсию

$$\langle \phi^2 \rangle_q^{(0)} = \Delta^2 q. \quad (4.160)$$

Таким образом, базово-деформированное распределение свободных полей имеет

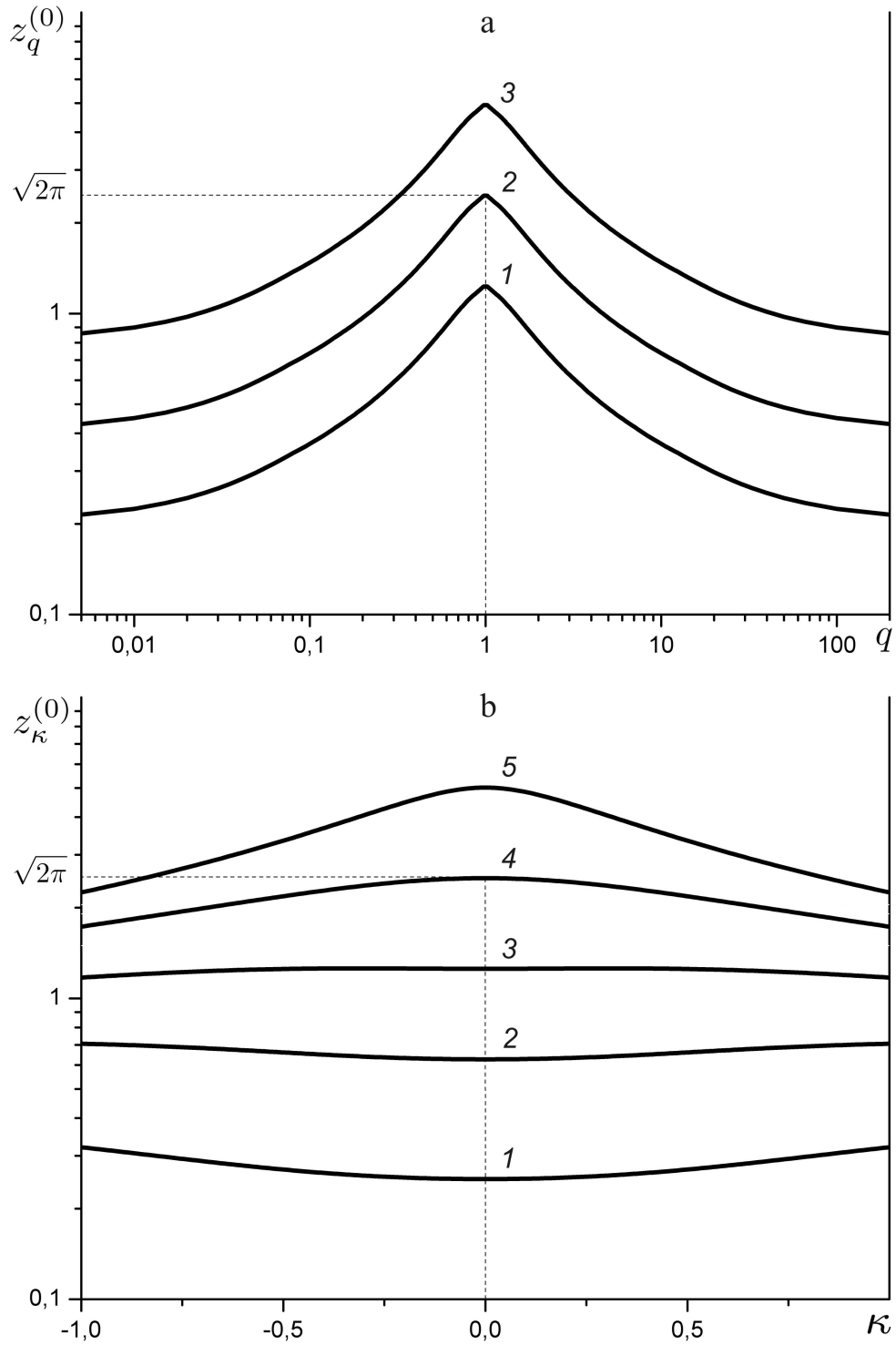


Рис. 4.4. Зависимости одночастичной статистической суммы от параметра деформации: (а) в рамках базово-деформированной статистики при  $\Delta = 0.5, 1, 2$  (кривые 1, 2, 3 соответственно); (б) в рамках статистики Каниадакиса (кривые 1–5 отвечают  $\Delta = 0.1, 0.25, 0.5, 1.0, 2.0$ )

нулевой момент первого порядка и дисперсию, пропорциональную кривизне соответствующего действия (4.154) и линейно возрастающую с параметром деформации.

Подобно подразделу 4.2, построение теории возмущений достигается выделением ангармонизма  $V = V\{\phi\}$  в действии  $S = S^{(0)} + V$  [79]. Тогда базово-деформированная экспонента записывается в виде

$$e_q(-S) = E_q(-V)e_q\left(-S^{(0)}\right). \quad (4.161)$$

Разложение экспоненты  $E_q(-V)$  в ряд Тейлора с последующим использованием правил дифференцирования (4.104) позволяет представить производящий функционал (4.149) в символической форме

$$\mathcal{Z}_q\{J\} = E_q\left(-V\{\mathcal{D}_J^q\}\right)\mathcal{Z}_q^{(0)}\{J\}. \quad (4.162)$$

Далее следует использовать стандартную схему теории возмущений с применением соответствующей диаграммной техники [79]. Более того, термодинамический предел  $N \rightarrow \infty$  позволяет использовать теорему Вика для выражения корреляторов высших порядков через дисперсию (4.160).

Как и в обычной полевой схеме [79], неудобство изложенного подхода состоит в том, что производящий функционал (4.149) не является аддитивным. Для устранения этого недостатка введём функционал Грина

$$\mathcal{G}_q := \ln_q(\mathcal{Z}_q), \quad (4.163)$$

представляющий деформированный логарифм выражения (4.149). Отметим, что этот логарифм не имеет явного выражения и определяется как операция, обратная экспоненциальной функции  $\mathcal{Z}_q = e_q(\mathcal{G}_q)$ , заданной первым рядом (4.95).

Так как функционал Грина (4.163) зависит от вспомогательного поля  $J$ , более



удобно использовать сопряженный функционал  $\Gamma_q = \Gamma_q\{\phi\}$ , зависимость которого от начального поля  $\phi$  обеспечивается преобразованием Лежандра

$$\Gamma_q\{\phi\} := \sum_i J_i \phi_i - \mathcal{G}_q\{J\}. \quad (4.164)$$

Пара функционалов  $\mathcal{G}_q\{J\}$ ,  $\Gamma_q\{\phi\}$  играет роль сопряженных потенциалов, базово-деформированная вариация которых даёт уравнения состояний

$$\phi_i = \mathcal{D}_{J_i}^q \mathcal{G}_q \Leftrightarrow J_i = \mathcal{D}_{\phi_i}^q \Gamma_q. \quad (4.165)$$

Первое из них представляет обобщение термодинамического определения параметра порядка (в магнетике, например, намагниченность равна производной свободной энергии по магнитному полю). Второе равенство (4.165) следует из преобразования Лежандра (4.164) после его вариации по параметру порядка. Являясь аналитическими функционалами, потенциалы  $\mathcal{G}_q\{J\}$ ,  $\Gamma_q\{\phi\}$  представляются следующими рядами:

$$\mathcal{G}_q\{J\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[n]_q!} \sum_{i_1 \dots i_n} \mathcal{G}_{i_1 \dots i_n}^{(n)} J_{i_1} \dots J_{i_n}, \quad (4.166)$$

$$\Gamma_q\{\phi\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[n]_q!} \sum_{i_1 \dots i_n} \Gamma_{i_1 \dots i_n}^{(n)} \eta_{i_1} \dots \eta_{i_n}, \quad \eta_i \equiv \phi_i - \mathcal{G}_{i_1}^{(1)}. \quad (4.167)$$

Отсюда видно, что ядра  $\mathcal{G}_{i_1 \dots i_n}^{(n)}$ ,  $\Gamma_{i_1 \dots i_n}^{(n)}$  сводятся к  $n$ -частичной функции Грина и ее неприводимой части соответственно. В диаграммном представлении эти ядра показаны на рис. 4.5.

Следуя стандартной полевой схеме [79], покажем, что производящий функционал (4.149) удовлетворяет некоторым формальным соотношениям. Первое из них отображает симметрию системы по отношению к базово-деформи-

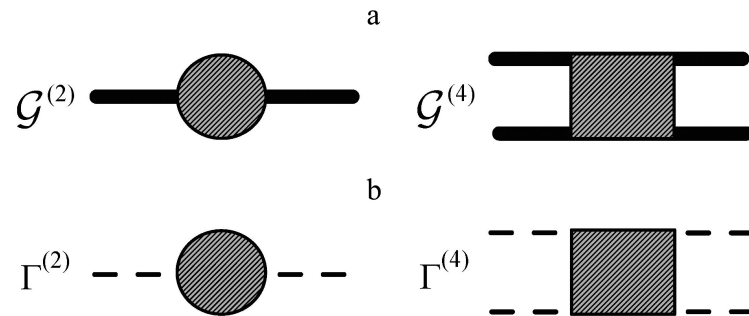


Рис. 4.5. Диаграммное представление функций Грина (a) и их неприводимых частей (b)

рованной вариации

$$\delta_q \phi_i = \epsilon_q f_i \{ \phi \}, \quad (4.168)$$

заданной аналитическим функционалом  $f_i \{ \phi \}$  в пределе  $\epsilon_q \rightarrow 0$ . При варьировании последнее подынтегральное выражение в функционале (4.149) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} & e_q [-S \{ \phi + \delta_q \phi \} + J \cdot (\phi + \delta_q \phi)] \\ & \simeq e_q \left[ (-S \{ \phi \} + J \cdot \phi) + \left( -\frac{\partial S}{\partial \phi_i} + J_i \right) \delta_q \phi_i \right] \\ & = e_q \left( -S \{ \phi \} + J \cdot \phi \right) E_q \left[ \left( -\frac{\partial S}{\partial \phi_i} + J_i \right) \delta_q \phi_i \right] \\ & \simeq e_q \left( -S \{ \phi \} + J \cdot \phi \right) \left[ 1 + \left( -\frac{\partial S}{\partial \phi_i} + J_i \right) \epsilon_q f_i \{ \phi \} \right], \end{aligned} \quad (4.169)$$

где подразумевается сумма по повторяющимся индексам и учтено второе равенство (4.95). С другой стороны, якобиан перехода от  $\phi$  к  $\phi + \delta_q \phi$  даёт множитель  $1 + (\partial f_i / \partial \phi_i) \epsilon_q$ . Собирая слагаемые, пропорциональные бесконечно малой величине  $\epsilon_q$ , из свойства инвариантности производящего функционала

(4.149) получаем

$$\left[ f_i \{ \mathcal{D}_J^q \} \left( \frac{\partial S}{\partial \phi_i} \{ \mathcal{D}_J^q \} - J_i \right) - \frac{\partial f_i}{\partial \phi_i} \{ \mathcal{D}_J^q \} \right] \mathcal{Z}_q \{ J \} = 0. \quad (4.170)$$

Здесь использовано первое уравнение состояний (4.165) для операторного представления  $f_i \{ \phi \} e_q (-S \{ \phi \} + J \cdot \phi) = f_i \{ \mathcal{D}_J^q \} e_q (-S \{ \phi \} + J \cdot \phi)$ . При  $f_i \{ \phi \} = \text{const}$  выражение (4.170) принимает упрощённый вид, следующий непосредственно из производящего функционала (4.149) после его варьирования по полю  $\phi$ .

Второе из упомянутых соотношений позволяет учесть наличие произвольных связей  $F_j \{ \phi \} = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots$  для искомого набора полей  $\{ \phi_i \}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Учёт этих связей достигается подстановкой  $\delta$ -функционала  $\delta \{ F \}$  в подынтегральное выражение (4.149), что приводит к удлинённому функционалу

$$\mathcal{Z}_q^{(F)} \{ J \} := \int e_q [-S \{ \phi \}] E_q \{ J \cdot \phi + \lambda \cdot F \} \{ d_q \phi \} \{ d_q \lambda \}. \quad (4.171)$$

Его варьирование по вспомогательным переменным  $\lambda_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$  даёт искомый результат

$$F_i \{ \mathcal{D}_J^q \} \mathcal{Z}_q^{(F)} \{ J \} = 0. \quad (4.172)$$

В сравнении со стандартной полевой схемой [79], главная особенность выражений (4.170), (4.172) состоит в том, что они содержат производную Джексона  $\mathcal{D}_J^q$  вместо вариации  $\delta/\delta J$ .

4.3.3. Конечно-разностная статистика. В данном случае полевая схема строится по аналогии с рассмотрением, изложенным в предыдущем пункте, на основании соотношений (4.115) – (4.118), (4.121) и (4.122). С использованием  $h$ -экспоненты (4.115) производящий функционал (4.148) представляется  $h$ -

интегралом

$$Z_h\{\phi\} := \int e_h[-\beta H(\mathbf{x})] \delta[\phi - \phi(\mathbf{x})] d_h \mathbf{x} \equiv e_h(-S\{\phi\}). \quad (4.173)$$

Соответственно, производящий функционал (4.149) записывается в виде

$$Z_h\{J\} := \int Z_h\{\phi\} e_h\{J \cdot \phi\} \{d_h \phi\} = \int e_h(-S\{\phi\} + J \cdot \phi) \{d_h \phi\}. \quad (4.174)$$

Подобно действию производной Джексона на базовую экспоненту оператор дифференцирования (4.121) даёт коррелятор (4.151), где  $q$  заменено на  $h$ , в следующей форме [ср. с (4.153)]

$$\langle \phi_{i_1} \dots \phi_{i_n} \rangle_h = Z_h^{-1} (\mathcal{D}_{J_1}^h \dots \mathcal{D}_{J_n}^h) Z_h\{J\} \Big|_{J_1, \dots, J_n=0}. \quad (4.175)$$

По аналогии с (4.154) гармоническое действие

$$S^{(0)}\{\phi\} = \sum_i^N \frac{\phi_i^2}{[2]_h \Delta^2}, \quad [2]_h = \frac{2h}{\ln(1+h)} \quad (4.176)$$

определяется обратной кривизной  $\Delta^2$ . Тогда генерирующий функционал (4.174) представляется произведением

$$\mathcal{Z}_h^{(0)}\{J\} = \prod_i^N z_h^{(0)}(J_i), \quad (4.177)$$

имеющим вид (4.156) с одночастичными множителями (Б.8). Учитывая свойство (Б.7)  $h$ -гамма функции, получаем выражение

$$z_0^{(0)}(J) = \sqrt{2\pi} \Delta e_h \left[ \frac{[1]_h}{2} (\Delta J)^2 \right], \quad [1]_h = \frac{h}{\ln(1+h)}, \quad (4.178)$$

сводящееся к стандартному виду в пределе  $h \rightarrow 0$ . При этом удельная

статистическая сумма

$$z_h^{(0)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e_h \left( -\frac{\phi^2}{[2]_h \Delta^2} \right) d_h \phi, \quad (4.179)$$

определённая при  $J = 0$ , принимает недеформированное значение  $z_h^{(0)} = \sqrt{2\pi} \Delta$  при произвольных значениях  $h$ .

Согласно (4.175), среднее значение  $h$ -деформированного свободного поля равно

$$\langle \phi \rangle_h^{(0)} = [1]_h e_h \left[ \frac{[1]_h}{2} (\Delta J)^2 \right] \Delta^2 J \Big|_{J=0} = 0. \quad (4.180)$$

Соответственно, для дисперсии вместо (4.160) получаем

$$\langle \phi^2 \rangle_h^{(0)} = \Delta^2 [1]_h^2. \quad (4.181)$$

Таким образом, подобно базово-деформированному распределению  $h$ -деформированное свободное поле имеет нулевой момент первого порядка и дисперсию, пропорциональную обратной кривизне действия (4.176). Однако зависимость дисперсии (4.181) от параметра деформации оказывается более сильной, чем линейная зависимость (4.160) для базовой деформации (см. рис. 4.6а).

Конечно-разностная теория возмущений строится в полном соответствии со схемой, изложенной в предыдущем пункте, — с тем единственным отличием, что дуальная  $q$ -экспонента  $E_q(x)$  заменяется самодуальной  $h$ -экспонентой  $e_h(x)$ . Так, использование разложения (4.161) приводит к замене производящего функционала (4.162) выражением

$$\mathcal{Z}_h \{J\} = e_h \left( -V \{ \mathcal{D}_J^h \} \right) \mathcal{Z}_h^{(0)} \{J\}. \quad (4.182)$$

Правила использования диаграммной техники и теоремы Вика остаются теми

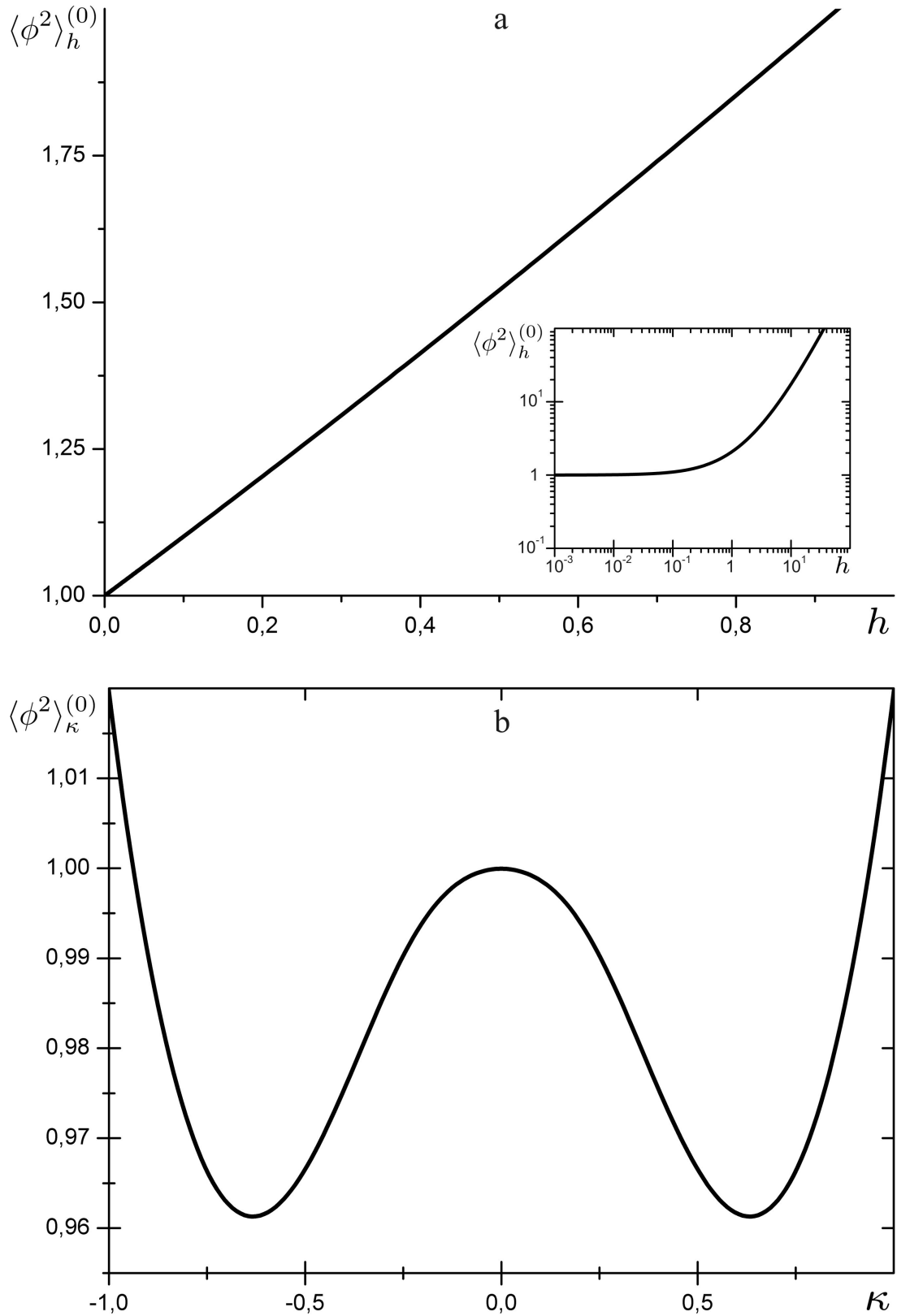


Рис. 4.6. Зависимость дисперсии свободного поля от параметра деформации при  $\Delta = 1$ : (a)  $h$ -статистика; (b) статистика Каниадакиса

же, что и выше. Более того, следуя стандартной схеме [79], неаддитивный функционал (4.174) дополняется функционалом Грина  $\mathcal{G}_h := \ln_h(\mathcal{Z}_h)$ , где  $h$ -логарифм определяется равенством (4.116) и является обратным к  $h$ -экспоненте (4.115). Функционал  $\Gamma_h = \Gamma_h\{\phi\}$ , сопряженный  $\mathcal{G}_h\{J\}$ , и уравнения состояний определяются преобразованием Лежандра (4.164) и равенствами (4.165) соответственно, где индекс  $q$  заменяется на  $h$ . При этом коэффициенты разложений (4.166), (4.167) сводятся к  $n$ -частичным функциям Грина  $\mathcal{G}_{i_1 \dots i_n}^{(n)}$  и их неприводимым частям  $\Gamma_{i_1 \dots i_n}^{(n)}$ , показанным на рис. 4.5. И наконец, производящий функционал (4.174) удовлетворяет формальным соотношениям (4.170) – (4.172), учитывающим симметрию по отношению к  $h$ -деформированной вариации  $\delta_h \phi_i(x) = \phi_i(x+h) - \phi_i(x)$  и условия  $F_j\{\phi\} = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots$  для набора полей  $\{\phi_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  (во всех указанных равенствах следует заменить  $q$  на  $h$ ).

4.3.4. Статистика Каниадакиса. С учётом сходства со статистическими схемами, основанными на базово-деформированном и  $h$ -исчислениях, а также исчислении Цаллиса, статистическая теория поля Каниадакиса строится по аналогии с теоретико-полевыми схемами, изложенными в подразделе 4.2 и пунктах 4.3.2, 4.3.3. Действуя в таком духе, следует вместо экспоненты Цаллиса (4.123) использовать экспоненту Каниадакиса (4.129) и учесть правило умножения (4.131), определенное деформированной суммой (4.132). В результате производящий функционал (4.149) принимает вид

$$\mathcal{Z}_\kappa\{J\} := \int \mathcal{Z}_\kappa\{\phi\} \exp_\kappa\{J \cdot \phi\} \{d_\kappa \phi\} = \int \exp_\kappa\left(-S\{\phi\} \overset{\kappa}{\oplus} J \cdot \phi\right) \{d_\kappa \phi\}, \quad (4.183)$$

где использовано обозначение  $J \cdot \phi = J_1 \phi_1 \overset{\kappa}{\oplus} J_2 \phi_2 \overset{\kappa}{\oplus} \dots \overset{\kappa}{\oplus} J_N \phi_N$ . Согласно определению (4.137), коррелятор [ср. с (4.153)]

$$\langle \phi_{i_1} \dots \phi_{i_n} \rangle_\kappa = \mathcal{Z}_\kappa^{-1} \left( \mathcal{D}_{J_1}^{\kappa \phi_1} \dots \mathcal{D}_{J_n}^{\kappa \phi_n} \right) \mathcal{Z}_\kappa\{J\} \Big|_{J_1, \dots, J_n=0} \quad (4.184)$$

определяется статистической суммой  $\mathcal{Z}_\kappa = \mathcal{Z}_\kappa\{J = 0\}$  и производной Каниадакиса (4.136). С использованием гармонического действия

$$S^{(0)}\{\phi\} = \frac{1}{2\Delta^2} \left( \phi_1^2 \oplus^\kappa \phi_2^2 \oplus^\kappa \cdots \oplus^\kappa \phi_N^2 \right) \quad (4.185)$$

производящий функционал (4.183) сводится к произведению

$$\mathcal{Z}_\kappa^{(0)}\{J\} = \prod_i^N z_\kappa^{(0)}(J_i) \quad (4.186)$$

одночастичных множителей

$$z_\kappa^{(0)}(J) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp_\kappa \left( -\frac{\phi^2}{2\Delta^2} \right) \exp_\kappa (J\phi) d_\kappa \phi. \quad (4.187)$$

Удельная статистическая сумма  $z_\kappa^{(0)} = z_\kappa^{(0)}(J = 0)$  записывается в виде

$$z_\kappa^{(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{\kappa\phi^2}{2\Delta^2} \right)^2} - \frac{\kappa\phi^2}{2\Delta^2} \right]^{\frac{1}{\kappa}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 + (\kappa\phi)^2}}. \quad (4.188)$$

Согласно (4.184), (4.187), первый момент равен  $\langle \phi \rangle_\kappa^{(0)} = 0$ , а дисперсия свободного поля  $\langle \phi^2 \rangle_\kappa^{(0)}$  определяется равенством (4.188), в котором подынтегральное выражение содержит множитель  $\phi^2$  и проводится деление на  $z_\kappa^{(0)}$ .

Как показывает рис. 4.4b, зависимость одноузельной статистической суммы (4.188) от параметра деформации  $\kappa$  имеет симметричный вид относительно точки  $\kappa = 0$ . Характерно, что при малых значениях  $\Delta^2$  обратной кривизны действия (4.185) рост  $|\kappa|$  приводит к увеличению  $z_\kappa^{(0)}$ , а с ростом  $\Delta$  ситуация становится обратной. Из рис. 4.6b видно, что поведение дисперсии  $\langle \phi^2 \rangle_\kappa^{(0)}$   $\kappa$ -деформированных свободных полей является более сложным: сначала рост  $|\kappa|$  приводит к уменьшению  $\langle \phi^2 \rangle_\kappa^{(0)}$  от значения  $\langle \phi^2 \rangle_{\kappa=0}^{(0)} = \Delta^2$ , после чего достигается



минимум, а затем дисперсия возрастает до аномального значения  $\langle \phi^2 \rangle_{|\kappa|=1}^{(0)} > \Delta^2$ .

4.3.5. Произвольно деформированная статистика. Примеры, рассмотренные в подразделе 4.2 и пунктах 4.3.2 – 4.3.4, показывают, что при построении произвольно деформированной статистики следует действовать в двух различных направлениях: первое обобщает базово-деформированную и  $\hbar$ -статистику и основано на использовании базово-деформированного формализма; в основе второго направления, обобщающего статистику Цаллиса и Каниадакиса, лежит алгебраически деформированный формализм. С формальной точки зрения такое разделение обусловлено различием в правилах умножения (4.99) и (4.131). В первом случае свойство мультипликативности обеспечивается за счёт нахождения экспоненты  $E_\lambda(x)$ , дуальной к исходной  $e_\lambda(x)$ . Во втором мультипликативность достигается деформацией суммы в правой части (4.144) согласно правилам типа (4.132), (4.133). Рассмотрим указанные случаи по отдельности.

В рамках схемы, изложенной в конце пункта 4.3.1, обобщение базово-деформированной и  $\hbar$ -статистики проводится непосредственным образом. Однако, как показывает сравнение пунктов 4.3.2 и 4.3.3, для обеспечения перехода к выражению

$$Z_\lambda\{J\} = \int e_\lambda(-S\{\phi\} + J \cdot \phi) \{d_\lambda\phi\}, \quad (4.189)$$

которое содержит обычную сумму показателей, следует использовать деформированное преобразование Лапласа

$$Z_\lambda\{J\} := \int Z_\lambda\{\phi\} E_\lambda\{J \cdot \phi\} \{d_\lambda\phi\} \quad (4.190)$$

с дуальной экспонентой  $E_\lambda(x) \Rightarrow E_q(x)$ , присущей базово-деформированному исчислению с  $q = \lambda$ , или выражение

$$Z_\lambda\{J\} := \int Z_\lambda\{\phi\} e_\lambda\{J \cdot \phi\} \{d_\lambda\phi\}, \quad (4.191)$$

содержащее исходную экспоненту  $e_\lambda(x) \Rightarrow e_h(x)$ , как это имеет место для  $h$ -деформированного исчисления с  $h = \lambda$  [ср. выражения (4.149) и (4.174)]. В обоих случаях  $n$ -кратное дифференцирование даёт

$$(D_{J_1}^\lambda \dots D_{J_n}^\lambda) Z_\lambda\{J\} = \int (\eta_\lambda(\phi_1) \dots \eta_\lambda(\phi_n)) e_\lambda(-S\{\phi\} + J \cdot \phi) \{d_\lambda\phi\}. \quad (4.192)$$

Здесь учтено правило дифференцирования

$$D_{J_i}^\lambda e_\lambda(-S + J \cdot \phi) = \eta_\lambda(\phi_i) e_\lambda(-S + J \cdot \phi), \quad (4.193)$$

в котором собственные числа  $\eta_\lambda(\phi_i)$  определяются действием обобщённой производной  $D_{J_i}^\lambda$  по вспомогательному полю  $J_i$  (в случаях базово- и  $h$ -деформированного исчисления имеем  $\eta_\lambda(\phi_i) = \phi_i$ , а для исчисления Цаллиса  $\eta_\lambda(\phi_i) = \ln_{2-\lambda}(\phi_i)$  [54]). В результате коррелятор

$$\langle \eta_\lambda(\phi_1) \dots \eta_\lambda(\phi_n) \rangle_\lambda := Z_\lambda^{-1} \int (\eta_\lambda(\phi_1) \dots \eta_\lambda(\phi_n)) Z_\lambda\{\phi\} \{d_\lambda\phi\}, \quad (4.194)$$

обратно пропорциональный статистической сумме

$$Z_\lambda := \int Z_\lambda\{\phi\} \{d_\lambda\phi\} = \int e_\lambda(-S\{\phi\}) \{d_\lambda\phi\}, \quad (4.195)$$

принимает вид

$$\langle \eta_\lambda(\phi_1) \dots \eta_\lambda(\phi_n) \rangle_\lambda = Z_\lambda^{-1} (D_{J_1}^\lambda \dots D_{J_n}^\lambda) Z_\lambda\{J\} \Big|_{J_1, \dots, J_n=0}. \quad (4.196)$$

В гармоническом приближении действие (4.154) выражается квадратичной формой

$$S^{(0)} = \sum_{i=1}^N \frac{(\phi_i)_\lambda^2}{[2]_\lambda}, \quad (4.197)$$

где принято, что набор полей  $\{\phi_i\}$  распределён с единичной дисперсией, а  $\lambda$ -деформированные число  $[2]_\lambda$  и квадрат  $(\phi_i)_\lambda^2$  обобщают выражения (4.97) и (4.107). В результате производящий функционал (4.190) принимает вид

$$Z_\lambda^{(0)}\{J\} = \prod_{i'}^{[N/2]} z_\lambda^{(0)}(J_{i'}) \prod_{i''}^{[N/2]} z_{1/\lambda}^{(0)}(J_{i'']), \quad (4.198)$$

отвечающий выражению (4.156). Соответственно, для производящего функционала (4.191) получаем

$$Z_\lambda^{(0)}\{J\} = \prod_i^N z_\lambda^{(0)}(J_i). \quad (4.199)$$

В этих выражениях каждый множитель отвечает одному узлу и определяется равенством

$$z_\lambda^{(0)}(J) = \sqrt{[2]_\lambda \pi_\lambda} E_\lambda \left( \frac{J^2}{2\Delta_\lambda^2} \right), \quad (4.200)$$

где  $\Delta_\lambda$  представляет  $\lambda$ -деформированную дисперсию, которая принимает значение  $\Delta_{\lambda_0} = 1$  в отсутствие деформации ( $\lambda = \lambda_0$ );  $\pi_\lambda$  означает  $\lambda$ -деформированное число  $\pi$ , определённое равенством типа (Б.5), где вместо  $q$  следует брать  $\lambda$ ; кроме того, как отмечалось ранее, в случае исчисления базово-деформированного типа следует использовать дуальную  $\lambda$ -экспоненту  $E_\lambda(x)$ , а для исчислений  $h$ -типа — самодуальную  $e_\lambda(x)$ . В результате удельная статистическая сумма  $z_\lambda^{(0)} = z_\lambda^{(0)}(J = 0)$  определяется простым выражением

$$z_\lambda^{(0)} = \sqrt{[2]_\lambda \pi_\lambda}. \quad (4.201)$$

Подобно  $q$ - и  $h$ -деформированным статистическим теориям среднее значение свободных полей равно  $\langle \eta(\phi) \rangle_\lambda^{(0)} \propto J|_{J=0} = 0$ , а дисперсия  $\langle \eta^2(\phi) \rangle_\lambda^{(0)}$  оказывается монотонно возрастающей функцией параметра деформации  $\lambda$ . Вычисление явного

вида зависимостей (4.200), (4.201) и дисперсии  $\langle \eta^2(\phi) \rangle_\lambda^{(0)}$  параметра порядка  $\eta = \eta(\phi)$ , определённого правилом дифференцирования (4.193), требует знания  $\lambda$ -деформированных экспонент.

Построение теории возмущений, основанной на выражениях типа (4.161), (4.162), а также использование диаграммной техники и теоремы Вика подобно изложенному выше. Аддитивный потенциал, отвечающий исходным производящим функционалам типа (4.190), (4.191), сводится к функционалу Грина  $G_\lambda^{(0)}\{J\}$ , определённому выражением вида (4.163). Переход от этого функционала, зависящего от вспомогательного поля  $J$ , к сопряжённому потенциалу  $\Gamma_\lambda = \Gamma_\lambda\{\phi\}$ , являющемуся функционалом параметра порядка  $\phi$ , достигается преобразованием Лежандра типа (4.164). При этом уравнения состояния имеют вид (4.165). Коэффициенты разложений типа (4.166), (4.167) определяют  $n$ -частичные функции Грина и их неприводимые части. В диаграммном представлении эти коэффициенты представлены на рис. 4.5. Как обычно, производящие функционалы (4.190), (4.191) подчиняются формальным соотношениям типа (4.170), (4.171) и (4.172), которые отражают симметрию системы относительно  $\lambda$ -деформированной вариации  $\delta_\lambda \phi_i(x)$  и учитывают условия  $F_j\{\phi\} = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , ограничивающие искомый набор полей  $\{\phi_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Как неоднократно отмечалось выше, во всех указанных выражениях следует заменить  $q$ ,  $h$  на  $\lambda$  и использовать  $\lambda$ -экспоненты  $e_\lambda(x)$ ,  $E_\lambda(x)$  вместо  $e_q(x)$ ,  $E_q(x)$  и  $e_h(x)$ .

Изложим наконец принципы обобщения алгебраически деформированных статистик, примеры которых дают схемы Цаллиса и Каниадакиса, приведенные в подразделе 4.2 и пункте 4.3.4. В начале этого пункта указывалось, что основная формальная особенность таких статистик определяется правилом умножения (4.131), содержащим деформированную сумму (4.132), (4.133). В результате производящий функционал (4.183) принимает вид

$$Z_\lambda\{J\} := \int Z_\lambda\{\phi\} e_\lambda\{J \cdot \phi\} \{d_\lambda \phi\} = \int e_\lambda \left( -S\{\phi\} \overset{\lambda}{\oplus} J \cdot \phi \right) \{d_\lambda \phi\}, \quad (4.202)$$

определённый деформированной суммой. Соответственно, коррелятор (4.184) записывается следующим образом:

$$\langle \eta_\lambda(\phi_{i_1}) \dots \eta_\lambda(\phi_{i_n}) \rangle_\lambda = Z_\lambda^{-1} \left( D_{J_1}^{\lambda(\phi_1)} \dots D_{J_n}^{\lambda(\phi_n)} \right) Z_\lambda\{J\} \Big|_{J_1, \dots, J_n=0}. \quad (4.203)$$

Здесь  $Z_\lambda = Z_\lambda\{J = 0\}$  – статистическая сумма. Вместо (4.193) следует использовать правило дифференцирования

$$D_x^{\lambda(a)} e_\lambda(ax) = \eta_\lambda(a) e_\lambda(ax), \quad (4.204)$$

где собственные значения  $\eta_\lambda(a)$  и деформация  $\lambda(a)$  определяются действием обобщённой производной  $D_x^{\lambda(a)}$  по переменной  $x$  при заданной константе  $a$  (для исчисления Каниадакиса  $\eta_\lambda(a) = a$ ,  $\lambda(a) = \lambda a$ ).

Подобно изложенным выше теоретико-полевым схемам далее определяется производящий функционал, строится теория возмущений, используется диграммная техника, вводятся аддитивный потенциал и сопряжённый функционал Грина, разложения которых определяют многочастичные функции Грина и их неприводимые части. В заключение для производящего функционала находятся уравнения, которые учитывают симметрию по отношению к вариации поля и наличие связей между полями, подлежащими определению.

4.3.6. Заключительные замечания. Приступая к обсуждению полученных результатов, следует подчеркнуть, что квантовая алгебра и квантовые группы, на которых основывается наш подход, длительное время являются объектом интенсивных исследований в различных областях  $q$ -деформированной квантовой теории (см. [39] и имеющиеся там ссылки). Более того, использование  $q$ -деформированной алгебры позволило развить теорию мультифракталов [61, 189] и термостатику деформированных бозонов и фермионов [190]. В своём рассмотрении мы ограничились объектами классической термостатистики, впервые исследованными в работе [161]. Отличительной особенностью

получающегося при этом базово-деформированного распределения является его обрезание при больших энергиях, что препятствует появлению расходимостей в сложных системах, которым присуще наличие далекодействующих сил.

В этой связи следует отметить деформированное распределение Цаллиса [18, 27], далекодействующая степенная асимптотика которого обнаруживает поведение, противоположное короткодействующему базово-деформированному распределению [161]. Согласно подразделу 4.2, картина Цаллиса присуща самоподобным статистическим системам, полевая теория которых основывается на использовании преобразования Меллина и производной Джексона. При этом флуктуирующий параметр порядка имеет ненулевое среднее значение, которое сводится к деформированному логарифму Цаллиса амплитуды гидродинамической моды. С формальной точки зрения это обусловлено использованием преобразования Меллина, ядро которого представляет степенную функцию  $\phi^J = \exp[J \ln(\phi)]$ , тогда как преобразование Фурье-Лапласа содержит экспоненту  $\exp(J\phi)$ .

В подразделе 4.3 развита теоретико-полевая схема, основанная как на базово-деформированном и конечно-разностном исчислениях [28], так и на процедурах деформации, предложенных Цаллисом, Абе, Каниадакисом и Наудсом [152, 155, 156, 158]. Были найдены производящие функционалы и их связь с соответствующими корреляторами для базово-деформированного,  $h$ -исчисления и исчисления Каниадакиса. Более того, введена пара аддитвных функционалов, разложение которых в деформированные ряды даёт многочастичные функции Грина и их неприводимые части. Найдены также формальные уравнения для производящих функционалов систем, обладающих симметрией по отношению к вариации поля и произвольными связями. В духе Наудса [158] проведено обобщение теоретико-полевых схем, присущих фиксированным исчислениям.

Из физических результатов следует указать на зависимости от деформации одночастичной статистической суммы и дисперсии свободных полей (см. рис. 4.4, 4.6). В случае базовой деформации удельная статистическая сумма имеет

в логарифмических осях симметричный вид по отношению к точке максимума  $q = 1$  (рост обратной кривизны  $\Delta^2$  эффективного действия сдвигает вверх кривые зависимости логарифмически эквидистантно). Для  $h$ -деформации удельная статистическая сумма сводится к недеформированному значению. В случае деформации Каниадакиса зависимость одноузельной статистической суммы  $z_\kappa^{(0)}$  от параметра деформации  $\kappa$  имеет симметричный вид по отношению к точке  $\kappa = 0$  (рост  $\kappa$  приводит к увеличению  $z_\kappa^{(0)}$  при малых значениях  $\Delta$ , а с ростом  $\Delta$  ситуация становится обратной). Что касается корреляторов свободно распределенных полей, то только моменты чётных порядков принимают ненулевые значения. Для всех распределений момент второго порядка пропорционален обратной кривизне  $\Delta^2$  соответствующего действия и увеличивается линейно с ростом параметра деформации в случае базово-деформированной статистики и нелинейно быстро для  $h$ -статистики. Более сложный характер имеет место для деформации Каниадакиса, когда дисперсия сначала уменьшается, а затем возрастает до аномального значения.

#### 4.4. Выводы к разделу 4

1. Использование формализма деформированных исчислений позволяет найти производящие функционалы, корреляторы наблюдаемых величин, функции Грина и их неприводимые части, а также учесть симметрию и наличие связей.

2. В случае базовой деформации зависимость статистической суммы свободных полей от логарифма деформации имеет симметричный вид относительно точки максимума, отвечающей недеформированной системе. Конечно-разностная деформация не изменяет статистической суммы. Для исчисления Каниадакиса зависимость статистической суммы от деформации имеет симметричный немонотонный вид по отношению к недеформированной системе.

3. Для всех исчислений ненулевые значения принимают только моменты

чётных порядков свободных полей. Момент второго порядка пропорционален обратной кривизне эффективного действия, увеличиваясь линейно с ростом параметра деформации в случае базово-деформированной статистики и нелинейно быстро для конечно-разностной. При деформации Каниадакиса дисперсия сначала уменьшается, а затем возрастает до аномального значения.

4. Построение теории поля самоподобных систем достигается на основе статистики Цаллиса, в рамках которой роль параметра порядка играет деформированный логарифм амплитуды гидродинамической моды. При этом момент первого порядка, сводящийся к энтропии Цаллиса, задаёт глобальную меру неопределённости информации, а момент второго порядка определяет информацию Фишера, задающую локальную меру информации, запасённой системой.



## РАЗДЕЛ 5

### МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫЕ ОБЪЕКТЫ

Со времени введения Мандельбротом понятия фрактала, концепция *самоподобия* приобрела широкую популярность в современной науке (см. [17, 80, 191, 192] имеющиеся там ссылки). Характерной особенностью фрактала является свойство самоподобия, которое состоит в том, что после определенного масштабирования любой фрагмент выглядит таким же образом, как и весь фрактал. Как установлено в подразделе 4.1, основной математической конструкцией, лежащей в основе теории самоподобных систем, является однородная функция, простейший пример которой даёт степенная зависимость  $F \sim \ell^h$ , определённая показателем Хёрста  $h$  (для временных рядов, представляющих архетип фрактала, значение  $F$  определяет амплитуду флуктуаций исследуемой величины,  $\ell$  — размер интервала, в котором определена эта амплитуда).

Простейший пример самоподобного множества представляет монофрактал, который определяется единственным значением показателя  $h$ . В общем случае мультифрактальное множество описывается спектром значений  $h(q)$ , где аргумент  $q$  представляет показатель, деформирующий меру, которая сопоставляется элементарным ячейкам, покрывающим фрактальное множество [193]. С другой стороны, в подразделе 4.1 было выяснено, что параметр  $q$  сводится к показателю подобия однородной функции [170], с одной стороны, и параметру неаддитивности, с другой (при этом значение  $q$  определяет эскортную вероятность  $P_i \propto p_i^q$  через обычную  $p_i$  [18, 27]). В физических системах мера фрактального множества представляет статистическую сумму  $Z_q \sim \ell^{\tau(q)}$ , где  $\ell$  — характерный размер ячеек, покрывающих мультифрактал, а показатель масс  $\tau(q)$  связан с обобщенным показателем Хёрста  $h(q)$  соотношением

$$\tau(q) = qh(q) - 1. \quad (5.1)$$

Настоящая глава посвящена исследованию мультифрактальных объектов. В подразделе 5.1 на основе базово-деформированного исчисления проведено обобщение статистической суммы и показателя масс мультифрактала, а также найдено среднее значение случайной переменной, распределенной по самоподобному множеству [61]. Последующие подразделы 5.2 – 5.4 посвящены приложению метода мультифрактального флуктуационного анализа [194] к исследованию временных рядов [50, 59], рентгеновских дифрактограмм сложных конденсированных сред [55] и мультифрактальных поверхностей конденсатов, полученных методом магнетронного распыления [57, 195].

### 5.1. Обобщение теории мультифракталов в рамках базово-деформированного исчисления

Поскольку фракталы являются самоподобными объектами, то естественно ожидать, что наиболее естественным образом их исследование достигается на основе базово-деформированного исчисления, разработанного в теории квантовых групп [28, 196]. Основой квантового исчисления является производная Джексона

$$\mathcal{D}_x^\lambda = \frac{\lambda^{x\partial_x} - 1}{(\lambda - 1)x}, \quad \partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \quad (5.2)$$

которая определяет изменение функции  $f(x)$  относительно деформации  $\lambda$  её аргумента  $x$ . Впервые идея использования производной Джексона в теории самоподобных множеств была предложена в работе [170], где деформация мультифрактального множества обеспечивалась действием оператора (5.2) на размер  $\ell$  покрывающих ячеек. В настоящем подразделе мы используем совершенно другой подход, в рамках которого проводится деформация параметра  $q$ , который испытывает конечную дилатацию  $(\lambda - 1)q$  вместо бесконечно малого сдвига  $dq$ , обеспечиваемого действием обычной производной [61].

Следуя стандартной схеме [80, 193], рассмотрим мультифрактальное множество, которое покрывается элементарными ячейками  $i = 1, 2, \dots, W$ ,  $W \rightarrow \infty$ . Мерой такого множества является статистическая сумма

$$Z_q = \sum_{i=1}^W p_i^q, \quad (5.3)$$

которая в согласии с условием нормировки принимает значение  $Z_q = 1$  при  $q = 1$ . Поскольку вероятность попадания в ячейку  $i$  ограничена условием  $p_i \leq 1$ , то функция (5.3) монотонно спадает от максимального значения  $Z_q = W$ , отвечающего  $q = 0$ , до предельных величин  $Z_q \simeq p_{\text{ext}}^q$  при  $|q| \rightarrow \infty$  (эти пределы определяются максимальной вероятностью  $p_{\text{max}}$  на положительной полуоси  $q > 0$  и минимальной  $p_{\text{min}}$  на отрицательной). В простейшем случае однородного распределения  $p_i = 1/W$ , фиксируемого статистическим весом  $W \gg 1$ , статсумма (5.3) сводится к показательной функции  $Z_q = W^{1-q}$ .

С формальной точки зрения наша задача сводится к обобщению статистической суммы (5.3) за счёт придания ей зависимости от параметра деформации  $\lambda$ , который совместно с показателем подобия  $q$  определяет *модифицированную статистическую сумму*  $\mathcal{Z}_q^\lambda$ , сводящуюся к исходному выражению  $Z_q$  при  $\lambda = 1$ . Для определения явного вида функции  $\mathcal{Z}_q^\lambda$  разложим разность  $\mathcal{Z}_q^\lambda - Z_\lambda$  в деформированный ряд по степеням  $q - 1$ :

$$\mathcal{Z}_q^\lambda := Z_\lambda - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{S}_\lambda^{(n)}}{[n]_\lambda!} (q - 1)_\lambda^{(n)}, \quad Z_\lambda = \sum_{i=1}^W p_i^\lambda. \quad (5.4)$$

Здесь использован деформированный бином [28, 196]

$$\begin{aligned} (x + a)_\lambda^{(n)} &:= (x + a)(x + \lambda a) \dots (x + \lambda^{n-1} a) \\ &= \sum_{m=0}^n \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_\lambda \lambda^{\frac{m(m-1)}{2}} x^m a^{n-m}, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (5.5)$$

который при произвольных значениях переменной  $x$  и константы  $a$  определяется коэффициентами  $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_\lambda = \frac{[n]_\lambda!}{[m]_\lambda! [n-m]_\lambda!}$ ; обобщённый факториал

$$[n]_\lambda! = [1]_\lambda [2]_\lambda \dots [n]_\lambda \quad (5.6)$$

выражается через базово-деформированные числа

$$[n]_\lambda = \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}. \quad (5.7)$$

Коэффициенты разложения (5.4)

$$\mathcal{S}_\lambda^{(n)} = - (qD_q^\lambda)^n Z_q \Big|_{q=1}, \quad n \geq 1 \quad (5.8)$$

определяются  $n$ -кратным действием производной Джексона (5.2) на исходную статсумму (5.3).

Далее удобно выразить коэффициенты (5.8) в форме

$$\mathcal{S}_\lambda^{(n)} = - \frac{[Z_\lambda - 1]^{(n)}}{(\lambda - 1)^n}, \quad n \geq 1, \quad (5.9)$$

содержащей *функциональный бином*

$$[x_t + a]^{(n)} := \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} x_{t^m} a^{n-m}, \quad (5.10)$$

который определён стандартными коэффициентами  $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$  для произвольных функции  $x_t = x(t)$  и постоянной  $a$ . В простейшем случае  $x_t = t$  определение (5.10) сводится к биному Ньютона. Коренное отличие функционального бинома от стандартного проявляется при  $a = -1$  в пределе  $t \rightarrow 0$ , когда все слагаемые суммы (5.10), за исключением первого  $x_{t^0} = x_1$ ,

пропорциональны  $x_{t^m} \rightarrow x_0$ , что приводит к результату

$$\lim_{t \rightarrow 0} [x_t - 1]^{(n)} = (-1)^n (x_1 - x_0). \quad (5.11)$$

При  $t = 1$  имеем  $[x_1 - 1]^{(n)} = 0$ .

Проводя простые выкладки, нетрудно убедиться, что набор коэффициентов (5.9) выражается через энтропию Цаллиса [27]

$$S_\lambda = - \sum_i p_i^\lambda \ln_\lambda p_i = - \frac{Z_\lambda - 1}{\lambda - 1}, \quad (5.12)$$

содержащую обобщённый логарифм

$$\ln_\lambda x = \frac{x^{1-\lambda} - 1}{1 - \lambda}. \quad (5.13)$$

С ростом деформации  $\lambda$  энтропия (5.12) монотонно спадает, принимая форму Больцмана-Гиббса  $S_1 = - \sum_i p_i \ln p_i$  при  $\lambda = 1$ . Из определения функционального бинома (5.10) видно, что выражение

$$\mathcal{S}_\lambda^{(n)} = - \frac{[(1 - \lambda)S_\lambda]^{(n)}}{(\lambda - 1)^n}, \quad n \geq 1 \quad (5.14)$$

определяет коэффициенты (5.9) через набор значений энтропии Цаллиса (5.12), которые отвечают  $m$ -кратным деформациям  $\lambda^m$ ,  $0 \leq m \leq n$ . При  $\lambda = 0$ , когда  $Z_0 = W$ , предел (5.11) даёт  $[S_0]^{(n)} = [Z_0 - 1]^{(n)} = (-1)^{n-1}(W - 1)$ , и энтропийные коэффициенты принимают максимальное значение  $\mathcal{S}_0^{(n)} = W - 1 \simeq W$ . Соответственно, в пределе  $\lambda \rightarrow 1$ , когда  $S_\lambda \rightarrow S_1$  и  $[(1 - \lambda)S_\lambda]^{(n)} \rightarrow (1 - \lambda)^n S_1^n$ , приходим к знакопеременной зависимости  $\mathcal{S}_1^{(n)} \rightarrow (-1)^{n-1} S_1^n$ . Наконец, в пределе  $|\lambda| \rightarrow \infty$ , где  $S_\lambda \sim \lambda^{-1}$  и  $[(1 - \lambda)S_\lambda]^{(n)} \sim (-1)^n$ , получаем знакопеременные степенные асимптотики  $\mathcal{S}_\lambda^{(n)} \sim (-1)^{n-1} \lambda^{-n}$ .

Для однородного распределения статистическая сумма равна  $Z_\lambda = W^{1-\lambda}$ ,

и зависимость (5.12) характеризуется значением  $S_0 \simeq W$  в пределе  $\lambda \ll 1$  и асимптотикой  $S_\lambda \sim 1/\lambda$  при  $\lambda \gg 1$  (точка  $\lambda = 1$  отвечает энтропии Больцмана  $S_1 = \ln W$ ). В результате находим, что с ростом  $\lambda$  в направлении положительной полуоси коэффициенты (5.9) спадают от максимальной величины  $\mathcal{S}_0^{(n)} \simeq W$  через знакопеременные значения  $\mathcal{S}_1^{(n)} = (-1)^{n-1}(\ln W)^n$  к асимптотикам  $\mathcal{S}_\lambda^{(n)} \sim (-1)^{n-1}\lambda^{-n}$ . При росте  $|\lambda|$  вдоль отрицательной полуоси коэффициенты (5.9) немонотонно сбегают к асимптотике  $\mathcal{S}_\lambda^{(n)} \sim -|\lambda|^{-n}$ , отвечающей пределу  $\lambda \rightarrow -\infty$ .

В рамках термодинамической картины [40] показатель масс сводится к свободной энергии  $\tau_q$ , показатель Гёльдера – к внутренней  $\alpha$ , а плотность спектра мультифрактального множества – к энтропии  $f$ . Их величины определяются равенствами

$$\tau_q = \frac{\ln Z_q}{\ln \ell}, \quad \alpha = \frac{\sum_i P_i \ln p_i}{\ln \ell}, \quad f = \frac{\sum_i P_i \ln P_i}{\ln \ell}, \quad (5.15)$$

в которых  $\ell \ll 1$  представляет размер ячейки, а исходная  $p_i$  и эскортная  $P_i$  вероятности связаны соотношениями

$$P_i(q) = \frac{p_i^q}{\sum_i p_i^q} = \frac{p_i^q}{Z_q}. \quad (5.16)$$

Подставляя последнее из них во второе равенство (5.15), получаем преобразование Лежандра  $\tau_q = q\alpha_q - f(\alpha_q)$ , где  $q$  играет роль обратной температуры, а внутренняя энергия задаётся равенством  $\alpha_q = \frac{d\tau_q}{dq}$  [80]. С учетом (5.3) эскортная вероятность (5.16) выражается через массовый показатель (5.15) следующим образом:

$$qP_i(q) = p_i \frac{\partial \tau_q}{\partial p_i} \ln \ell = \frac{\partial \ln Z_q}{\partial \ln p_i}. \quad (5.17)$$

Для построения полной картины следует дополнить обобщённую

статистическую сумму (5.4) деформированным показателем масс  $\tau_q^\lambda$ , который связан с исходным  $\tau_q$  условием  $\tau_q = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \tau_q^\lambda$ . С этой целью разложим искомую функцию  $\tau_q^\lambda$  в деформированный ряд типа (5.4):

$$\tau_q^\lambda := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_\lambda^{(n)}}{[n]_\lambda!} (q-1)_\lambda^{(n)}. \quad (5.18)$$

Очевидно, этот ряд является обобщением известного соотношения  $\tau_q = D_q(q-1)$  между показателем масс  $\tau_q$  и спектром фрактальных размерностей  $D_q$  [80]. Подобно (5.8), (5.9) коэффициенты  $D_\lambda^{(n)}$  выражаются равенствами

$$D_\lambda^{(n)} = (q\mathcal{D}_q^\lambda)^n \tau_q \Big|_{q=1} = \frac{[\tau_\lambda - 1]^{(n)}}{(\lambda - 1)^n}, \quad n \geq 1. \quad (5.19)$$

Здесь при использовании определения (5.10) слагаемое, отвечающее  $m = 0$ , следует опустить, поскольку  $\tau_{\lambda^0} = 0$ . При  $n = 1$  последнее равенство (5.19) сводится к стандартной форме  $D_\lambda^{(1)} = \tau_\lambda / (\lambda - 1)$ , тогда как коэффициенты  $D_\lambda^{(n)}$  с  $n > 1$  включают слагаемые, которые пропорциональны множителям  $\tau_{\lambda^m}$ , отвечающим многократным деформациям  $\lambda^m$ ,  $1 < m \leq n$ . Это означает, что определение (5.19) отражает иерархию спектров мультифрактальных размерностей, генерированных  $m$ -кратными деформациями.

Использование предела (5.11), в котором функция  $x_t$  сводится к показателю масс  $\tau_\lambda$  с характерными значениями  $\tau_0 = -1$  и  $\tau_1 = 0$ , даёт  $[\tau_0 - 1]^{(n)} = (-1)^n$  в точке  $\lambda = 0$ , где коэффициенты (5.19) принимают значения  $D_0^{(n)} = 1$ , отвечающие размерности исходного сегмента. В пределе  $\lambda \rightarrow \pm\infty$  поведение показателя масс  $\tau_\lambda \simeq D_{\text{ext}}\lambda$  определяется экстремальными значениями  $D_{\text{ext}}$  спектра мультифрактальных размерностей, которые сводятся к минимальной величине  $D_{\text{min}} = D_\infty^{(n)}$  и максимальной  $D_{\text{max}} = D_{-\infty}^{(n)}$  [80]. С другой стороны, в пределах  $\lambda \rightarrow \pm\infty$  экстремальные значения  $Z_\lambda \simeq p_{\text{ext}}^\lambda$  статистической суммы (5.3) задаются предельными вероятностями  $p_{\text{ext}}$ . В результате первое определение (5.15) даёт показатель масс  $\tau_\lambda \simeq \lambda \frac{\ln p_{\text{ext}}}{\ln \ell}$ , так что коэффициенты (5.19) сводятся к

минимальному значению  $D_\infty^{(n)} \simeq \frac{\ln p_{\max}}{\ln \ell}$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  и максимальному  $D_{-\infty}^{(n)} \simeq \frac{\ln p_{\min}}{\ln \ell}$  при  $\lambda \rightarrow -\infty$ .

В случае однородного распределения, для которого статистическая сумма равна  $Z_\lambda = W^{1-\lambda}$ , выражение  $Z_\lambda := \ell^{\tau_\lambda}$  даёт фрактальную размерность  $D = \frac{\ln W}{\ln(1/\ell)}$ , сводящуюся к  $D = 1$ , когда размер покрывающих ячеек  $\ell$  стремится к обратному значению статистического веса  $1/W$ . Такая размерность отвечает монофракталу с показателем масс  $\tau_\lambda = D(\lambda - 1)$ , подстановка которого в определение (5.19) даёт коэффициенты  $D_\lambda^{(n)} = D$  для всех порядков  $n \geq 1$ .

Поскольку каждый из деформированных рядов (5.4), (5.27) полностью описывает мультифрактальное множество, то их коэффициенты должны выражаться друг через друга. В первом порядке получаем выражения

$$S_\lambda = \ln_\lambda \left( Z_\lambda^{\frac{1}{1-\lambda}} \right), \quad D_\lambda = \frac{\ln Z_\lambda}{(\lambda - 1) \ln \ell} \quad (5.20)$$

для энтропии Цаллиса  $S_\lambda \equiv \mathcal{S}_\lambda^{(1)}$  и мультифрактальной размерности  $D_\lambda \equiv D_\lambda^{(1)}$ . Использование соотношения  $Z_\lambda = \ell^{\tau_\lambda}$ , связи  $\tau_\lambda = D_\lambda(\lambda - 1)$  и экспоненты Цаллиса  $\exp_\lambda(x) = [1 + (1 - \lambda)x]_+^{\frac{1}{1-\lambda}}$  приводит к зависимостям

$$S_\lambda = \ln_\lambda (W^{D_\lambda}), \quad D_\lambda = \frac{\ln [\exp_\lambda(S_\lambda)]}{\ln W}, \quad (5.21)$$

где введен статистический вес  $W = 1/\ell$ . К сожалению, не представляется возможным найти явные соотношения между коэффициентами (5.9) и (5.19) при  $n > 1$ . Использование статистической суммы  $Z_\lambda = W^{-D_\lambda(\lambda-1)}$  позволяет лишь записать

$$D_\lambda^{(n)} = \frac{[D_\lambda(\lambda - 1) - 1]^{(n)}}{(\lambda - 1)^n}, \quad (5.22)$$



$$\mathcal{S}_\lambda^{(n)} = -\frac{[W^{-D_\lambda(\lambda-1)} - 1]^{(n)}}{(\lambda-1)^n}. \quad (5.23)$$

Эти равенства показывают, что знание первых коэффициентов разложений (5.4) и (5.27), которые связаны между собой зависимостями (5.21), позволяет найти их для произвольных порядков  $n > 1$ .

Рассмотрим теперь физическую величину  $\phi_i$ , распределённую случайным образом по фрактальному множеству со средним значением  $\langle \phi \rangle_q^\lambda = \sum_i \phi_i \mathcal{P}_i(q, \lambda)$ . Распределение вероятности этой величины определяется равенством

$$\lambda \mathcal{P}_i(q, \lambda) := p_i + p_i \frac{\partial \tau_q^\lambda}{\partial p_i} \ln \ell, \quad (5.24)$$

обобщающим выражение (5.17) для эскортной вероятности  $\mathcal{P}_i(q)$  через исходную  $p_i$  при различных деформациях  $\lambda$ . С учётом равенств (5.17) – (5.19) искомое среднее  $\langle \phi \rangle_q^\lambda$  определяется деформированным рядом

$$\lambda \langle \phi \rangle_q^\lambda = \langle \phi \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\lambda \langle \phi \rangle_\lambda - 1]^{(n)}}{[n]_\lambda! (\lambda-1)^n} (q-1)_\lambda^{(n)}, \quad (5.25)$$

который содержит обычное среднее  $\langle \phi \rangle = \sum_i \phi_i p_i$  и эскортное значение  $\langle \phi \rangle_\lambda = \sum_i \phi_i P_i(\lambda)$ .

Уравнение (5.25) определяет зависимость среднего значения  $\langle \phi \rangle_q^\lambda$  от показателя подобия  $q$  при фиксированной деформации  $\lambda$ . В случае  $q = \lambda$ , когда определение (5.5) даёт  $(q-1)_q^{(n)} = 0$  для  $n > 1$ , приходим к равенству  $\langle \phi \rangle_q^q = \langle \phi \rangle_q$  для средних значений, отвечающих обобщённой и эскортной вероятностям, определённым выражениями (5.24) и (5.17) соответственно. В точке  $\lambda = 0$ , где согласно равенствам (5.5), (5.7), (5.11) имеем  $(q-1)_0^{(n)} = (q-1)q^{n-1}$ ,  $[n]_0! = 1$  и  $[\lambda \langle \phi \rangle_\lambda - 1]^{(n)} \rightarrow (-1)^n \langle \phi \rangle$ , уравнение (5.25) выполняется тождественно; в этом случае при любых исходных распределениях  $p_i$  эскортное принимает однородную форму  $P_i(q, 0) = 1/W$ , и среднее значение определяется тривиальным выражением

$\langle \phi \rangle_q^0 = W^{-1} \sum_i \phi_i$ . При  $\lambda = 1$ , когда  $[\langle \phi \rangle_1 - 1]^{(n)} = 0$ , уравнение (5.25) даёт обычное среднее  $\langle \phi \rangle = \sum_i \phi_i p_i$ , поскольку  $P_i(q, 1)$  сводится к  $p_i$ . Наконец, принимая, что  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \langle \phi \rangle_{\lambda^n} \rightarrow \langle \phi \rangle_{\infty}$  при  $\lambda \gg 1$ , где  $(q-1)_{\lambda}^{(n)} \sim (-1)^{n-1} (q-1) \lambda^{n(n-1)/2}$ ,  $[n]_{\lambda}! \sim \lambda^{n(n-1)/2}$  и  $[\lambda \langle \phi \rangle_{\lambda} - 1]^{(n)} \sim \lambda^n \langle \phi \rangle_{\lambda^n}$ , приходим к простой зависимости

$$\lambda \langle \phi \rangle_q^{\lambda} = \langle \phi \rangle + (q-1) \langle \phi \rangle_{\infty}, \quad (5.26)$$

согласно которой с возрастанием  $q$  среднее  $\langle \phi \rangle_q = \langle \phi \rangle_q^q$  ограничено предельным значением  $\langle \phi \rangle_{\infty}$ .

В качестве приложения развитого подхода рассмотрим пример биномиального множества Кантора, полное рассмотрение которого достигается в рамках аналитической схемы. Такое множество генерируется  $N$ -кратным делением единичного сегмента на пару равных частей с элементарными длинами  $\ell = (1/2)^N$ , каждой из которых сопоставляется бинарная вероятность  $p^m (1-p)^{N-m}$ ,  $m = 0, 1, \dots, N$ . В результате статистическая сумма (5.3) принимает форму  $Z_q = [p^q + (1-p)^q]^N$ , которой можно сопоставить степенную зависимость  $Z_q = \ell^{\tau_q}$  с показателем масс [80]

$$\tau_q = \frac{\ln [p^q + (1-p)^q]}{\ln(1/2)}. \quad (5.27)$$

Соответствующие зависимости коэффициентов фрактальной размерности (5.22) от параметра деформации показаны на рис. 5.1 при различных значениях  $n$  и  $p$ . Из рисунка видно, что при фиксированной вероятности  $p$  и  $n = 1$  коэффициент  $D_{\lambda}^{(n)}$  обнаруживает монотонное спадание, присущее обычной зависимости фрактальной размерности от параметра деформации; рост  $n$  приводит к немонотонному поведению, которое усиливается с увеличением  $n$ . Такое поведение сохраняется с отклонением вероятности  $p$  от значения  $p = 1/2$ , которое расширяет спектр фрактальных размерностей. В отличие от фрактальной размерности (5.22) энтропийные коэффициенты (5.23) оказываются зависимыми от эффективного

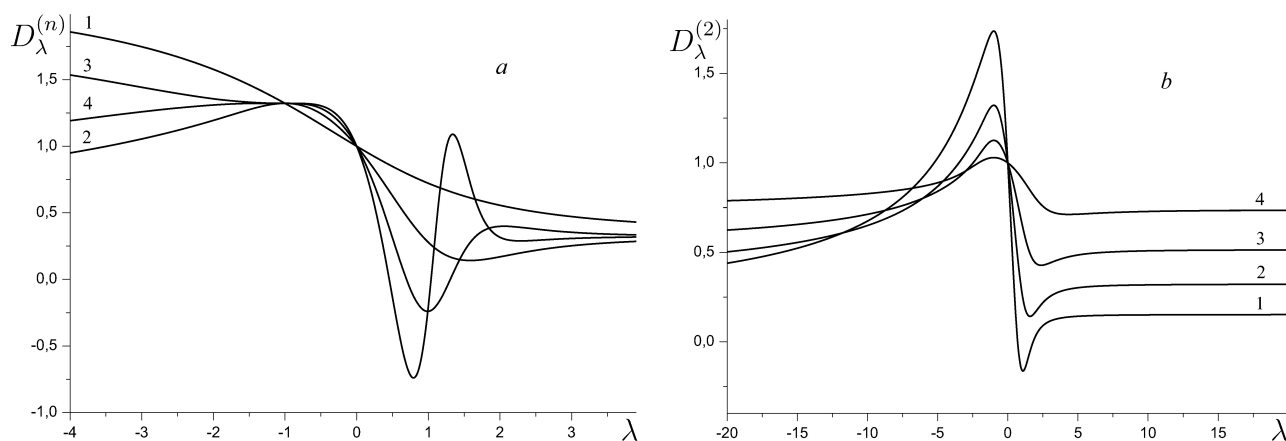


Рис. 5.1. Зависимость коэффициентов фрактальной размерности (5.22) от деформации для биномиального множества Кантора при  $p = 0.2$  (a) и  $n = 2$  (b) (кривые 1–4 отвечают  $n = 1, 2, 3, 4$  на поле (a) и  $p = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$  на поле (b))

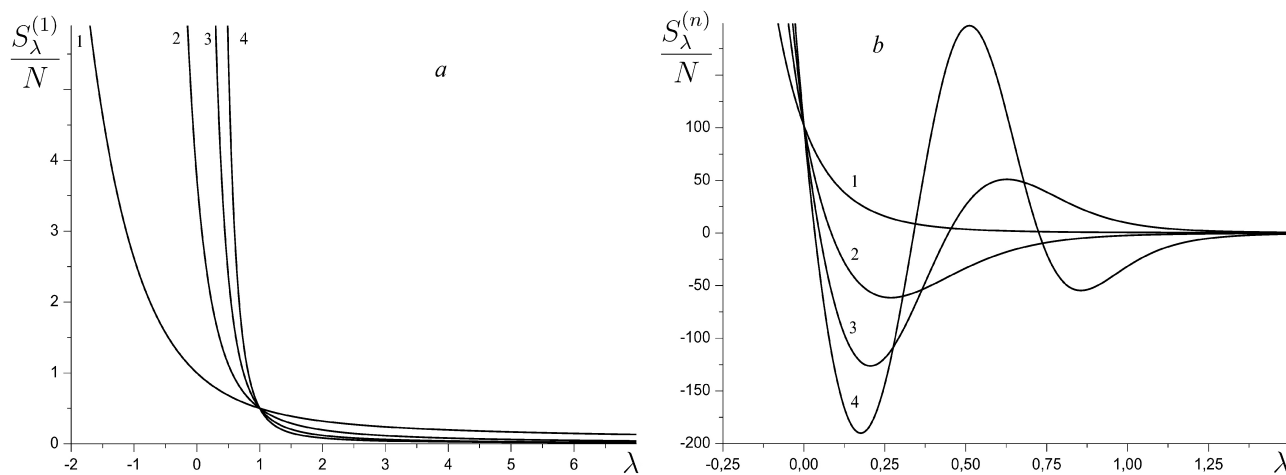


Рис. 5.2. Коэффициенты энтропии (5.23) множества Кантора при  $p = 0.2$ : (a)  $n = 1$  (кривые 1–4 отвечают  $N = 1, 4, 8, 12$ ); (b)  $N = 10$  (кривые 1–4 отвечают  $n = 1, 2, 3, 4$ )

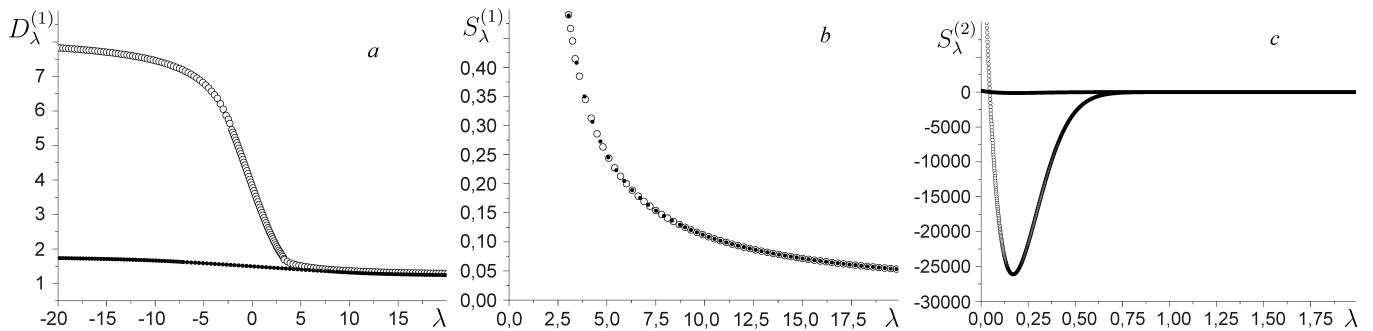


Рис. 5.3. (а) Коэффициенты фрактальной размерности (5.22) временного ряда обменного курса евро к доллару США при  $n = 1$ ; соответствующие коэффициенты энтропии (5.23) при  $n = 1$  (b) и  $n = 2$  (c) (жирные точки отвечают данным до финансового кризиса, полые — после)

числа частиц  $N$ . Вид этой зависимости показан для энтропии Цаллиса  $S_\lambda \equiv \mathcal{S}_\lambda^{(1)}$  на рис. 5.2а: с ростом деформации энтропия спадает тем быстрее, чем больше  $N$  (при этом удельное значение  $S_\lambda/N$  в точке  $\lambda = 1$  остаётся постоянным). Согласно рис. 5.2b, с ростом  $n$  монотонно спадающая зависимость  $\mathcal{S}_\lambda^{(1)}$  переходит в немонотонные  $\mathcal{S}_\lambda^{(n)}$  с нарастанием осцилляций при увеличении  $n$ . Характерно, что при любых значениях  $n$  и  $p$  величина  $\mathcal{S}_0^{(n)}$  остаётся постоянной (для биномиального множества Кантора она равна  $2^N$ ).

В качестве другого примера рассмотрим временной ряд обменного курса евро к доллару США в период с 2007 по 2009 годы, включающий финансовый кризис (данные взяты из сайта [www.fxeuroclub.ru](http://www.fxeuroclub.ru)). Задача состоит в исследовании влияния кризиса на статистические характеристики ряда, для чего он был разделён на интервал, предшествующий кризису, (январь 2007 — май 2008) и последующий период (июнь 2008 — октябрь 2009).<sup>7</sup> Статистический анализ проводился в рамках метода мультифрактального флуктуационного анализа [194], изложению которого посвящён следующий подраздел 5.2. Этот метод позволяет определить показатель масс  $\tau(q)$ , использование которого в выражениях (5.22), (5.23) приводит к зависимостям, показанным на рис. 5.3. Исследование коэффициентов низшего порядка  $n = 1$  показывает (рис. 5.3а, 5.3b), что влияние кризиса сказывается

<sup>7</sup>Момент самого кризиса фиксировался условием максимума дисперсии временного ряда.

только на геометрической характеристике (спектре фрактальных размерностей  $D_\lambda^{(1)}$ ), но не влияет на статистическую характеристику, которую представляет энтропия Цаллиса  $\mathcal{S}_\lambda^{(1)}$ . Однако исследование энтропийного коэффициента следующего порядка  $n = 2$  обнаруживает сильную чувствительность к кризису (см. рис. 5.3с). Таким образом, данный пример наглядно демонстрирует необходимость использования развитого подхода для выявления тонких статистических характеристик мультифрактальных объектов и стохастических процессов, протекающих самоподобным образом.

Последний пример приложения развитого метода даёт статистическая обработка макроструктуры конденсатов, полученных методом магнетронного распыления [57]. Использование такой технологии позволяет получать высокопористые конденсаты, обладающие развитой фрактальной структурой (см. рис. 5.4а и 5.4b, на которых показаны электронномикроскопические изображения конденсатов углерода и титана). Из спектров фрактальных размерностей и энтропии Цаллиса, показанных на рис. 5.4с и 5.4d, видно, что обе указанные характеристики проявляют явные различия между конденсатом углерода, обладающего высокопористой поверхностью, и более грубой поверхностью титана. Отсюда следует, что при статистическом анализе мультифрактальных объектов с сильно различающейся структурой достаточно использования стандартных методов [80].

Подводя итог проведенному рассмотрению, укажем, что обобщение теории мультифрактальных множеств [193] достигается использованием разложений в деформированные ряды статистической суммы (5.4), показателя масс (5.27) и среднего значения  $\langle \phi \rangle_q^\lambda$  случайной величины, распределённой самоподобным образом. Коэффициенты таких разложений определяются функциональным биномом (5.10), использование которого позволяет выразить обобщённые спектр фрактальных размерностей (5.22) и энтропию (5.23) в зависимости от многократной деформации исследуемого множества. Среднее значение случайной величины, распределённой самоподобным образом с вероятностью (5.24),

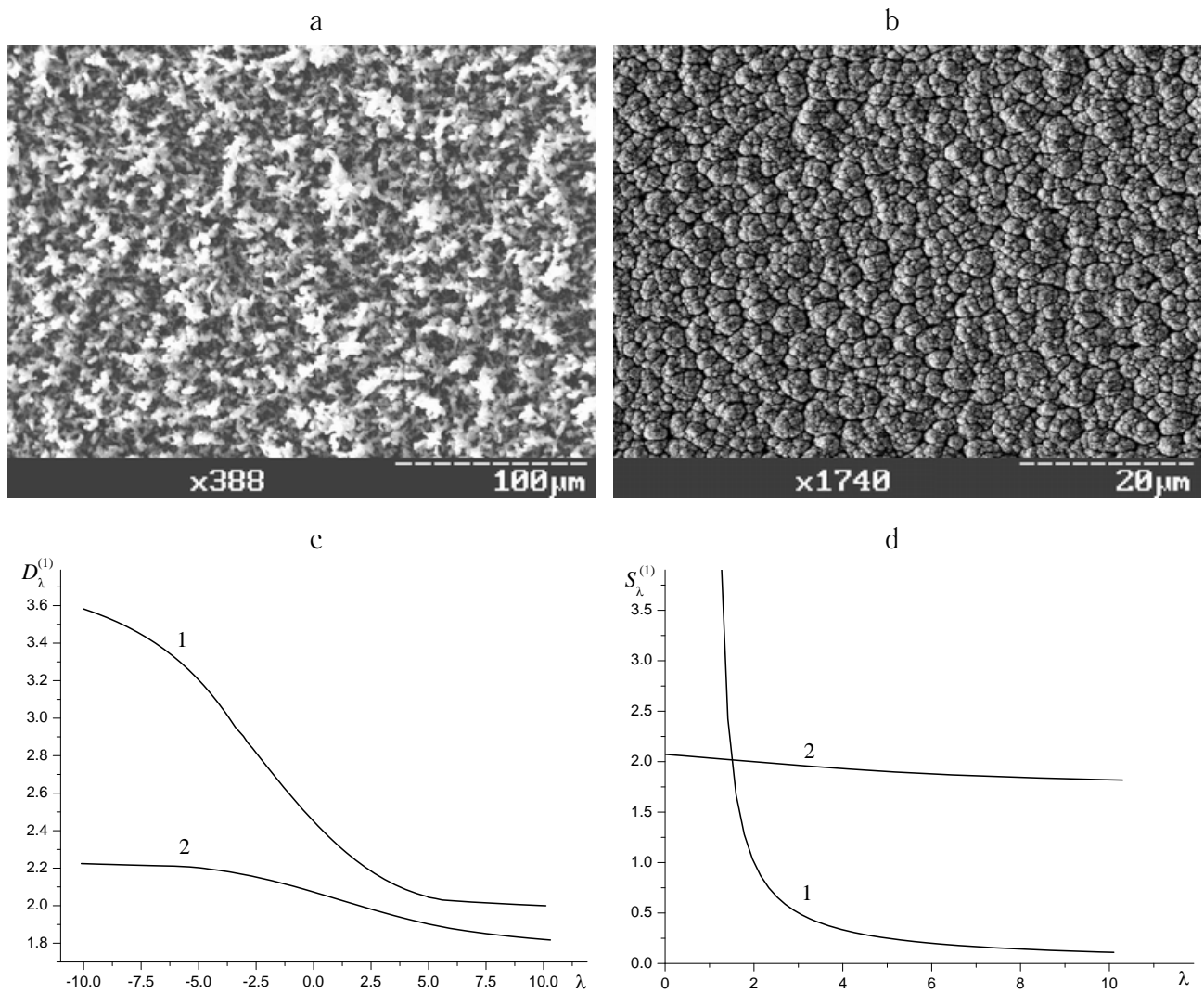


Рис. 5.4. Изображения, полученные в сканирующем электронном микроскопе при селективном росте конденсатов углерода (a) и титана (b); соответствующие зависимости от деформации спектра фрактальных размерностей (c) и энтропии Цаллиса (d) (кривые 1, 2 отвечают углероду и титану)

определяется уравнением (5.25).

Верификация развитого метода проводилась на примерах мультифрактальных множеств, взятых из математической физики, физики твёрдого тела и эконофизики, где развитый формализм использован при описании множества Кантора, поверхностей высокопористых конденсатов и временных рядов обменных курсов валют. Исследование множества Кантора показало, что коэффициенты разложения фрактальной размерности (5.22) и энтропии (5.23) совпадают со стандартными мультифрактальными характеристиками при  $n = 1$ , обнаруживая существенное усложнение с ростом порядка  $n > 1$ . Анализ фрактальных поверхностей конденсатов титана и углерода показал, что для описания их макроструктуры достаточно использовать спектр фрактальных размерностей и энтропию, определённые обычным образом. Более сложная ситуация складывается при анализе временных рядов, которые дают обменные курсы валют. В этом случае уже в низшем порядке  $n = 1$  коэффициенты фрактальной размерности оказываются чувствительными к изменению поведения ряда, тогда как энтропийные коэффициенты обнаруживают разницу в таком поведении только при  $n > 1$ .

## 5.2. Мультифрактальный анализ временных рядов

Временным рядом называется последовательность значений исследуемой величины, зафиксированных через равные промежутки времени. Как правило, временными рядами представляются случайные изменения величин, наиболее популярные примеры которых дают колебания обменных курсов валют и временные изменения других экономических показателей. Естественное представление наблюдений природных явлений также сводится к временным рядам измерений температуры воздуха, количества осадков, скорости ветра и других метеорологических данных. Кроме экономики и метеорологии, временные ряды широко используются в медицине, где наиболее яркий пример даёт

электрокардиограмма сердца, а также при описании стохастических процессов в физике, химии, социологии и других областях науки и техники [17].

Анализ временных рядов является основой разработки и верификации макроскопических моделей, позволяющих последовательным образом представить эволюцию сложных систем на основе микроскопических данных [197]. Такой анализ сводится к вычислению корреляционных функций векторов состояний, которые представляют временные последовательности величин, характеризующих систему. Будучи традиционным разделом статистики, анализ временных рядов основывается на классе моделей гармонического осциллятора, которые отвечают простейшему случаю гауссовского случайного процесса [198]. Однако в действительности оказывается, что реальный временной ряд отвечает скорее полётам Леви, нежели чем гауссовским процессам, которые являются их частным случаем. Известная особенность полётов Леви состоит в инвариантности относительно масштабных преобразований [17], в связи с чем проблема исследования временных рядов сводится к анализу самоподобных стохастических процессов, которые представляются (мульти)фрактальными множествами [80]. Статистическая теория самоподобных временных рядов, основанная на термодинамической модели [199], позволила описать их глобальные характеристики, определяющие предсказуемость изменений случайной величины. Однако при этом выпадают из рассмотрения локальные свойства, представление которых достигается в рамках метода мультифрактального флуктуационного анализа (МФФА) [194], позволившего исследовать временные ряды в экономике [200], медицине [201] и метеорологии [202].

Настоящий подраздел посвящён изложению алгоритма МФФА и его использованию при статистическом анализе различных временных рядов. В пункте 5.2.1 проводится тестирование метода МФФА для бинарного мультифрактала Кантора и некоррелированного самоподобного ряда, которые допускают аналитическое описание. Пункты 5.2.2, 5.2.3 посвящены описанию мультифрактальных спектров обменных курсов валют и электрокардиограмм



сердца, которые дают наиболее яркие примеры временных рядов в экономике и медицине. Их исследование показывает, что кризис приводит к усилению мультифрактальных свойств временных рядов экономических показателей и появлению корреляций в их изменении. В медицине использование метода МФФА позволяет установить связь между различными формами мультифрактальных спектров и группами сердечных патологий. В качестве физического примера в подразделе 5.2.4 рассмотрено мультифрактальное множество, порождаемое процессом аномальной диффузии. Пункт 5.2.5 завершает наше рассмотрение обсуждением полученных результатов.

5.2.1. Описание метода МФФА. Алгоритм метода МФФА сводится к следующим шагам [194]. Сначала из ряда  $x(k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N$  выделяем флуктуационный профиль

$$y(i) = \sum_{k=1}^i [x(k) - \bar{x}], \quad (5.28)$$

отсчитанный от средней величины  $\bar{x}$ . Затем разделяем полученные значения  $y(i)$  по непересекающимся сегментам длиной  $s$ , число которых равно целому значению  $N_s = [N/s]$ . Так как длина ряда  $N$  не всегда кратна выбраной шкале  $s$ , то в общем случае последний участок содержит число точек меньше, чем  $s$ . Для учёта этого остатка следует повторить процедуру деления на сегменты, начиная с противоположного конца ряда и двигаясь в противоположном направлении. В результате полное число сегментов, обладающих длиной  $s$ , составит  $2N_s$ .

Поскольку изменение случайной величины  $y(i)$  происходит вблизи значений  $y_\nu(i) \neq 0$ ,  $\nu = 1, \dots, 2N_s$ , обусловленных определённой тенденцией (трендом) эволюции ряда, то далее следует найти локальный тренд  $y_\nu(i)$  для каждого из  $2N_s$  сегментов. При этом проще всего использовать метод наименьших квадратов, представляя тренд  $y_\nu(i)$  полиномом, степень которого выбирается таким образом, чтобы обеспечить интерполяцию с ошибкой, не превышающей заданный предел.

Затем определяем дисперсию

$$F^2(\nu, s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{y[(\nu - 1)s + i] - y_\nu(i)\}^2 \quad (5.29)$$

для сегментов  $\nu = 1, \dots, N_s$ , следующих в прямом направлении, и соответствующее значение

$$F^2(\nu, s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{y[N - (\nu - N_s)s + i] - y_\nu(i)\}^2 \quad (5.30)$$

для обратной последовательности  $\nu = N_s + 1, \dots, 2N_s$ .

На следующем шаге вводим деформированную дисперсию

$$F_q(s) = \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{\nu=1}^{2N_s} [F^2(\nu, s)]^{q/2} \right\}^{1/q}, \quad (5.31)$$

полученную возведением выражений (5.29), (5.30) в степень  $q$  и последующим усреднением по всем сегментам. Поскольку при  $q = 0$  равенство (5.31) содержит неопределённость, то вместо него следует использовать предельное выражение

$$F_0(s) = \exp \frac{1}{4N_s} \sum_{\nu=1}^{2N_s} \ln[F^2(\nu, s)]. \quad (5.32)$$

Изменяя временную шкалу  $s$  при фиксированном показателе  $q$ , находим зависимость  $F_q(s)$ , представляя её в двойных логарифмических координатах. Если исследуемый ряд сводится к самоподобному множеству, проявляющему дальнедействующие корреляции, то флуктуационная функция  $F_q(s)$  представляется степенной зависимостью

$$F_q(s) \propto s^{h(q)} \quad (5.33)$$

с обобщённым показателем Хёрста  $h(q)$ , величина которого определяется параметром  $q$ . Из определений (5.31), (5.33) следует, что при  $q = 2$  этот показатель сводится к обычному значению  $H$ . Для временных рядов, которые отвечают монофрактальному множеству, флуктуационная функция  $F^2(\nu, s)$  одинакова для всех сегментов  $\nu$ , и обобщённый показатель Хёрста  $h(q) = H$  не зависит от параметра деформации  $q$ . Для мультифрактальных рядов при положительных  $q$  основной вклад в функцию  $F_q(s)$  дают сегменты  $\nu$ , проявляющие большие отклонения  $F^2(\nu, s)$ , а при отрицательных  $q$  доминируют сегменты с малыми дисперсиями  $F^2(\nu, s)$ . В результате можно заключить, что при  $q < 0$  обобщённый показатель Хёрста  $h(q)$  описывает сегменты, проявляющие малые флуктуации, а при  $q > 0$  — большие.

При реализации изложенного алгоритма следует иметь в виду, что с ростом размера сегментов до  $s > N/4$ , функция  $F_q(s)$  теряет статистическую информативность ввиду малости числа  $N_s < 4$  сегментов, используемых при усреднении. Таким образом, проведение указанной процедуры предполагает исключение, с одной стороны, больших сегментов ( $s > N/4$ ), а с другой — малых ( $s < 10$ ).

Стандартное представление скейлинговых свойств временного ряда предполагает переход от показателя Хёрста  $h(q)$  к показателю масс  $\tau(q)$  и спектральной функции  $f(\alpha)$ , которые являются основными характеристиками мультифракталов [194]

$$\tau(q) = qh(q) - 1, \quad (5.34)$$

$$f(\alpha) = \alpha q(\alpha) - \tau(q(\alpha)). \quad (5.35)$$

Здесь значение  $q(\alpha)$  определяется условием  $\tau'(q) = \alpha$ , где штрих означает дифференцирование по аргументу. При  $|q| \gg 1$  зависимость  $\tau(q)$  имеет линейно

возрастающий вид с криволинейным участком вблизи  $q = 0$ , который обеспечивает замедление роста показателя масс  $\tau$  с увеличением параметра деформации  $q$ . Спектральная функция  $f(\alpha)$  определяет набор монофракталов с размерностями  $\alpha$ , которые формируют исследуемое множество: относительное число монофракталов с заданным значением  $\alpha$ , которые попадают в ячейки размером  $l$ , покрывающие это множество, задаётся соотношением  $N(\alpha) \sim l^{-f(\alpha)}$ . Согласно этому определению, ширина спектра  $f(\alpha)$  будет тем больше, чем сильнее выражены мультифрактальные свойства (так, монофрактал характеризуется единственным значением  $\alpha$ ) [80].

5.2.2. Тестирование метода МФФА. Проведем тестирование изложенного метода на временных рядах, допускающих аналитическое представление, — биномиальном ряде и некоррелированном случайном множестве со степенной функцией распределения [194].

Биномиальный ряд. Этот ряд состоит из  $N = 2^n$  членов  $x_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ , определённых равенством

$$x_k = p^{m(k-1)} (1-p)^{n-m(k-1)}, \quad (5.36)$$

где параметр  $p$  определяет вероятность  $1/2 \leq p \leq 1$ , а  $m(k)$  означает количество единиц в бинарном коде числа  $k$  (например,  $m(13) = 3$ , так как число 13 представляется бинарным кодом 1101). Обобщенный показатель Хёрста и показатель масс ряда (5.36) выражаются равенствами [194]

$$h = \frac{1}{q} - \frac{\ln [p^q + (1-p)^q]}{q \ln 2}, \quad (5.37)$$

$$\tau = -\frac{\ln [p^q + (1-p)^q]}{\ln 2}. \quad (5.38)$$

При тестировании метода МФФА учёт тренда в равенствах (5.29), (5.30) обеспечивался использованием полинома  $y_\nu(i)$  четвертой степени. Это приводит к зависимости  $F_q(s)$ , показанной на рис. 5.5а при различных значениях  $q$  в двойных логарифмических осях. При  $50 < s < 500$  она обнаруживает хорошо выявленный линейный участок, наклон которого определяет обобщённый показатель Хёрста  $h(q)$ , показанный на рис. 5.5b. Тогда использование равенства (5.34) приводит к показателю масс  $\tau(q)$ , зависимость которого от параметра деформации изображена на рис.5.5с. Сравнение численных данных, полученных методом МФФА, с аналитическими выражениями (5.37) и (5.38) при различных значениях вероятности  $p$  указывает на их хорошее соответствие.

Некоррелированные самоподобные ряды. В качестве другого примера рассмотрим ряд, случайные значения которого распределены с плотностью вероятности

$$P(x) = \alpha x^{-(\alpha+1)}, \quad (5.39)$$

степенной характер которой отражает самоподобие множества  $1 \leq x < \infty$  при  $\alpha > 0$ . При этом показатель Хёрста выражается равенством [194]

$$h = \begin{cases} 1/q & \text{при } q > \alpha, \\ 1/\alpha & \text{при } q < \alpha. \end{cases} \quad (5.40)$$

На рис. 5.6 проведено сравнение зависимостей  $h(q)$  и  $\tau(q)$ , полученных методом МФФА и по формулам (5.40) и (5.34) для рядов с функцией распределения (5.39) при различных показателях  $\alpha$ . Как и выше, обнаруживается хорошее согласие численных и аналитических данных.

5.2.3. Анализ обменных курсов валют. В последние годы экономические системы привлекают постоянное внимание не только у самих экономистов, но и в среде специалистов по статистической физике, где наблюдается значительный

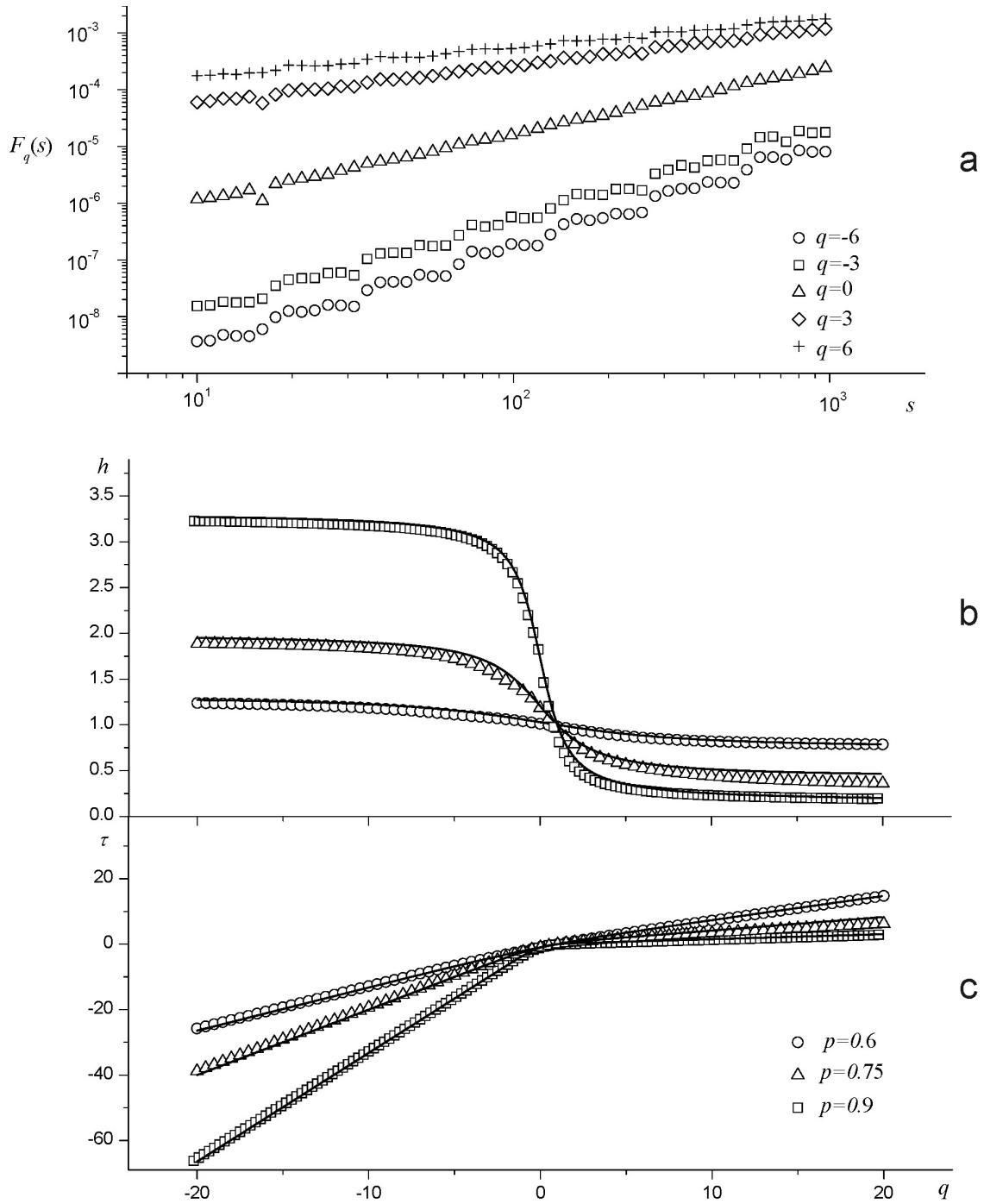


Рис. 5.5. (а) Зависимость дисперсии биномиального ряда (5.36) от размера сегмента  $s$  при различных значениях параметра деформации  $q$  ( $n = 16$ ,  $p = 0.75$ ); показатель Хёрста (b) и показатель масс (c) для биномиальных рядов с различными значениями параметра  $p$  при  $n = 16$  (значения величин, отмеченные кружками, треугольниками и квадратиками, получены методом МФФА, сплошные линии — на основе равенств (5.37) и (5.38))

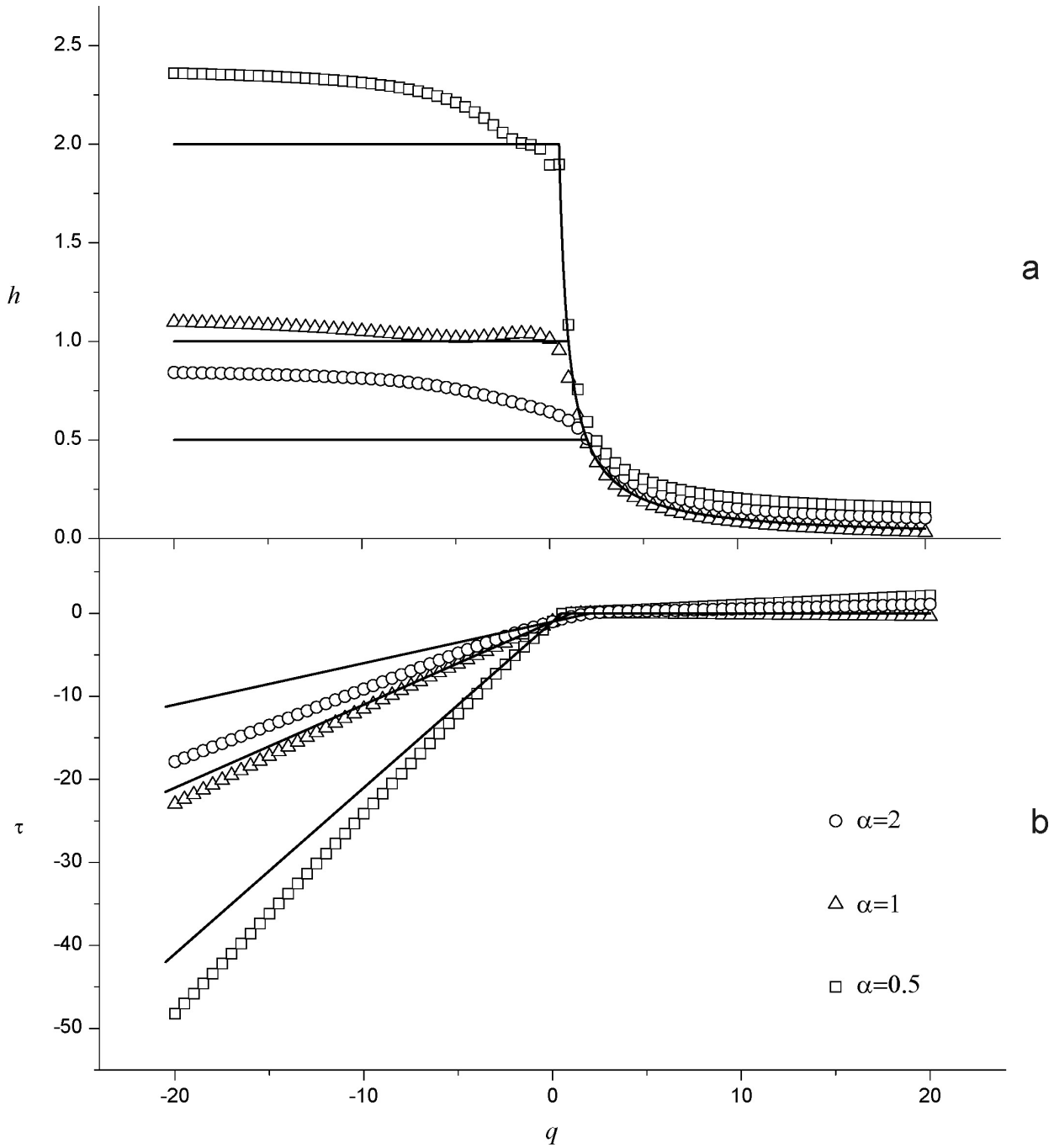


Рис. 5.6. Показатель Хёрста (а) и показатель масс (б) некоррелированного самоподобного ряда при различных показателях  $\alpha$ ; значения величин, отмеченные кружками, треугольниками и квадратиками, получены методом МФФА, сплошные линии — по формуле (5.40) (число членов ряда  $N = 2^{16}$ )

прогресс в исследовании сложных систем [17]. Финансовые рынки дают реальный пример таких систем, поскольку их поведение подвержено различного рода воздействиям микро- и макроскопической природы. Такие воздействия отражаются в случайных изменениях спроса и предложения на товары и услуги, финансовых ростах и кризисах, стихийных бедствиях и геополитических событиях, а также многом другом.

Основным методом описания экономических систем являются временные ряды, наиболее яркий пример которых представляют обменные курсы валют. Недавние исследования [200] показали, что отвечающие им временные ряды обладают мультифрактальным спектром, исследование которого достигается методом МФФА. В качестве примера такого ряда рассмотрим динамику изменения курса доллара США к российскому рублю (соответствующие данные могут быть найдены в архиве центрального банка РФ по адресу [www.cbr.ru](http://www.cbr.ru)).

Согласно принятой методике, колебания валютных котировок представляются временным рядом разницы логарифмов обменных курсов  $r(t) = \ln(P(t)) - \ln(P(t-1))$ , где  $P(t)$  — цена валюты в день  $t$ . На рис. 5.7 приведено изменение такой разницы с августа 1995 г. по май 2008 г. Характерная особенность приведенного графика состоит в наличии участка, обнаруживающего аномально большие изменения разности курса. Эти изменения отражают финансовый кризис, разразившийся в России осенью 1998 года, когда стоимость доллара многократно возросла в течение нескольких дней.

Следуя методу МФФА, рассмотрим влияние этого кризиса на мультифрактальные свойства временного ряда. С этой целью проведем отдельный анализ двух участков ряда, один из которых предшествует кризису, а другой следует за ним (период самого кризиса — с августа 1998 г. по июнь 1999 г. — следует исключить из рассмотрения как непредсказуемый). Из зависимостей,



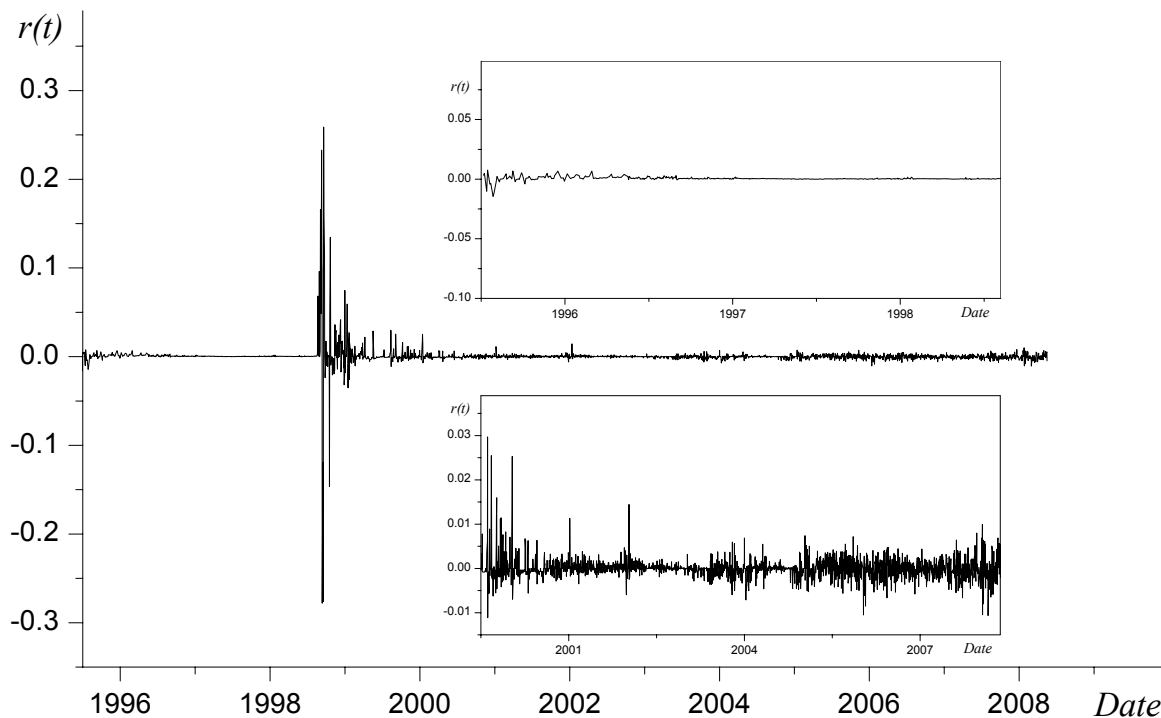


Рис. 5.7. Динамика изменения обменного курса доллара США к рублю РФ (верхняя вставка даёт увеличенный масштаб изменений до кризиса, нижняя — после)

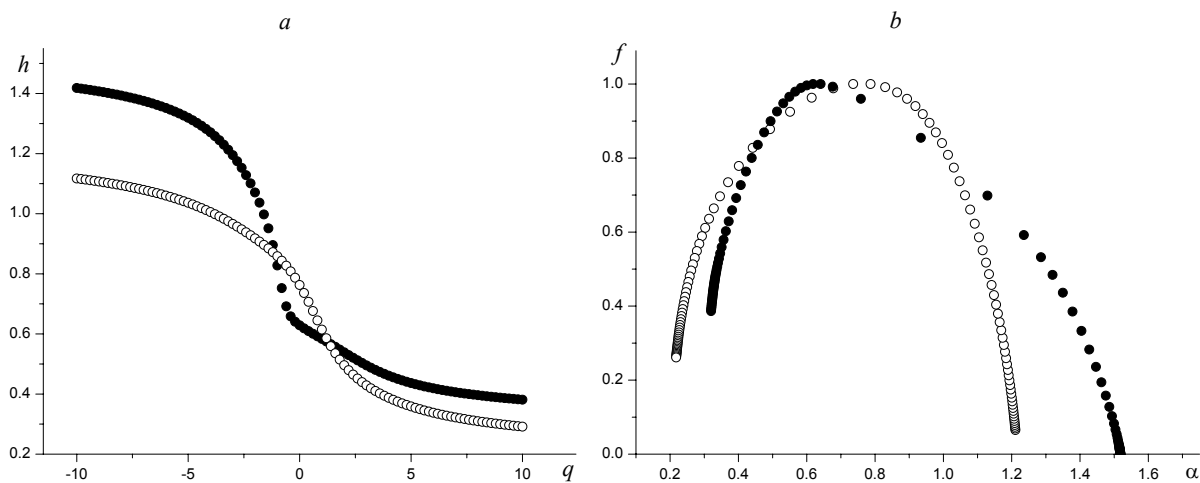


Рис. 5.8. Сравнение показателя Хёрста (а) и спектральной функции (b) для участков обменного курса доллар/рубль до (полые кружки) и после (жирные точки) кризиса

приведенных на рис. 5.8, видно, что вследствие кризиса спектральная функция  $f(\alpha)$  приобретает более широкий интервал  $\Delta\alpha$  изменения фрактальных размерностей: до кризиса  $\Delta\alpha \approx 0.99$ , а после  $\Delta\alpha \approx 1.2$ . Это свидетельствует о размытии мультифрактального спектра в результате подорожания валюты.

Более полное представления о влиянии финансового кризиса на статистические свойства временного ряда достигается исследованием корреляций на каждом из выделенных участков. С этой целью сравним спектр исходного ряда с его формой после того, как члены ряда были переставлены случайным образом. Очевидно, в отсутствие корреляций такое перемешивание не может сказаться на спектре мультифрактала, тогда как рэндомизация скоррелированного ряда должна существенно сузить его спектр. Из рис. 5.9а видно, что на участке, предшествующем кризису,

перемешивание ряда практически не изменяет ширину мультифрактального спектра:  $\Delta\alpha_{original} - \Delta\alpha_{shuffled} \approx -0.08$ , где  $\Delta\alpha_{original}$  и  $\Delta\alpha_{shuffled}$  означают ширину спектра для исходного и перемешанного рядов соответственно. Отсюда следует вывод, согласно которому в предкризисный период практически отсутствовали временные корреляции в изменении курса доллара, благодаря чему внешние факторы оказывали слабое влияние на его стоимость. Рис. 5.9б показывает, что перемешивание ряда после кризиса приводит к значительному уменьшению ширины мультифрактального спектра:  $\Delta\alpha_{original} - \Delta\alpha_{shuffled} \approx 0.48$ . Отсюда можно заключить, что в результате финансового кризиса временной ряд обменного курса становится сильно коррелированным, благодаря чему стоимость валюты приобретает чувствительность к изменению экономических, социальных, политических и прочих факторов.

Общий вывод проведенного исследования состоит в следующем: экономический кризис приводит к усилению мультифрактальных свойств временных рядов соответствующих показателей и появлению сильных корреляций в их изменении.

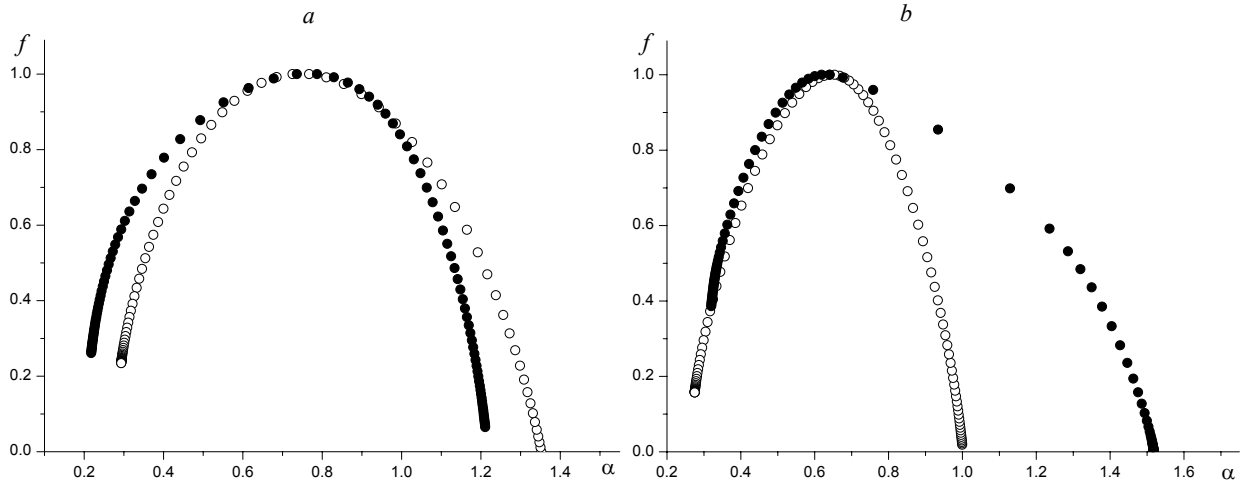


Рис. 5.9. Мультифрактальные спектры исходного (жирные точки) и перемешанного (полые кружки) рядов на участках временного ряда обменного курса доллара до (а) и после (б) кризиса, соответственно

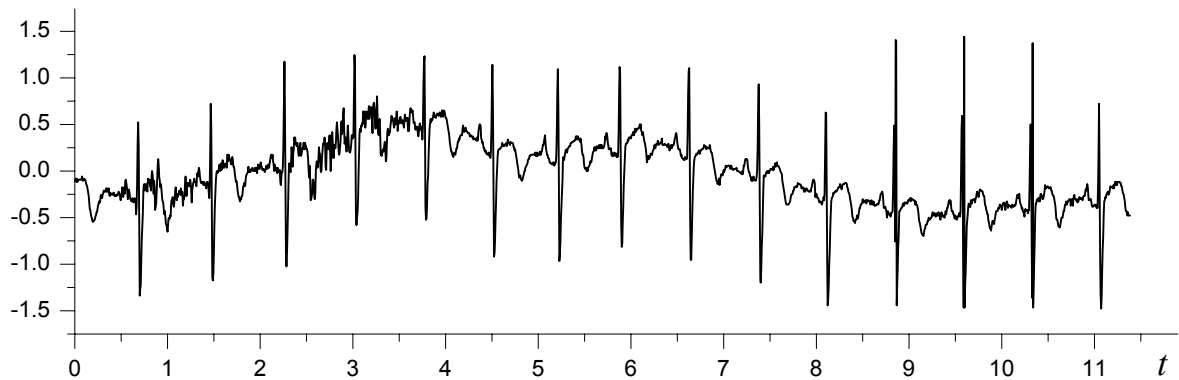


Рис. 5.10. Типичный вид электрокардиограммы сердца человека (по оси абсцисс отложено время в секундах, по оси ординат — сердечный ритм, измеренный в милливольтгах)

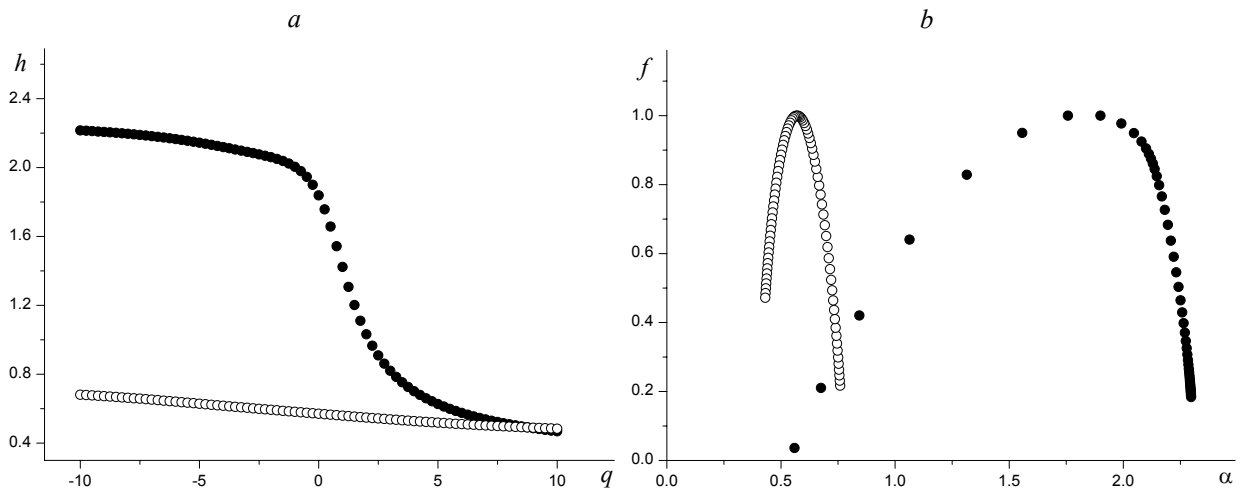


Рис. 5.11. Показатель Хёрста (а) и спектральная функция (б) электрокардиограммы, приведенной на рис. 5.10 (жирные точки), и для рандомизированного ряда (полые кружки)

5.2.4. Мультифрактальный спектр электрокардиограмм сердца. Рассмотрим биологические системы, для которых яркий пример проявления мультифрактальных свойств дают временные ряды электрокардиограмм сердца. Использование метода МФФА позволило установить связь между различными формами мультифрактальных спектров и группами сердечных патологий [201].

В качестве примера проанализируем типичную электрокардиограмму сердца человека, изображённую на рис. 5.10. Из рис. 5.11, на котором приведены соответствующие зависимости показателя Хёрста и показателя масс, видно, что электрокардиограмма проявляет ярко выраженную мультифрактальную природу. С другой стороны, перемешивание ряда, разрушает, как и выше, временные корреляции.

Таким образом, электрокардиограмма сердца даёт пример коррелированных временных рядов, присущих биологическим системам.

5.2.5. Мультифрактальный спектр аномальной диффузии. В предыдущих пунктах рассмотрены примеры временных рядов, взятые из экономики и медицины. В качестве физического приложения исследуем процесс аномальной

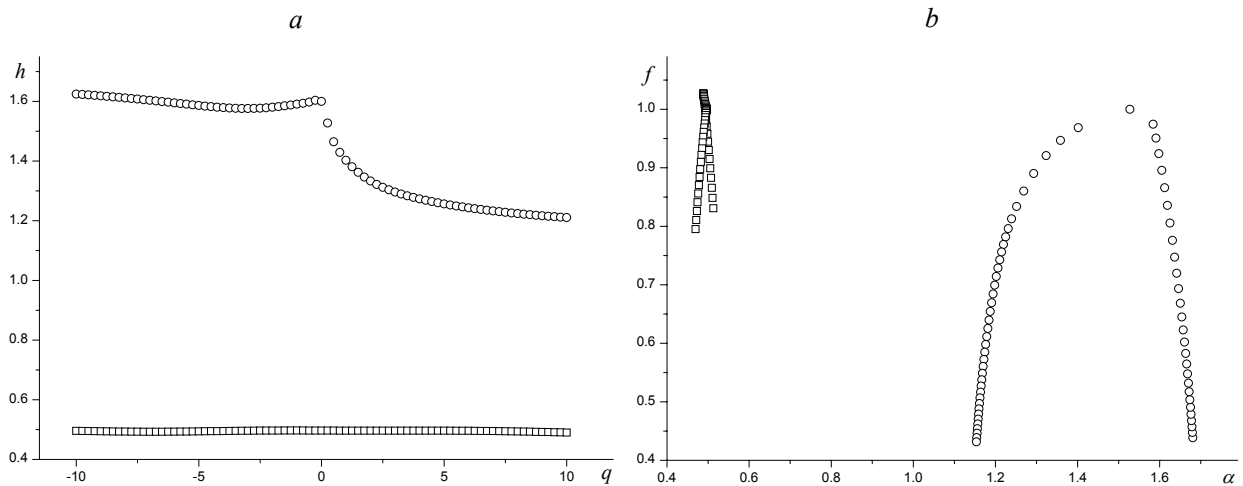


Рис. 5.12. Показатель Хёрста (а) и спектральная функция (б) для временного ряда, генерированного дискретным процессом (5.41) при  $\nu = -0.9$  (кружки) и  $\nu = 0.99$  (квадратики)

диффузии, в ходе которой исследуемый ряд представляется временной зависимостью  $x_i$  координаты частицы, диффундирующей согласно дискретному стохастическому уравнению [203]

$$x_{i+1} = \sqrt{\tau}\zeta_i + [(1 - \gamma\tau) + \sqrt{\tau}\xi_i] x_i. \quad (5.41)$$

Здесь время  $t_i = i\tau$  фиксируется набором чисел  $i = 0, 1, \dots, N$  и минимальным интервалом  $\tau$ ;  $\zeta_i$  и  $\xi_i$  — аддитивный и мультипликативный стохастические источники, нормированные условиями белого шума  $\langle \zeta_i \zeta_j \rangle = \langle \xi_i \xi_j \rangle = \delta_{ij}$ ; коэффициент трения  $\gamma$  задаёт параметр  $\nu = \gamma/(1 + \gamma)$ , значения которого определяют режим диффузии: при  $\nu < 0$  реализуются полёты Леви, а предел  $\nu \rightarrow 1, \gamma \rightarrow \infty$  отвечает броуновскому движению. Использование итерационной процедуры (5.41) на множестве, состоящем из  $N = 10^7$  точек, приводит к временному ряду, мультифрактальный спектр которого показан на рис. 5.12. Из него видно, что с увеличением параметра  $\nu$ , когда полёты Леви переходят в нормальную диффузию, спектр мультифрактала неограниченно сужается. Очевидно, это обусловлено тем, что с ростом  $\nu$  пропадают разреженные области

фрактального множества, отвечающие экстремальным выбросам положений частицы при полётах Леви.

5.2.6. Заключительные замечания. Как показывает проведенное рассмотрение, форма мультифрактального спектра даёт полное описание множества значений, принимаемых исследуемой переменной. С другой стороны, использование метода МФФА позволяет исследовать характер корреляций в изменении временного ряда. Наиболее ярко наличие таких корреляций проявилось при исследовании процесса аномальной диффузии в предыдущем пункте: бесконечный рост параметра  $\nu$  от отрицательных значений трансформирует полёты Леви, характеризуемые наличием корреляций в распределении положений частицы, в броуновскую диффузию, для которой распределение таких положений совершенно случайно [17]. Рис. 5.12 показывает, что указанная перестройка процесса диффузии приводит к постоянному значению  $h(q) = 1/2$  показателя Хёрста, что означает неограниченное сужение мультифрактального спектра.

Из пунктов 5.2.3 – 5.2.5 видно, что для выделения временных корреляций следует наряду со спектром исходного ряда исследовать мультифрактальные характеристики перемешанного ряда, члены которого переставлены в случайном порядке. Очевидно, такое перемешивание должно разрушать временные корреляции в распределении случайной величины, тогда как в некоррелированном ряде перестановка его членов не может сказаться на мультифрактальном спектре. Если броуновская диффузия даёт тривиальный пример ряда, который не обладает ни временными корреляциями, ни мультифрактальным спектром, то самоподобный ряд, исследованный в пункте 5.2.2, хотя и не коррелирован, но имеет широкий спектр (см. рис. 5.6). Очевидно, такой ряд представляет идеальный случай для тестирования метода перемешивания, позволяющего выделить временную корреляцию членов ряда. Из рис. 5.13а видно, что это перемешивание практически не сказывается на спектре самоподобного ряда, в котором корреляции отсутствуют по определению. В отличие от него перемешивание биномиального ряда (рис. 5.13б) существенно сужает мультифрактальный спектр и смещает его

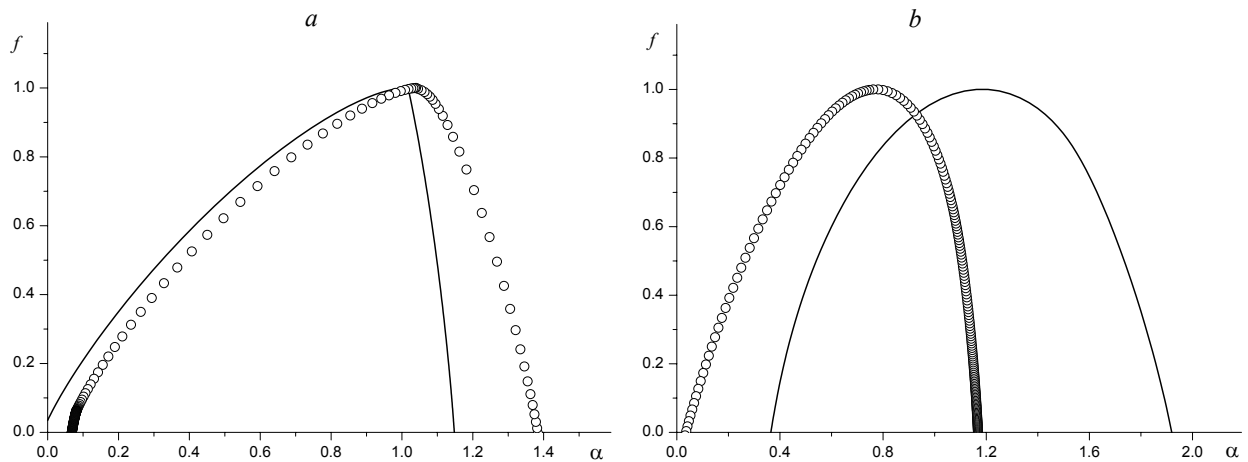


Рис. 5.13. Сравнение спектральных функций исходных (сплошные линии) и перемешанных (кружки) рядов: (а) самоподобный ( $\alpha = 1$ ,  $N = 2^{16}$ ); (б) биномиальный ( $p = 0.75$ ,  $n = 16$ )

в сторону малых значений  $\alpha$ . Таким образом, временные корреляции играют принципиальную роль в формировании биномиального ряда. Поскольку для него граничные значения фрактальной размерности  $\alpha_{\min} = -\ln p / \ln 2$  и  $\alpha_{\max} = -\ln(1 - p) / \ln 2$  определяются вероятностью  $p \geq 1/2$ , задающей значения ряда (5.36), то можно сделать следующий вывод: перемешивание биномиального ряда, смещающее мультифрактальный спектр к малым значениям  $\alpha$ , приводит к возрастанию вероятности  $p$  в сторону предельного значения  $p = 1$ .

В случае произвольного ряда форма мультифрактального спектра определяется двумя причинами [194]:

- некоррелированным разбросом случайной переменной, распределение которой характеризуется наличием расходящихся моментов;
- коррелированной последовательностью чередования членов временного ряда, характеризуемой конечными моментами.

Очевидно, при перемешивании ряда последняя из этих причин становится несущественной, в результате чего спектр сужается и смещается в сторону малых значений фрактальной размерности.

### 5.3. Мультифрактальный анализ рентгеновских дифрактограмм сложных конденсированных сред

Дифракция проникающего излучения представляет один из наиболее мощных методов анализа структуры конденсированных сред, не обладающих идеальным кристаллическим строением [204]. Обычно этот анализ основывается на исследовании положения и формы селективных пиков или диффузного фона рентгеновских дифрактограмм, представляющих зависимость интенсивности отраженного пучка от угла дифракции. Характерная особенность предлагаемого рассмотрения состоит в том, что исследуется довольно сложный объект биологического типа, дифрактограмма которого имеет диффузный фон, обладающий фрактальными свойствами. Такие свойства наиболее ярко проявляются в поведении временных рядов, рассмотрению которых посвящён предыдущий пункт. Проведенное там рассмотрение показало, что основой статистического анализа временных рядов является метод мультифрактального флуктуационного анализа (МФФА) [194]. Его использование позволило описать мультифрактальные спектры временных рядов в экономике, медицине и физике. Таким образом, можно заключить, что метод МФФА является перспективным инструментом исследования поведения сложных систем.

Вместе с тем этот метод не нашел должного применения при обработке данных рентгеновской дифракции, используемых при исследовании структуры конденсированной среды. Очевидная причина такой ситуации состоит в том, что при исследовании объектов со слабым нарушением кристаллического строения нерегулярные изменения рентгенограмм имеют, как правило, аппаратное происхождение (ошибка эксперимента, случайные изменения окружающих условий и т.д.). Совершенно иная ситуация складывается при исследовании конденсированных систем, обладающих сложной структурой, наличие которой, как будет показано ниже, обуславливает фрактальное строение диффузного фона кривых рентгеновской микродифракции.



В качестве системы указанного типа мы используем биоматериал на основе хитозан-апатита, отожжённый при различных температурах. При этом роль временного ряда играет зависимость интенсивности отраженного пучка от двойного угла дифракции, изменяющегося от 10 до 90 градусов с шагом 0.03. Фрактальная структура такого ряда исследована в рамках метода МФФА, результаты которого позволяют сделать заключение о чувствительности мультифрактального спектра к строению конденсированной среды, обладающей сложной структурой.

Экспериментальные данные приведены в пункте 5.3.1, результаты исследования мультифрактального спектра кривых рентгеновской дифракции содержатся в пункте 5.3.2. Обсуждению полученных результатов посвящён заключительный пункт 5.3.3.

5.3.1. Экспериментальные данные. Интерес к биологическим материалам, основой которых являются хитозан и апатит кальция  $\text{Ca}_{10}(\text{PO}_4)_6(\text{OH})_2$ , обусловлен хорошей совместимостью ингредиентов, высокими механическими свойствами, а также дешевизной и простотой получения. Структурно такие материалы подобны природной костной ткани, где эластичной матрицей является фибриллярный белок коллаген, а жесткий каркас формируется нанокристаллами биогенного апатита [205]. В хитозан-апатитных композитах функции коллагена выполняют высокомолекулярные цепочки природного полисахарида — хитозана, а армирующей основой служит синтетический апатит. Хитозан представляет простейшую производную хитина и образуется путём его деацетилирования. В свою очередь, хитин является широко распространённым в природе полисахаридом, представляющим основу скелетной системы в панцирях ракообразных, кутикуле насекомых, клеточной стенке грибов и бактерий. Химическое осаждение гидроксилapatита  $\text{Ca}_{10}(\text{PO}_4)_6(\text{OH})_2$  в растворе хитозана приводит к образованию композитных материалов, исследование структурных и концентрационных характеристик которых достигается методами рентгеновской дифракции, инфракрасной спектроскопии, электронной микроскопии и т.д.

Поскольку в исследуемом композите апатит является нанокристаллическим объектом, то определение его структурных характеристик представляет весьма сложную задачу. Различные структурные состояния исследуемых образцов фиксируются отжигами при характерных температурах. Сравнение данных таких исследований для материалов с разным соотношением хитозана и апатита, а также с результатами испытаний для синтетического и биогенного апатита позволяет выявить особенности взаимодействия органической и минеральной составляющей биологических композитов.

Исследования проводились на дифрактометре ДРОН-4 в режиме отражения (геометрия Брэгга-Брентано) с использованием  $\text{Cu-K}\alpha$  излучения с длиной волны  $1.5418 \text{ \AA}$  (никелевый  $\beta$ -фильтр). Численный анализ на основе метода МФФА выполнен на серии образцов, полученных отжигом композиционного биоматериала хитозан-апатит при температурах 80, 400, 700 и 900°C в течение 1 часа. В результате получены рентгенограммы, приведенные на рис. 5.14.

Из рис. 5.14а видно, что при температуре 80°C исходный композит содержит слабо выраженную кристаллическую фазу апатита. Оценки ширины профиля основных дифракционных линий указывают на то, что кристаллиты апатита имеют размеры порядка 20 нм, сравнимые с размерами, полученными для биологического апатита костной ткани. При повышении температуры отжига в кристаллической фазе апатита происходят конкурирующие процессы рекристаллизации и фазового распада. Данные, приведенные на рис. 5.14b – 5.14d, показывают, что при отжиге 400 и 700°C превалирует первый процесс, а при 900°C появляется кристаллическая фаза трикальций-фосфата  $\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$ , рост которой происходит за счёт апатита.

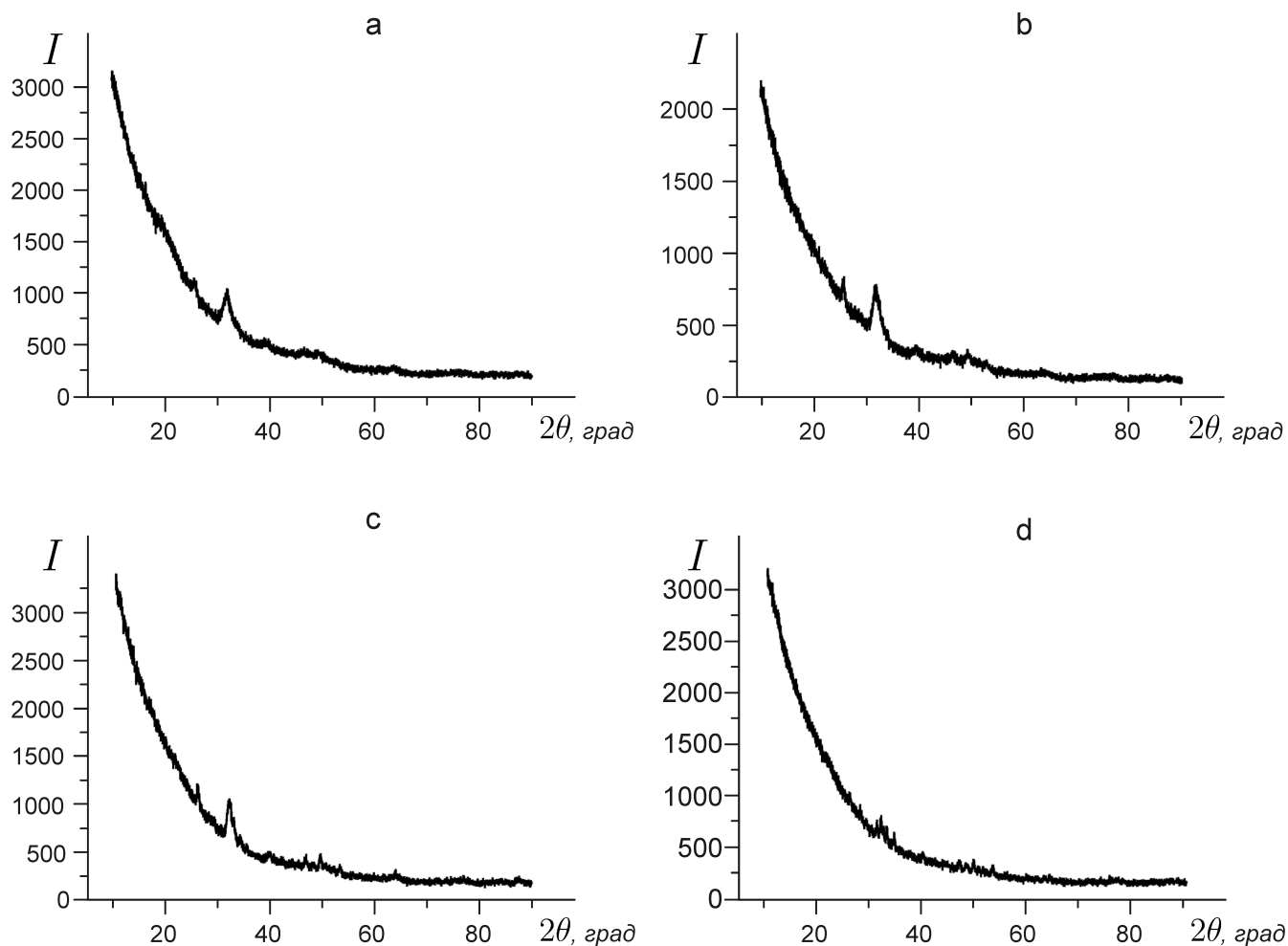


Рис. 5.14. Рентгенограммы композиционного биоматериала на основе хитозан-апатита: (a) – исходный образец, (b), (c) и (d) – отожжённые при 400, 700 и 900°C соответственно (по оси абсцисс отложен удвоенный угол дифракции, ордината отвечает интенсивности дифрагированного пучка в относительных единицах)

5.3.2. Мультифрактальный анализ экспериментальных данных. Использование метода МФФА, изложенного в пункте 5.2.1, приводит к обобщённому показателю Хёрста и мультифрактальному спектру, зависимости  $h(q)$  и  $f(\alpha)$  которых от параметра деформации  $q$  и фрактальной размерности  $\alpha$  показаны на рис. 5.15 при различных температурах отжига. Из этих зависимостей видно, все рентгенограммы проявляют мультифрактальное поведение, наиболее ярко выраженное при температуре отжига  $700^\circ\text{C}$ , когда диапазон изменения показателя Хёрста составляет  $\Delta h \approx 2.59$ , а интервал разброса фрактальных размерностей равен  $\Delta\alpha \approx 1.62$ . При других температурах отжига указанные интервалы принимают значения, показанные на рис. 5.16. Из него видно, что с ростом температуры интервалы изменения показателя Хёрста  $\Delta h$  и фрактальной размерности  $\Delta\alpha$  сначала возрастают, а при  $T > 700^\circ\text{C}$  спадают. Причиной такого поведения является образование кристаллической фазы трикальций-фосфата  $\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$ , появление которой подтверждается расположением селективных пиков на дифрактограммах, показанных на рис. 5.14.

5.3.3. Обсуждение результатов. Проведенное рассмотрение показывает, что в исследуемой системе кристаллографическое фазовое превращение сопровождается существенным усложнением макроструктуры. На кривых рентгеновской дифракции первое из указанных обстоятельств проявляется в изменении числа и положений селективных максимумов, а второе — в изменении самоподобной структуры диффузного фона. Это связано с тем, что фазовое превращение обеспечивается изменением кристаллической структуры на микроскопических расстояниях, а её усложнение на макроскопических масштабах обусловлено нетривиальным распределением выделений новой и старой фаз.

Поскольку не всякие хаотические изменения являются самоподобными, то для подтверждения фрактального строения рентгеновских кривых было проведено детальное исследование фоновой составляющей при температуре отжига  $700^\circ\text{C}$ , которая обеспечивает наиболее сильное проявление мультифрактальных свойств. Как видно из рис. 5.17а, с этой целью на исходной кривой 1 выделялась

плавная фоновая компонента (тренд), после вычета которой получается кривая 2, содержащая как флуктуационную составляющую, так и селективные пики; затем при неизменной форме этих пиков проводится перемешивание флуктуаций, приводящее кривую 2 к виду 3; в заключение определяются мультифрактальные спектры дифракционных линий, содержащих исходную и перемешанную диффузные составляющие. Как видно из рис. 5.17b, указанное перемешивание приводит к существенному сужению мультифрактального спектра. Поскольку перемешивание устраняет дальние корреляции в распределении членов ряда, обусловленных его самоподобной структурой, [194] то можно сделать вывод о фрактальном строении кривых рентгеновской дифракции исследованных материалов. Разумеется, такое строение должно проявляться в процессе структурных превращений других конденсированных систем.

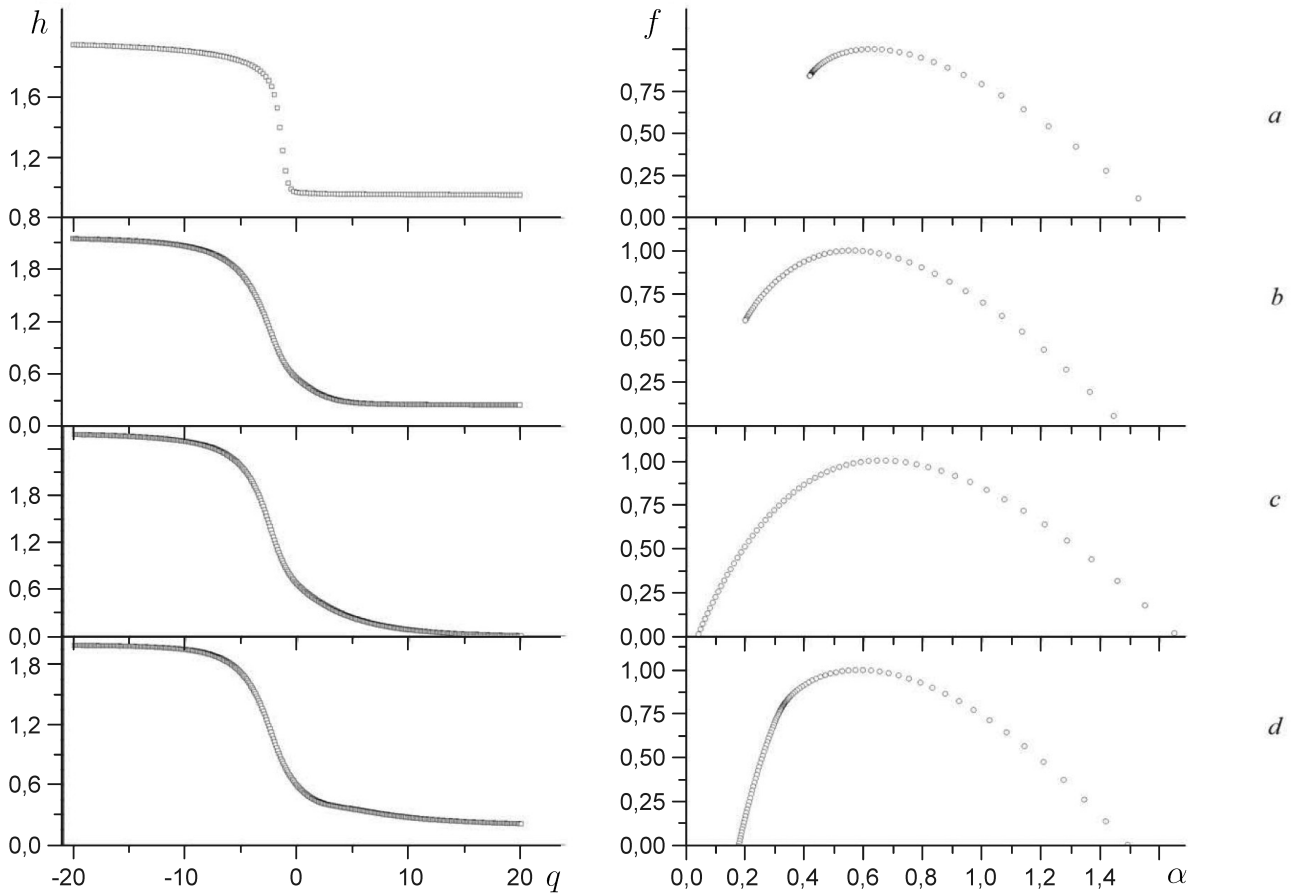


Рис. 5.15. Показатель Хёрста (слева) и мультифрактальный спектр (справа), найденные методом МФФА для рентгенограмм, приведенных на рис. 5.14 ((a), (b), (c) и (d) отвечают исходному образцу и отождженным при 400, 700 и 900°C) соответственно

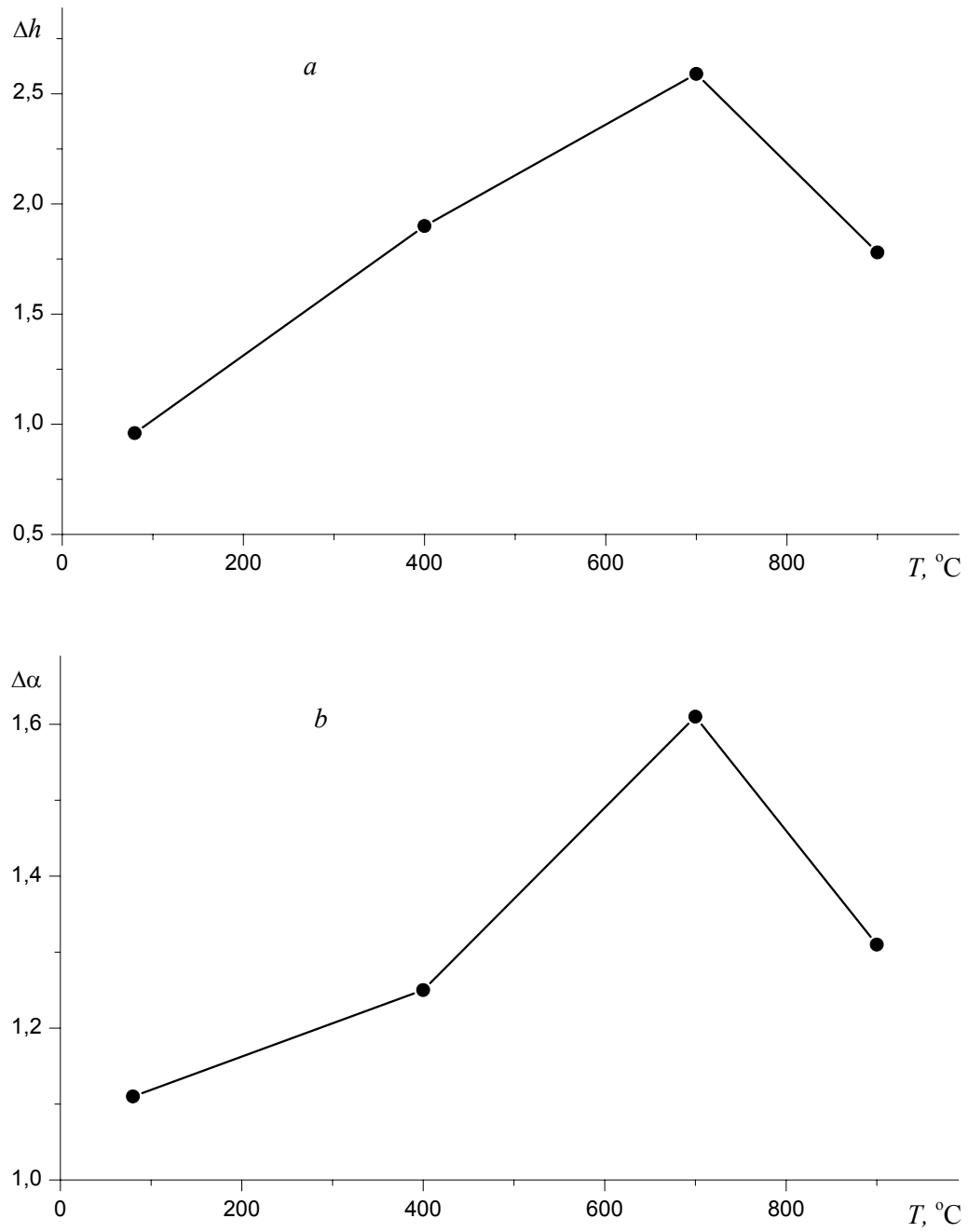


Рис. 5.16. Интервалы изменения показателя Хёрста (а) и фрактальных размерностей (b) при различных температурах отжига

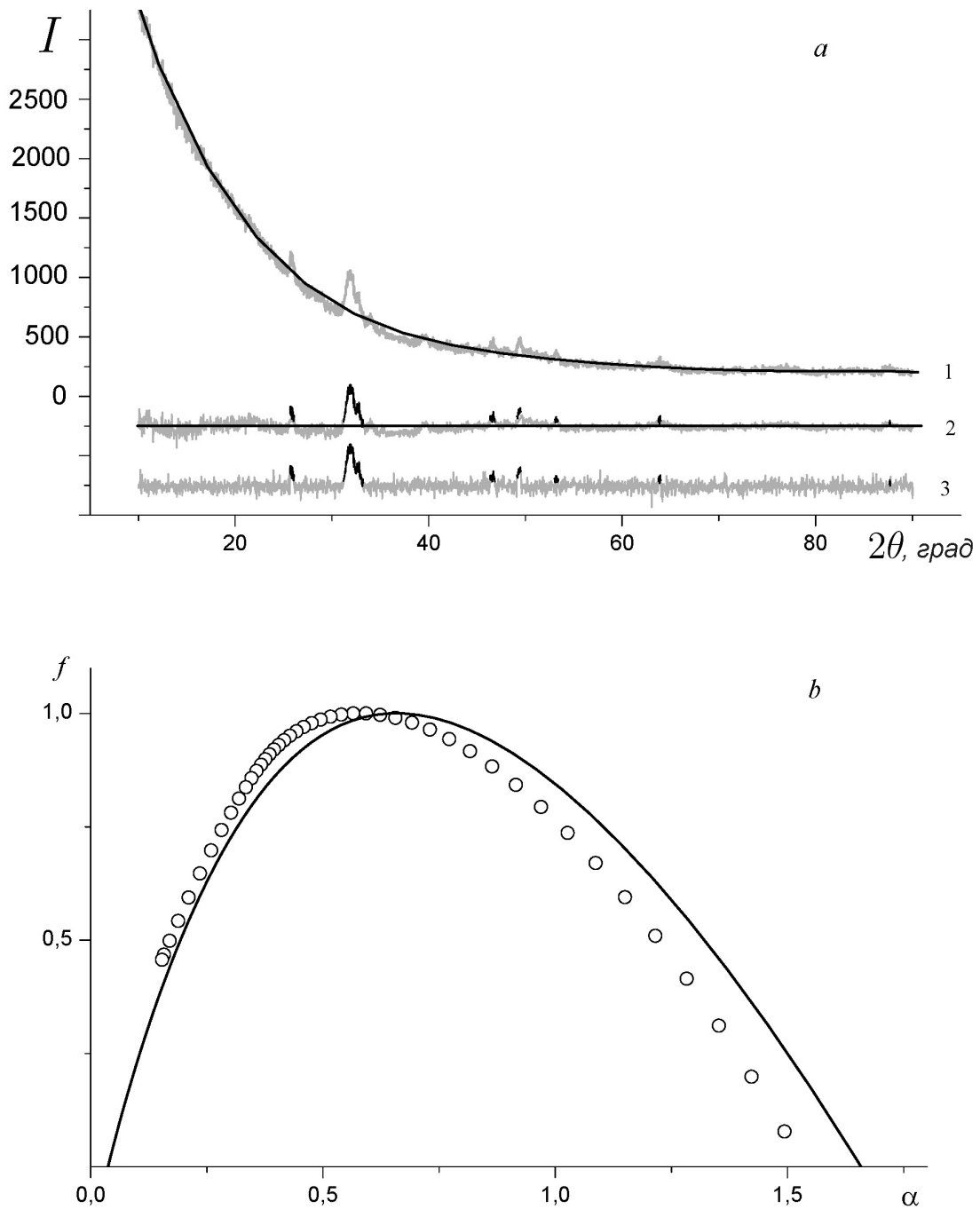


Рис. 5.17. (а) Выделение и последующее перемешивание флуктуационной составляющей (серый цвет) на рентгенограмме композиционного биоматериала, отожженного при  $700^{\circ}\text{C}$ : на кривых 1 жирная линия отвечает нефлуктуирующему фону (тренду) исходной линии, серая кривая 2 отсчитана от этого фона и выделены селективные максимумы, на кривой 3 проведена случайная перестановка флуктуационных выбросов, не затрагивающая максимумы, выделенные жирными линиями; (б) мультифрактальный спектр, отвечающий флуктуационной линии 2 (сплошная кривая) и перемешанным флуктуациям 3 (полые кружки).



#### 5.4. Исследование мультифрактальных поверхностей конденсатов, полученных методом магнетронного распыления

В современной физике конденсированной среды принято разделять системы на простые и сложные: так, вода в различных агрегатных состояниях является простым объектом, а стекло — сложным. Это связано с тем, что для статистического описания в первом случае достаточно использовать единое пространство состояний, тогда как во втором оно разделено на бесконечное множество слабо связанных областей, которые выстраиваются самоподобным образом. В результате образуется геометрический объект, обладающий дробной размерностью, не превышающей её значение для всего пространства состояний. Такой объект называется фракталом.

Фрактальные объекты получили широкое распространение во многих областях естественных наук. Наиболее наглядными и простыми являются детерминистические фракталы типа пыли Кантора, кривой Коха, ковров и салфеток Серпинского и других геометрических объектов [80]. Пример стохастических фракталов дают самоподобные временные ряды, представляющие последовательности данных измерений в метеорологии, экономике, медицине, физике и других экспериментальных науках [197] — [202]. Среди естественных фракталов можно выделить некоторые виды облаков, хлопья снега, сильно изрезанные береговые линии материков, вспышки молнии и т.п.

Настоящий подраздел посвящён исследованию фрактальной структуры естественных *многомерных объектов*, представляющих высокопористые конденсаты, полученные на основе оригинальной методики магнетронного распыления [206] — [209]. Особенность этих объектов состоит в том, что их описание требует использования не одной фрактальной размерности, а их спектра, который представляет основной атрибут мультифрактала [80]. Стандартная процедура определения фрактальной размерности самоподобных объектов основывается на использовании метода покрытий. Хотя этот метод

допускает обобщение на многомерные объекты, его использование затруднено существенным усложнением численной обработки данных, представляющих многомерные мультифракталы. В связи с этим в последнее время был разработан [194] метод мультифрактального флуктуационного анализа (МФФА), дающий полное описание временного ряда в рамках простой численной процедуры. Последующая оптимизация метода МФФА позволила провести анализ многомерных мультифрактальных множеств [210].

В рамках двумерного МФФА мы проводим далее исследование фрактальных конденсатов титана, алюминия и углерода, полученных методом магнетронного распыления. В пункте 5.4.1 излагается алгоритм оптимизированного метода МФФА, тестирование которого проводится в пункте 5.4.2 для модели, допускающей аналитическое рассмотрение. Пункт 5.4.3 посвящён описанию методики получения исследуемых образцов, в пункте 5.4.4 проводится их мультифрактальный анализ.

5.4.1. Описание метода. Следуя [202], представим самоафинную поверхность двумерным массивом  $X(m, n)$ , где дискретные аргументы  $m, n$  пробегает значения  $m = 1, 2, \dots, M$  и  $n = 1, 2, \dots, N$ . После этого исследуемая поверхность разбивается на  $M_s \times N_s$  непересекающихся квадратных сегментов размером  $s \times s$ , где числа  $M_s = [M/s]$  и  $N_s = [N/s]$  представляют целые части, полученные после деления интервалов изменения аргументов  $m, n$  на сегменты. Отмечая значения исследуемой функции в каждом из них индексами  $v, \omega$ , представляем  $X(m, n)$  последовательностью  $X_{v,\omega}(i, j) = X(l_1 + i, l_2 + j)$ , где аргументы  $1 \leq i, j \leq s$  изменяются в сегменте, определённом числами  $l_1 = (v - 1)s$  и  $l_2 = (\omega - 1)s$ . Далее для каждого из сегментов вычисляем кумулятивную сумму

$$u_{v\omega}(i, j) = \sum_{k_1=1}^i \sum_{k_2=1}^j X_{v\omega}(k_1, k_2), \quad (5.42)$$

в которой  $1 \leq i, j \leq s$ . С геометрической точки зрения зависимость  $u_{v\omega}(i, j)$  определяет фрактальную поверхность.

Как и в случае временных рядов, нерегулярную функцию  $u_{v\omega}(i, j)$  следует отсчитывать от гладкой поверхности  $\tilde{u}_{v\omega}(i, j)$ , которая учитывает тенденцию в изменении исходной функции  $u_{v\omega}(i, j)$  и называется трендом. Мы используем простейший вариант

$$\tilde{u}_{v\omega}(i, j) = ai + bj + c, \quad (5.43)$$

где коэффициенты  $a, b, c$  определяются методом наименьших квадратов. При интерполяции тренда можно использовать и более сложные функции  $\tilde{u}_{v\omega}(i, j)$ , однако это лишь незначительно улучшает точность за счёт существенных затрат машинного времени [210]. Учёт тренда приводит к остаточной матрице

$$\varepsilon_{v\omega}(i, j) = u_{v\omega}(i, j) - \tilde{u}_{v\omega}(i, j), \quad (5.44)$$

использование которой даёт удельную дисперсию сегмента

$$F_{v\omega}^2(s) = \frac{1}{s^2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \varepsilon_{v\omega}^2(i, j). \quad (5.45)$$

Усреднение по всем сегментам приводит к полной дисперсии

$$F_q(s) = \left\{ \frac{1}{M_s N_s} \sum_{v=1}^{M_s} \sum_{\omega=1}^{N_s} [F_{v\omega}(s)]^q \right\}^{1/q}, \quad (5.46)$$

деформированной параметром  $q$ , изменение которого ограничено действительными значениями. Согласно (5.46), отрицательные значения  $q$  усиливают вклад сегментов, отвечающих малым флуктуациям, а положительные выделяют большие

значения  $F_{v\omega}(s)$ . При  $q = 0$  определение (5.46) следует заменить выражением

$$F_0(s) = \exp \left\{ \frac{1}{M_s N_s} \sum_{v=1}^{M_s} \sum_{\omega=1}^{N_s} \ln [F_{v\omega}(s)] \right\}. \quad (5.47)$$

Для получения статистически достоверных данных следует изменять значение  $s$  в пределах от  $s_{\min} \approx 6$  до  $s_{\max} \approx \min(M, N)/4$ . Для самоподобных множеств это приводит к скейлинговому соотношению

$$F_q(s) \sim s^{h(q)}, \quad (5.48)$$

где  $h(q)$  — обобщённый показатель Хёрста. В двойных логарифмических координатах зависимость (5.48) представляется прямой линией, наклон которой даёт показатель  $h(q)$  при различных значениях параметра  $q$ . По найденной зависимости определяется показатель масс

$$\tau(q) = qh(q) - D, \quad (5.49)$$

где  $D$  — топологическая размерность пространства, содержащего исследуемый объект (для поверхности  $D = 2$ ). Мультифрактальный спектр  $f(\alpha)$  определяется преобразованием Лежандра

$$f(\alpha) = q\alpha - \tau(q), \quad \alpha = \frac{d\tau}{dq}. \quad (5.50)$$

Равенства (5.49), (5.50) дают полный набор мультифрактальных характеристик, описывающих самоподобные объекты [80].

5.4.2. Тестирование метода двумерного МФФА. Для синтеза двумерного фрактала с аналитической зависимостью показателя масс  $\tau(q)$  используем каскадный мультипликативный процесс, состоящий в том, что на начальном этапе выбирается квадрат, разделяемый затем на четыре равные части, каждой

из которых присваиваются вероятности  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  и  $p_4$ . Далее каждый субквадрат опять разбивается на четыре равные части, которым приписываются те же вероятности. После повторения такой процедуры  $n$  раз, получается мультифрактальная поверхность, определённая в  $2^n \times 2^n$  точках и обладающая самоподобным распределением вероятности. Для такой поверхности функция  $\tau(q)$  определяется выражением [210]

$$\tau(q) = -\log_2 (p_1^q + p_2^q + p_3^q + p_4^q). \quad (5.51)$$

Мы использовали каскад, состоящий из  $n = 8$  уровней, число которых обеспечивает надёжное моделирование фрактала, не приводя к большим вычислительным затратам. Вероятностям придавались значения  $p_1 = 0.05$ ,  $p_2 = 0.15$ ,  $p_3 = 0.2$  и  $p_4 = 0.6$ . Из зависимостей дисперсии (5.46), представленных на рис. 5.18а в двойных логарифмических осях, видно, что они имеют хорошо выраженный линейный вид. В свою очередь, рис. 5.18б показывает, что показатель масс  $\tau(q)$ , определённый по этим зависимостям с использованием равенств (5.48) – (5.50), надёжно воспроизводит равенство (5.51). Таким образом, можно заключить, что использованный алгоритм многомерного МФФА хорошо согласуется с моделью, допускающей аналитическое рассмотрение, и его можно применять к исследованию реальных фрактальных поверхностей.

5.4.3. Исследуемые покрытия. Наша цель состоит в исследовании электронно-микроскопических изображений тонких пленок углерода, алюминия и титана. Все конденсаты были получены с использованием накопительной ионно-плазменной системы, обеспечивающей условия стационарной квазиравновесной конденсации. Основой распылительного устройства является планарный магнетрон на постоянном токе,

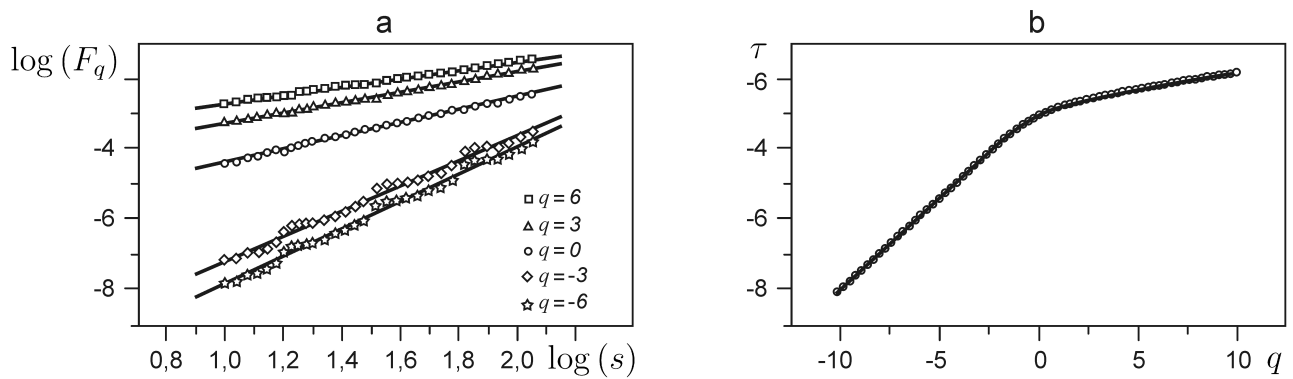


Рис. 5.18. (а) Зависимость дисперсии (5.48) модельной фрактальной поверхности от масштаба  $s$  при различных значениях  $q$  (сплошные линии отвечают интерполяции методом наименьших квадратов); (б) сравнение численных значений показателя масс (указаны кружками) с аналитической зависимостью (5.51) (сплошная линия)

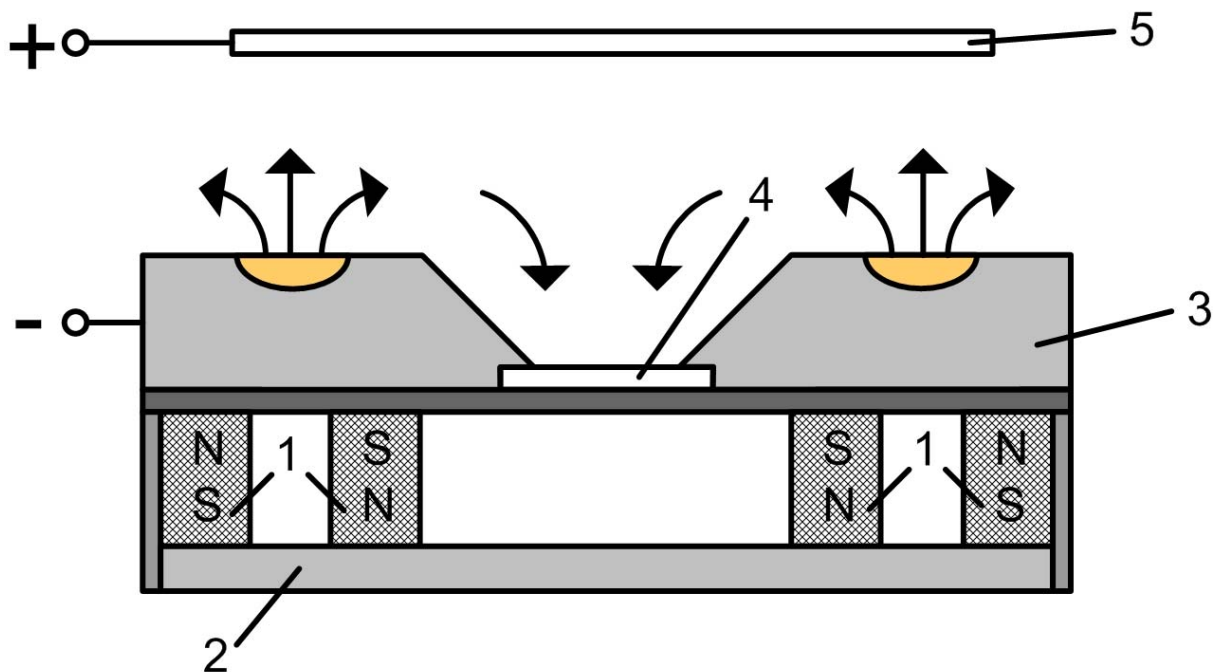


Рис. 5.19. Накопительная ионно-плазменная система: 1 — постоянный магнит, 2 — охлаждаемый магнитопровод, 3 — мишень, 4 — подложка с напыляемым конденсатом, 5 — анод

совмещенный с полым катодом. Согласно рис. 5.19, устройство состоит из одной или нескольких секций постоянного магнита 1, охлаждаемого магнитопровода 2 и мишени 3, которая совместно с подложкой 4 является катодом (роль анода 5 играет корпус камеры). Углубление в центре мишени, представляющее полый катод, усиливает электрическое поле, способствуя локализации плазмы и распыленного вещества непосредственно около ростовой поверхности. Напыление конденсатов выполняется в инертной среде аргона при различных параметрах и временах конденсации.

Благодаря многократным соударениям распыляемых частиц с атомами рабочего газа их энергия спадает до такой степени, что происходит локализация плазмы вблизи ростовой поверхности и реализуются квазиравновесные условия конденсации. Это означает, что атомы конденсируемого вещества либо десорбируются в процессе миграции по ростовой поверхности, либо попадают в ловушки, образуя с подложкой прочную химическую связь. Благодаря этому процесс конденсации обеспечивается поатомной сборкой осаждаемого вещества, в результате которой образуются различные, в том числе и фрактальные структуры.

В качестве подложек использовались кристаллы KCl, сколотые по плоскости (001), и стекло, обладающее аморфной структурой. При использовании подложек KCl на ростовой поверхности образуются анионные вакансии  $Cl^-$ , наличие которых существенно облегчает зарождение конденсата. На стеклянных подложках ростовая поверхность остаётся атомарно гладкой, и зарождение конденсата происходит по гомогенному механизму.

Так, углерод осаждался на охлаждаемые стеклянные подложки в течении 10 час. 15 мин. при давлении рабочего газа 10 Па, токе разряда 70 мА (в течение эксперимента наблюдалось увеличение напряжения, приложенного к магнетрону, с 470 В до 570 В). В результате получают электронно-микроскопические изображения, вид которых при различных масштабах увеличения показан на рис. 5.20.

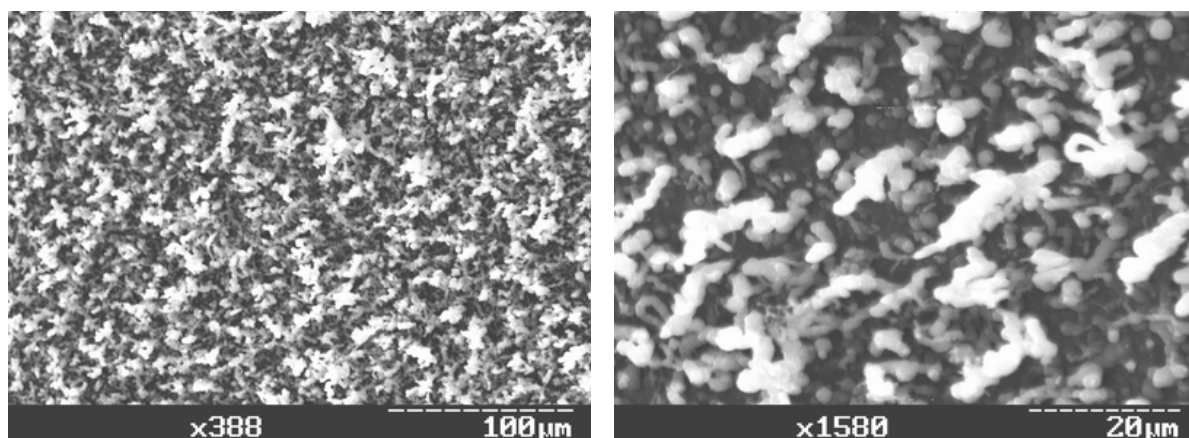


Рис. 5.20. Изображения конденсата углерода при различных масштабах увеличения

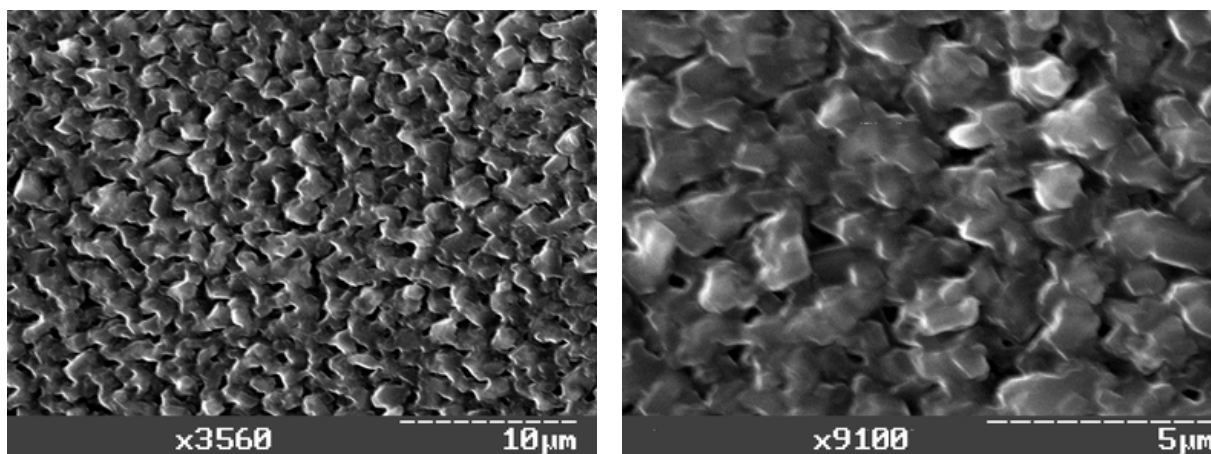


Рис. 5.21. Конденсат алюминия при различных масштабах увеличения

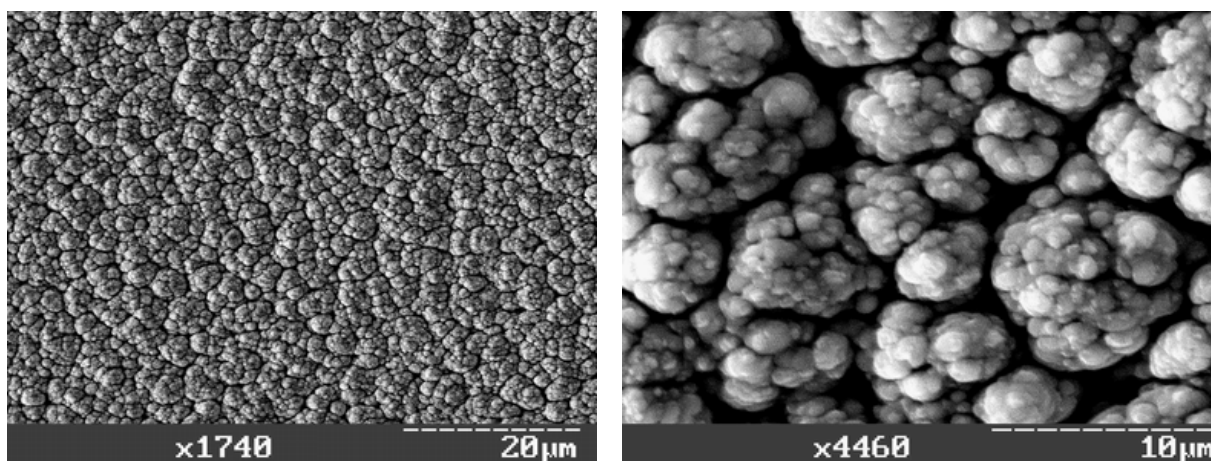


Рис. 5.22. Изображения конденсатов титана



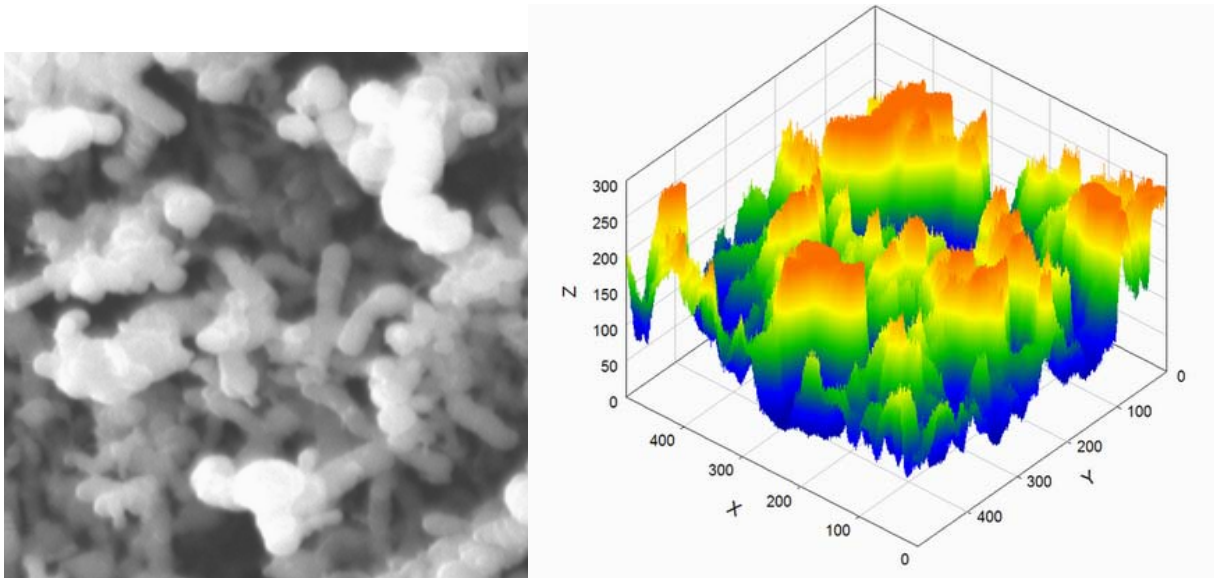


Рис. 5.23. Слева — участок электронно-микроскопического изображения конденсата углерода; справа — поверхность, отвечающая численной модели

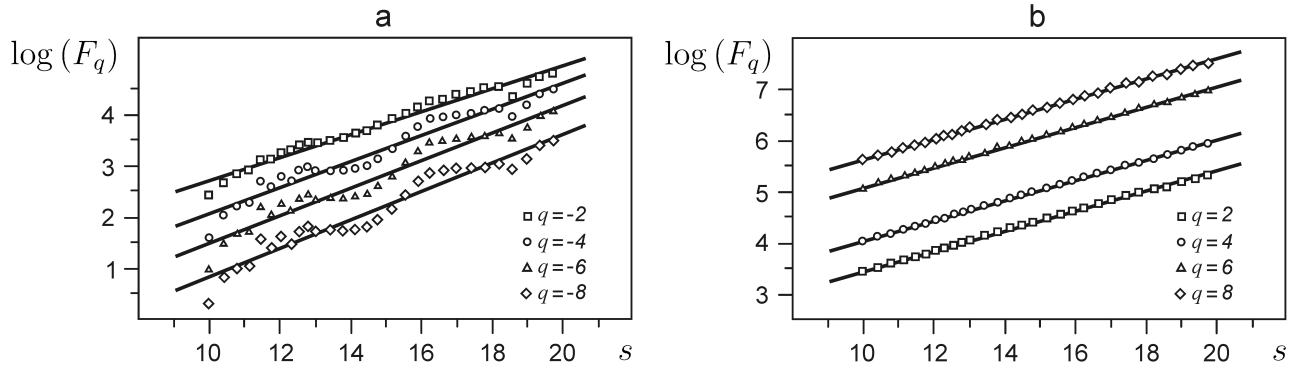


Рис. 5.24. Зависимость дисперсии (5.46) от масштаба  $s$  для конденсата углерода, увеличенного в 1900 раз: (а) отрицательные  $q$ ; (б) положительные  $q$

Образец алюминия получен при давлениях 6 – 8 Па и токах 50 – 56 мА. При этом напряжение разряда оставалось неизменным на протяжении всего эксперимента (8 часов) и составляло 194 В. Напыление проводилось на подложку, представляющую скол хлорида калия по атомной плоскости (001). Получающиеся изображения конденсатов алюминия показаны на рис. 5.21.

Конденсация титана проводилась на стеклянную неохлаждаемую подложку в течение 60 часов при уменьшении давления от 20 Па до 3.4 Па и росте тока от 43 мА до 60 мА. При этом напряжение возрастало от 154 В до 185 В. Вид получающихся изображений показан на рис. 5.22.

Согласно методике [210], каждому изображению сопоставляется численная модель, в рамках которой номера пикселей, представляющих двумерный массив размером  $600 \times 600$ , определяют координаты точек изображения, а его яркость задаётся по шкале из 256 значений. Пример участка фотографии и соответствующей ему поверхности приведен на рис. 5.23.

5.4.4. Результаты двумерного МФФА. Использование двумерного МФФА, представленного в пункте 5.4.1, показывает, что во всех случаях реализуется самоподобное поведение, отвечающее соотношению (5.48). На рис. 5.24 для конденсата углерода, изображение которого увеличено в 1900 раз, приведена зависимость дисперсии (5.46) от масштаба  $s$ , построенная в двойных логарифмических координатах (рис. 5.24а отвечает отрицательным, а рис. 5.24б положительным значениям параметра  $q$ ).

Из приведенных графиков видно, что для положительных значений  $q$  линейный вид зависимости (5.48) выражен более явно, чем для отрицательных, причём такая ситуация характерна для всех исследуемых образцов. Так, для  $q > 0$  коэффициент корреляции с линейной интерполяцией составляет  $R \geq 0.999$ , тогда как при отрицательных  $q$  имеем  $R \approx 0.91 \div 0.99$ . Следует отметить, что использование таких методов мультифрактального анализа как методы покрытий и множителей при  $q < 0$  невозможно в принципе. С физической точки зрения понижение точности МФФА при отрицательных значениях  $q$  обусловлено

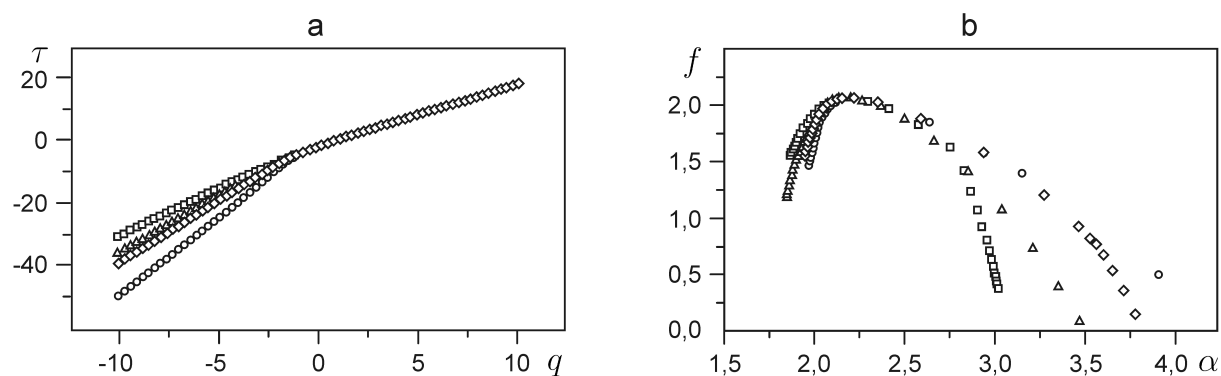


Рис. 5.25. Зависимость показателя масс (а) и мультифрактального спектра (b) для конденсатов углерода (различные символы отвечают разным масштабам увеличения: треугольник – 383, квадрат – 585, ромб – 1580 и окружность – 1910 раз)

неадекватной оценкой мелких деталей изображения, которые в свою очередь могут быть связаны с аппаратными ошибками (различные шумы при получении конденсатов и их изображений).

Использование двумерного МФФА приводит к показателям масс и мультифрактальным спектрам конденсатов углерода, которые показаны на рис. 5.25 при различных увеличениях, а на рис. 5.26 – для разных участков образца при постоянном увеличении. Из этих зависимостей видно, что в области  $q > 0$ , которая отвечает левой части зависимости  $f(\alpha)$ , ошибка метода минимальна – здесь изменение масштаба увеличения и различный выбор участков конденсата мало сказываются на величине показателя масс и мультифрактальном спектре. Это подтверждает самоподобие структуры конденсатов углерода. Рис. 5.27 указывают, что фрактальной структурой обладают также конденсаты алюминия (рис. 5.27а) и титана (рис. 5.27b).

Проведенное рассмотрение показывает, что конденсаты углерода, алюминия и титана, полученные методом магнетронного распыления, обладают самоподобной структурой, которая проявляется как при различных масштабах увеличения, так и на разных участках электронно-микроскопических

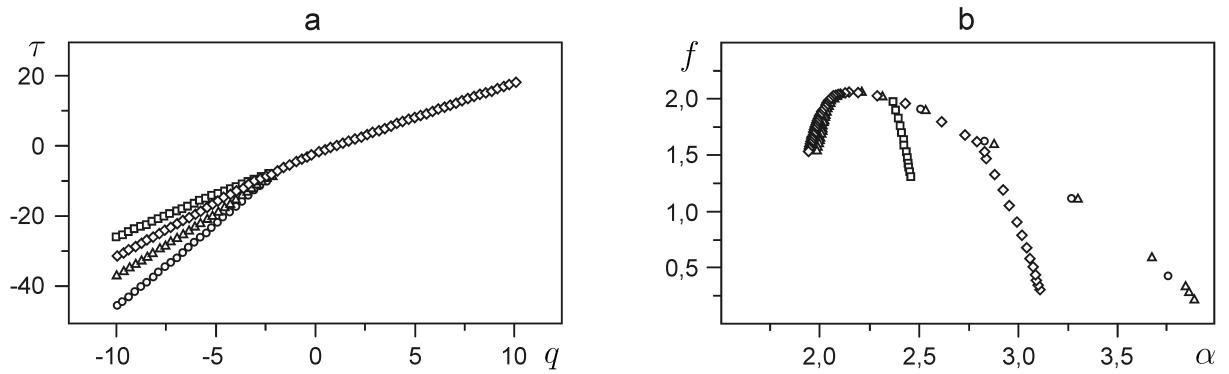


Рис. 5.26. Показатель масс (а) и мультифрактальный спектр (б) для различных участков конденсата углерода при увеличении в 1740 раз

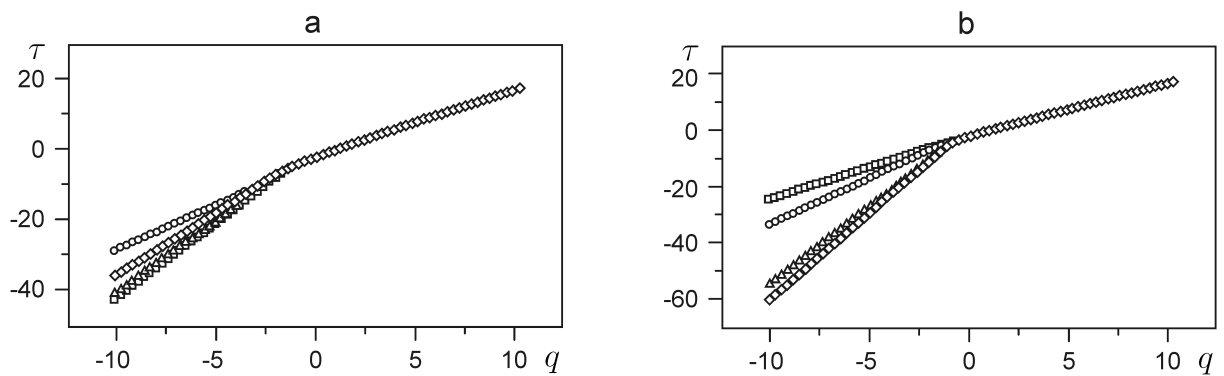


Рис. 5.27. Показатель масс конденсатов алюминия (а) и титана (б); различные символы отвечают разным масштабам увеличения (алюминий: ромб — 2690, треугольник — 3650, окружность — 5540 и квадрат — 9100 раз; титан: квадрат — 1740, окружность — 1910, треугольник — 2620 и ромб — 4460 раз)

изображений. Такой вывод подтверждается совпадением мультифрактальных характеристик указанных конденсатов при положительных значениях параметра деформации  $q$  (см. рис. 5.25 – 5.27). Однако из тех же рисунков видно, что при отрицательных  $q$  мультифрактальный спектр существенно зависит от масштаба увеличения и выбора участка электронно-микроскопического изображения. Кроме значительного снижения точности МФФА в области  $q < 0$ , это объясняется ослаблением самоподобия в распределении мелких деталей конденсатов и их изображений. Поэтому неправомерно полагать, что повышение качества изображений и оптимизация МФФА могут привести к полному совпадению мультифрактальных спектров во всей области изменения параметра деформации.

## 5.5. Выводы к разделу 5

1. Концепция многократно деформированных множеств позволяет провести обобщение теории мультифракталов, в рамках которого их статистическая сумма и спектр показателей масс представляются деформированными рядами по степеням показателя подобия, отсчитанного от единицы. При этом коэффициенты разложения статистической суммы сводятся к энтропии Цаллиса, а для показателя масс они определяют спектр фрактальных размерностей.

2. Использование метода мультифрактального фазового анализа позволяет определить характер корреляций в изменении временных рядов, примеры которых дают обменные курсы валют, электрокардиограмма сердца и временная зависимость координаты частицы, испытывающей аномальную диффузию.

3. Мультифрактальный анализ рентгеновских дифрактограмм сложных конденсированных сред показывает, что кристаллографическое фазовое превращение может сопровождаться существенным усложнением макроструктуры, которое приводит к фрактальному строению кривых рентгеновской дифракции. Мультифрактальный фазовый анализ этих кривых позволяет извлечь информацию о самоподобном строении макроструктуры и её

изменении под внешним воздействием.

4. Конденсаты углерода, алюминия и титана, полученные методом магнетронного распыления, обладают самоподобной структурой, которая проявляется как при различных масштабах увеличения, так и на разных участках электронно-микроскопических изображений.

## РАЗДЕЛ 6

### ИЕРАРХИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

Развитие концепции *иерархического соподчинения* и её использование при описании физических, биологических, экономических, экологических, социальных и других сложных систем имеют длительную историю, за которой можно проследить по работам [14, 211–220] и имеющимся в них ссылкам. В настоящее время одним из наиболее продуктивных приложений идеи иерархического строения являются сложные сети [221]. Как показывают исследования интернета [222], биологических [223–226], социальных [227–229] и других систем, реальные сети организованы таким образом, что обладают высокой степенью кластеризации и самоподобным строением, проявляющимся в степенном распределении вероятностей по числу связей между разными соседями [230, 231]. Более того, многие сети обладают блочной структурой, наличие которой означает, что можно выделить группы узлов, сильно связанных между собой, но имеющих слабые связи (или вообще несвязанные) с узлами, не принадлежащими данной группе (в социуме такие модули представляются группами друзей или сотрудников [232] и сообществами с общими интересами [233]). Такого рода модулярные структуры характеризуются большими значениями коэффициента кластеризации и наблюдаются во многих реальных сетях. Присущее им объединение столь несовместимых свойств, как высокая степень кластеризации и наличие самоподобной топологии, заставляет предположить, что блоки объединяются в сложную сеть иерархическим образом.

Формальной основой теории иерархических структур является *ультраметрическое пространство*, геометрический образ которого представляет дерево Кейли с узлами, отвечающими блокам, и ветвями, связывающими эти узлы [234]. Впервые концепция иерархического дерева использовалась в работе [235] при исследовании процесса диффузии по однородным многократно ветвящимся деревьям. Последовательное рассмотрение

иерархических структур показало [87], что их эволюция сводится к процессу аномальной диффузии в ультраметрическом пространстве, в результате чего устанавливается стационарное распределение по иерархическим уровням, сводящееся к степенному закону Цаллиса, присущему неаддитивным системам [18,27]. Согласно пункту 4.3.1, формальной основой статистики Цаллиса является деформированная алгебра [185]. Настоящий раздел посвящён исследованию условий образования различных иерархических деревьев на основе теории квантовых групп [66, 67].

В подразделе 6.1 рассматриваются статистические особенности образования иерархических структур, показывающие, что эффективные энергии иерархических уровней остаются аддитивными величинами, а набор вероятностей образования этих уровней теряет свойства аддитивности и мультипликативности. В последующем подразделе 6.2 устанавливается связь между вероятностями образования иерархических уровней и вероятностями объединения этих уровней в иерархическую структуру. В результате оказывается, что последовательная картина требует использования деформированной алгебры, основные правила которой изложены в Приложении В. Дальнейшее рассмотрение сводится к исследованию основных типов иерархических деревьев, показанных на рис. 6.1.

Подразделы 6.3 и 6.4 посвящены аналитическому определению вероятностей образования регулярного и вырожденного деревьев, а в подразделе 6.5 эти вероятности найдены численно для дерева Фибоначчи и самоподобного дерева. Произвольное дерево рассматривается в подразделе 6.6 и подраздел 6.7 содержит обсуждение полученных результатов. В Приложении Д содержится вывод суммы членов деформированной геометрической прогрессии, необходимость в использовании которой возникает при рассмотрении вырожденного дерева [51].



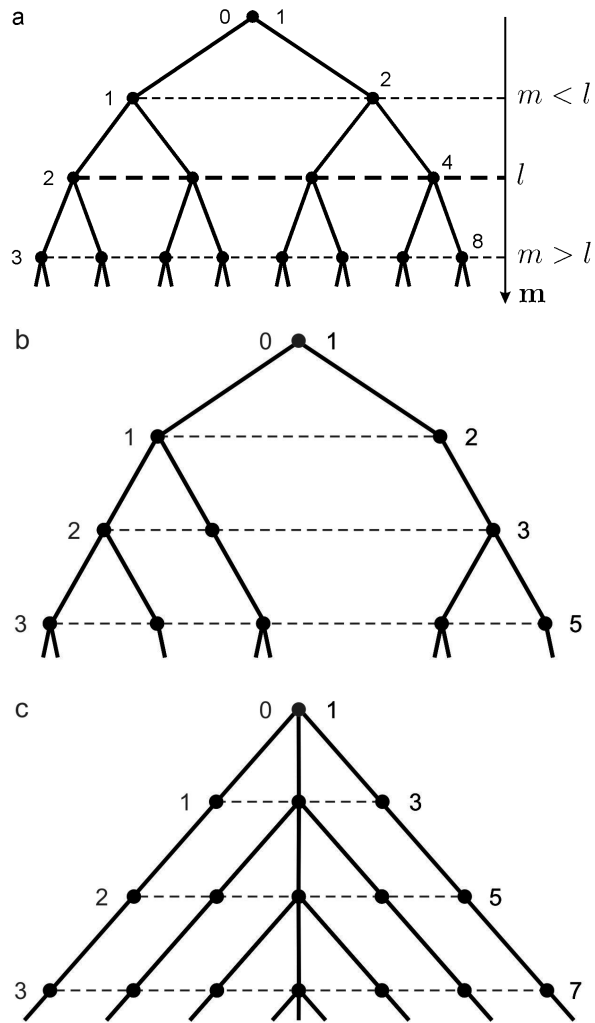


Рис. 6.1. Основные типы иерархических деревьев: (а) регулярное с показателем ветвимости  $b = 2$ ; (б) дерево Фибоначчи с  $b = 2$ ; (с) вырожденное дерево с  $b = 3$  (слева указан номер уровня, справа — число вершин)

### 6.1. Статистические особенности образования иерархических структур

Следуя статистической теории [236], рассмотрим ансамбль случайных графов, распределение вероятностей которых задаются эффективными энергиями их образования. В рамках такого подхода каждое ребро графа представляет частицу  $a$  статистической системы с энергетическим спектром  $\varepsilon_a$ . Для простых статистических ансамблей вероятность реализации энергии  $\varepsilon_a$  задаётся распределением Гиббса  $p_a \propto \exp\left(-\frac{\varepsilon_a}{\Delta}\right)$  с дисперсией  $\Delta$ . В результате аддитивность эффективных энергий  $\varepsilon_a$  приводит к мультипликативности соответствующих вероятностей  $p_a$ . Для ансамбля  $N$  невзаимодействующих частиц с энергиями  $\varepsilon_a$ ,  $a = 1, 2, \dots, N$  вероятность найти систему с полной энергией  $\varepsilon_N = \sum_{a=1}^N \varepsilon_a$  равна произведению  $P_N = \prod_{a=1}^N p_a$ . Характерно, что свойство мультипликативности вероятностей следует из экспоненциальной формы распределения Гиббса.

Во введении к этой главе мы указывали, что иерархически соподчиненные статистические системы характеризуются не экспоненциальным, а степенным распределением вероятности. Это означает, что в таких системах не могут выполняться одновременно условие аддитивности эффективных энергий и мультипликативности соответствующих вероятностей. Наше рассмотрение основывается на предположении, что образование иерархической структуры не нарушает закон сохранения энергии, в результате чего энергии образования иерархических уровней  $\varepsilon_l$  остаются аддитивными величинами. С другой стороны, иерархические связи приводят к деформации вероятностей образования уровней  $p_l$ , и их набор теряет свойство мультипликативности. Учитывая, что распределение иерархических уровней описывается термостатистикой Цаллиса [87], подчиняющейся деформированной алгебре [185], естественно предложить, что при определении вероятности образования полного иерархического ансамбля произведение вероятностей образования уровней должно быть деформировано в соответствии с этой алгеброй. Далее мы покажем, что использование деформированной алгебры [185] обеспечивает увеличение вероятности

образования иерархической системы благодаря связи между различными уровнями. Кроме того, в отличие от подхода [236] для наших целей удобно рассматривать как частицы статистического ансамбля узлы иерархического дерева, а не его рёбра, которые обеспечивают связи между частицами.

Указанное правило деформированной мультипликативности связывает совместную вероятность  $P_n$  образования ансамбля иерархических уровней с вероятностями  $p_l$  образования каждого из них. Другая проблема возникает при рассмотрении связи между вероятностью образования данного иерархического уровня  $l$  со значениями вероятностей образования отдельных узлов этого уровня. Для выяснения этой проблемы рассмотрим однородное регулярное дерево, каждый из узлов которого разветвляется на  $N_l$  узлов следующего уровня с вероятностями  $\pi = p_0/N_l$ , которые определяются вероятностью образования узла верхнего уровня  $p_0$ , фиксируемой условием нормировки. Если предположить аддитивность вероятностей  $\pi$  образования узлов, то совместная вероятность образования иерархического уровня  $p_l := N_l \pi = p_0$  оказывается независимой от его номера. Однако совершенно очевидно, что вероятность  $p_l$  должна спадать с ростом номера уровня  $l$ . Поэтому мы вынуждены отказаться от обычного предположения об аддитивной связи вероятности образования уровня  $p_l$  с соответствующими значениями  $\pi$  для отдельных узлов этого уровня. Далее мы предполагаем, что эти вероятности связаны деформированной суммой (В.3), которая при параметре деформации  $q > 1$  принимает значения меньше, чем в отсутствие деформации ( $q = 1$ ). В результате совместная вероятность образования уровня приобретает значения, которые, как и следовало, спадают с ростом номера иерархического уровня.

Указанное нарушение аддитивности вероятностей образования узлов иерархического уровня означает, что следует ожидать также нарушения условия нормировки вероятностей образования самих уровней. Мы предполагаем, что появление иерархической связи может быть учтено за счёт введения в условие нормировки деформированной суммы (В.3). Далее будет показано, что такая

деформация позволяет восстановить это условие для произвольного набора вероятностей образования иерархических уровней.

## 6.2. Формулировка проблемы

Следуя [87], покажем, что распределение по уровням иерархического дерева представляется степенным законом Цаллиса. С этой целью рассмотрим управляющее уравнение, определяющее временную зависимость  $p_l = p_l(t)$  вероятности образования иерархического уровня  $l$ :

$$\tau \dot{p}_l = \sum_{m>l} f_{m-l} p_l - \sum_{m<l} f_{l-m} p_m. \quad (6.1)$$

В соответствии с параметризацией, приведенной на рис. 6.1а, первое слагаемое правой части учитывает иерархическую связь уровня  $l$  с нижними уровнями  $m > l$ , а второе – с верхними  $m < l$ ; функции  $f_{m-l}$ ,  $f_{l-m}$  определяют интенсивности переходов с уровня  $l$  на  $m$  и обратно; точка над символом означает производную по времени,  $\tau$  – время релаксации. Обращает на себя внимание тот факт, что правая часть уравнения (6.1) имеет знаки, обратные присущим обычным статистическим системам [144]. Это связано с тем, что автономным системам присуще спонтанное установление иерархической связи, а не её разрушение [87]. Проводя разложение вероятности  $p_m$  в ряд по степеням разности  $l - m$ , в пределе  $l \gg 1$  получаем

$$\tau \dot{p}_l = -D \frac{\partial^2 p_l}{\partial l^2} + \mathcal{D}_l p_l, \quad (6.2)$$

где учтены низшие моменты  $\sum_{m<l} (l-m) f_{l-m} = 0$  и  $\sum_{m<l} (l-m)^2 f_{l-m} \equiv 2D$ ; оператор  $\mathcal{D}_l := \sum_{m>l} f_{m-l} - \sum_{m<l} f_{l-m}$  определяет разность интенсивностей переходов с данного уровня  $l$  на нижние и верхние уровни. В отсутствие иерархии условия  $m > l$ ,  $m < l$ , имеющие место в (6.1), отсутствуют, и оператор  $\mathcal{D}_l = 0$ . Совершенно отличная ситуация имеет место в иерархических системах, поскольку

интенсивности переходов существенно зависят от того, совершаются они вверх или вниз по иерархическому дереву. Далее мы используем анзац

$$\mathcal{D}_l := -dqp_l^{q-1} \frac{\partial}{\partial l}, \quad (6.3)$$

определённый положительными параметрами  $q$ ,  $d$ ; его формальной основой является то, что с точностью до множителя  $-d(q-1)$  интеграл  $\int_l^{q_l} \mathcal{D}_l p_l dl$  сводится к производной Джексона

$$D_l p_l^q := \frac{p_{ql}^q - p_l^q}{q-1},$$

представляющей архетип самоподобных иерархических систем [53]. В результате управляющее уравнение (6.2) принимает окончательный вид

$$\tau \dot{p}_l = -\frac{\partial}{\partial l} \left( dp_l^q + D \frac{\partial p_l}{\partial l} \right). \quad (6.4)$$

Стационарное решение этого уравнения записывается в форме распределения Цаллиса

$$p_l = \left( p_0^{-(q-1)} + \frac{q-1}{\Delta} l \right)^{-\frac{1}{q-1}}; \quad p_0 \equiv \left( \frac{2-q}{\Delta} \right)^{\frac{1}{2-q}}, \quad \Delta \equiv D/d. \quad (6.5)$$

Согласно (6.5), с ростом номера уровня  $l$  вероятность его образования  $p_l$  спадает степенным образом от максимального значения  $p_0$ , отвечающего верхнему уровню  $l=0$ .

С использованием деформированной экспоненты (B.1) и эффективной энергии

$$\varepsilon_l = \left( \frac{2-q}{\Delta} \right)^{\frac{q-1}{2-q}} l$$

вероятность (6.5) принимает каноническую форму Цаллиса

$$p_l = p_0 \exp_q \left( -\frac{\varepsilon_l}{\Delta} \right). \quad (6.6)$$

Согласно [154], эффективная температура  $\Delta$  удовлетворяет стандартным термодинамическим соотношениям при условии, что распределение по уровням иерархического самоподобного множества определяется эскортной вероятностью  $\mathcal{P}_l := \frac{p_l^q}{\sum_l p_l^q}$ , а не исходной  $p_l$ .

Как указывалось в предыдущем подразделе, с ростом разности  $|q - 1|$  при фиксированной энергии  $\varepsilon_l$  значение вероятности (6.6) увеличивается относительно недеформированного значения, отвечающего  $q = 1$ . С другой стороны, рост параметра  $q > 1$  приводит к уменьшению деформированной суммы (В.3). Поэтому можно полагать, что последовательное представление иерархического ансамбля достигается при выполнении условия нормировки

$$p_0 \oplus_q p_1 \oplus_q \cdots \oplus_q p_n = 1, \quad q > 1, \quad (6.7)$$

которое деформировано согласно правилу (В.3). В подразделах 6.3, 6.4 будет показано, что такое предположение полностью оправдывается при аналитическом рассмотрении регулярного и вырожденного иерархических деревьев.

В рамках принятой картины мы предполагаем, что полная энергия  $\epsilon_n$  иерархически соподчинённого статистического ансамбля, состоящего из  $n > 1$  уровней  $l = 0, 1, \dots, n$ , связана с эффективными значениями  $\varepsilon_l$ , отвечающими отдельным уровням, обычной (недеформированной) суммой

$$\epsilon_n := \sum_{l=0}^n \varepsilon_l. \quad (6.8)$$

Согласно статистической теории случайных сетей [236], эффективные энергии  $\varepsilon_l$  микроканонического ансамбля сводятся к константе; для канонического

и большого канонического ансамблей значения  $\varepsilon_l$  определяются набором вероятностей  $p_l$  согласно логарифмической зависимости  $\varepsilon_l = -\Delta \ln p_l + \text{const}$  с эффективной температурой  $\Delta$ . В рамках предлагаемой картины распределение Цаллиса (6.6) приводит к линейной зависимости

$$\varepsilon_l = \left( \frac{2-q}{\Delta} \right)^{\frac{q-1}{2-q}} l$$

эффективной энергии от номера уровня. При этом энергия  $\epsilon_n$  образования  $n$ -уровневой иерархической структуры связана с соответствующей вероятностью  $P_n$  соотношением

$$\epsilon_n = -\Delta \ln_q P_n,$$

основанным на использовании деформированного логарифма (B.1). В результате условие (6.8) приводит к аддитивности таких логарифмов

$$\ln_q P_n = \sum_{l=0}^n \ln_q p_l, \quad (6.9)$$

из которой в согласии с первым правилом (B.5) следует связь

$$P_n := p_0 \otimes_q p_1 \otimes_q p_2 \otimes_q \cdots \otimes_q p_n. \quad (6.10)$$

Таким образом, в отличие от обычных статистических систем вероятность образования  $P_n$  иерархической структуры равна *деформированному* произведению удельных вероятностей  $p_l$ , отвечающих уровням  $l = 0, 1, \dots, n$ . Как показывает определение (B.2), рост параметра деформации  $q > 1$  увеличивает вероятность (6.10) в сравнении со значением, отвечающим  $q = 1$ . С формальной точки зрения сочетание равенств (6.8) и (6.10) означает, что деформация правила перемножения независимых вероятностей позволяет сохранить условие

аддитивности отвечающих им энергий.

С учетом определения (В.1) равенство (6.9) приводит к явному выражению вероятности образования иерархической структуры

$$P_n = \exp_q \left[ \frac{\sum_{l=0}^n p_l^{1-q} - (n+1)}{1-q} \right] = \left( \sum_{l=0}^n p_l^{1-q} - n \right)_+^{\frac{1}{1-q}}, \quad (6.11)$$

где последнее равенство вытекает из деформированного произведения (6.10) с учетом (В.2). Зависимости (6.11) означают, что с ростом иерархического дерева вероятность его образования спадает в соответствии с разностным уравнением

$$P_{n-1}^{1-q} - P_n^{1-q} = 1 - p_n^{1-q}. \quad (6.12)$$

В пределе  $q \rightarrow 1$  зависимости (6.10), (6.11) сводятся к обычному правилу перемножения вероятностей  $P_n = \prod_{l=0}^n p_l$ ; соответственно, уравнение (6.12) приобретает вид  $P_n/P_{n-1} = p_n$ . При  $q = 2$  вероятность (6.11) достигает максимальной величины.

Характерная особенность изложенной схемы состоит в том, что энергии уровней  $\varepsilon_l$  остаются аддитивными величинами, поскольку включение иерархической связи не может нарушить закон сохранения энергии. Однако иерархия существенно деформирует соотношения (6.7), (6.10) – (6.12), связывающие вероятности  $P_n$  и  $p_l$ .

Согласно (6.11), для определения вероятности  $P_n$  образования иерархической структуры следует найти набор вероятностей  $\{p_l\}_0^n$ , отвечающих отдельным иерархическим уровням. Переходя к решению этой задачи, рассмотрим наиболее простой случай регулярного дерева, показанного на рис. 6.1а.



### 6.3. Регулярное дерево

Пусть на уровне  $l - 1$  узлы регулярного дерева ветвятся с постоянным показателем  $b > 1$ , образуя на следующем уровне  $N_l = b^l$  узлов с вероятностью  $\pi = p_0/N_l = p_0 b^{-l}$ , которая на верхнем уровне  $l = 0$  принимает максимальное значение  $p_0$ , определённое условием нормировки. В рамках наивного предположения об аддитивности вероятностей образования узлов  $\pi$  для условной вероятности образования уровня  $l$  находим значение  $p_l := N_l \pi = p_0 = (n + 1)^{-1}$ , не зависящее от номера уровня  $l = 0, 1, \dots, n$  (здесь последнее равенство учитывает условие нормировки). Как отмечалось в предыдущем подразделе, во избежание такой тривиализации следует отказаться от условия аддитивности вероятностей  $\pi$ . Определим их связь с вероятностью образования уровня  $l$  следующим образом:

$$\frac{p_l}{p_0} := \underbrace{\frac{\pi}{p_0} \oplus_q \frac{\pi}{p_0} \oplus_q \dots \oplus_q \frac{\pi}{p_0}}_{N_l} \equiv N_l \odot_q \frac{\pi}{p_0} = b^l \odot_q b^{-l}. \quad (6.13)$$

Здесь деформированная сумма  $N_l$  одинаковых слагаемых представлена в виде соответствующего произведения, которое с учётом равенства (В.4) записывается в виде

$$p_l = \frac{[1 + (1 - q)b^{-l}]_+^{b^l} - 1}{1 - q} p_0 = \ln_q \left[ \exp_q^{b^l} (b^{-l}) \right] p_0, \quad (6.14)$$

где в последнем равенстве использовано определение (В.1). В пределе  $q \rightarrow 1$  приходим к выражению

$$p_l \simeq \left[ 1 + \frac{1 - q}{2} (1 - b^{-l}) \right] p_0, \quad (6.15)$$

которое указывает на экспоненциально быстрое спадание с ростом номера уровня  $l \geq 1$ . При  $l \gg 1$  или  $b \gg 1$  вероятность (6.14) достигает предельной величины

$$p_\infty = \frac{e^{1-q} - 1}{1 - q} p_0 = p_0 \ln_q e, \quad (6.16)$$

принимаяющей значение  $p_\infty > p_0$  при деформации  $q < 1$  и  $p_\infty < p_0$  при  $q > 1$ . Подстановка (6.16) в (6.11) приводит к вероятности образования регулярного дерева с ветвимостью  $b \gg 1$ :

$$P_n = \left( 1 - \frac{1 - p_\infty^{1-q}}{p_0^{1-q}} n \right)^{\frac{1}{1-q}} p_0. \quad (6.17)$$

Здесь значение  $p_0$  определяется деформированным условием нормировки

$$p_0 \oplus_q (p_\infty \odot_q n) = \frac{[1 + (1 - q) p_0] [1 + (1 - q) p_\infty]^n - 1}{1 - q} = 1. \quad (6.18)$$

Как показывает рис. 6.2а, с ростом номера иерархического уровня  $l$  вероятность (6.14) увеличивается при  $q < 1$  и спадает при  $q > 1$ . Поскольку с физической точки зрения вероятность образования нижнего иерархического уровня всегда меньше, чем верхнего, то следует принять, что величина деформации ограничена значениями  $q > 1$ . В этом случае в согласии с рис. 6.2а рост числа иерархических уровней  $n$  приводит к спаданию вероятностей (6.14), нормированных условием (6.18). Характерно, что за исключением области  $2 - q \ll 1$  распределение вероятностей образования иерархических уровней слабо зависит от параметра деформации  $q$  и показателя ветвимости  $b$ . Согласно рис. 6.2с, в самой области  $2 - q \ll 1$  медленное спадание вероятности  $p_l$  при малых значениях ветвимости  $b$  переходит в пределе  $b \gg 1$  в экспоненциальный провал до минимального значения (6.16), не зависящего от  $b$ .

Численное определение вероятности образования регулярного дерева показывает, что её величина (6.17) принимает физическое значение  $P_0 \leq 1$  только

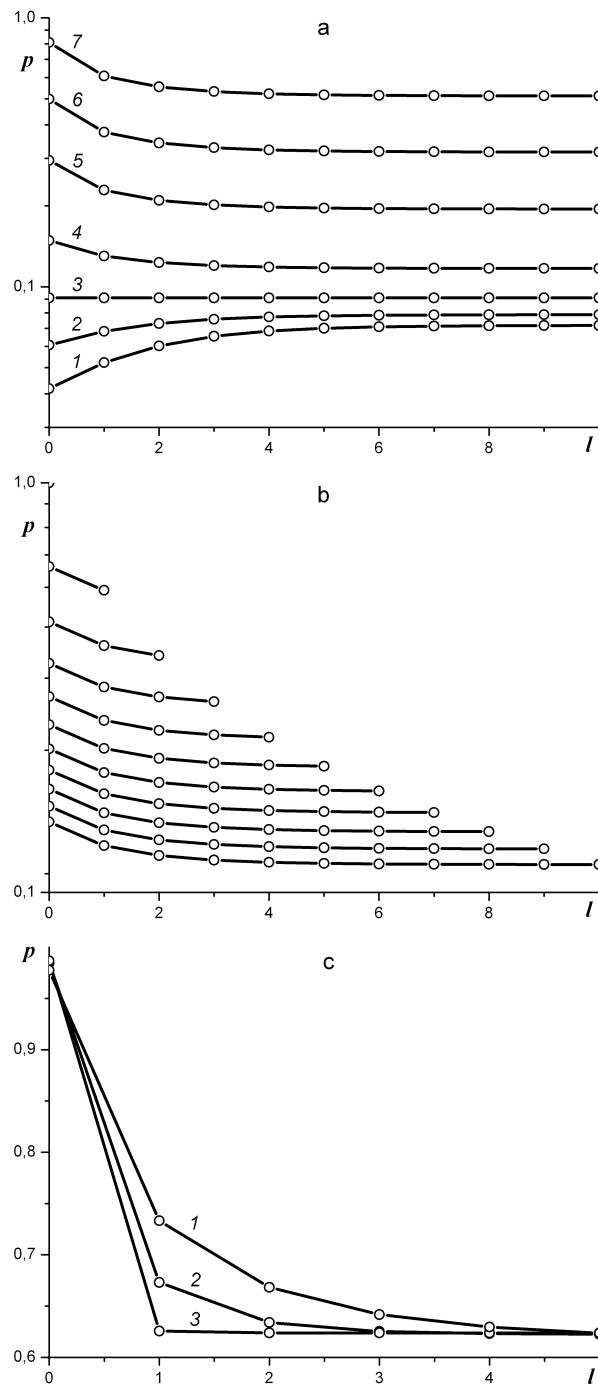


Рис. 6.2. Вероятности образования иерархических уровней регулярного дерева в зависимости от номера уровня при: (а)  $b = 2$ ,  $n = 10$  и  $q = 10^{-4}, 0.5, 1.0, 1.5, 1.9, 1.99, 1.9999$  (кривые 1–7 соответственно); (б)  $b = 2$ ,  $q = 1.5$  и  $n = 1, 2, \dots, 10$  (кривые, следующие сверху вниз); (с)  $q = 1.9999$ ,  $n = 5$  при  $b = 2, 4, 100$  (кривые 1–3 соответственно)

при параметре деформации  $q > 1$ . Согласно рис. 6.3а, вероятность  $P_n$  монотонно спадает с ростом числа уровней, замедляя своё изменение с приближением к предельной деформации  $q = 2$ . Из рис. 6.3б видно, что изменение параметра ветвимости  $b \gg 1$  сказывается на вероятности  $P_n$  образования регулярного дерева только при небольшом числе уровней в области  $2 - q \ll 1$ .

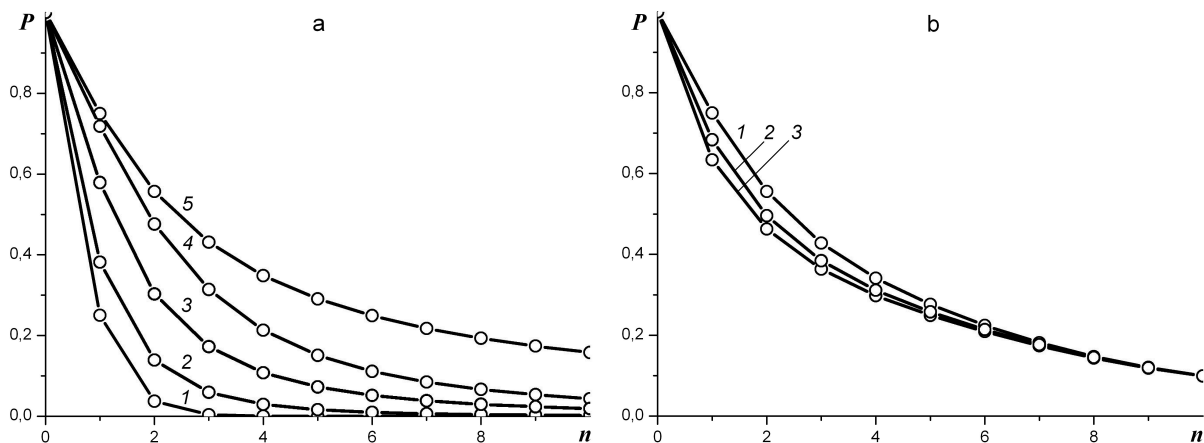


Рис. 6.3. Вероятность образования регулярного иерархического дерева в зависимости от числа его уровней при: (а)  $b = 2$  и  $q = 1.0001, 1.5, 1.9, 1.99, 1.9999$  (кривые 1–5 соответственно); (б)  $q = 1.9999, n = 10$  и  $b = 2, 4, 100$  (кривые 1–3 соответственно)

Проведенное рассмотрение указывает на особое поведение регулярного иерархического дерева вблизи предельной деформации  $q = 2$ , где зависимость (6.14) не обнаруживает какой-либо сингулярности. Это подтверждается зависимостью вероятности образования верхнего уровня от параметра деформации, показанной на рис. 6.4. Из рисунка видно, что независимо от числа уровней  $n$  и показателя ветвимости  $b$  эта вероятность монотонно увеличивается с ростом  $q$ , бесконечно быстро достигая значение  $p_0 = 1$  в точке  $q = 2$ . Это означает аномальный рост вероятностей  $p_l$  образования всех иерархических уровней, как это имеет место для распределений, отвечающих кривым 5–7 на рис. 6.2а. Благодаря этому в области  $2 - q \ll 1$  условие нормировки  $\sum_{l=0}^n p_l = 1$  нарушается, и его восстановление достигается лишь деформацией суммы (В.3). Однако с превышением граничного значения  $q = 2$  становится невыполнимым

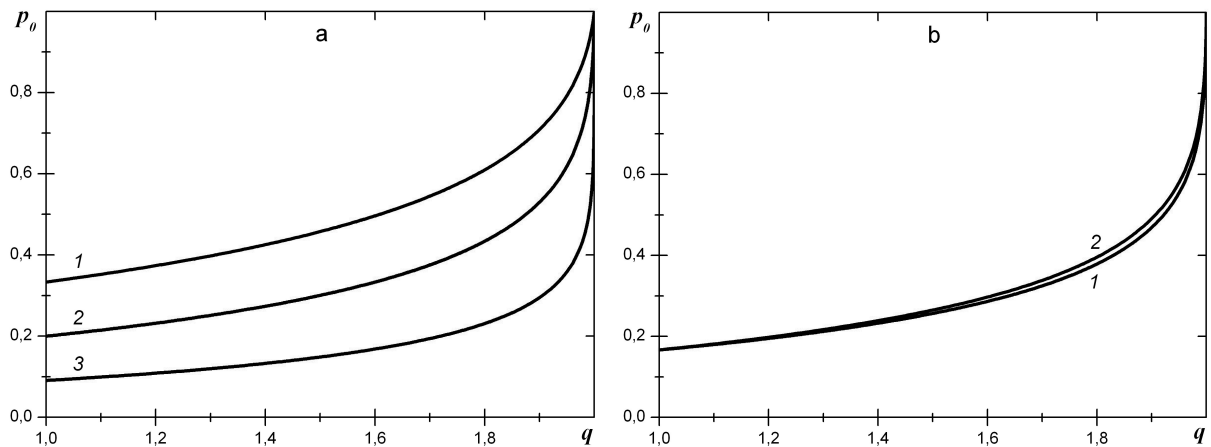


Рис. 6.4. Вероятность образования верхнего уровня регулярного дерева в зависимости от параметра деформации при: (а)  $b = 2$  и  $n = 2, 4, 10$  (кривые 1–3 соответственно); (б)  $n = 5$  и  $b = 2, 10^3$  (кривые 1, 2 соответственно)

даже деформированное условие нормировки (6.7). В результате физические значения параметра деформации оказываются ограниченной областью  $q \in [1, 2]$ .

#### 6.4. Вырожденное дерево

Как видно из рис. 6.1, регулярное и вырожденное деревья представляют противоположные примеры иерархических структур в том смысле, что в первом случае на каждом уровне ветвятся все узлы, а во втором — только один. Согласно рис. 6.1b, на уровне  $l = 1$  ветвление с показателем  $b > 1$  порождает  $N_1 = b$  узлов с одинаковой вероятностью  $b^{-1}$ . На следующем уровне  $l = 2$  из  $N_2 = 2(b-1)+1$  узлов  $b-1$  приобретают те же вероятности  $b^{-1}$ , а оставшимся  $b$  узлам отвечают меньшие значения  $b^{-2}$ . На уровне  $l = 3$  образуется  $N_3 = 3(b-1)+1$  узлов, из которых узлам численностью  $b$  отвечают вероятности  $b^{-3}$ ,  $b-1$  узлам —  $b^{-2}$  и  $b-1$  узлам —  $b^{-1}$ . В общем случае на уровне  $l$  образуются  $N_l = l(b-1)+1$  узлов, разделённых на  $l$  групп, из которых  $l-1$  группа содержит по  $b-1$  узлов с вероятностями  $b^{-1}, b^{-2}, \dots, b^{-(l-1)}$ , тогда как последняя группа имеет  $b$  узлов с вероятностью  $b^{-l}$ . С учётом такого разделения вероятность образования  $l$ -го иерархического уровня

выражается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \frac{p_l}{p_0} &= \underbrace{[(b-1) \odot_q b^{-1}] \oplus_q \cdots \oplus_q [(b-1) \odot_q b^{-(l-1)}]}_{l-1} \oplus_q (b \odot_q b^{-l}) \\
 &= \underbrace{[(b-1) \odot_q b^{-1}] \oplus_q \cdots \oplus_q [(b-1) \odot_q b^{-l}]}_l \oplus_q b^{-l} \\
 &:= [(b-1) \odot_q (S_{l+1} \ominus_q 1)] \oplus_q b^{-l}. \quad (6.19)
 \end{aligned}$$

Здесь в последнем выражении введена сумма деформированной геометрической прогрессии

$$S_l := \underbrace{1 \oplus_q b^{-1} \oplus_q b^{-2} \oplus_q \cdots \oplus_q b^{-(l-1)}}_l. \quad (6.20)$$

Как показано в приложении Д, эта сумма выражается степенным рядом

$$S_l = \sum_{k=0}^{l-1} C_l^{k+1}(b) (1-q)^k b^{-\frac{k(k+1)}{2}} \quad (6.21)$$

с деформированными биномиальными коэффициентами [28]

$$C_l^k(b) \equiv \prod_{m=0}^{k-1} \frac{1 - b^{-(l-m)}}{1 - b^{-(m+1)}}. \quad (6.22)$$

Подстановка (6.21) в (6.19) даёт вероятность образования  $l$ -го уровня

$$p_l = \frac{[1 + (1-q)b^{-l}] [1 + (1-q)\Sigma_l]^{b-1} - 1}{1-q} p_0, \quad (6.23)$$

где обозначено

$$\Sigma_l \equiv S_{l+1} \ominus_q 1 = \frac{1}{2-q} \sum_{k=1}^l C_{l+1}^{k+1}(b) (1-q)^k b^{-\frac{k(k+1)}{2}}. \quad (6.24)$$

С использованием произведений сумма (6.21) приобретает вид

$$S_l = \frac{1}{1-q} \left\{ \prod_{m=0}^{l-1} [1 + (1-q)b^{-m}] - 1 \right\} = \ln_q \left[ \prod_{m=0}^{l-1} \exp_q(b^{-m}) \right], \quad (6.25)$$

а для выражения (6.24) получаем

$$\Sigma_l = \frac{1}{1-q} \left\{ \frac{\prod_{m=0}^{l-1} [1 + (1-q)b^{-m}]}{2-q} - 1 \right\}. \quad (6.26)$$

В результате вероятность (6.23) представляется в виде

$$\begin{aligned} p_l &= \frac{[1 + (1-q)b^{-l}] \prod_{m=1}^l [1 + (1-q)b^{-m}]^{b-1} - 1}{1-q} p_0 = \\ &= \ln_q \left[ \exp_q(b^{-l}) \prod_{m=1}^l \exp_q^{b-1}(b^{-m}) \right] p_0, \end{aligned} \quad (6.27)$$

где в последнем равенстве учтены определения (В.1).

Несмотря на значительное усложнение равенства (6.27) в сравнении с соответствующим выражением (6.14) для регулярного дерева, численные данные, полученные по этим формулам, приводят к практически совпадающим распределениям вероятностей. Поэтому мы откладываем численное рассмотрение вырожденного дерева до следующего подраздела, где будет проведено сравнение с данными для самоподобной иерархической структуры.

## 6.5. Самоподобное дерево

В предыдущих подразделах мы рассмотрели два основных типа иерархических деревьев — регулярное и вырожденное (см. рис. 6.1). Настоящий подраздел посвящён исследованию *самоподобного дерева*, для которого распределение вероятностей образования иерархических уровней характеризуется

степенным законом [91].

Согласно [87], распределение вероятностей по уровням самоподобного дерева задаётся разностным уравнением

$$p_{l+1} - p_l = -p_l^q / \Delta, \quad l = 0, 1, \dots, n, \quad (6.28)$$

которое следует дополнить деформированным условием нормировки (6.7) (параметр  $\Delta$  представляет дисперсию распределения). Легко показать, что в континуальном пределе  $l \rightarrow \infty$  решение уравнения (6.28) воспроизводит степенную зависимость (6.5).

На рис. 6.5 показаны распределения вероятностей по иерархическим уровням для самоподобного, регулярного, дерева Фибоначчи и вырожденного дерева при различных значениях параметра деформации. Видно, что при всех деформациях  $q$  эти распределения незначительно различаются для регулярного, вырожденного и дерева Фибоначчи, но намного медленнее спадают для самоподобного дерева. Однако для первых трёх деревьев спадание ограничено конечной вероятностью  $p_\infty$ , тогда как вероятности образования уровней самоподобного дерева спадают до нуля. В результате вероятность образования иерархической структуры наиболее быстро спадает для самоподобного дерева (рис. 6.6). Характерно, что эта разница усиливается с приближением к области  $2 - q \ll 1$ . Как показано в конце подраздела 6.3, такое поведение обусловлено аномальным ростом вероятности образования верхнего иерархического уровня  $p_0$  вблизи предельной деформации  $q = 2$ . Согласно рис. 6.7, такой рост наблюдается для всех иерархических деревьев.

## 6.6. Произвольное дерево

После рассмотрения регулярного, вырожденного и самоподобного деревьев мы готовы провести обобщение на иерархическую систему, обладающую



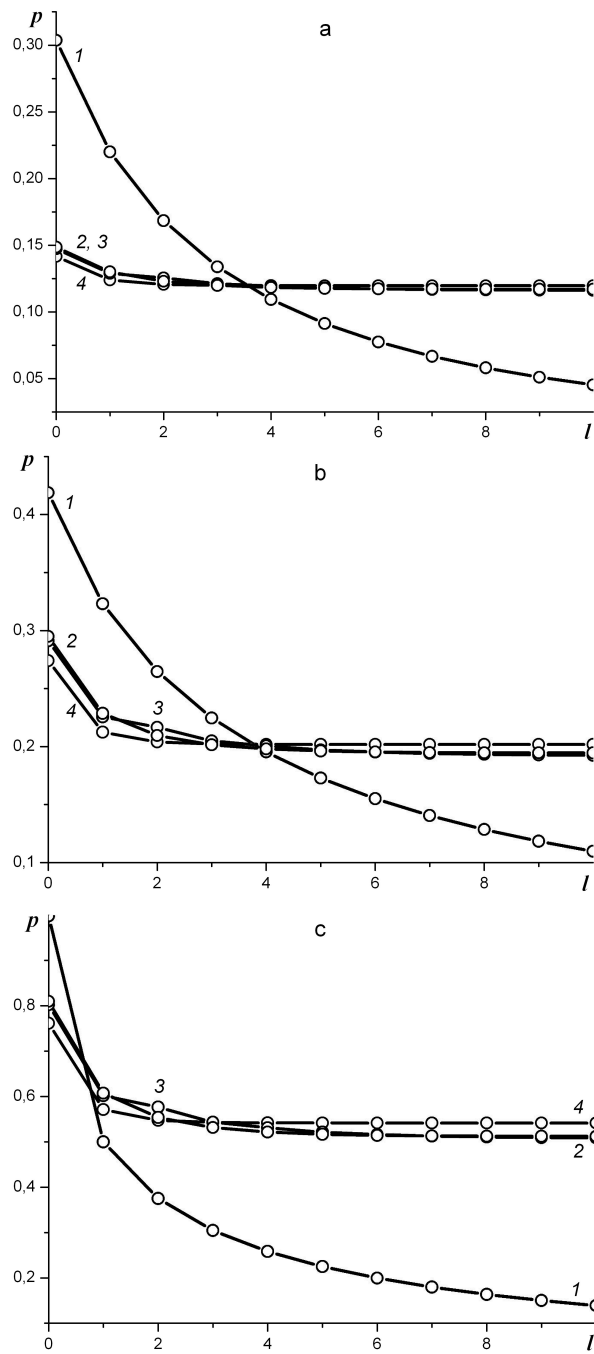


Рис. 6.5. Распределение вероятностей по иерархическим уровням самоподобного, регулярного, дерева Фибоначчи и вырожденного дерева (кривые 1–4 соответственно) при  $\Delta = 2, b = 2, n = 10$  и  $q = 1.5$  (a),  $q = 1.9$  (b),  $q = 1.9999$  (c)

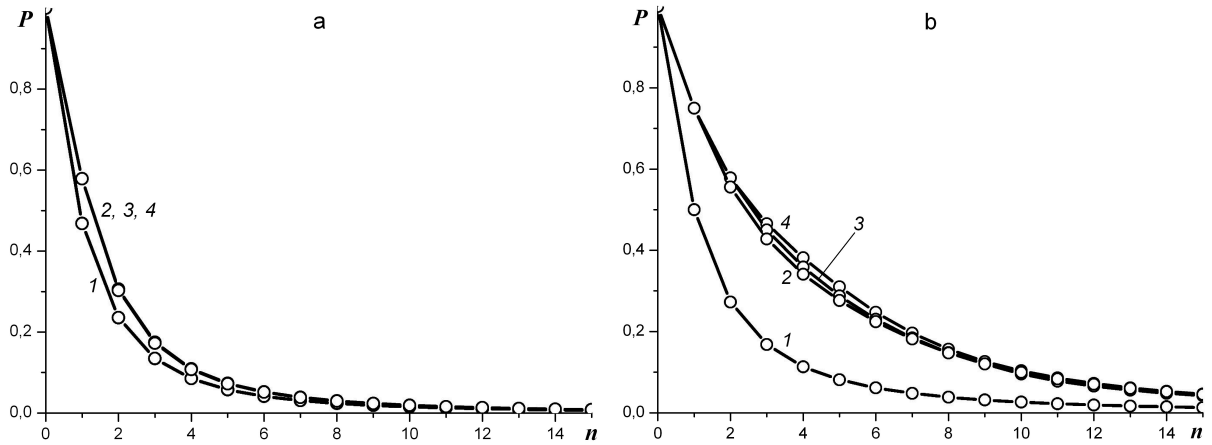


Рис. 6.6. Вероятности образования самоподобного, регулярного, дерева Фибоначчи и вырожденного дерева (кривые 1–4 соответственно) в зависимости от числа уровней при  $\Delta = 2$ ,  $b = 2$  и  $q = 1.9$  (a),  $q = 1.9999$  (b)

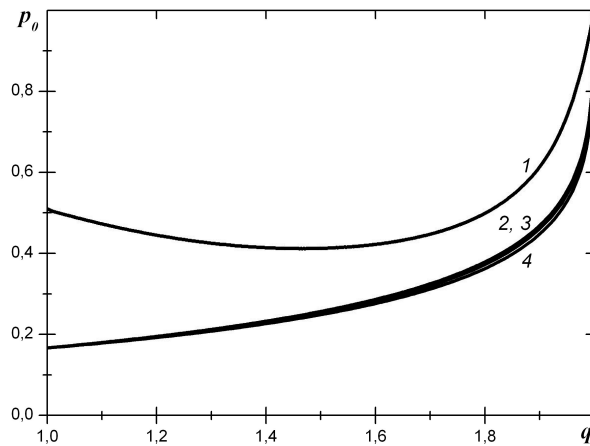


Рис. 6.7. Вероятность образования верхнего уровня для самоподобного, регулярного, дерева Фибоначчи и вырожденного дерева (кривые 1–4 соответственно) в зависимости от параметра деформации при  $\Delta = 2$ ,  $b = 2$  и  $n = 5$

произвольной структурой. Рассмотрим иерархическое дерево с уровнями  $l = 0, 1, \dots, n$ ,  $n \geq 1$ , по которым распределены  $N_l$  узлов  $i_0 i_1 \dots i_l$  с вероятностями  $p_{i_0 i_1 \dots i_l}$ .<sup>8</sup> Характерная особенность иерархических деревьев состоит в кластеризации структуры, основной блок которой показан на рис. 6.8: узлы  $i_0 \dots i_{l-1} i_l$  уровня  $l$  образуют кластер  $i_0 \dots i_{l-1}$  на уровне  $(l - 1)$ ; в свою очередь,

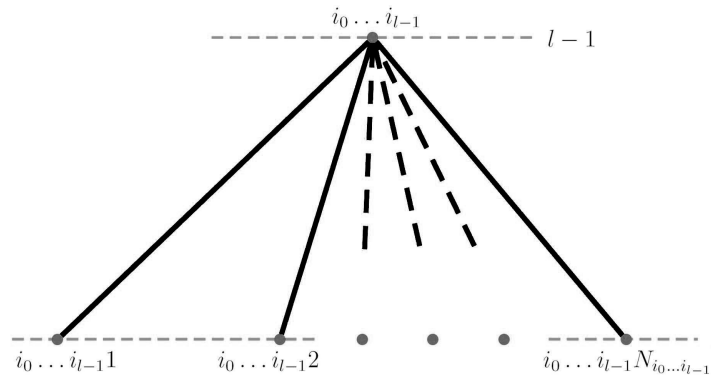


Рис. 6.8. Параметризация узлов иерархического кластера

кластеры  $i_0 \dots i_{l-2} i_{l-1}$  объединяются в суперкластер  $i_0 \dots i_{l-2}$  следующего уровня  $l - 2$ . Такая кластеризация продолжается на следующих уровнях  $l - 3, l - 4, \dots$  — вплоть до верхнего  $l = 0$ , от единственного узла  $i_0$  которого ответвляются  $N_{i_0}$  узлов  $i_1$  уровня  $l = 1$ . При движении по иерархическому дереву сверху вниз вероятности образования узлов представляются следующими величинами:  $p_{i_0} \equiv p_0, p_{i_0 i_1}, \dots, p_{i_0 \dots i_l}, \dots, p_{i_0 \dots i_{n-1}}, p_{i_0 \dots i_{n-1} i_n}$ . Определим их значения.

На верхнем уровне  $l = 0$  имеется единственный узел  $i_0 = 0$ , которому отвечает вероятность  $p_0$ . С переходом на уровень  $l = 1$  этот узел разветвляется на  $N_{i_0}$  узлов  $i_1$ , образующих кластер. Поскольку все его узлы совершенно одинаковы, то и вероятности их образования принимают одинаковые значения

$$p_{i_0 i_1} = p_0 N_{i_0}^{-1}. \quad (6.29)$$

<sup>8</sup>Согласно [234], координата узла иерархического дерева представляется  $p$ -адическим числом  $i_0 i_1 \dots i_n$ , где первый знак  $i_0 = 0$  определяет положение узла на верхнем уровне  $l = 0$ , второй  $i_1$  — на следующем  $l = 1$  и так далее, до последнего знака  $i_n$ , задающего положение узла нижнего уровня  $l = n$ .

Вероятности образования узлов следующего уровня  $l = 2$  определяются равенствами

$$p_{i_0 i_1 i_2} = p_{i_0 i_1} N_{i_1}^{-1} = p_0 (N_{i_0} N_{i_1})^{-1}. \quad (6.30)$$

Подобным образом для произвольного уровня  $l$  находим выражение

$$p_{i_0 \dots i_l} = p_0 \left( \prod_{m=0}^{l-1} N_{i_0 \dots i_m} \right)^{-1}, \quad (6.31)$$

в котором  $N_{i_0 \dots i_m}$  означает число узлов в кластере  $i_0 \dots i_m$ .

Определение связи между вероятностями образования уровня  $l$  и его узлами достигается обобщением первого равенства (6.13), которое приводит к  $l$ -кратной деформированной сумме

$$\frac{p_l}{p_0} = \underbrace{\bigoplus}_{i_1=1}^{N_{i_0}} \dots \underbrace{\bigoplus}_{i_{l-1}=1}^{N_{i_0 \dots i_{l-1}}} \frac{p_{i_0 \dots i_l}}{p_0}, \quad l \neq 0. \quad (6.32)$$

При этом условие нормировки (6.7) принимает вид

$$p_0 \oplus_q p_0 \underbrace{\bigoplus}_{i_1=1}^{N_{i_0}} \dots \underbrace{\bigoplus}_{i_{n-1}=1}^{N_{i_0 \dots i_{n-1}}} \frac{p_{i_0 \dots i_n}}{p_0} = 1. \quad (6.33)$$

Здесь введено обозначение деформированной суммы  $n > 2$  слагаемых

$$\underbrace{\bigoplus}_{i=1}^n a_i \equiv a_1 \oplus_q a_2 \oplus_q \dots \oplus_q a_n. \quad (6.34)$$

Обращает на себя внимание характерная особенность проведенного рассмотрения: если вероятности образования узлов (6.31) определяются с использованием обычной алгебры, то соответствующее выражение (6.32) для иерархического уровня содержит деформированную сумму (6.34). Физической

причиной такого разделения является то обстоятельство, что вероятности образования узлов определяются только геометрией дерева, тогда как соответствующие значения для уровней зависят также от статистических свойств иерархической структуры.

В заключение используем развитый формализм для описания дерева Фибоначчи (Fig. 6.1b) и дерева эволюции, показанного на рис. 6.9 (для

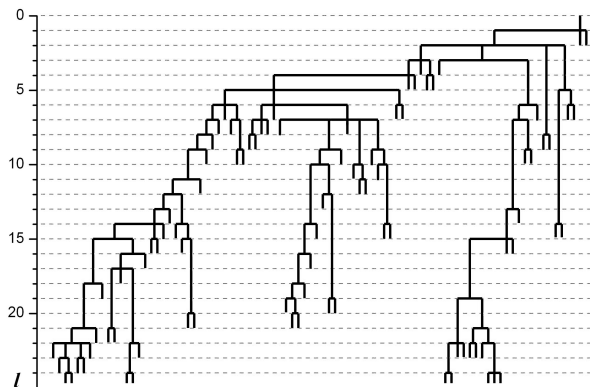


Рис. 6.9. Схематическое представление дерева эволюции [237]

последнего иерархические уровни представляют основные этапы эволюции, например, человек отвечает 24-му уровню). Используя выражения (6.31), (6.32) для определения вероятностей образования узлов и уровней, с учётом условия нормировки (6.33) приходим к выводу, что для дерева Фибоначчи распределения вероятностей (см. рис. 6.5 – 6.7) незначительно отличаются от соответствующих зависимостей для регулярного и вырожденного деревьев. Что касается дерева эволюции, то распределения вероятностей образования его уровней показывают (рис. 6.10), что обрыв ветвей (типа крайних правых на рис. 6.9) приводит к существенному спаданию вероятностей образования иерархических уровней. Так, вероятность появления человека превышает  $10^{-4}$  только при деформации  $q = 1.9999$ , близкой к предельному значению  $q = 2$ .

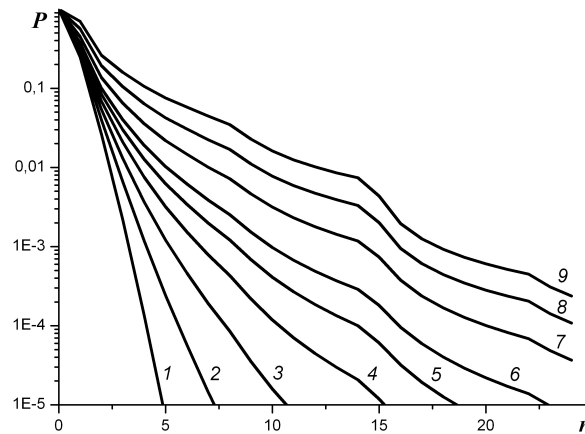


Рис. 6.10. Вероятности образования уровней дерева эволюции при  $q = 1.0001, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.7, 1.9, 1.9999$  (кривые 1–9 соответственно)

### 6.7. Заключительные замечания

Во избежание недоразумений следует отметить, что проведенное рассмотрение касается только образования иерархических структур, оставляя в стороне исследование стохастических явлений и процессов, протекающих на этих деревьях, (например, распределение вероятностей в иерархических ансамблях [199], диффузия по иерархическим деревьям [235] и т.д.). В частности, мы провели аналитическое рассмотрение регулярного и вырожденного деревьев, для которых найдено полное совпадение с численными данными, полученными в рамках развитого формализма для иерархических деревьев, обладающих произвольной структурой.

Основная особенность построенной картины состоит в разделении на деформированные и недеформированные величины. Согласно (6.8), эффективная энергия иерархических уровней являются недеформированной аддитивной величиной, поскольку образование иерархической структуры не может нарушить закон сохранения энергии. Более того вероятности образования узлов определяются недеформированным соотношением (6.31) благодаря тому, что их величины задаются только конфигурацией иерархического дерева. Вместе с тем вероятности образования уровней  $p_l$  и всего иерархического

дерева  $P_n$  определяются деформированными соотношениями (6.32), (6.10) – (6.12). Подобным образом деформированы и условия нормировки (6.7), (6.33), содержащие сумму (6.34).

Благодаря использованию деформированной алгебры вероятности образования иерархических уровней  $p_l$  повышаются с ростом деформации  $q$ , принимая аномальные значения вблизи точки  $q = 2$ . Это приводит к тому, что деформированное условие нормировки (6.7) может удовлетворяться только при  $q \leq 2$ , нарушаясь с преодолением границы  $q = 2$ . В результате физические значения параметра деформации сосредоточены в области  $q \in [1, 2]$ .

Сравнение распределений вероятностей по иерархическим уровням самоподобного, регулярного, вырожденного и дерева Фибоначчи показывает (рис. 6.5), что при всех  $q$  значения этих вероятностей существенно отличаются только для самоподобного дерева, у которого наблюдается наиболее медленное спадание до нулевого значения, тогда как вероятности образования иерархических уровней регулярных деревьев быстро спадают до конечных значений. В соответствии с этим вероятности образования иерархической структуры (рис. 6.6) более быстро спадают для самоподобного дерева, причём это отличие проявляется только в области  $2 - q \ll 1$ .

Равенства (6.31) – (6.33), (6.11) представляют основу описания произвольной иерархической структуры (например, дефектных структур твёрдого тела, подверженного интенсивному внешнему воздействию типа радиоактивного облучения). В отличие от аморфных систем число иерархических уровней такой структуры не очень велико: обычно различают масштабы микро-, мезо- и макроскопического уровней [43]. Для описания произвольной иерархической структуры сначала следует разделить дефекты по различным уровням  $l = 0, 1, \dots, n$ ; после этого подсчитывается число дефектов  $N_{i_0 i_1 \dots i_{l-1}}$ , попавших в кластеры  $i_0 i_1 \dots i_{l-1} 1$ ,  $i_0 i_1 \dots i_{l-1} 2$ ,  $\dots$ ,  $i_0 i_1 \dots i_{l-1} N_{i_1 i_2 \dots i_{l-1}}$ , вероятности образования  $p_{i_0 \dots i_l}$  которых определяются равенствами (6.31). Далее по определению (6.32) находим вероятности образования уровней  $p_l$ , где величина  $p_0$

для верхнего уровня задаётся условием нормировки (6.33). И наконец, вероятность  $P_n$  образования всей иерархической структуры определяется равенством (6.11).

### 6.8. Выводы к разделу 6

1. Последовательное теоретико-вероятностное описание иерархических структур достигается в предположении об аддитивности эффективных энергий уровней иерархического дерева. При этом вероятности образования узлов также определяются недеформированными соотношениями, а для иерархических уровней и всего дерева вероятности образования, а также условия нормировки должны быть деформированы согласно алгебре Цаллиса.

2. Аналитическое рассмотрение регулярного и вырожденного деревьев показывает, что с ростом номера иерархического уровня вероятность его образования экспоненциально быстро падает до конечного значения.

3. Сравнение распределений вероятностей по иерархическим уровням самоподобного, регулярного, вырожденного и дерева Фибоначчи показывает, что в первом случае вероятность наиболее медленно падает с ростом номера уровня. Поскольку вероятность образования нижнего уровня для последних трёх деревьев намного выше, чем для первого, вероятность образования всей иерархической структуры наиболее быстро падает с ростом самоподобного дерева.

4. Вероятности образования иерархических уровней спадают с ростом их номера при деформации  $q > 1$  и удовлетворяют условию нормировки при  $q < 2$ .



## РАЗДЕЛ 7

## МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Как неоднократно указывалось выше, одним из основных объектов современных исследований являются *сложные системы*, фазовое пространство которых разделено на слабо перекрывающиеся (или изолированные) области, благодаря чему поведение таких систем может измениться коренным образом при сколь угодно слабом воздействии [1, 4, 238]. К сложным системам относятся ферромагнетики, спиновые стёкла, двумерная электронная плазма в турбулентностном режиме, системы с аномальной диффузией Леви, гранулированные системы, твёрдые тела, подвергнутые ионной бомбардировке, гравитационные системы, солнечные нейтрино, чёрные дыры, элементарные частицы, сталкивающиеся с высокой энергией, квантовые системы, проявляющие эффекты запутывания, и многие другие [18, 27]. В процессе эволюции этих систем экспоненциально быстрое перемешивание фазового пространства приобретает степенной характер, в результате чего оно хаотизируется только слабым образом. Кроме того, таким системам присущи эффекты дальнего действия, немарковское поведение, мультифрактальные граничные или патологические начальные условия, некоторые специальные механизмы диссипации и т.д.

В предыдущих главах мы неоднократно обращались к описанию сложных систем. Особенность подхода, на котором основывается настоящая глава, состоит в том, что он носит микроскопический характер. Основой такого подхода является исследование фазового пространства сложных систем [56], проведенное в подразделе 7.1. На основе бинарного мультифрактала Кантора, допускающего аналитическое описание, проведено тестирование методов покрытий и множителей, первый из которых предполагает использование замороженных средних, второй — отождённых. Разработан алгоритм численного моделирования мультифрактального фазового пространства, который учитывает как отсутствие самоусредняемости сложных систем, так и наличие отрицательных

значений их спектральной функции. В качестве физического примера рассмотрено мультифрактальное множество, порождённое процессом аномальной диффузии.

Подраздел 7.2 посвящён развитию микроскопической модели изменения структуры аморфных и многокомпонентных тонких плёнок под воздействием импульсной фотонной обработки [58]. С этой целью проведено исследование условий развития тепловой неустойчивости в результате самоорганизации процессов движения фронта кристаллизации и температуропроводности, течение которых связано с разностью термодинамических потенциалов аморфного и кристаллического состояний. Показано, что при выделении тепла, превышающем критическое значение, появляется стационарное состояние, в котором скорость фронта кристаллизации приобретает аномально большие значения. Исследован процесс взрывной кристаллизации, представляющий результат самоорганизуемой критичности в стохастическом распространении тепла по узлам иерархического дерева. Показано, что неустойчивость развивается только в том случае, когда тепловой эффект кристаллизации превышает критическое значение, величина которого определяется температуропроводностью.

Наконец, в подразделе 7.3 развито суперсимметричное представление бозе-эйнштейновской конденсации фермионных пар [63]. Построена суперсимметричная теория, в рамках которой компоненты поля сводятся к квадратному корню плотности бозе-конденсата, амплитуде её флуктуаций и грасмановым полям, определяющим плотность ферми-частиц. Показано, что в вырожденных ферми-бозевских смесях с ненарушенной суперсимметрией число фермионов сохраняется, а система инвариантна относительно обращения стрелы времени. Найдены полевые уравнения, описывающие пространственно-временные зависимости для ферми-бозевских смесей с нарушенной суперсимметрией. Решение этих уравнений показывает, что охлаждение системы с однородно распределёнными фермионами приводит к самопроизвольному нарастанию неоднородных флуктуаций ниже критической температуры. Дальнейшее понижение температуры ниже порога, определяемого

плотностью фермионов, обуславливает появление неоднородно распределенного бозе-конденсата.

### 7.1. Исследование фазового пространства сложных систем

Наиболее примечательным свойством сложных систем является *фрактальный* характер фазового пространства, самоподобие которого означает сохранение формы фрактала на различных масштабах его разрешения. Формально это свойство выражается в том, что мера  $Z$ , определённая на фрактале,<sup>9</sup> представляется однородной функцией, которая подчиняется соотношению [80]

$$Z(x/l) := l^D Z(x), \quad (7.1)$$

где  $l$  – масштаб переменной  $x$ ,  $D$  – фрактальная размерность. Если величина  $Z$  сводится к минимальному числу  $N$   $d$ -мерных кубиков с ребром  $l$ , которые покрывают фрактал, а переменная  $x$  представляет степень растяжения/сжатия, восстанавливающего его начальный размер в масштабе  $l$ , то  $x = l$  и равенство (7.1) даёт скейлинговое соотношение

$$N(l) = l^{-D}, \quad (7.2)$$

где принято, что объект единичной длины покрывается одним кубиком ( $N(1) = 1$ ). Отсюда следует определение фрактальной размерности Хаусдорфа:

$$D = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N(l)}{\ln(1/l)}. \quad (7.3)$$

Поскольку для множества, имеющего топологическую размерность  $D_0$ , кубики не всегда попадают на фрактал, то его размерность  $D \leq D_0$ .

---

<sup>9</sup>Для геометрических фракталов пример меры даёт длина изрезанной береговой линии, для случайных – статистическая сумма.

Соотношения (7.1) – (7.3) подразумевают простейшее (моно)фрактальное множество, которое характеризуется единственным значением  $D$ . В общем случае самоподобный объект представляется набором монофракталов, краткое описание которого изложено в пункте 7.1.1. Основная цель всего подраздела 7.1 состоит в разработке алгоритма численного моделирования мультифрактального фазового пространства сложных систем, особенности строения которого были исследованы аналитически [189]. Проблемы такого моделирования порождены двумя обстоятельствами: во-первых, сложные системы не являются самоусредняемыми статистическими объектами, поскольку их макроскопические характеристики изменяются случайным образом от образца к образцу; во-вторых, мультифрактальный спектр такого пространства принимает отрицательные значения, наличие которых приводит к отказу стандартной процедуры описания фракталов, основанной на методе покрытий [80]. Поэтому в пункте 7.1.2 мы приводим краткое описание бинарного мультифрактала Кантора, возможность аналитического описания которого позволяет тестировать метод множителей [239], лежащий в основе нашего рассмотрения. Как показывают пункты 7.1.3, 7.1.4, бинарный каскад позволяет генерировать случайный мультифрактал, имитирующий фазовое пространство сложной системы, если каждой бифуркации сопоставлять не пару вероятностей, а большее их число. В качестве физического примера в пункте 7.1.4 рассмотрено мультифрактальное множество, порождаемое процессом аномальной диффузии. Пункт 7.1.5 завершает наше рассмотрение обсуждением, результатом которого является численный алгоритм анализа случайных мультифракталов.

7.1.1. Основы теории мультифракталов Согласно [80], самоподобный объект представляется набором монофракталов, каждый из которых характеризуется показателем Гёльдера  $\alpha$ , определяющим вероятность

$$P_i := l_i^\alpha \quad (7.4)$$

попадания в ячейку  $i$  размером  $l_i \rightarrow 0$  (набор  $i = 1, 2, \dots, N$  таких ячеек получается делением исходного отрезка на  $N \rightarrow \infty$  частей). Мультифрактальное множество представляется мерой

$$Z(q) := \sum_{i=1}^N P_i^q, \quad (7.5)$$

значение которой  $Z(1) = 1$  в отсутствие деформации определяется условием нормировки  $\sum_{i=1}^N P_i = 1$ . Деформация  $q \neq 1$  позволяет выделить максимальный вклад больших вероятностей  $P_i$  при положительных  $q$  и малых  $P_i$  при отрицательных. Заданному значению показателя  $\alpha$  отвечают

$$\mathcal{N}(\alpha) := l_i^{-f(\alpha)} \quad (7.6)$$

ячеек, число которых определяется спектром мультифрактала  $f(\alpha)$ . В результате мера (7.5) принимает вид

$$Z(q) = \sum_{i=1}^N l_i^{q\alpha - f(\alpha)}. \quad (7.7)$$

Далее следует перейти от суммирования по ячейкам к интегрированию по спектру мультифрактала, где при  $l_i \rightarrow 0$  основной вклад дают значения  $\alpha$ , отвечающие минимальной величине показателя  $\tau = q\alpha - f(\alpha)$ . Поэтому при фиксированном параметре  $q$  в точке минимума  $\alpha = \alpha(q)$  приходим к условиям

$$\left. \frac{df}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha(q)} = q, \quad \left. \frac{d^2f}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=\alpha(q)} < 0, \quad (7.8)$$

которые определяют скейлинговый показатель  $\alpha(q)$  по заданному спектру  $f(\alpha)$ . При этом мера (7.7) принимает степенную форму

$$Z(q) \simeq l^{\tau(q)}, \quad (7.9)$$

где  $l \equiv \max\{l_i\}$  — максимальная длина ячеек  $i \in [1, N]$ , а показатель масс, определённый преобразованием Лежандра

$$\tau(q) := q\alpha(q) - f(\alpha(q)), \quad (7.10)$$

задаёт показатель Гёльдера

$$\alpha(q) = \frac{d\tau}{dq} \quad (7.11)$$

при фиксированном значении параметра деформации.

Как показывает пример спиновых стёкол [240], характерная особенность сложных систем состоит в том, что полный набор их состояний представляется не одним статистическим ансамблем, а иерархически соподчинённым набором ансамблей, состояния которых разделены макроскопическими барьерами термодинамического потенциала. Благодаря этому поведение системы существенно зависит от начальных условий, разброс которых может приводить к критическим изменениям статистических состояний системы при переходе от одной её реализации (образца) к другой. В этой связи принято говорить, что сложные системы обладают *замороженным беспорядком*, по которому следует провести усреднение, учитывающее разброс по различным реализациям сложной системы. Из соотношения (7.9) видно, что по аналогии со спиновыми стёклами описание мультифрактальных свойств сложных систем предполагает два типа усреднения:

— *замороженное* значение

$$\langle \tau(q) \rangle := \frac{\langle \ln Z(q) \rangle}{\ln l} \quad (7.12)$$

получается усреднением логарифма статистической суммы по соответствующему ансамблю;

– при определении *отожжённого* значения

$$\overline{\tau(q)} := \frac{\ln \overline{Z(q)}}{\ln l} \quad (7.13)$$

предполагается усреднение самой статсуммы (7.9) по различным реализациям, обусловленным разбросом начальных условий.

Как и в статистической физике спиновых стёкол [240], макроскопическое описание мультифрактального фазового пространства достигается комбинированным использованием обоих средних. Однако, если в термостатистике свободная энергия выражается через отожжённое среднее  $[\overline{Z(q)}]^n$  в рамках метода реплик ( $n \rightarrow 0$ ), то в теории случайных мультифрактальных множеств это достигается за счёт использования *метода множителей* [239], представленного в пункте 7.1.3. Имея в виду необходимость тестирования этого метода в приложении к сложным системам, приведём сначала основные сведения о бинарном мультифрактале Кантора, который допускает аналитическое исследование.

7.1.2. Бинарный мультифрактал Кантора Наиболее просто генерация мультифрактального множества достигается с помощью бинарного каскада Кантора, при котором отрезок единичной длины делится на две равные части, из которых одной приписывается вероятность  $p_1 < 1$ , другой  $p_2 = 1 - p_1$ . Далее процедура повторяется  $n \rightarrow \infty$  раз, приводя после каждого шага к распределению вероятностей  $P_n^i$  по различным конфигурациям  $i = 1, 2, \dots, 2^n$ . Так, после второго шага получаем распределение  $P_2^i: p_1p_1; p_1p_2, p_2p_1; p_2p_2$ , где запятые разделяют значения, отвечающие разным отрезкам, а точки с запятой – различные конфигурации. Соответственно, после третьего шага имеем  $P_3^i: p_1p_1p_1; p_1p_1p_2, p_1p_2p_1, p_2p_1p_1; p_1p_2p_2, p_2p_1p_2, p_2p_2p_1; p_2p_2p_2$ . Как видно из этих примеров, при заданном  $n$  различные конфигурации отличаются числом раз  $m$ , с которым встречается вероятность  $p_1$  в произведении  $P_n^m = p_1^m p_2^{n-m}$ . Очевидно, число таких произведений равно числу сочетаний  $C_n^m = n!/m!(n-m)!$ . В результате находим

меру мультифрактала Кантора

$$Z_n(q) := \sum_{i=0}^{2^n} (P_n^i)^q = \sum_{m=0}^n C_n^m (p_1^m p_2^{n-m})^q. \quad (7.14)$$

Принимая, что отрезок длиной  $l \rightarrow 0$  покрывает только одну группу  $n$ -значных чисел, содержащих  $m$  значений  $p_1$ , получаем приходящуюся на неё меру  $Z_n^m(q) = C_n^m l_n^q$ ,  $l_n = (1/2)^n$ , для которой использование формулы Стирлинга даёт конечное значение при условии  $q = f(s)$ , где функция

$$f(s) \equiv -[s \ln s + (1-s) \ln(1-s)] / \ln 2$$

зависит от аргумента  $s = m/n$ , определяющего долю значений  $p_1$  в группе  $m$ . С другой стороны, число монофракталов, содержащихся в мультифрактале Кантора, выражается равенствами  $\mathcal{N}_n^s := l_n^{-f(s)} = C_n^{sn}$ , из которых следует, что  $f(s)$  представляет спектральную функцию мультифрактала Кантора. Однако параметр  $s$  не является наблюдаемой величиной, и от него следует перейти к показателю Гёльдера  $\alpha$ , сравнивая определение  $P_n^s := l_n^\alpha$ ,  $l_n = (1/2)^n$  с ранее найденным равенством  $P_n^s = (p_1^s p_2^{1-s})^n$ . В результате приходим к линейной зависимости

$$\alpha = -[s \ln p_1 + (1-s) \ln p_2] / \ln 2,$$

которая имеет тот же вид  $f(\alpha)$ , что и  $f(s)$ . При этом ненулевые значения  $f$  сосредоточены в интервале от  $\alpha_{\min} = -\ln p_2 / \ln 2$  до  $\alpha_{\max} = -\ln p_1 / \ln 2$ , где  $p_1 \leq 1/2$ . Нижняя граница отвечает случаю  $s = 0$ , где биномиальная последовательность состоит только из чисел  $p_2$ , а верхняя — противоположному случаю  $s = 1$ , при котором последовательность сводится к набору чисел  $p_1$ . В предельных точках имеем  $df/d\alpha = \pm\infty$ , а максимальное значение  $f = 1$ , соответствующее  $df/d\alpha = 0$ , достигается при  $\alpha_0 = -(\ln p_1 + \ln p_2) / 2 \ln 2$ .

Приведенная процедура построения мультифрактала Кантора имеет то



преимущество, что не требует выхода за рамки аналитических методов. Поэтому её удобно использовать при тестировании численных алгоритмов генерации и описания мультифрактальных множеств. В качестве первого примера построения такого множества рассмотрим бинарный каскад, где на каждом шаге построения  $n \in [1, 10]$  одному отрезку сопоставляются вероятность  $p_1 = 0.3$ , а другому  $p_2 = 0.7$ . После этого выбирается  $N = 2 \cdot 10^6$  точек, которые рассыпаются по  $2^n$  сегментам таким образом, что в каждый попадает число  $N_n^m = N p_1^m p_2^{n-m}$  таких точек, пропорциональное соответствующей вероятности  $P_n^m = p_1^m p_2^{n-m}$ . Далее выбираем сегмент фиксированной длины  $l \in [10^{-3}, 10^{-2}]$ , покрываем им исходный отрезок единичной длины и подсчитываем число точек  $N_j^l$ , попавших в каждую ячейку  $j = 1, 2, \dots, 1/l$ . Получающиеся в результате вероятности  $P_j^l = N_j^l/N$  деформируем возведением в степень  $q$  и подсчитываем меру  $Z_l(q) := \sum_{j=1}^{1/l} (P_j^l)^q$ , определённую согласно (7.14). Для самоподобного множества эта мера имеет степенной вид (7.9), откуда легко найти значение показателя масс  $\tau(q)$ , сводящееся при  $q = 1$  к фрактальной размерности (7.3). С изменением параметра деформации  $q$  использование равенств (7.10) и (7.11) приводит к спектру мультифрактала  $f(\alpha)$ , показанному на рис. 7.1. Существенная особенность приведенного построения состоит в том, что после  $n$  итераций число  $2^n$  отрезков, полученных делением исходного, совпадает с числом различных комбинаций сомножителей в вероятностях  $P_n^m = p_1^m p_2^{n-m}$  при различных  $m \in [0, n]$ . Благодаря этому возможные значения показателя Гёльдера  $\alpha$  определяются единственной реализацией биномиального процесса Кантора, которая приводит к спектру мультифрактала  $f(\alpha)$ , показанному на рис. 7.1. Из него следует, что для детерминированного мультифрактала метод покрытий хорошо согласуется с аналитическими данными при положительных параметрах деформации  $q$ , тогда как для отрицательных  $q$  точность существенно снижается. Что касается затрат машинного времени, обеспечивающего представленный алгоритм численного моделирования и определения спектра мультифрактала, то они вполне приемлемы.

7.1.3. Метод множителей Как указывалось во введении к этой главе, фазовое пространство сложной системы имеет случайный характер, благодаря чему каждая его реализация приводит к мультифрактальному спектру, изменяющему свою форму при переходе от одного образца к другому. Покажем, что бинарный каскад генерации мультифрактала, описанный в предыдущем пункте, обеспечивает указанный разброс спектра, если после каждой бифуркации паре ячеек сопоставлять не две возможности  $[p_1, p_2]$  и  $[p_2, p_1]$  в распределении вероятностей  $p_1$  и  $p_2 = 1 - p_1$ , а большее их число. Оказывается, что набор этих вероятностей представляет множители, повторяющиеся комбинации которых образуют мультифрактальное множество [239].

Пусть паре ячеек, генерируемых на каждом шаге построения, сопоставляется один из четырёх вариантов  $[p_1, p_2]$ ,  $[p_2, p_1]$ ,  $[p_3, p_4]$  и  $[p_4, p_3]$  сочетания вероятностей  $p_1 < p_3 < 1/2$ ,  $p_2 = 1 - p_1$  и  $p_4 = 1 - p_3$ . Тогда на шаге  $n$  каждая комбинация множителей  $p_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  возникает с вероятностью  $(1/4)^n$ , а число различных ячеек составляет по-прежнему  $2^n$ . В результате перебор всех комбинаций в распределении множителей на  $n$ -ом шаге генерации достигается не в одном образце, а в их наборе, состоящем из  $(2^n 4^{-n})^{-1} = 2^n$  штук. Это означает, что при таком построении определение достоверного спектра  $f(\alpha)$  требует усреднения по образцам, набор которых обеспечивает

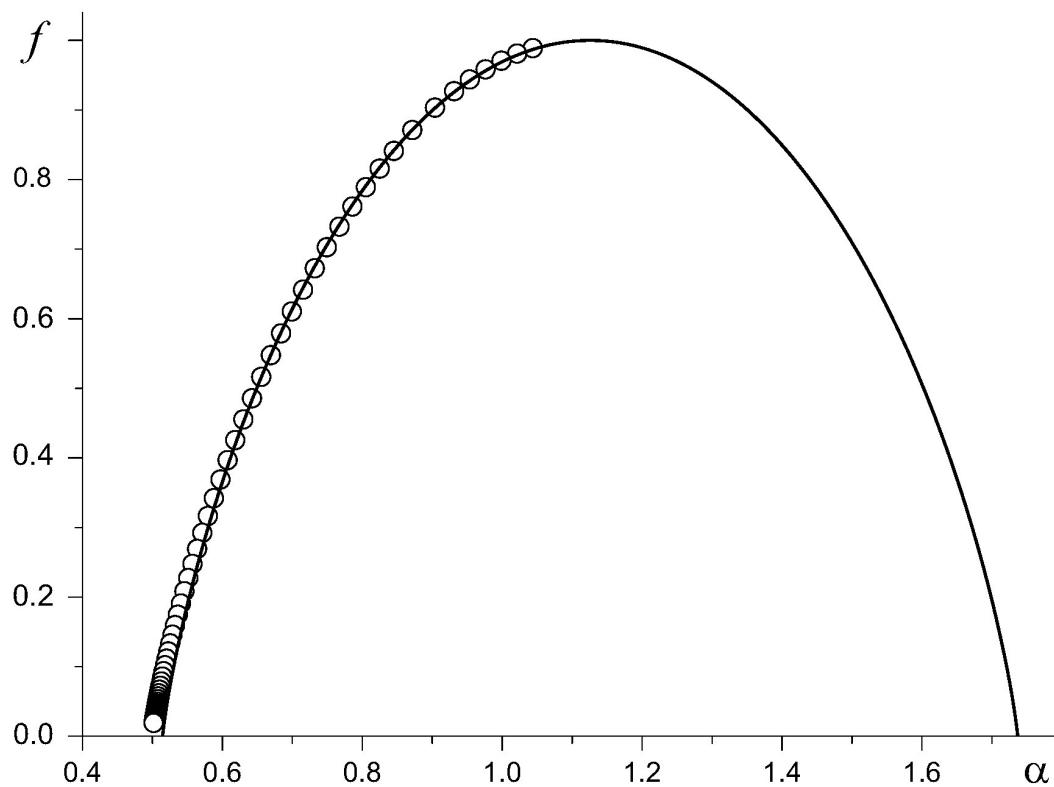


Рис. 7.1. Спектр мультифрактала Кантора, генерированного бинарным каскадом из  $n = 10$  уровней с вероятностями  $p_1 = 0.3$  и  $p_2 = 0.7$  (сплошная линия получена аналитически, полые кружки — методом покрытий при  $q = 0.1, 0.2, \dots, 10$ )

все возможные комбинации в распределении сомножителей  $p_j$  по разным ячейкам.

Изложенный пример показывает, что при описании случайного мультифрактала отождѐнное значение (7.13) может быть определено усреднением по набору образцов:

$$\overline{\tau(q)} = \frac{\ln \overline{Z_n(q)}}{\ln(1/2)} := \frac{1}{\ln(1/2)} \ln \left[ \frac{1}{K} \sum_{a=1}^K \sum_{i=1}^{2^n} (P_i^a)^q \right]. \quad (7.15)$$

Здесь  $K$  — число таких образцов,  $P_i^a$  — мера  $i$ -й ячейки в  $a$ -ом образце на уровне  $n \gg 1$ . Поскольку повышение точности достигается за счёт увеличения числа шагов итерации  $n$ , что приводит к экспоненциальному росту ансамбля образцов (в приведенном примере их число равнялось  $2^n$ ), то процедура усреднения по различным образцам требует больших вычислительных затрат, которые экспоненциально возрастают с повышением точности. Эту проблему позволяет обойти *метод множителей*.

В рамках этого метода процедура усреднения сводится к следующим действиям:

- на шаге  $n - 1$  покрываем единичный отрезок ячейками  $i = 1, 2, 3, \dots, 2^{n-1}$  размером  $2^{-(n-1)}$  и подсчитываем число точек  $N_i$ , попавших в каждую из них;
- переходим на следующий уровень  $n$ , для чего ячейки  $i = 1, 2, 3, \dots, 2^{n-1}$  делим пополам и подсчитываем числа точек  $N_i^{(1,2)}$  в каждой из половинок;
- из определения

$$M_i^{(1,2)} := \frac{N_i^{(1,2)}}{N_i} \quad (7.16)$$

находим набор  $\{M_j\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, 2^n$  множителей, отвечающих уровню  $n$  (можно принять  $j = 2i$  для чётных и  $j = 2i + 1$  для нечётных индексов);

- вместо среднего по образцам (7.15) вводим среднее по распределению

множителей

$$\overline{\tau(q)} = \frac{\ln \overline{Z(q)}}{\ln(1/2)}, \quad \overline{Z(q)} := \frac{1}{2^{(n-1)}} \sum_{j=1}^{2^n} M_j^q. \quad (7.17)$$

Спектр мультифрактала имеет единую форму  $f(\alpha)$  на всех уровнях  $n$  при самоподобном распределении множителей, которое обеспечивается повторяющимися сочетаниями в их распределении [239]. Так, в примере, приведенном в начале пункта, все множители сводятся к набору элементарных вероятностей  $p_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , определённое чередование которых на каждом шаге итерации  $n$  (например, последовательность Фибоначчи) будет приводить к генерации монофрактала. Деформация множителей за счёт возведения в степень  $q$  трансформирует монофрактал в мультифрактальное множество.

Благодаря самоподобию для каждого показателя  $\alpha$  можно найти множитель  $M^*$ , который после многократной итерации отвечает тому же показателю Гёльдера:  $M^* \sim 2^{-\langle \alpha(M^*) \rangle}$ . При этом вероятность реализации множителя  $M^*$ , отвечающего фиксированному показателю  $\alpha$ , имеет вид

$$P(M^*) := l\mathcal{N}(M^*) = 2^{-D_0 + f(M^*)}, \quad (7.18)$$

где  $D_0 = 1$  — размерность отрезка, на котором проводится построение. Использование этой вероятности в первой из формул (7.17) приводит к среднему значению показателя масс

$$\overline{\tau(q)} = -D_0 - \frac{\ln \overline{M^q}}{\ln 2}, \quad (7.19)$$

откуда следует

$$\overline{\alpha(q)} = \frac{\overline{\partial \tau}}{\partial q} = -\frac{\overline{\ln(M)M^q}}{\ln(2)\overline{M^q}}. \quad (7.20)$$

В результате спектральная функция определяется выражением

$$f(\alpha(q)) = \overline{q\alpha(q)} - \overline{\tau(q)}. \quad (7.21)$$

На рис. 7.2 показан спектр мультифрактала, генерированного бинарным каскадом при случайном выборе вероятностей  $p_1 = 0.2$ ,  $p_2 = 0.8$ ,  $p_3 = 0.3$  и  $p_4 = 0.7$ . Из рисунка видно, что результаты прямого вычисления по формуле (7.17), где набор множителей  $M_j$  образуется  $2^8$ -кратным повторением набора указанных вероятностей, удовлетворительно согласуются с численными данными, найденными методом множителей. Это позволяет заключить, что данный метод является надёжной основой численного определения мультифрактального спектра самоподобных множеств, генерированных случайным образом.

При рассмотрении рис. 7.2 обращает на себя внимание тот факт, что в отличие от метода покрытий использование множителей приводит к отрицательным значениям спектральной функции  $f(\alpha)$ , которые отвечают большим абсолютным значениям  $|q|$  параметра деформации. Это связано с тем, что использование метода покрытий предполагает определение замороженных средних типа (7.12), для которых каждому значению  $\alpha$  отвечает не менее одной реализации (образца), благодаря чему среднее значение спектральной функции  $\langle f(\alpha) \rangle = \langle \ln \mathcal{N}(\alpha) \rangle / \ln(2)$  не может принимать отрицательные значения. В рамках метода множителей, основанного на использовании отождѐнных средних вида (7.13), проводится усреднение самого числа фракталов, отвечающих данному показателю  $\alpha$ . Поскольку  $\overline{\mathcal{N}(\alpha)}$  может быть меньше единицы, то соответствующее значение спектральной функции  $\overline{f(\alpha)} = \ln \overline{\mathcal{N}(\alpha)} / \ln(2)$  может стать отрицательным. Отсюда видно, что для случайного мультифрактала отрицательные значения спектральной функции  $f(\alpha)$  отвечают наиболее редким реализациям меры.

В примере случайного каскада, приведенном в начале этого пункта, каждой ячейке сопоставлялась одна из четырёх вероятностей  $p_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , благодаря

чему на шаге  $n$  конфигурации  $p_j^n$  реализовались с частотой  $\overline{\mathcal{N}}_n = 2^{-n}$ , равной обратному числу образцов, набор которых обеспечивает все возможные конфигурации. В результате предельные значения  $\alpha_{\min} = -\ln p_2 / \ln 2$  и  $\alpha_{\max} = -\ln p_1 / \ln 2$ , при которых реализуются единственные комбинации множителей  $p_2^n$  и  $p_1^n$ , дающие максимальную и минимальную вероятности, отвечают отрицательному значению спектральной функции  $f = \ln \overline{\mathcal{N}}_n / \ln(1/l_n) = \ln 2^{-n} / \ln 2^n = -1$  (см. рис. 7.2). В общем случае, когда каждой из  $2^n$  ячеек сопоставляются  $m > 2$  вероятностей  $p_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , частота появления каждой конфигурации  $p_j^n$  составляет  $\overline{\mathcal{N}}_n = 2^n (1/m)^n = (2/m)^n$ , и предельные комбинации множителей  $p_{\max}^n$  и  $p_{\min}^n$  реализуются при значении спектральной функции

$$f_{\min} := \frac{\ln \overline{\mathcal{N}}_n}{\ln(1/l_n)} = \frac{\ln(2/m)^n}{\ln(2^n)} = - \left( \frac{\ln m}{\ln 2} - 1 \right). \quad (7.22)$$

Что касается максимального значения  $f_{\max} = 1$ , то рэндомизация генерирующего каскада не влияет на него, поскольку это значение должно совпадать с размерностью  $D_0 = 1$  исходного отрезка, на котором проводится построение мультифрактала [80].

В подтверждение приведенных данных на рис. 7.3 построены спектры мультифракталов, для которых возможные множители  $M_j$  сводятся к наборам элементарных вероятностей  $p_j$ , каждый из которых содержит  $2^{m+1}$ ,  $m = 0, 1, 2, 3$  значений. Из соответствующих кривых видно, что расширение набора множителей приводит к росту области значений как самой спектральной функции  $f$ , так и показателя Гёльдера  $\alpha$ . Поскольку первая величина ограничена сверху геометрическим значением  $f_{\max} = 1$ , то это расширение обеспечивается спаданием минимальных значений показателя Гёльдера  $\alpha_{\min} = -\ln p_{\max} / \ln 2$  и спектральной функции (7.22), а также ростом максимального значения  $\alpha_{\max} = -\ln p_{\min} / \ln 2$ .

При численной реализации метода множителей следует иметь в виду, что уменьшение минимального значения  $p_{\min} \rightarrow 0$  из набора вероятностей  $p_j$ ,

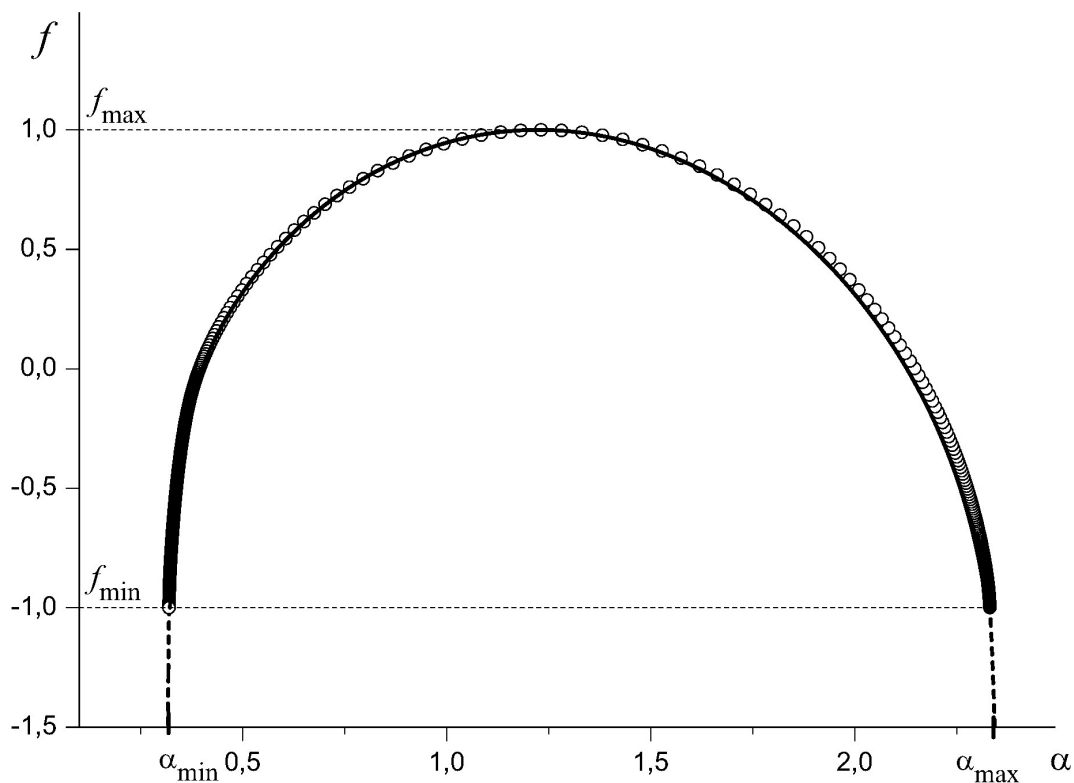


Рис. 7.2. Спектр случайного мультифрактала, генерированного бинарным каскадом, состоящим из  $n = 10$  уровней с вероятностями  $p_1 = 0.2$ ,  $p_2 = 0.8$ ,  $p_3 = 0.3$  и  $p_4 = 0.7$  (сплошная линия получена из (7.17), если набор множителей  $M_j$  образуется  $2^8$ -кратным повторением набора указанных вероятностей; полые кружки отвечают результатам метода множителей с использованием соотношений (7.19) – (7.21) при различных  $q$ )



$j = 1, 2, \dots, m$  может приводить к исчезающе малому значению  $N_{\min}^n = 2^{-n} N p_{\min} \ll 1$  минимального числа заполнения, что означает появление пустых ячеек, наличие которых искажает форму мультифрактального спектра. В этом случае для достижения надёжных данных следует проводить оптимизацию метода множителей, при которой на каждом шаге генерации  $n$  выбирается настолько большое число  $N$  покрывающих точек, чтобы они попадали в каждую из  $2^n$  ячеек.

Другое проявление этой проблемы связано с появлением пустых ячеек при неограниченном спадании деформированных множителей  $M_j^q$  благодаря росту параметра  $q > 1$  в равенстве (7.17). В результате использование метода множителей с возрастающими значениями  $q$  может привести к значениям спектральной функции  $f(\alpha)$ , лежащим ниже точки минимума (7.22). Во избежание сказанного алгоритм обработки мультифрактального спектра должен строиться таким образом, чтобы рост параметра деформации прерывался при значениях  $q$ , начиная с которых появляются пустые ячейки.

7.1.4. Мультифрактальный спектр фазового пространства Основным объектом нашего исследования является фазовое пространство, определённое объёмом  $\gamma = \Gamma / (2\pi\hbar)^{6N}$ , отнесённым к значению, приходящемуся на одно состояние (здесь  $\hbar$  — постоянная Планка-Дирака, фазовый объём  $\Gamma = \prod_{a=1}^N \int d^3q_a \int d^3p_a$  определяется интегрированием по координатам  $\mathbf{q}_a$  и импульсам  $\mathbf{p}_a$  всех частиц  $a = 1, \dots, N$ ). В случае простых систем, для которых фазовое пространство является гладким, безразмерный объём  $\gamma$  сводится к статистическому весу  $W$ , определяющему число состояний системы  $W = \gamma$ . Однако фазовое пространство сложных систем является фрактальным объектом, размерность которого  $D < 6N$  меньше значения, присущего простым трёхмерным системам, состоящим из  $N$  частиц. Благодаря этому статистический вес самоподобной сложной системы определяется степенной зависимостью  $W = \gamma^d$  с показателем  $0 \leq d \leq 1$ , представляющим удельное значение фрактальной размерности  $d \equiv D/6N$ . Сравнение этой зависимости со скейлинговым соотношением (7.4) показывает, что мультифрактальное

представление фазового пространства достигается, если вероятность  $P_i$  сводится к обратному статистическому весу  $1/W$ , длина элементарного отрезка  $l_i$  — к обратному объёму  $1/\gamma$ , а показатель Гёльдера  $\alpha$  — к относительной размерности  $d$ .

В согласии со схемой, изложенной в пункте 7.1.1, для перехода к мультифрактальному фазовому пространству следует заменить степенную функцию  $W = \gamma^d$ , присущую монофракталу, удельным статистическим весом  $\mathcal{W}_q = \gamma^{qd}$ , деформированным показателем  $q$ , и умножить его на число монофракталов  $\mathcal{N}_d = \gamma^{-f(d)}$  с размерностью  $d$ , которые содержатся в мультифрактале со спектром  $f(d)$ . В результате полный статистический вес, играющий роль меры мультифрактала, принимает степенной вид  $W_q \simeq \gamma^{\tau(q)}$  формы (7.9) с показателем масс  $\tau(q) = qd_q - f(d_q)$ , для которого удельная размерность  $d_q$  определяется равенством типа (7.11). В рамках метода множителей отождествлённое среднее показателя масс определяется равенством  $\overline{\tau(q)} = \ln \overline{W_q} / \ln \gamma$  вида (7.13). Тогда использование средней размерности  $\overline{d_q} = \overline{d\tau/dq}$  приводит к спектру самоподобного мультифрактала

$$f(d_q) = q\overline{d_q} - \overline{\tau(q)}. \quad (7.23)$$

Как показал анализ [189], показатель масс  $\tau(q)$  фазового пространства сложных систем представляет монотонно возрастающую функцию, которая изменяется в интервале  $[0, 1)$  при вариации показателя мультифрактала в области  $[1, \infty)$ . Простейший пример такой функции даёт гиперболический тангенс  $\tau = \text{th}(q - 1)$ , деформирование которого приводит к аналитической модели произвольного мультифрактального пространства [189]. Возможные типы зависимости  $\tau(q)$  в интервале  $q \in [1, 2]$  ограничены сверху линейной функцией  $\tau = q - 1$ , которая при  $q > 2$  переходит в константу  $\tau = 1$  (эта зависимость отвечает гладкому фазовому пространству).

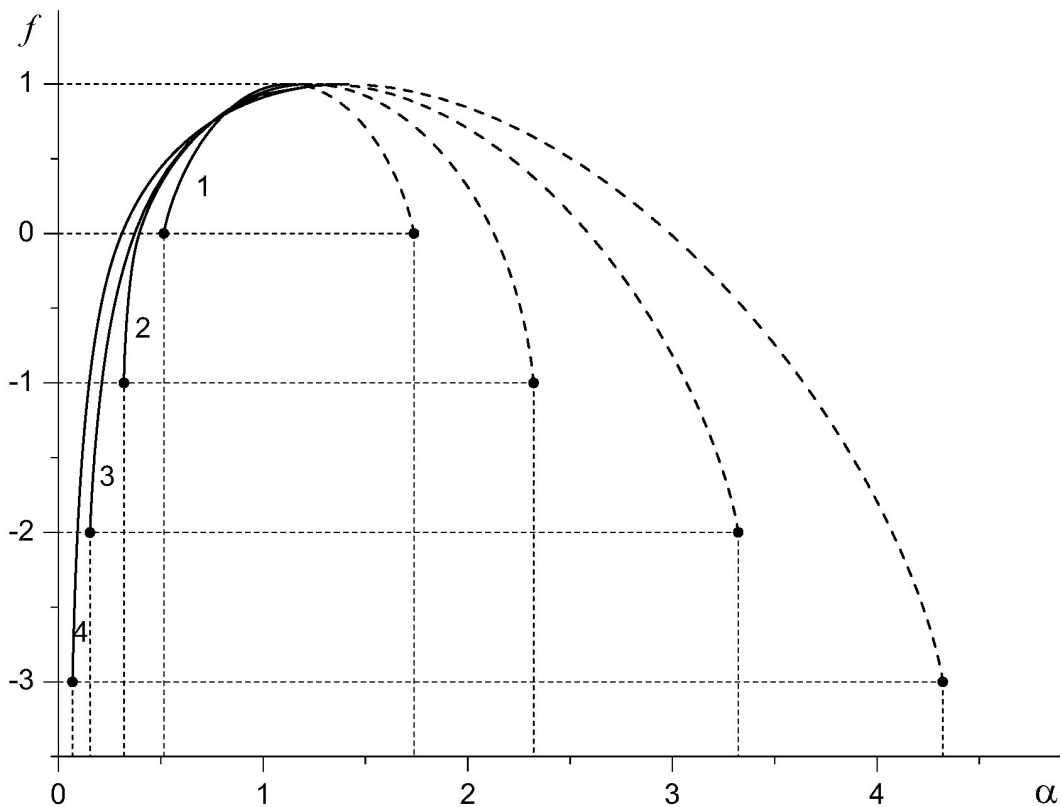


Рис. 7.3. Изменение мультифрактального спектра с ростом набора, состоящего из  $2^{m+1}$  вероятностей, которые сопоставляются каждой бифуркации (кривые 1–4 отвечают  $m = 0, 1, 2, 3$ ; кривая 1:  $p_1 = 0.3$  и  $p_2 = 0.7$ ; кривая 2:  $p_1 = 0.2$ ,  $p_2 = 0.8$ ,  $p_3 = 0.3$  и  $p_4 = 0.7$ ; кривая 3:  $p_1 = 0.1$ ,  $p_2 = 0.9$ ,  $p_3 = 0.2$ ,  $p_4 = 0.8$ ,  $p_5 = 0.3$ ,  $p_6 = 0.7$ ,  $p_7 = 0.4$  и  $p_8 = 0.6$ ; кривая 4:  $p_1 = 0.05$ ,  $p_2 = 0.95$ ,  $p_3 = 0.10$ ,  $p_4 = 0.90$ ,  $p_5 = 0.15$ ,  $p_6 = 0.85$ ,  $p_7 = 0.20$ ,  $p_8 = 0.80$ ,  $p_9 = 0.25$ ,  $p_{10} = 0.75$ ,  $p_{11} = 0.30$ ,  $p_{12} = 0.70$ ,  $p_{13} = 0.35$ ,  $p_{14} = 0.65$ ,  $p_{15} = 0.40$  и  $p_{16} = 0.60$ ). Сплошные линии отвечают положительным значениям  $q$ , штриховые – отрицательным

Что касается спектральной функции  $f(d)$ , то она монотонно возрастает от минимальной величины  $f = -1$  при  $d = 0$  до максимальной  $f = 1$  при  $d = 1$ ; при этом её производная равна  $f'(0) = \infty$  на левой границе, и  $f'(1) = 1$  – на правой. Полный набор спектральных функций ограничен снизу зависимостью  $f = 2d - 1$ , а сверху – прямой  $f = d$ . Характерно, что спектральная функция принимает отрицательные значения в пределе  $d \rightarrow 0$ , который отвечает разреженным монофракталам, стремящимся к набору точек фазового пространства. Очевидно,

число таких точек равно объёму  $\gamma$ , что и даёт определение  $\mathcal{N}_d := \gamma^{-f(d)}$  при  $f = -1$ . С другой стороны, на противоположной границе  $d = 1$ , где  $f = 1$ , получаем число монофракталов  $\mathcal{N}_1 = \gamma^{-1}$  с объёмом  $\gamma$ , которое, как и следовало ожидать, даёт один мультифрактал того же объёма  $\gamma$ .

Использование метода множителей, изложенного в предыдущем подразделе, позволяет провести моделирование и обработку спектра мультифрактального фазового пространства, обладающего представленными свойствами. Поскольку минимальное значение спектральной функции имеет значение  $f_{\min} = -1$ , то равенство (7.22) удовлетворяется только при условии  $m = 4$ , отвечающем выбору двух пар вероятностей  $p_1, p_2 = 1 - p_1$  и  $p_3, p_4 = 1 - p_3$ . Примем в последней  $p_3 = 0.3$ , а в первой вероятность  $p_1$  пробегает значения 0.001, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05. Тогда соответствующие кривые на рис. 7.4 показывают, что уменьшение вероятности  $p_1$  улучшает совпадение с аналитическими данными при малых значениях размерности  $d$ , тогда как в окрестности точки  $d = 1$  точность ухудшается. Такое поведение наиболее просто выражается степенным представлением варьируемой вероятности  $p_1 = 10^{-k}$ ,  $k > 0$ . Тогда минимальная размерность  $d_{\min} = -\ln(1 - p_1)/\ln 2 \simeq 1.443 \cdot 10^{-k}$  экспоненциально спадает с ростом показателя  $k$ , а размерность  $d_0 = -[\ln p_1 + \ln(1 - p_1)]/2\ln 2 \simeq 1.661 k$ , отвечающая максимуму спектральной зависимости  $f(d)$ , при этом линейно возрастает. Поведение показателя масс  $\tau(q)$  на рис. 7.4 показывает, что наиболее важной оказывается форма спектра вблизи точки  $d = 0$ , благодаря чему следует принять степень  $k \gg 1$ .

Везде выше рассматривались случайные множества, генерированные биномиальным каскадом, каждой бифуркации которого сопоставлялись различные наборы вероятностей. Воспользуемся теперь более физической процедурой, в рамках которой точки фрактального множества отвечают положениям частицы, диффундирующей согласно дискретному стохастическому

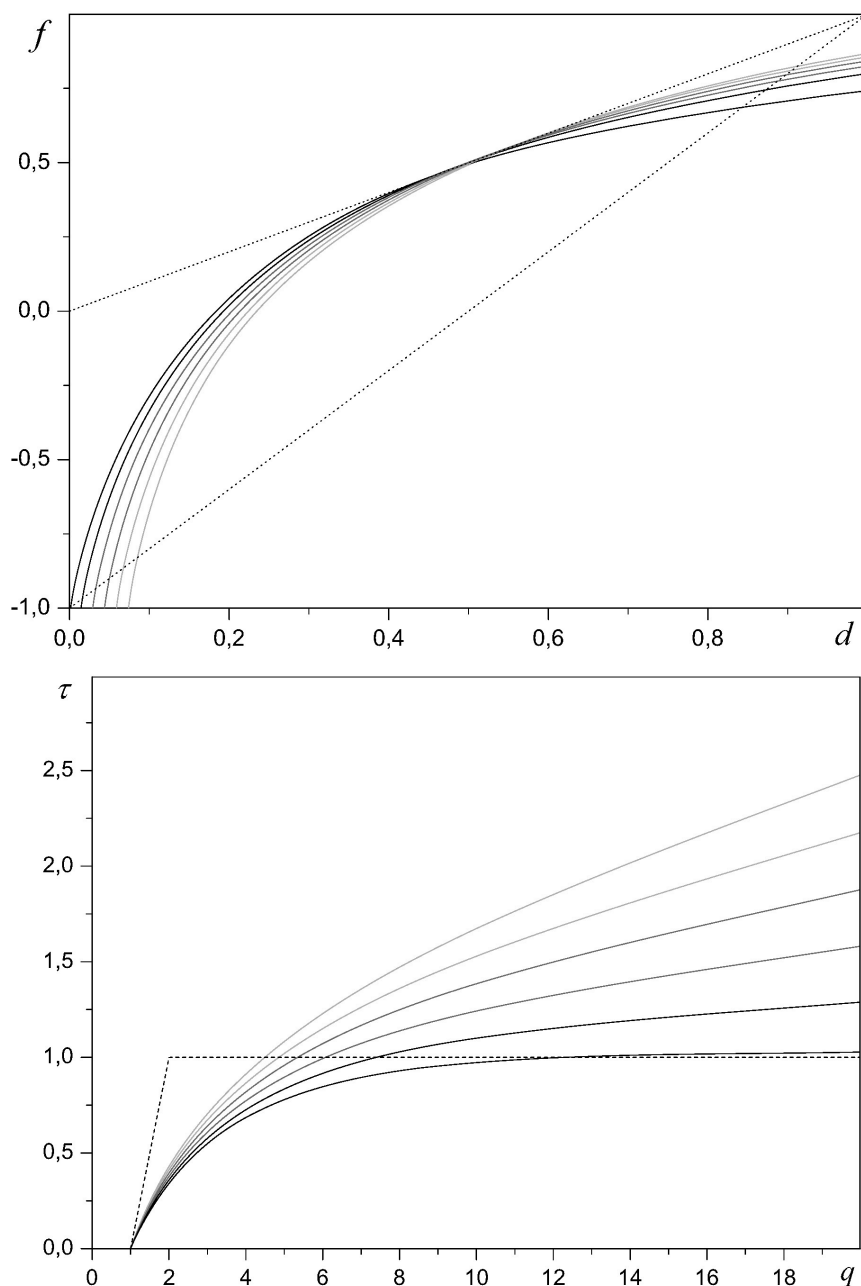


Рис. 7.4. Спектральная функция и показатель масс мультифрактального множества, генерированного бинарным каскадом из  $n = 9$  уровней с двумя парами вероятностей  $p_1, p_2 = 1 - p_1$  и  $p_3, p_4 = 1 - p_3$  (для последней принято  $p_3 = 0.3$ , а в первой вероятности  $p_1 = 0.001, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05$  отвечают кривым, идущим слева направо в нижнем углу зависимости  $f(d)$ ). Пунктирные линии показывают границы изменения зависимостей  $f(d)$  и  $\tau(q)$  для фазового пространства термостатистических ансамблей [189]

уравнению [203]

$$x_{i+1} = \sqrt{\tau}\zeta_i + [(1 - \gamma\tau) + \sqrt{\tau}\xi_i] x_i. \quad (7.24)$$

Здесь время  $t_i = i\tau$  фиксируется набором чисел  $i = 0, 1, \dots, N$  и минимальным интервалом  $\tau$ ;  $\zeta_i$  и  $\xi_i$  — аддитивный и мультипликативный стохастические источники, нормированные условиями белого шума  $\langle \zeta_i \zeta_j \rangle = \langle \xi_i \xi_j \rangle = \delta_{ij}$ ; коэффициент трения  $\gamma$  определяет параметр  $\nu = \gamma/(1 + \gamma)$ , значения которого задают режим диффузии: при  $\nu < 0$  реализуются полёты Леви, а предел  $\nu \rightarrow 1, \gamma \rightarrow \infty$  отвечает броуновскому движению. Использование итерационной процедуры (7.24) приводит к мультифрактальному множеству, спектральная функция которого показана на рис. 7.5. Из него видно, что с уменьшением параметра  $\nu$  нормальная диффузия переходит в полёты Леви, благодаря чему спектр мультифрактала расширяется в сторону малых размерностей  $d$ . Очевидно, это обусловлено появлением разреженных областей фрактального множества, где значения  $d = 0$  отвечают экстремальным выбросам положений частицы, отвечающим полётам Леви.

Рассмотрим наконец двумерное фазовое пространство, порождаемое дискретным стохастическим уравнением (7.24). В отличие от одномерного случая теперь следует учитывать не только положения  $x_i$ , но и импульсы  $p_i = (x_i - x_{i-1})/\tau$ . В рамках метода множителей это означает, что на уровне  $n - 1$  двумерное множество покрывается  $2^{2(n-1)}$  квадратами со стороной  $2^{-(n-1)}$ , после чего каждый из этих квадратов делится на  $2^2$  равных частей и каждой из них приписываются множитель типа (7.16). Получающийся набор  $\{M_j\}$ , состоящий из  $2^{2n}$  таких множителей, определяет средний показатель масс

$$\overline{\tau(q)} := \frac{1}{\ln(1/2)} \ln \left( 2^{-D_0(n-1)} \sum_{i=1}^{2^{D_0 n}} M_j^q \right), \quad (7.25)$$

который отличается от (7.17) появлением в показателях, отражающих дробление

фазового пространства, множителя, равного топологической размерности  $D_0 = 2$ . Из рис. 7.6, на котором показана спектральная функция, определённая в соответствии с приведенной процедурой, следует, что как и выше переход от броуновского движения к полётам Леви расширяет спектр мультифрактала. Единственное отличие от одномерного случая состоит в удвоении интервалов изменений фрактальной размерности  $D$  и спектральной функции  $f$ .

7.1.5. Обобщение метода множителей Как указывалось во введении к этому разделу, основная трудность в описании сложных систем состоит в том, что они не являются самоусредняемыми статистическими объектами, благодаря чему определение их макроскопических характеристик требует проводить усреднение не только по статистическому ансамблю, который реализуется в данном образце, но и по набору различных образцов. Кроме того, мультифрактальный спектр фазового пространства сложных систем принимает отрицательные значения, которые не могут быть определены стандартным методом покрытий.

Исследование мультифрактальных множеств в пунктах 7.1.3, 7.1.4 показывает, что обе указанные проблемы преодолеваются в рамках метода множителей, набор которых сводится к многократным повторениям относительно малого числа вероятностей, определяющих картину фазового пространства (число таких вероятностей  $m$  оценивается минимальным значением (7.22) спектральной функции). Интересно отметить, что метод множителей был предложен в

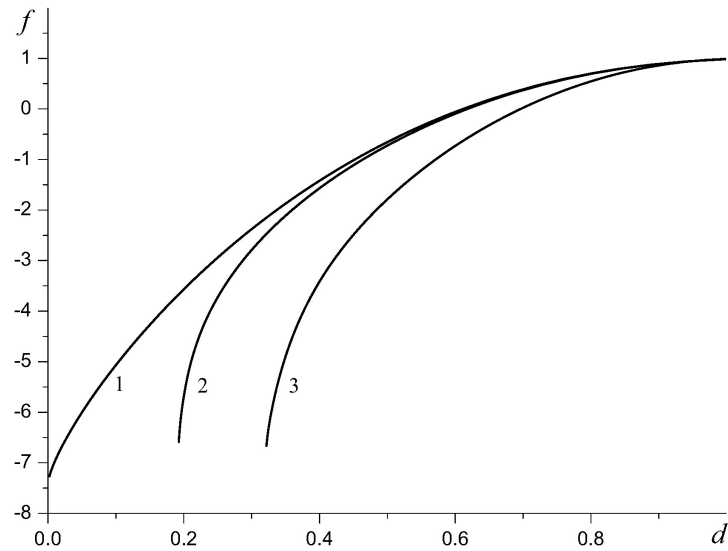


Рис. 7.5. Спектральная функция мультифрактального множества, генерированного дискретным процессом (7.24) при  $N = 10^6$ ,  $n = 10$  и  $\nu = -0.5, 0.0, 0.5$  (кривые 1–3 соответственно)

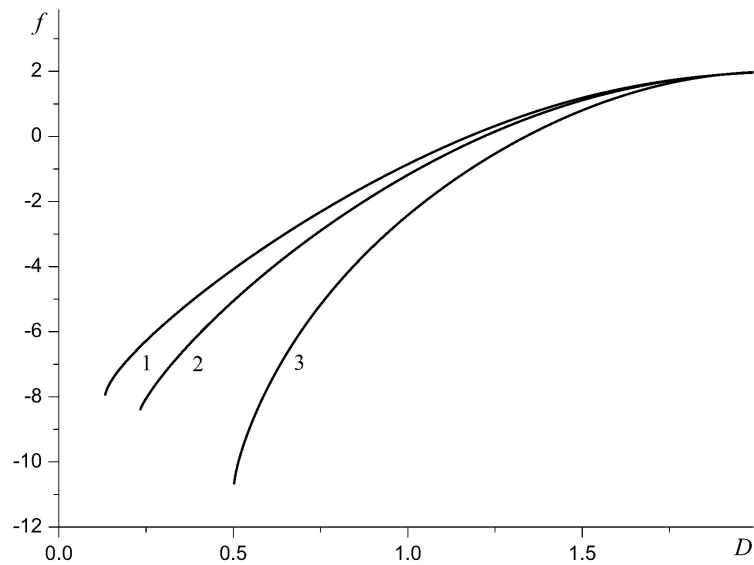


Рис. 7.6. Мультифрактальный спектр фазового пространства, порождаемого дискретным процессом (7.24) при  $N = 10^6$ ,  $n = 9$  и  $\nu = -0.5, 0.0, 0.5$  (кривые 1–3 соответственно)



рамках каскадного представления турбулентности [241] задолго до приложения к теории мультифракталов [239].

Среди других методов заслуживает упоминания процедура прямого определения мультифрактальных спектров [242], в рамках которой не требуется находить сначала показатель масс, а затем — из преобразования Лежандра (7.23) — спектральную функцию. Данный метод основан на использовании *эскортной вероятности* [154]

$$\mathcal{P}_j := \frac{P_j^q}{\sum_j P_j^q}, \quad (7.26)$$

где затравочное распределение  $P_j$  определяет уровни энергии  $\varepsilon_j := -\ln P_j$ . В результате вероятность (7.26) принимает вид распределения Гиббса

$$P_j = Z_q^{-1} \exp(-q\varepsilon_j), \quad Z_q := \sum_j \exp(-q\varepsilon_j), \quad (7.27)$$

использование которого даёт внутреннюю энергию  $\alpha := \langle \varepsilon \rangle = -\langle \ln P \rangle$  и энтропию  $f := -\langle \ln \mathcal{P} \rangle$ . Они связаны преобразованием Лежандра (7.10), приводящим к свободной энергии  $\tau$  при условии, что параметр деформации  $q$  играет роль обратной температуры. Указанная термодинамическая аналогия позволяет определить показатель Гёльдера и спектральную функцию мультифрактального множества стандартными равенствами

$$\alpha(q) := \frac{\sum_j \mathcal{P}_j^l \ln P_j^l}{\ln l}, \quad f(q) := \frac{\sum_j \mathcal{P}_j^l \ln \mathcal{P}_j^l}{\ln l}, \quad (7.28)$$

в которых вероятности  $P_j^l := N_j^l / \sum_j N_j^l$  пропорциональны числу точек  $N_j^l$ , попавших в ячейку  $j = 1, 2, \dots, 1/l$  после деления единичного отрезка на ячейки длиной  $l \ll 1$ . Тестирование определений (7.28) на бинарном каскаде, приводящем к спектру, показанному на рис. 7.1, обнаруживает полное соответствие с аналитическими данными пункта 7.1.2. Более того, равенства

(7.28) позволяют воспроизвести спадающую ветвь спектральной функции  $f(\alpha)$ , которая отвечает отрицательным значениям параметра деформации  $q$ . Однако подобно методу покрытий определения (7.28) не дают отрицательных значений спектральной функции случайного мультифрактала, отвечающего рис. 7.2. Очевидно, это обусловлено тем, что выражения (7.28) предполагают усреднение логарифмических функций, что означает использование замороженных средних, которые могут приводить только к положительным величинам.

Представленные преимущества использования прямого метода определения спектральной функции указывают на целесообразность поиска определений типа (7.28) в рамках метода множителей, являющегося основой исследования мультифрактальных спектров сложных систем. С целью такого поиска переопределим эскортную вероятность (7.26)

$$\mathcal{P}_j := \frac{M_j^q}{\sum_{j=1}^{BN} M_j^q} \quad (7.29)$$

через набор множителей  $M_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, BN$ , заданных равенствами

$$M_i^k := \frac{N_i^k}{N_i}, \quad k = 1, 2, \dots, B, \quad (7.30)$$

обобщающими (7.16). Здесь подразумевается, что исследуемое множество сначала делится на  $N \gg 1$  частей  $i = 1, 2, \dots, N$ , каждая из которых содержит  $N_i \gg 1$  точек; после этого полученные фрагменты делятся на  $B \geq 2$  ячеек, в которые попадают по  $N_i^k \gg 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, B$  точек; полученные в результате  $BN$  ячеек нумеруются индексом  $j = 1, 2, \dots, BN$  таким образом, чтобы обеспечить перебор всех возможных значений  $i = 1, 2, \dots, N$  и  $k = 1, 2, \dots, B$ , представляющих исходные фрагменты и их составляющие. В том случае, если исследуемое множество заполняет пространство единичного объёма, обладающее топологической размерностью  $D_0$ , удобно разделить его сначала на  $D_0$ -мерные кубики с ребром  $L \ll 1$ , а потом каждый из них поделить на ячейки той же

размерности с кратной стороной  $l = L/b$ ,  $b = 2, 3, \dots$ . В этом случае  $N = (1/L)^{D_0}$ ,  $B = b^{D_0}$ .

Далее полученному набору множителей (7.30) сопоставляем средние величины

$$\begin{aligned} \langle\langle f(M) \rangle\rangle &:= \sum_{j=1}^{BN} \mathcal{P}_j f(M_j); \\ \overline{\overline{f(M)}} &:= \sum_{j=1}^{BN} \pi_j f(M_j), \quad \pi_j := \frac{1}{N}. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Первая представляет замороженное значение, определяемое статистическим усреднением с вероятностью (7.29), вторая — отождѐнное среднее, полученное перебором  $BN$  значений множителей, каждому из которых отвечает неизменная вероятность  $\pi_j = 1/N$ , в  $B$  раз превосходящая частоту их появления. Равенства, позволяющие прямым образом определить спектральную функцию сложных систем, следуют из выражения (7.20) и результата подстановки соотношений (7.20), (7.17) в преобразование Лежандра (7.21):

$$\begin{aligned} \alpha(q) &= \frac{\langle\langle \ln M \rangle\rangle}{\ln(1/2)}, \\ f(q) &= \frac{\langle\langle \ln M^q \rangle\rangle - \ln \overline{\overline{M^q}}}{\ln(1/2)}. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Подобно определению (7.28) эффективная внутренняя энергия  $\alpha$  сводится к замороженному среднему, тогда как эффективная энтропия  $f$  сложной системы определяется разностью замороженного среднего значения логарифма деформированного множителя  $M^q$  и логарифма отождѐнного среднего  $\overline{\overline{M^q}}$ .

Использование представленного метода позволяет воспроизвести наиболее простым и точным образом мультифрактальные спектры, приведенные на рис. 7.1 — 7.6. В этой связи можно надеяться, что методика, основанная на использовании равенств (7.29) — (7.32), является универсальным средством исследования

фрактальных объектов различной природы.

## 7.2. Изменение структуры аморфных и многокомпонентных тонких плёнок под воздействием импульсной фотонной обработки

Хорошо известно, что под воздействием лазерного или обычного светового импульса происходит быстрый нагрев тонкой плёнки (или поверхностного слоя материала) до высоких температур [243]. Механизмы удержания энергии в тонкой плёнке в течение времени импульса на сегодняшний день не до конца выяснены. Определение температуры плёнки при известной плотности энергии импульса затруднено тем обстоятельством, что температуры электронного и фононного газов, а в полупроводниках и дырочной подсистемы, при лазерной или световой обработке сильно отличаются [244], а учёт плазменных колебаний усложняет проблему [245–247]. В большинстве работ предполагалось равенство указанных температур (однотемпературная модель) [244].

В результате одновременного возбуждения ансамбля атомов резко снижаются диффузионные барьеры, что приводит к интенсивному перемешиванию компонент (или быстрой диффузии одних компонент в другие, как это происходит в процессе образования силицидов при фотонном отжиге [247]). Следует отметить, что коэффициенты диффузии в металлических стёклах очень малы, например для  $\text{Cu}_{56}\text{Zr}_{44}$  оценки дают значение  $5.3 \cdot 10^{-19} \text{ м}^2/\text{с}$  при  $440^\circ\text{C}$  [248]. Известно, что под действием гиперзвука происходит распад возбуждённых электронных состояний, в результате которого в плёнке возникают моды фононных колебаний, ускоряющие процесс диффузии.

При быстром нагреве разрушаются замороженные зародыши, наличие которых должно приводить в процессе отжига к возникновению метастабильных фаз. Таким образом, в результате нагрева фотонными импульсами тонкая плёнка представляет либо однородный расплав, либо аморфную смесь. Формирование нанокристаллической структуры [247] или вкраплений нанокристаллических фаз

в аморфную матрицу [249–251] происходит при больших переохлаждениях в процессе быстрого снижения температуры после фотонной обработки, что равносильно конденсации при высоких пересыщениях. По окончании светового импульса тонкая плёнка очень быстро охлаждается либо за счёт теплового излучения изолированной поверхностью, либо в результате отвода тепла к подложке. Соответствующий расчёт для изолированной плёнки даёт время понижения температуры от  $2000\text{K}$  до комнатной порядка  $10^{-2}\text{с}$ . В таком случае невозможно прямое использование классических теорий фазовых превращений, основной задачей которых является определение размера критического зародыша новой фазы в зависимости от поверхностной и объёмной энергий. Вместе с тем при больших переохлаждениях (высоких пересыщениях) понятие критического зародыша теряет смысл. В классических теориях межфазная граница *твёрдое тело-жидкость* принимается бесконечно тонкой, а энергия этой границы считается независимой от радиуса зародыша. Введение размытой межфазной границы [252] и исследования методами молекулярной динамики с потенциалом Леннарда-Джонса показали, что параметр порядка принимает значения меньше единицы в центре кластера, если его размер сравним с толщиной границы. Использование функционала свободной энергии Гинзбурга-Ландау показывает, что энергетический барьер зарождения кристалла проявляется только для переохлаждений выше критической температуры  $T_c$ . Согласно [252], процесс кристаллизации при  $T < T_c$  подобен спинодальному распаду твёрдых растворов. Проявления лазерно индуцированных коллективных эффектов в аморфных плёнках, которые могут приводить к бездиффузионной перестройке, наблюдались в работе [253]. Исследованию этих эффектов в рамках модели [254] посвящён настоящий подраздел [58].

Детализируя экспериментальную ситуацию, следует указать на сложность и многообразие проявлений процесса кристаллизации аморфных плёнок [255–260]. При малых толщинах тепло, выделяющееся в результате кристаллизации, успеваает отводиться в термостат и реализуется обычный механизм холодной

кристаллизации [255]. При этом плёнки полупроводников приобретают волнистую поверхность с гребнями, направленными перпендикулярно движению фронта кристаллизации [259]. Такой механизм реализуется при малой частоте зарождения центров кристаллизации [259, 260]. В некоторых случаях локальное тепловое воздействие (например, лазерным или электронным импульсом) приводит к взрывной кристаллизации плёнки. Такой случай реализуется благодаря неустойчивости движения межфазной границы, которая возникает, когда тепло, выделяющееся под воздействием излучения, не успевает отводиться в подложку [259, 260]. Указанная неустойчивость обеспечивается нелинейной зависимостью скорости роста кристалла от температуры. Более того, возможна колебательная неустойчивость, проявляющаяся в волнистом рельефе поверхности кристаллизации, который обнаруживается при неполном течении процесса [259, 260].

Совершенно иная картина наблюдается в аморфной среде, где большими значениями обладают как скорость роста кристалла  $u$ , так и частота зародышеобразования  $J$ . Действительно, при низких температурах величины  $J$ ,  $u$  возрастают с нагревом плёнки, так что выделение тепла кристаллизации способствует её течению. Поэтому с ростом плёнки может наступить такая ситуация, когда тепло кристаллизации не успевает отводиться в окружающую среду, и возникает тепловая неустойчивость, обеспечивающая спонтанный переход в режим взрывной кристаллизации [261]. Примеры такого перехода дают процессы кристаллизации в слоях аморфного льда и некоторых органических веществ [255, 257], а также в аморфных ультрадисперсных порошках германия с вкраплениями кристаллической фазы [257, 258].

Настоящий подраздел посвящён теоретическому исследованию указанных процессов на основе синергетической картины, развитой в [81]. В пункте 7.2.1 мы проводим исследование условий развития тепловой неустойчивости в результате самоорганизации процессов движения фронта кристаллизации и температуропроводности, течение которых связано с

разностью термодинамических потенциалов аморфного и кристаллического состояний. Оказывается, что при выделении тепла, превышающем критическое значение, появляется стационарное состояние, в котором скорость фронта кристаллизации приобретает аномально большие значения. Для малой толщины плёнки такой режим обеспечивается внешним воздействием, а с ростом толщины до закритического значения теплота кристаллизации, удерживаемая в объёме плёнки, становится достаточной для развития неустойчивости, которая приводит к спонтанному росту скорости фронта, наблюдаемому в эксперименте [257]. Подраздел 7.2.2 посвящён исследованию процесса взрывной кристаллизации, представляющего результат самоорганизующей критичности в стохастическом распространении тепла по узлам иерархического дерева. Исследование эффективного уравнения движения показывает, что неустойчивость развивается только в том случае, когда тепловой эффект кристаллизации (или энергия, вводимая извне) превышает критическое значение, величина которого определяется температуропроводностью. Поскольку её значение монотонно спадает с уменьшением температуры, то это объясняет указанную выше причину [252], по которой кристаллизация аморфных плёнок требует переохлаждения ниже критической температуры.

7.2.1. Исследование условий кристаллизации До настоящего времени взрывная кристаллизация сплошных плёнок аморфного германия в чистом виде не обнаружена. Это связано с тем, что максимальное значение частоты зародышеобразования кристаллов германия имеет сравнительно малое значение  $J_{max} \sim 10^{14} \text{ с}^{-1}\text{см}^{-3}$ , которое отвечает более высоким температурам, чем реализуются в процессе кристаллизации [255] (так, в слоях аморфного льда, подверженных взрывной кристаллизации, имеем  $J_{max} \sim 10^{20} \text{ с}^{-1}\text{см}^{-3}$ ). Поэтому в германии естественный процесс нуклеации не может обеспечить взрывную кристаллизацию, и для его усиления следует ввести кристаллические зародыши. Эксперименты проводились на тонких слоях аморфных нанопорошков германия с вкраплениями мельчайших кристаллов, доля которых составляла не более

$3 \div 10\%$  от полной массы [258]. Слои аморфного порошка с характерным размером частиц  $3 \div 10$  нм получали термическим испарением и конденсацией германия в атмосфере инертного газа при давлениях  $10 \div 100$  Па. Доля кристаллических частиц регулировалась изменением интенсивность испарения, а интенсивность теплоотвода степенью пористости плёнки.

Спонтанный механизм взрывной кристаллизации наблюдался в слоях нанопорошков толщиной  $0.01 \div 0.1$  мм при температуре подложки  $300 \div 400$  К. В зависимости от начального содержания кристаллической фазы скорость движения волны кристаллизации изменялась в диапазоне  $0.01 \div 0.1$  м/с. В отличие от обычного механизма, когда формируется волнистая поверхность с гребнями, направленными перпендикулярно движению фронта кристаллизации, в исследуемой системе гребни оказываются направленными вдоль его движения. На рис. 7.7, где светлый фон отвечает незакристаллизовавшимся областям, приведен характерный вид картины, получающейся в результате взрывной

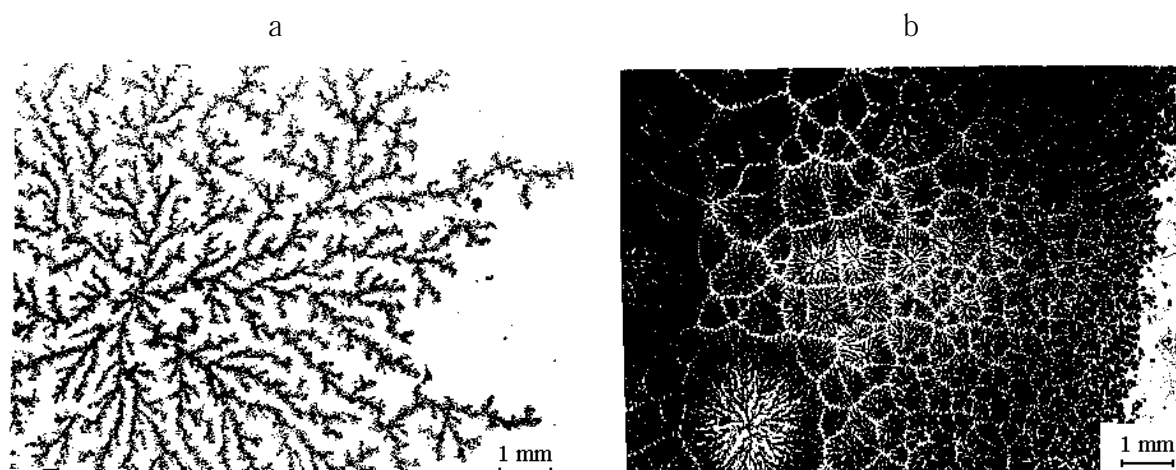


Рис. 7.7. Узоры, возникающие в слое аморфного порошка Ge при взрывной кристаллизации: (а) из одного центра; (б) из нескольких спонтанно возникших центров

кристаллизации. Видно, что лавина кристаллизации может возникать из одного или нескольких центров, играющих роль зародышей. Принципиально важным является фрактальный характер распределения кристаллической фазы, который



наблюдается в процессе формирования агрегатов, ограниченном диффузией.

Приведенные экспериментальные данные показывают, что в зависимости от внешних условий и наличия зародышей возможны два механизма кристаллизации аморфных пленок: медленный рост холодного кристалла и взрывная кристаллизация, обусловленная тепловой неустойчивостью. Скачкообразный переход между этими режимами протекает по механизму фазового перехода первого рода [258]. Покажем, что такой переход является следствием самоорганизации системы, обусловленной положительной обратной связью теплоты перехода со скоростью движения фронта кристаллизации. Впервые указанная неустойчивость обсуждалась в [261].

Для решения поставленной задачи рассмотрим временные зависимости скорости фронта кристаллизации  $u(t)$ , удельной теплоты превращения  $f(t)$  и эффективной температуры  $T(t)$ , определяемой как разность температур  $T_0 - T_\infty$  на фронте кристаллизации и в термостате. В рамках синергетического подхода уравнения эволюции содержат диссипативные вклады и слагаемые, представляющие положительную обратную связь скорости  $u$  и термодинамического фактора  $f$  с эффективной температурой  $T$ , с одной стороны, и отрицательную обратную связь  $u$  и  $T$  с  $f$  – с другой. В результате поведение системы представляется уравнениями Лоренца [254]

$$\tau_u \dot{u} = -u + A_u f, \quad (7.33)$$

$$\tau_T \dot{T} = (T_\infty - T) + A_T u f, \quad (7.34)$$

$$\tau_f \dot{f} = (f_{\text{ext}} - f) - A_f u T, \quad (7.35)$$

где точка означает дифференцирование по времени, параметр порядка сводится к скорости  $u$ , сопряженное поле к эффективной температуре  $T$ , а управляющий параметр к теплоте превращения  $f$ , определяемой термодинамической движущей силой  $f_{\text{ext}}$  (кроме того, в уравнения (7.33) – (7.35) входят характерные временные масштабы  $\tau_u, \tau_T, \tau_f$  величин, отмеченных индексами, и положительные константы

связи  $A_u$ ,  $A_T$ ,  $A_f$ ). В стационарном состоянии  $\dot{u} = 0$  первое из указанных уравнений даёт линейную связь  $u = A_u T$  между скоростью и температурой. При этом нелинейное уравнение для скорости изменения температуры  $T$  содержит диссипативное слагаемое, определяемое мезоскопическим временем  $\tau_T$ , величина которого намного меньше макроскопического масштаба  $\tau_u$ . В стационарном случае  $\dot{T} = 0$  получаем связь

$$T_0 = T_\infty + A_T u f, \quad (7.36)$$

согласно которой рост скорости фронта кристаллизации и термодинамического фактора приводит к разогреву среды. Кинетическое уравнение для разности термодинамических потенциалов фаз  $f$  отличается тем, что величина  $f$  релаксирует не к нулевому, а конечному значению  $f_{\text{ext}}$ , представляющему плотность тепловой энергии, вводимой в систему извне. Отрицательная обратная связь величин  $u$  и  $T$  с  $f$  означает уменьшение термодинамического фактора превращения с ростом скорости фронта кристаллизации и его температуры. Очевидно, это спадание является отражением принципа Ле-Шателье для рассматриваемой задачи. Действительно, взрывная кристаллизация обусловлена положительной обратной связью скорости  $u$  и термодинамического фактора  $f$  с температурой  $T$ , которая приводит к разогреву фронта кристаллизации, способствующему развитию неустойчивости. С другой стороны, этот разогрев приводит к уменьшению термодинамического фактора  $f$ , препятствующему её течению.

Аналитическое исследование системы дифференциальных уравнений (7.33) – (7.35) возможно при выполнении адиабатических условий

$$\tau_T \ll \tau_u, \quad \tau_f \ll \tau_u, \quad (7.37)$$

означающих, что в ходе эволюции разность температур  $T$  и термодинамический

потенциал  $f$  следует за изменением скорости фронта кристаллизации. Первое условие, определяющее соотношение мезоскопического времени  $\tau_T$  с макроскопическим  $\tau_u$ , выполняется по определению; второе обеспечивается оценкой  $\tau_f \sim \tau_T$ . Однако при постоянных значениях времён релаксации  $\tau_u, \tau_T, \tau_f$  система (7.33) – (7.35) описывает переход второго рода, тогда как переход от режима холодной кристаллизации к взрывной осуществляется по механизму первого рода. Для учёта этого обстоятельства положим, что величина  $\tau_u$  зависит от скорости кристаллизации  $u$  согласно зависимости

$$\frac{1}{\tau_u} = \frac{1}{\tau_0} \left( 1 + \frac{\kappa}{1 + (u/u_\tau)^2} \right), \quad (7.38)$$

характеризуемой положительными константами  $\tau_0, \kappa, u_\tau$ . Тогда в рамках адиабатического приближения  $\tau_h, \tau_S \ll \tau_0$  система Лоренца (7.33) – (7.35) сводится к уравнению Ландау-Халатникова

$$\tau_0 \dot{u} = -\frac{\partial V}{\partial u}, \quad (7.39)$$

в котором синергетический потенциал имеет вид

$$V = \frac{u^2}{2} \left\{ 1 - \frac{f_{\text{ext}}}{f_{c0}} \left( \frac{u}{u_m} \right)^{-2} \ln \left[ 1 + \left( \frac{u}{u_m} \right)^2 \right] \right\} + \frac{\kappa u_\tau^2}{2} \ln \left[ 1 + \left( \frac{u}{u_\tau} \right)^2 \right], \quad (7.40)$$

где обозначено  $u_m \equiv (A_T A_f)^{-1/2}$ ,  $f_{c0} \equiv (A_u A_h)^{-1}$ . При малых значениях  $f_{\text{ext}}$  зависимость  $V(u)$  является монотонно возрастающей от минимального значения  $V = 0$  в точке  $u = 0$ . При термодинамическом факторе

$$f_c^0 = f_{c0} \left[ 1 + \frac{u_\tau^2}{u_m^2} (\kappa - 1) + 2 \frac{u_\tau}{u_m} \sqrt{\kappa \left( 1 - \frac{u_\tau^2}{u_m^2} \right)} \right] \quad (7.41)$$

появляется плато, которое при  $f_{\text{ext}} > f_c^0$  трансформируется в минимум, отвечающий значению параметра порядка  $u_0 \neq 0$ , и максимум, разделяющий

минимумы упорядоченной и неупорядоченной фаз. С дальнейшим ростом параметра неравновесности  $f_{\text{ext}}$  минимум упорядоченной фазы углубляется, а высота межфазного барьера спадает, принимая нулевое значение при критическом значении

$$f_c = (1 + \kappa)f_{c0}. \quad (7.42)$$

При  $f_{\text{ext}} \geq f_c$  зависимость  $V(u)$  имеет тот же вид, что и для фазового перехода второго рода. Стационарные значения параметра порядка определяются равенствами

$$u_0^m = u_{00} \left\{ 1 \mp \left[ 1 + \left( \frac{u_m u_\tau}{u_{00}^2} \right)^2 \frac{f_{\text{ext}} - f_c}{f_{c0}} \right]^{1/2} \right\}^{1/2}, \quad (7.43)$$

$$u_{00}^2 \equiv \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{f_{\text{ext}}}{f_{c0}} - 1 \right) u_m^2 - (1 + \kappa) u_\tau^2 \right]. \quad (7.44)$$

Верхний знак отвечает неустойчивому состоянию  $u^m$ , при котором синергетический потенциал имеет максимум, нижний — устойчивому  $u_0$ . При медленном увеличении параметра неравновесности в точке  $f_{\text{ext}}=f_c$  происходит скачок величины  $u_0$  от нуля до  $\sqrt{2}u_{00}$ , а затем её значение возрастает плавно. При обратном спадании  $f_{\text{ext}}$  от больших значений параметр порядка  $u_0$  плавно уменьшается до точки  $f_{\text{ext}}=f_c^0$ ,  $u_0=u_{00}$ , а затем скачком принимает нулевое значение. Данный гистерезис обусловлен энергетическим барьером, присущим переходу первого рода, и проявляется при условии  $u_\tau < u_m$ . С ростом скорости изменения параметра неравновесности петля гистерезиса сужается.

Представленная картина синергетического перехода означает, что минимум потенциала  $u_0 = 0$  отвечает режиму холодной кристаллизации, а стационарное значение  $u_0 \neq 0$ , определённое равенством (7.43), — взрывной. При плавном

увеличении энергии системы происходит скачкообразное увеличение скорости фронта кристаллизации от нуля до значения  $u_0 \neq 0$  в точке  $f_{\text{ext}} = f_c$ , фиксируемой условием (7.42). Очевидно, это и означает переход к механизму взрывной кристаллизации. В интервале реализации перехода первого рода  $(f_c^0, f_c)$ , где нижний предел даётся равенством (7.41), стационарное значение разности термодинамических потенциалов фаз не превышает плотности вводимой энергии  $f_{\text{ext}}$ . Барьер синергетического потенциала  $V(u)$ , разделяющий режимы холодной и взрывной кристаллизации, пропадает, если плотность тепловой энергии  $f_{\text{ext}}$  превышает критическое значение  $f_c$ . Таким образом, при  $f_{\text{ext}} < f_c$  переход к взрывной кристаллизации требует активации, а в обратном случае протекает спонтанно. Первый случай реализуется под воздействием пучка на тонкую плёнку. С ростом толщины напыляемого покрытия теплота кристаллизации не успевает отводиться во внешнюю среду, что приводит к возрастанию параметра  $f_{\text{ext}}$ , и при критической толщине достигается значение  $f_c$ , при котором зависимость  $V(u)$  теряет барьер. В результате система спонтанно переходит в режим взрывной кристаллизации.

7.2.2. Описание взрывной кристаллизации в представлении самоорганизуемой критичности Настоящий пункт посвящён развитию картины, позволяющей представить взрывную кристаллизацию как режим самоорганизуемой критичности, которая отличается от фазового перехода тем, что не требует внешнего воздействия (например, накачки энергии) [15]. В рамках такого представления эволюция системы развивается как иерархическая последовательность элементарных актов самоорганизации, называемых лавинами. В согласии с иерархической соподчиненностью суперлавина верхнего уровня может возникнуть только после формирования элементарных лавин нижнего уровня иерархии. Затем этот процесс повторяется на более высоких уровнях — вплоть до формирования глобальной лавины, отвечающей вершине иерархического дерева. Указанная иерархическая картина взрывной кристаллизации проявляется на микроскопических фотографиях узоров

кристаллизации, приведенных на рис. 7.7, где она обнаруживается в форме древовидной фрактальной структуры. Такое иерархическое дерево представляет геометрический образ ультраметрического пространства, в котором реализуются состояния системы. Представим сначала геометрическую картину распределения узлов иерархического дерева по его уровням [91].

Будем считать, что максимальное число узлов  $N$  находится на нижнем иерархическом уровне, отвечающем расстоянию в ультраметрическом пространстве  $u = 0$ . Этот уровень соответствует элементарным лавинам, число которых равно  $N$ . На верхнем уровне ( $u = u_0 \gg 1$ ) имеется единственный узел, отвечающий глобальной лавине. Найдем зависимость  $N(u)$ , определяющую распределение числа узлов иерархического дерева по его уровням.

На рис. 6.1 представлены основные типы иерархических деревьев: регулярное дерево с целым показателем ветвления  $b = 2$ , дерево Фибоначчи с ветвимостью, сводящейся к *золотому сечению*  $\tau \simeq 1.618$ , и вырожденное дерево, имеющее единственный узел ветвления на уровень. Пусть номер уровня  $n$  возрастает сверху вниз. Тогда расстояние в ультраметрическом пространстве определяется переменной

$$u = u_0 - n. \quad (7.45)$$

Элементарные акты самоорганизации отвечают узлам нижнего уровня  $n = u_0$ . Расстояние между узлами, определяемое числом шагов к общему предку, сводится к номеру уровня (7.45), отсчитанному снизу вверх.

Согласно рис. 6.1a, в простейшем случае регулярного дерева с целым показателем ветвимости число узлов экспоненциально спадает с расстоянием  $u$

$$N(u) = N \exp(-u \ln b), \quad N \equiv b^{u_0}. \quad (7.46)$$

Экспоненциальная зависимость сохраняется и для дерева Фибоначчи (рис. 6.1b),

где максимальное число узлов  $N \equiv f\tau^{u_0}$ ,  $f \simeq 1.171$ , а показатель ветвимости  $b = \tau \simeq 1.618$ . Для вырожденного дерева (рис. 6.1с) реализуется линейная зависимость

$$N(u) = N - (b - 1)u, \quad N \equiv (b - 1)u_0 + 1. \quad (7.47)$$

Основным объектом нашего исследования является нерегулярное дерево, распределение узлов которого определяется степенной зависимостью

$$N(u) = N(1 - u/u_0)^a, \quad N \equiv u_0^a, \quad a > 1. \quad (7.48)$$

Она отражает самоподобный характер распределения лавин в ультраметрическом пространстве, благодаря чему функция  $N(n)$  удовлетворяет условию однородности  $N(qn) = q^a N(n)$ , где параметр подобия  $q$  сводится к  $n^{-1}$ .

Согласно обобщённому соотношению Онзагера [262]

$$j_n = -\chi(Q_n) \frac{dQ_n}{dn} \quad (7.49)$$

тепловой поток между уровнями иерархии  $n$  определяется теплотой кристаллизации  $Q_n$  и эффективным коэффициентом температуропроводности

$$\chi(Q) = \chi Q^\beta, \quad (7.50)$$

где  $\chi, \beta > 0$ . В стационарном состоянии полный поток равномерно распределён по иерархическим уровням согласно условию

$$j_n N_n = \text{const} \equiv J. \quad (7.51)$$

Использование выражений (7.48) – (7.50) даёт тепловой эффект кристаллизации

$$Q_n = Qn^{-b}, \quad b = \frac{a-1}{1+\beta} > 0, \quad (7.52)$$

нормированный максимальным значением  $Q \equiv Q_{n=1}$ . Подставляя сюда (7.45), получаем

$$Q(u) = q(1 - u/u_0)^{-b}, \quad (7.53)$$

где тепловой эффект на нижнем уровне  $u = 0$  составляет

$$q \equiv Qu_0^{-b} = QN^{-b/a}. \quad (7.54)$$

В общем случае условие сохранения потока (7.51) не выполняется, и поведение системы задается скейлинговым соотношением

$$Q_n = N^{b/a} n^{-b} q_n, \quad (7.55)$$

вид которого следует из равенств (7.52), (7.54). Согласно (7.49) – (7.51), медленно изменяющаяся функция  $q_n$  удовлетворяет уравнению Ландау-Халатникова (7.39), где роль эффективного времени и параметра порядка играют величины  $\vartheta$ ,  $x$ , определенные равенствами

$$\vartheta \equiv \ln n^b; \quad x \equiv q_n/q_c, \quad q_c^{1+\beta} \equiv (J/b\chi) N^{-(a-1)/a}, \quad (7.56)$$

а синергетический потенциал (7.40) приобретает вид

$$V = \frac{x^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{x^2}{2}, \quad (7.57)$$

показанный на рис.7.8. Максимальное значение  $V_0 = (1+\beta)/2(1-\beta)$  достигается



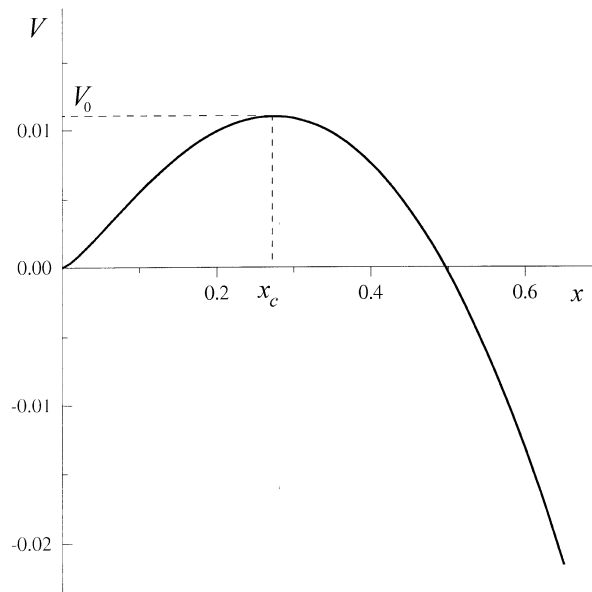


Рис. 7.8. Эффективный потенциал (7.57)

при  $x_c = 1$ , а при  $x > 1$  величина  $V$  неограниченно спадает. Таким образом, процесс взрывной кристаллизации требует флуктуационного преодоления барьера  $V_0$  лавиной нижнего уровня, обладающей предкритической интенсивностью  $q < q_c$ . Этот процесс описывается стохастическим уравнением Ланжевена [144]

$$\frac{dx}{d\vartheta} = -\frac{\partial V}{\partial x} + \zeta \quad (7.58)$$

с белым шумом  $\zeta(\vartheta)$ , определенным условиями

$$\langle \zeta(\vartheta) \rangle = 0, \quad \langle \zeta(\vartheta) \zeta(\vartheta') \rangle = 2\chi \delta(\vartheta - \vartheta'), \quad (7.59)$$

где интенсивность шума  $\chi$  сводится к коэффициенту температуропроводности, введенному в определении (7.50).

Решения стохастического уравнения (7.58) распределены в ультраметрическом пространстве согласно функции  $w(\vartheta, x)$ , удовлетворяющей уравнению Фоккера-Планка [144]

$$\frac{\partial w}{\partial \vartheta} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0, \quad j \equiv -w \frac{\partial V}{\partial x} - \chi \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (7.60)$$

В равновесном состоянии поток отсутствует ( $j = 0$ ), и функция распределения

$$w_0(x) \propto \exp\{-V(x)/\chi\} \quad (7.61)$$

определяется потенциалом (7.57). С переходом в стационарное состояние постоянный поток приобретает ненулевое значение, определяемое равенством (7.51), а плотность вероятности  $w$  остается независимой от номера иерархического уровня  $n \equiv \exp(\vartheta/b)$ . Согласно (7.60), стационарное  $w(x)$  и равновесное  $w_0(x)$  распределения связаны равенством

$$\frac{w(q)}{w_0(q)} = \frac{j}{\chi} \int_{q/q_c}^{\infty} \frac{dx}{w_0(x)}, \quad (7.62)$$

где учтено граничное условие  $w \rightarrow 0$  при  $q \rightarrow \infty$ .

Выражение (7.62) определяет поток  $j$  по заданному тепловому эффекту  $q$ . При этом следует иметь в виду, что величина  $q$  ограничена снизу щелью  $G$ , появление которой отражает иерархический характер ансамбля центров кристаллизации. Действительно, после их слияния в кластер размером  $u_b$ , все субкластеры, разделённые меньшими расстояниями  $u < u_b$ , обладают тепловыми эффектами  $q < q(u_b) \equiv G$  и не подлежат учёту. В результате уравнение (7.62), дополненное граничным условием  $w(G) = w_0(G)$ , приводит к потоку

$$j = 2\chi W \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\chi}} \left( 1 - \frac{G}{q_c} \right) \right] \right\}^{-1}, \quad (7.63)$$

где коэффициент

$$W \propto \exp(-V_0/\chi), \quad V_0 = \frac{1}{2} \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \quad (7.64)$$

представляет вероятность преодоления барьера потенциала (7.57). Согласно (7.63), при  $G \ll q_c$  поток  $j$  имеет значение  $W\chi$ , удваивающееся при  $G = q_c$ .

Такое поведение легко понять, если представить влияние щели по аналогии с зеркалом, отражающим диффундирующие частицы в точке  $q = G$ : при  $G \ll q_c$  частица, преодолевающая барьер, может двигаться в обоих направлениях, тогда как при  $G = q_c$  зеркало располагается в точке, отвечающей вершине барьера, и все частицы перемещаются только в сторону неограниченного возрастания  $q$ .

При заданном потоке  $j$  стационарная функция распределения  $w(x)$  определяется уравнением (7.62), согласно которому в предкритической области  $q < q_c$  имеем  $w(x) \approx w_0(x)$ , тогда как при закритических значениях  $q \gg q_c$  неограниченное нарастание равновесной функции  $w_0(x)$  приводит к условию  $w_0(x) \gg w(x)$ . В результате равновесная вероятность  $w_0(q)$  остаётся практически неизменной ( $w(q) \approx w(q_c)$ ) в области  $q \in (q_c, q_b)$ , расположенной между критическим и граничным значениями, тогда как при  $q > q_b$  имеем  $w(q) \approx 0$ . При этом рост граничного значения  $q_b$  задаётся уравнением [263]

$$\frac{dq_b}{d\vartheta} = \chi \frac{q_b - q_c}{q_b^2}. \quad (7.65)$$

Для определения критического значения теплового эффекта  $q_c$  сравним макроскопический поток  $J$  в (7.51) и микроскопический  $j$  в (7.60). Они отличаются множителем  $N^{(a-1)/a} \equiv u_0^{a-1}$ , величина которого определяется полным числом зародышей  $N$  (см. (7.48)). Тогда последнее равенство (7.56) и выражение (7.63), взятое при  $G = 0$ ,  $\chi \ll 1$ , дают

$$q_c = Q \exp(-1/2\chi), \quad (7.66)$$

где предэкспоненциальный множитель  $Q$  представляет вероятность преодоления барьера, не подлежащую определению в рамках использованного подхода. Равенство (7.66) подобно известному результату теории БКШ для температуры сверхпроводящего перехода.

Согласно (7.66), критический тепловой эффект  $q_c$  медленно возрастает

с увеличением температуропроводности  $\chi$ . Поскольку её значение монотонно спадает с уменьшением температуры, то это объясняет основную особенность процесса кристаллизации аморфных плёнок — наличие переохлаждения ниже критической температуры  $T_c$ . Её величина оценивается неравенством  $q_c \leq Q$ , которое с учётом (7.66) даёт условие  $\chi(T_c) = 1/2$ .

### 7.3. Суперсимметричное представление бозе-эйнштейновской конденсации фермионных пар

Одной из наиболее красивых и продуктивных концепций современной физики, первоначально предложенной для описания микромира, является *суперсимметрия* (для ознакомления можно обратиться к обзорам, посвященным использованию суперсимметрии в квантовой механике [264, 265], теории неупорядоченных металлов [266] и теории суперструн [267–271]). На основе идеи, высказанной в работе [272] и развитой в [273, 274], было показано, что суперсимметрия может быть использована также для описания флуктуирующих полей, которые определяют картину фазового перехода, связанного с потерей симметрии и эргодичности в неравновесных конденсированных средах [275, 276] и случайных гетерополимерах [277]. При этом используется полевая схема, основанная на стандартном методе Мартина-Сиггиа-Роуза [278] и объединении стохастических полей в суперсимметричную конструкцию [79]. Характеризуя теорию суперсимметрии в целом, можно выделить два направления её развития: первое основывается на операторном представлении [264–266], второе сводится к рассмотрению суперсимметричных полей [79, 267–278].

Следует отметить, что приоритет в развитии теории суперсимметрии принадлежит представителям бывшего Советского Союза [279–282], после которых западные физики, не знавшие об их работах, переоткрыли суперсимметрию [283]. Так, формализм, лежащий в основе теории суперсимметрии, был разработан Березиным и Кацом в 1970 г. [279]. Годом

позже Гольфанд и Лихтман [280] обнаружили суперсимметричный мультиплет с нулевым спином, состоящий из массивных фотона и фотино, которым отвечают скаляр и два заряженных спинора Дирака; характерно, что при этом использование суперсимметричного алгебраического представления позволило избавиться от расходимости энергии вакуума. В 1972 г. Волков и Акулов [281], вдохновлённые идеями Гейзенберга, предложили схему, в рамках которой нейтрино представляет безмассовый фермион, появляющийся в результате спонтанного нарушения суперсимметрии. После этого Волков и Сорока [282] провели калибровку суперсимметричной группы Пуанкаре, представляющей основу теории супергравитации, которая предполагает наличие суперпартнёра гравитона со спином  $3/2$ . И наконец, в 1973 г. Весс и Зумино [283], основываясь на модели Венициано и Намбу, использованных в теории сильного взаимодействия, построили суперсимметричную теорию струн.

Теория суперструн является наиболее перспективным претендентом на совместное представление всех фундаментальных взаимодействий [267–271], однако до настоящего времени не было обнаружено ни одного суперпартнёра из всего набора известных элементарных частиц. В этой связи особую актуальность приобретают исследования нарушения суперсимметрии. Такая возможность появилась благодаря прогрессу в экспериментах с ферми-бозевскими смесями атомов, охлаждённых до предельно низких температур [284]. С теоретической точки зрения такие системы исследовались в суперсимметричном представлении [285] и в рамках одномерной модели, допускающей точное решение [286]. Согласно [287], нарушение суперсимметрии ферми-бозевской смеси протекает либо спонтанным образом, либо обеспечивается разностью химических потенциалов бозонов и фермионов.

Настоящий подраздел посвящён исследованию бозе-фермиевской смеси в рамках суперсимметричной теории поля [63]. В пункте 7.3.1 приведены основные положения используемого подхода, следующие из производящего функционала Мартина-Сиггиа-Роуза. Показано, что использование такого

подхода позволяет найти суперсимметричный лагранжиан и следующее из него суперуравнение Эйлера. Пункт 7.3.2 посвящён получению полевых уравнений для компонент суперполя, представляющих наиболее вероятные значения квадратного корня из плотности бозе-конденсата и амплитуды его флуктуаций, а также наиболее вероятные грасмановы поля, определяющие плотность фермиевских частиц. Комбинация указанных уравнений показывает, что число фермионов сохраняется в суперсимметрично вырожденных системах, обладающих изотропным гильбертовым пространством. В пункте 7.3.3 показано, что такая инвариантность нарушается при введении анизотропии, которая проявляется в нарушении симметрии грасмановых компонент к обращению времени при бозе-эйнштейновской конденсации. Пункт 7.3.4 посвящён обсуждению полученных результатов, в приложении E найдены полевые уравнения.

7.3.1. Основные теоретико-полевые соотношения Представим систему фермионов, обладающих притягательным взаимодействием, парой сопряженных волновых функций  $\psi(\mathbf{r}, t)$ ,  $\bar{\psi}(\mathbf{r}, t)$ , а бозе-конденсат — плотностью  $n(\mathbf{r}, t)$ , где  $\mathbf{r}$  — координата,  $t$  — время. Поведение бозевской подсистемы описывается флуктуирующим параметром порядка

$$x(\mathbf{r}, t) := \sqrt{n(\mathbf{r}, t)} e^{i\phi(\mathbf{r}, t)} \quad (7.67)$$

с фазой  $\phi(\mathbf{r}, t)$ . В рамках стандартной теоретико-полевой схемы [79] эволюция системы описывается уравнением Ланжевена

$$\dot{x}(\mathbf{r}, t) - D\nabla^2 x = -\gamma \frac{\partial F}{\partial x} + \zeta(\mathbf{r}, t). \quad (7.68)$$

Здесь точка означает производную по времени,  $\nabla \equiv \partial/\partial\mathbf{r}$ ,  $D$  и  $\gamma$  представляют коэффициент диффузии и кинетический коэффициент,  $F(x)$  — удельная свободная энергия конденсата,  $\zeta(\mathbf{r}, t)$  — стохастическая добавка, определённая условиями

белого шума

$$\langle \zeta(\mathbf{r}, t) \rangle = 0, \quad \langle \zeta(\mathbf{r}, t) \zeta(\mathbf{0}, 0) \rangle = \gamma T \delta(\mathbf{r}) \delta(t), \quad (7.69)$$

где угловые скобки означают усреднение по состояниям статистической системы, распределённой с дисперсией  $T$ , сводящейся к температуре, измеренной в энергетических единицах. С введением масштабов  $t_s \equiv (\gamma T)^2 / D^3$ ,  $r_s \equiv \gamma T / D$ ,  $F_s \equiv D^3 / \gamma^3 T^2$ ,  $\zeta_s \equiv D^3 / (\gamma T)^2$  для времени  $t$ , координаты  $\mathbf{r}$ , удельной свободной энергии  $F$  и стохастической силы  $\zeta$  соответственно, уравнение движения (7.68) принимает простейший вид

$$\dot{x}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta x} + \zeta(\mathbf{r}, t), \quad (7.70)$$

где вариационная производная

$$\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta x} \equiv \frac{\delta \mathcal{F}\{x(\mathbf{r}, t)\}}{\delta x(\mathbf{r}, t)} = \frac{\partial F(x)}{\partial x} - \nabla^2 x \quad (7.71)$$

определяется функционалом Гинзбурга-Ландау

$$\mathcal{F}\{x\} \equiv \int \left[ F(x) + \frac{1}{2} (\nabla x)^2 \right] d\mathbf{r}. \quad (7.72)$$

Следуя стандартной процедуре [79], будем исходить из производящего функционала

$$Z\{u(\mathbf{r}, t)\} = \int Z\{x(\mathbf{r}, t)\} \exp \left( \int u x d\mathbf{r} dt \right) D x(\mathbf{r}, t), \quad (7.73)$$

определённого статистической суммой

$$Z\{x(\mathbf{r}, t)\} := \left\langle \prod_{(\mathbf{r}, t)} \delta \left\{ \dot{x} + \frac{\delta F}{\delta x} - \zeta \right\} \det \left| \frac{\delta \zeta}{\delta x} \right| \right\rangle. \quad (7.74)$$

Её величина определена таким образом, что аргумент  $\delta$ -функционала сводится к уравнению движения (7.70), детерминант представляет якобиан перехода от статистического поля  $\zeta(\mathbf{r}, t)$  к параметру порядка  $x(\mathbf{r}, t)$ , усреднение проводится по распределению шума. С формальной точки зрения производящий функционал (7.73) представляет преобразование Лапласа статистической суммы (7.74) по распределению параметра порядка.

В простейшем случае исчисления Ито якобиан равен единице, и статсумма (7.74) выражается через бозевские поля [277]. Намного более интересная ситуация возникает в исчислении Стратоновича, когда якобиан

$$\det \left| \frac{\delta \zeta}{\delta x} \right| = \int \exp \left( \bar{\psi} \frac{\delta \zeta}{\delta x} \psi \right) d^2 \psi, \quad d^2 \psi = d\psi d\bar{\psi} \quad (7.75)$$

выражается через сопряжённую пару гассмановых полей  $\psi(\mathbf{r}, t)$ ,  $\bar{\psi}(\mathbf{r}, t)$ , определённых условиями

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \psi + \psi \bar{\psi} &= 0, & \int d\psi &= 0; \\ \int \psi d\psi &= 1, & \int d\bar{\psi} &= 0, & \int \bar{\psi} d\bar{\psi} &= 1. \end{aligned} \quad (7.76)$$

Тогда, записывая  $\delta$ -функционал в (7.74) с помощью преобразования Лапласа, представляющего континуальный интеграл по полю духов  $p(\mathbf{r}, t)$ , приходим к суперсимметричному лагранжиану [277]

$$\mathcal{L}(x, p, \psi, \bar{\psi}) = \left( px - \frac{p^2}{2} + \frac{\delta F}{\delta x} p \right) - \bar{\psi} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\delta^2 F}{\delta x^2} \right) \psi. \quad (7.77)$$

Использование четырехкомпонентного суперполя

$$\Phi := x + \bar{\theta} \psi + \bar{\psi} \theta + \bar{\theta} \theta p \quad (7.78)$$



приводит лагранжиан (7.77) к канонической суперсимметричной форме

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \int \Lambda d^2\theta, \quad d^2\theta \equiv d\theta d\bar{\theta}, \\ \Lambda(\Phi) &\equiv \frac{1}{2}(\bar{\mathcal{D}}\Phi)(\mathcal{D}\Phi) + F(\Phi),\end{aligned}\tag{7.79}$$

где  $\theta, \bar{\theta}$  – грасманово сопряженные координаты, определенными равенствами

$$\begin{aligned}\bar{\theta}\theta + \theta\bar{\theta} &= 0, \quad \int d\theta = 0; \\ \int \theta d\theta &= 1, \quad \int d\bar{\theta} = 0, \quad \int \bar{\theta} d\bar{\theta} = 1\end{aligned}\tag{7.80}$$

типа (7.76). При записи (7.79) использованы суперсимметричные генераторы

$$\mathcal{D} := \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - 2\theta\frac{\partial}{\partial t}, \quad \bar{\mathcal{D}} := \frac{\partial}{\partial\theta}.\tag{7.81}$$

7.3.2. Суперсимметричные полевые уравнения Варьируя действие, определённое суперсимметричным лагранжианом (7.79), по суперполю (7.78), приходим к суперуравнению Эйлера

$$\frac{1}{2}[\bar{\mathcal{D}}, \mathcal{D}]\Phi = \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\Phi},\tag{7.82}$$

где квадратные скобки означают коммутатор. Как показано в приложении E, проекции этого уравнения на оси суперпространства  $1, \bar{\theta}, \theta$  и  $\bar{\theta}\theta$  приводят к уравнениям движения, определённым явным образом:

$$\dot{\eta} - \nabla^2\eta = -\frac{\partial F}{\partial\eta} + \varphi,\tag{7.83}$$

$$\dot{\varphi} + \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2}\varphi - \frac{\partial^3 F}{\partial\eta^3}\bar{\Psi}\Psi,\tag{7.84}$$

$$\dot{\Psi} - \nabla^2 \Psi = -\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \Psi, \quad (7.85)$$

$$-\dot{\bar{\Psi}} - \nabla^2 \bar{\Psi} = -\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \bar{\Psi}. \quad (7.86)$$

Поскольку минимальное действие отвечает наиболее вероятным реализациям суперполя (7.78), то решения уравнений (7.83) – (7.86) определяют наиболее вероятные компоненты  $x^{(max)} \equiv \eta$ ,  $p^{(max)} \equiv \varphi$ ,  $\psi^{(max)} \equiv \Psi$ ,  $\bar{\psi}^{(max)} \equiv \bar{\Psi}$ . С точностью до замены  $\varphi$  на  $\zeta$  первое из этих уравнений имеет форму Ланжевена (7.70), что позволяет положить, что поле духов  $\varphi \equiv p^{(max)}$  представляет наиболее вероятную реализацию амплитуды флуктуаций  $\zeta$ . Характерная особенность уравнения (7.84), определяющего поле  $\varphi$ , является обратный знак перед градиентным слагаемым, благодаря чему неоднородность пространственного распределения амплитуды флуктуаций спонтанно нарастает с течением времени до тех пор, пока не будет стабилизирована нелинейными эффектами.

Другая особенность состоит в грассмановом сопряжении уравнений (7.85) и (7.86), которые отличаются только направлением стрелы времени. Таким образом, можно сделать вывод, что пара сопряженных полей  $\Psi$ ,  $\bar{\Psi}$  описывает эволюцию фермиевских частицы и античастицы, течение времени которых направлено, как известно, в разные стороны. Комбинация выражений (7.85), (7.86) приводит к уравнению непрерывности

$$\dot{\rho} + \nabla \mathbf{j} = 0, \quad (7.87)$$

которое связывает изменения плотности фермионов

$$\rho := \bar{\Psi} \Psi \quad (7.88)$$

С ИХ ПОТОКОМ

$$\mathbf{j} := \nabla \bar{\Psi} \Psi - \bar{\Psi} \nabla \Psi. \quad (7.89)$$

Уравнение (7.87) представляет закон сохранения числа фермиевских частиц в суперсимметричной системе, пространство состояний которой инвариантно относительно выбора направления по осям  $1$ ,  $\bar{\theta}$ ,  $\theta$  и  $\bar{\theta}\theta$ . Очевидно, бозе-конденсация фермиевских пар приведёт к нарушению закона сохранения (7.87), обусловленному анизотропией суперпространства.

7.3.3. Нарушение суперсимметрии В рамках метода квазисредних вырождение системы снимается включением бесконечно слабого источника, например внешнего магнитного поля в ферромагнетиках [288]. Для ферми-бозевских смесей проекции такого поля выражаются грасманово сопряжёнными компонентами  $\bar{\theta}\Psi$ ,  $\bar{\Psi}\theta$ , отвечающими прямому и обратному направлениям стрелы времени. Для выделения одного из этих направлений заменим выражение (7.78) суперполем

$$\tilde{\Phi} := e^{-\bar{\theta}\Psi} \Phi e^{\bar{\theta}\Psi}. \quad (7.90)$$

Представляя его явным образом

$$\tilde{\Phi} = x + (1 - x) \bar{\theta}\Psi + (1 + x) \bar{\Psi}\theta + (p + x\rho) \bar{\theta}\theta, \quad (7.91)$$

видим, что преобразование (7.90) сводится к сжатию оси  $\bar{\theta}\Psi$  и растяжению  $\bar{\Psi}\theta$  на величину  $x$ , определяющую плотность бозе-конденсата; при этом ось  $\bar{\theta}\theta$  подвергается растяжению на величину  $x\rho$ , пропорциональную параметру порядка  $x$  и плотности фермиевских частиц  $\rho = \bar{\Psi}\Psi$ . В результате преобразование (7.90) приводит к нарушению суперсимметрии, которое придаёт уравнениям Эйлера

(7.82) следующий вид (см. приложение E):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \nabla^2 \eta = -\frac{\partial F}{\partial \eta} + \varphi + \eta \rho, \quad (7.92)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi + \eta \rho) + \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} (\varphi + \eta \rho) - \frac{\partial^3 F}{\partial \eta^3} (1 - \eta^2) \rho, \quad (7.93)$$

$$\Psi \frac{\partial}{\partial t} \ln [(1 - \eta) \Psi] - \nabla^2 \Psi = -\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \Psi, \quad (7.94)$$

$$-\bar{\Psi} \frac{\partial}{\partial t} \ln [(1 + \eta) \bar{\Psi}] - \nabla^2 \bar{\Psi} = -\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \bar{\Psi}. \quad (7.95)$$

Благодаря появлению бозе-эйнштейновского конденсата ( $\eta \neq 0$ ) пара уравнений (7.94), (7.95) теряет инвариантность относительно обращения времени. Комбинация этих уравнений приводит к выражению

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \ln [(1 - \eta^2) \rho] + \nabla \mathbf{j} = 0. \quad (7.96)$$

В условиях стационарной конденсации ( $\mathbf{j} = \text{const}$ ) уравнение (7.96) даёт зависимость

$$n = 1 - \frac{\rho_c}{\rho}, \quad (7.97)$$

в которой постоянная интегрирования  $\rho_c$  играет роль критической плотности фермионов и учтено определение (7.67), согласно которому  $\eta^2 = n$ . Соотношение (7.97) означает, что с ростом плотности фермионов  $\rho$  выше критического значения  $\rho_c$  плотность  $n$  бозе-конденсата фермиевских пар монотонно увеличивается от  $n = 0$  до  $n = 1$ .

7.3.4. Обсуждение результатов Проведенное рассмотрение сводится к суперсимметричной теории поля, основой которой является принцип наименьшего действия

$$S\{\Phi(\mathbf{r}, t)\} := \int \mathcal{L}[\Phi(\mathbf{r}, t)] d\mathbf{r} dt,$$

отвечающего максимальной вероятности

$$P\{\Phi(\mathbf{r}, t)\} \propto \exp(-S\{\Phi(\mathbf{r}, t)\})$$

распределения суперполя (7.78). Следующие из этого принципа уравнения (7.92) – (7.95) задают наиболее вероятные значения бозевских компонент  $\eta$ ,  $\varphi$  и фермиевских  $\Psi$ ,  $\bar{\Psi}$ . Отметим, что такое представление существенно отличается от стандартной статистической картины, в рамках которой наблюдаемые величины определяются не наиболее вероятными значениями, а средними по набору квантовых состояний.

Как показывают уравнения (7.94), (7.95), в отсутствие конденсата ферми-бозевские смеси представляют вырожденную суперсимметричную систему, инвариантную относительно обращения времени. Нарушение суперсимметрии достигается преобразованием (7.90) выражения (7.78) в суперполе (7.91), учитывающее наличие бозе-конденсата. Благодаря тому, что в макроскопических системах время всегда течёт вперед, описание ферми-бозевских смесей требует использования системы уравнений (7.92) – (7.95).

Переходя к исследованию решений этой системы, рассмотрим сначала простейший случай стационарной однородной смеси. Её поведение описывается уравнениями (7.92), (7.93) и (7.96), которые принимают вид

$$\varphi + \eta\rho = \frac{\partial F}{\partial \eta}, \quad (7.98)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} (\varphi + \eta \rho) = \frac{\partial^3 F}{\partial \eta^3} (1 - \eta^2) \rho, \quad (7.99)$$

$$(1 - \eta^2) \rho = \rho_c. \quad (7.100)$$

Введём свободную энергию Ландау

$$F := -\frac{\varepsilon}{2} \eta^2 + \frac{1}{4} \eta^4, \quad \varepsilon \equiv \frac{T_c - T}{T_c}, \quad (7.101)$$

где параметр  $\varepsilon$  определяет отклонение от критической температуры  $T_c$ . Тогда решение уравнений (7.98) – (7.100) даёт стационарное значение параметра порядка

$$\eta_0^2 = \frac{2}{3} \varepsilon - \sqrt{\frac{1}{9} \varepsilon^2 + 2\rho_c}. \quad (7.102)$$

Оно приобретает физические значения  $\eta_0 \neq 0$ , когда параметр  $\varepsilon$  превышает критическое значение

$$\varepsilon_c = \sqrt{6\rho_c}, \quad (7.103)$$

определённое критической плотностью фермионов  $\rho_c$ , которая совместно с критической температурой  $T_c$  представляет параметр теории.

Выражение (7.102) приобретает известную корневую форму

$$\eta_0 \simeq \sqrt{\frac{\varepsilon - \varepsilon_c}{2}} \quad (7.104)$$

в окрестности  $\varepsilon - \varepsilon_c \ll \varepsilon_c$  критической точки (7.103). Здесь решение уравнений

(7.98) – (7.100) приводит к стационарной амплитуде флуктуаций

$$\varphi_0 \simeq -(\varepsilon_c + \rho_c) \sqrt{\frac{\varepsilon - \varepsilon_c}{2}} \quad (7.105)$$

и плотности фермионов

$$\rho_0 \simeq \rho_c \left( 1 + \frac{\varepsilon - \varepsilon_c}{2} \right). \quad (7.106)$$

Согласно (7.104), (7.106), с уменьшением температуры в окрестности критической точки (7.103) плотности бозонов  $n_0 = \eta_0^2$  и фермионов  $\rho_0$  возрастают линейно, тогда как амплитуда флуктуаций (7.105) принимает отрицательные значения корневым образом.

Рассмотрим наконец неоднородную стационарную ферми-бозевскую смесь, поведение которой представляется выражением (7.100) совместно с системой

$$\nabla^2 \eta = -(\varepsilon - \eta^2) \eta - (\varphi + \eta \rho), \quad (7.107)$$

$$\nabla^2 \varphi = -(\varepsilon - 3\eta^2) (\varphi + \eta \rho) - 6(1 - \eta^2) \eta \rho, \quad (7.108)$$

следующей из уравнений (7.98), (7.99) с использованием свободной энергии (7.101). Линеаризация уравнений (7.107), (7.108) с учетом (7.100) показывает, что уменьшение температуры ниже точки  $T_c$  приводит к неоднородности распределения амплитуды флуктуаций, а с дальнейшим охлаждением ниже  $(1 - \varepsilon_c)T_c$  неоднородным становится и распределение параметра порядка. Что касается распределения фермионов, то оно должно быть однородным благодаря условию равновесия  $\mathbf{j} = 0$  в уравнении непрерывности (7.96) (рассмотрение более общего условия стационарности  $\mathbf{j} = \text{const} \neq 0$  выходит за рамки нашего рассмотрения). С физической точки зрения это означает, что с охлаждением ферми-бозевской

смеси, обладающей однородным распределением фермионов, при критической температуре  $T_c$  спонтанным образом развивается неоднородность амплитуды флуктуаций, а дальнейшее спадание температуры ниже точки  $T = (1 - \sqrt{6\rho_c}) T_c$  приводит к выпадению неоднородно распределенного бозе-конденсата.

#### 7.4. Выводы к разделу 7

1. Исследование фазового пространства сложных систем требует совместного использования процедуры покрытий и метода множителей: в рамках первой определяются замороженные средние, во втором — отождённые (нахождение последних предполагает усреднение по реализациям случайного фрактала). Если в процессе генерации мультифрактала каждому сегменту сопоставляется число значений вероятности, превышающее число отрезков деления, то спектральная плотность принимает отрицательные значения. Построение спадающей ветви спектральной плотности достигается комбинированием величин (7.32), усреднённых по исходному и эскортному распределениям, определённым соотношением соответствующих множителей.

2. Синергетическое рассмотрение изменения структуры тонких плёнок под действием излучения показывает, что при выделении тепла, превышающем критическое значение, скорость фронта кристаллизации приобретает аномально большие значения. Это приводит к взрывной кристаллизации, процесс которой развивается по механизму самоорганизуемой критичности.

3. В рамках суперсимметричного представления бозе-эйнштейновской конденсации фермионных пар компоненты поля сводятся к квадратному корню плотности бозе-конденсата, амплитуде её флуктуаций и грассмановым полям, определяющим плотность ферми-частиц. Охлаждение однородно распределённых фермионов приводит сначала к самопроизвольному нарастанию гетерофазных флуктуаций, а затем к появлению неоднородного бозе-конденсата.



## ВЫВОДЫ

Исследованы сложные системы физики твёрдого тела, проявляющие самоорганизованное автоколебательное поведение, развита статистическая теория деформированных полей наносистем конечного размера, рассмотрена иерархическая структура дефектов твёрдого тела. Основные результаты диссертации могут быть представлены следующими выводами.

1. Формализм бифуркации Хопфа позволяет найти упрощённые условия образования предельного цикла детерминистической системы, определение которых не требует предварительного преобразования динамических переменных. Использование этих условий для когерентного излучения ансамбля квантовых точек показывает, что оно может протекать только в импульсном режиме.

2. Если область изменения обобщённых координаты и импульса, отвечающая предельному циклу, занимает малую часть фазовой плоскости и система подвержена периодическому воздействию, частота которого принадлежит ограниченному интервалу, то бифуркация Хопфа приводит к образованию периодического множества предельных циклов. В этом случае процесс самоорганизации сводится к множественному резонансу с внешним полем, который приводит к излучению с периодически распределённой интенсивностью.

3. Стохастизация подавляет автоколебания, если обобщённые силы и амплитуды шумов не содержат двузначных комбинаций переменных, параметризующих процесс самоорганизации. Автоколебания возникают, если наиболее быстро изменяется степень свободы, связанная нелинейным образом не менее чем с парой остальных. При этом шумы Леви, присущие твёрдым телам, проявляющим аномальную диффузию, всегда подавляют автоколебания.

4. В случае базовой деформации зависимость термодинамических величин свободных полей от логарифма деформации имеет симметричный вид относительно точки максимума, отвечающей недеформированной системе. Конечно-разностная деформация не изменяет термодинамические характеристики

твёрдого тела, а для исчисления Каниадакиса их зависимость от деформации имеет симметричный немонотонный вид по отношению к недеформированной системе.

5. Статистическая теория деформированных полей описывает коллективное поведение твёрдых тел конечного размера. В рамках такого подхода базово-деформированное исчисление следует использовать для описания самоподобных наносистем, конечно-разностное — при наличии электростатического взаимодействия, а исчисление Каниадакиса — для учёта релятивистских эффектов при гиперзвуковых исследованиях твёрдого тела.

6. Построение теории поля самоподобных систем достигается на основе статистики Цаллиса, в рамках которой роль параметра порядка играет деформированный логарифм амплитуды гидродинамической моды. При этом момент первого порядка, сводящийся к энтропии Цаллиса, задаёт глобальную меру неопределённости информации, а момент второго порядка определяет информацию Фишера, задающую локальную меру информации, запасённой системой.

7. Концепция многократно деформированных множеств позволяет провести обобщение теории мультифракталов, в рамках которого их статистическая сумма и спектр показателей масс представляются деформированными рядами по степеням показателя подобия, отсчитанного от единицы. При этом коэффициенты разложения статистической суммы сводятся к энтропии Цаллиса, а для показателя масс они определяют спектр фрактальных размерностей. В приложении к объектам физики твёрдого тела разработанный метод даёт описание тонких деталей геометрического строения и статистические свойства самоподобных наносистем.

8. Использование мультифрактального фазового анализа при исследованиях смещений частицы в процессе аномальной диффузии, тонкой структуры фоновой составляющей кривых рентгеновской микродифракции при отражении от сложных конденсированных сред, а также высокодисперсной структуры конденсатов углерода, алюминия и титана, полученных магнетронным распылением,

показывают, что мультифрактальный спектр формируется благодаря случайному разбросу элементов исследуемой структуры и дальним корреляциям в распределении этих элементов.

9. Описание произвольной структуры дефектов кристаллического строения достигается, если простейшим из них (вакансиям и внедрённым атомам) сопоставить узлы нижнего иерархического уровня, узлам следующего уровня — кластеры вакансий и внедрённых атомов типа дислокационных петель, узлам нано- и микроскопического уровня — ячейки кристаллической структуры и т.д.

В рамках такого представления последовательное теоретико-вероятностное описание иерархических структур достигается в предположении об аддитивности эффективных энергий уровней иерархического дерева. При этом вероятности образования узлов определяются недеформированными соотношениями, а для иерархических уровней и всего дерева вероятности образования, а также условия нормировки должны быть деформированы согласно алгебре Цаллиса. При этом диффузия по иерархическому дереву определяет процесс взрывной кристаллизации аморфных плёнок.

10. Аналитическое и численное исследования распределений вероятностей по иерархическим уровням показывает, что для случайной самоподобной структуры это распределение спадает более медленно, чем для детерминированных деревьев типа регулярного, вырожденного и дерева Фибоначчи. Благодаря тому, что для последних вероятность образования нижнего уровня намного выше, чем для случайного дерева, вероятность образования всей иерархической структуры наиболее быстро спадает с ростом самоподобного дерева. Во всех случаях вероятности образования иерархических уровней спадают с ростом их номера при деформации  $q > 1$  и удовлетворяют условию нормировки при  $q < 2$ .

11. Иерархическая структура дефектов кристаллического строения приводит к фрактальному строению фазового пространства сложных систем. Его исследование требует совместного использования процедуры покрытий и метода множителей. Если в процессе генерации мультифрактала каждому

сегменту сопоставляется число значений вероятности, превышающее число отрезков деления, то спектральная плотность принимает отрицательные значения. Построение спадающей ветви спектральной плотности достигается комбинированием величин, усреднённых по исходному и эскортному распределениям.

12. Описание бозе-эйнштейновской конденсации щелочных атомов, которые, обладая полуцелым спином, являются фермионами, требует использования суперсимметричного представления. Показано, что в рамках такого представления компоненты поля сводятся к квадратному корню плотности бозе-конденсата фермиевских пар, амплитуде её флуктуаций и грассмановым полям, определяющим плотность ферми-частиц. Охлаждение однородно распределённых фермионов приводит сначала к самопроизвольному нарастанию гетерофазных флуктуаций, а затем к появлению неоднородного бозе-конденсата.

## Приложение А

После обратного преобразования Фурье компоненты (3.75), (3.76) стационарного потока вероятностей принимают вид

$$\left\{ (f_1 + g_1\gamma_1) + \frac{\partial^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\partial x_1^{\frac{\alpha}{2}-1}} \left[ \left( -\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\frac{\alpha}{2}} g_1^\alpha + \left( -\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{\frac{\alpha}{2}} (g_1 g_2)^{\frac{\alpha}{2}} \right] \right\} P = J_1^{(0)}(x_2),$$

$$\left\{ (f_2 + g_2\gamma_2) + \frac{\partial^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\partial x_2^{\frac{\alpha}{2}-1}} \left[ \left( -\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\frac{\alpha}{2}} (g_2 g_1)^{\frac{\alpha}{2}} + \left( -\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{\frac{\alpha}{2}} g_2^\alpha \right] \right\} P = J_2^{(0)}(x_1). \quad (\text{A.1})$$

Действуя оператором  $g_2^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\partial^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\partial x_2^{\frac{\alpha}{2}-1}}$  на первое из этих выражений и оператором  $g_1^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\partial^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\partial x_1^{\frac{\alpha}{2}-1}}$  – на второе, получаем

$$g_2^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\partial^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\partial x_2^{\frac{\alpha}{2}-1}} \frac{\partial^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\partial x_1^{\frac{\alpha}{2}-1}} \left[ \left( -\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\frac{\alpha}{2}} g_1^\alpha + \left( -\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{\frac{\alpha}{2}} (g_1 g_2)^{\frac{\alpha}{2}} \right] P =$$

$$= g_2^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\partial^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\partial x_2^{\frac{\alpha}{2}-1}} \left[ J_1^{(0)} - (f_1 + g_1\gamma_1) P \right],$$

$$g_1^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\partial^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\partial x_1^{\frac{\alpha}{2}-1}} \frac{\partial^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\partial x_2^{\frac{\alpha}{2}-1}} \left[ \left( -\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\frac{\alpha}{2}} (g_2 g_1)^{\frac{\alpha}{2}} + \left( -\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{\frac{\alpha}{2}} g_2^\alpha \right] P =$$

$$= g_1^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\partial^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\partial x_1^{\frac{\alpha}{2}-1}} \left[ J_2^{(0)} - (f_2 + g_2\gamma_2) P \right]. \quad (\text{A.2})$$

Почленное вычитание этих равенств приводит к дифференциальному уравнению дробного порядка

$$\left\{ \left[ (f_1 + g_1\gamma_1) g_2^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\partial^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\partial x_2^{\frac{\alpha}{2}-1}} - (f_2 + g_2\gamma_2) g_1^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\partial^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\partial x_1^{\frac{\alpha}{2}-1}} \right] + G(x_1, x_2) \right\} P =$$

$$= g_2^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\partial^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\partial x_2^{\frac{\alpha}{2}-1}} J_1^{(0)}(x_2) - g_1^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\partial^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\partial x_1^{\frac{\alpha}{2}-1}} J_2^{(0)}(x_1), \quad (\text{A.3})$$

где введена функция

$$\begin{aligned}
 G(x_1, x_2) \equiv & g_2^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\partial^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\partial x_2^{\frac{\alpha}{2}-1}} \frac{\partial^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\partial x_1^{\frac{\alpha}{2}-1}} \left[ \left( -\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\frac{\alpha}{2}} g_1^\alpha + \left( -\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{\frac{\alpha}{2}} (g_1 g_2)^{\frac{\alpha}{2}} \right] - \\
 & - g_1^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\partial^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\partial x_1^{\frac{\alpha}{2}-1}} \frac{\partial^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\partial x_2^{\frac{\alpha}{2}-1}} \left[ \left( -\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\frac{\alpha}{2}} (g_2 g_1)^{\frac{\alpha}{2}} + \left( -\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{\frac{\alpha}{2}} g_2^\alpha \right] + \\
 & + \left[ g_2^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\partial^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\partial x_2^{\frac{\alpha}{2}-1}} (f_1 + g_1 \gamma_1) - g_1^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\partial^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\partial x_1^{\frac{\alpha}{2}-1}} (f_2 + g_2 \gamma_2) \right].
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

В случае гауссовых процессов ( $\alpha = 2$ ) дифференциальное уравнение (A.3) сводится к алгебраическому и даёт функцию распределения, найденную в разделе 3.1.2. Однако в общем случае  $\alpha \leq 2$  решение дробно-дифференциального уравнения (A.3) представляется аналитически невозможным, в связи с чем в разделе 3.2.2 мы использовали фурье-представление.

Отметим, что в  $x$ -представлении условие согласования (3.77) записывается в виде

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (f_1 + g_1 \gamma_1) - \left( -\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^\alpha |g_1|^\alpha \right] J_2^{(0)}(x_1) = \\
 & = \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} (f_2 + g_2 \gamma_2) - \left( -\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^\alpha |g_2|^\alpha \right] J_1^{(0)}(x_2),
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

где для простоты принято  $\varphi_i = 0$ ,  $m_i = 1$ . Равенство (A.5) показывает, каким образом должны быть связаны компоненты потока вероятностей  $J_{2,1}(x_{1,2})$  с заданными зависимостями сил  $f_1(x_1, x_2)$ ,  $f_2(x_1, x_2)$  и амплитуд мультипликативных шумов Леви  $g_1(x_1, x_2)$ ,  $g_2(x_1, x_2)$  при квазипериодической эволюции стохастической системы. Однако, как установлено в разделе 3.2.2, при этом плотность вероятности (3.87) принимает нулевое значение, и предельный цикл не реализуется.

## Приложение Б

В рамках базово-деформированного исчисления пара дуальных  $q$ -гамма функций определяется интегралами

$$\gamma_q(\alpha) := \int_0^{+\infty} x_q^{\alpha-1} e_q(-x) d_q x, \quad (\text{Б.1})$$

$$\Gamma_q(\alpha) := \int_0^{+\infty} x_q^{\alpha-1} E_q(-qx) d_q x, \quad (\text{Б.2})$$

где верхний предел равен  $\frac{1}{1-q}$  при  $|q| < 1$ . Эти определения принципиально отличаются от стандартных [28] благодаря тому, что вместо обычной степенной функции  $x^{\alpha-1}$  использована деформированная функция  $x_q^{\alpha-1}$ , обобщающая определение деформированного бинома (4.107) за счёт замены целого числа  $n$  на произвольную степень  $\alpha - 1$ . Определения (Б.1), (Б.2) обеспечивают свойства

$$\Gamma_q(\alpha + 1) = [\alpha]_q \Gamma_q(\alpha), \quad (\text{Б.3})$$

$$\gamma_q(\alpha + 1) = [\alpha]_q \gamma_q(\alpha) q^{-\alpha} = -[-\alpha]_q \gamma_q(\alpha), \quad (\text{Б.4})$$

где  $\gamma_q(0) = \gamma_q(1) = 1$  и  $\Gamma_q(0) = \Gamma_q(1) = 1$ . При  $\alpha = 1/2$  равенство (Б.1) задаёт деформированный интеграл Пуассона

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e_q(-x_q^2) d_q x = \frac{2}{[2]_q} \gamma_q(1/2) \equiv \sqrt{\pi_q}, \quad (\text{Б.5})$$

где деформированное число  $\pi_q$  имеет предел  $\lim_{q \rightarrow 1} \pi_q = \pi \equiv 3.14159 \dots$

Удельная статистическая сумма вычисляется в результате следующих

действий:

$$\begin{aligned}
 z_q^{(0)}(J) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e_q \left( -\frac{\phi^2}{[2]_q \Delta^2} \right) E_q(J\phi) d_q \phi = \\
 &= E_q \left( q \frac{\Delta^2 J^2}{[2]_q} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} e_q \left\{ -\frac{(\phi - \Delta^2 J)_q^2}{[2]_q \Delta^2} \right\} d_q \phi = \quad (\text{Б.6}) \\
 &= E_q \left( q \frac{\Delta^2 J^2}{[2]_q} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} e_q \left( -\frac{x_q^2}{[2]_q \Delta^2} \right) d_q x = \frac{2\Delta}{\sqrt{[2]_q}} \gamma_q \left( \frac{1}{2} \right) E_q \left( q \frac{\Delta^2 J^2}{[2]_q} \right).
 \end{aligned}$$

Здесь введена переменная  $x = \phi - \Delta^2 J$  и учтено равенство (Б.5).

В случае  $h$ -деформированного исчисления гамма-функция принимает вид

$$\gamma_h(\alpha) := \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e_h(-x) d_h x = [1]_h^{\alpha-1} \Gamma(\alpha), \quad (\text{Б.7})$$

обеспечивающий пропорциональность стандартной гамма-функции  $\Gamma(\alpha)$ .

Подобно (Б.6) одночастичная статистическая сумма определяется выражениями

$$\begin{aligned}
 z_h^{(0)}(J) &= 2 \frac{[1]_h}{\sqrt{[2]_h}} \gamma_h \left( \frac{1}{2} \right) e_h \left[ \frac{[1]_h}{2} (\Delta J)^2 \right] \Delta = \\
 &= \sqrt{[2]_h} \gamma_h \left( \frac{1}{2} \right) e_h \left[ \frac{[1]_h}{2} (\Delta J)^2 \right] \Delta. \quad (\text{Б.8})
 \end{aligned}$$

Учёт последнего равенства (Б.7) приводит к простому результату (4.178).



## Приложение В

Следуя [185], приведём основные соотношения деформированной алгебры Цаллиса, основыванной на определениях экспоненциальной и логарифмической функций

$$\ln_q(x) := \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q}, \quad \exp_q(x) := [1 + (1 - q)x]_+^{\frac{1}{1-q}}, \quad (\text{B.1})$$

где  $q \geq 0$  – параметр деформации и обозначено  $[y]_+ \equiv \max(0, y)$ . Для произвольных значений  $x, y > 0$  деформированные произведение и частное задаются выражениями

$$x \otimes_q y := [x^{1-q} + y^{1-q} - 1]_+^{\frac{1}{1-q}}, \quad x \oslash_q y := [x^{1-q} - y^{1-q} + 1]_+^{\frac{1}{1-q}}. \quad (\text{B.2})$$

Соответственно, деформированная сумма и разность имеют вид

$$x \oplus_q y := x + y + (1 - q)xy, \quad x \ominus_q y := \frac{x - y}{1 + (1 - q)y}, \quad (\text{B.3})$$

где  $y \neq -\frac{1}{1-q}$ . Отсюда для  $n$ -кратной деформированной суммы одинаковых слагаемых следует

$$n \odot_q x \equiv \underbrace{x \oplus_q x \oplus_q \cdots \oplus_q x}_n := \frac{[1 + (1 - q)x]_+^n - 1}{1 - q} = \ln_q [\exp_q(x)]^n. \quad (\text{B.4})$$

Правила (B.2), (B.3) обеспечивают следующие свойства  $q$ -логарифма и  $q$ -экспоненты (B.1):

$$\begin{aligned} \ln_q(x \otimes_q y) &= \ln_q x + \ln_q y, & \ln_q(x \oslash_q y) &= \ln_q x - \ln_q y; \\ \exp_q(x) \otimes_q \exp_q(y) &= \exp_q(x + y), & \exp_q(x) \oslash_q \exp_q(y) &= \exp_q(x - y). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

## Приложение Д

Пусть геометрическая прогрессия  $a, ar, ar^2, \dots, ar^{n-1}$  определена знаменателем  $r$ , масштабом  $a$  и числом слагаемых  $n$ . Проводя прямые выкладки для малых  $n$ , с использованием деформированной суммы (В.3) легко видеть, что сумма деформированной геометрической прогрессии

$$S_n := \underbrace{a \oplus_q ar \oplus_q \oplus_q ar^2 \oplus_q \dots \oplus_q ar^{n-1}}_n \quad (\text{Д.1})$$

может быть представлена рядом

$$S_n := a \sum_{m=0}^{n-1} \sigma_n^m [(1-q)a]^m, \quad (\text{Д.2})$$

коэффициенты которого  $\sigma_n^m$  подлежат определению. Итерация выражения (Д.1) приводит к следующей цепочке равенств:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &:= S_n \oplus_q (ar^n) = (S_n + ar^n) + (1-q)S_n(ar^n) = \\ &= \left\{ a(\sigma_n^0 + r^n) + a \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_n^m [(1-q)a]^m \right\} + (1-q)a(ar^n) \sum_{m=0}^{n-1} \sigma_n^m [(1-q)a]^m = \\ &= a\sigma_{n+1}^0 + a \sum_{l=0}^{n-2} \sigma_n^{l+1} [(1-q)a]^{l+1} + a[(1-q)a]r^n \sum_{m=0}^{n-1} \sigma_n^m [(1-q)a]^m = \\ &= a\sigma_{n+1}^0 + a \sum_{l=0}^{n-2} (\sigma_n^{l+1} + r^n \sigma_n^l) [(1-q)a]^{l+1} + a[(1-q)a]r^n \sigma_n^{n-1} [(1-q)a]^{n-1} = \\ &= a\sigma_{n+1}^0 + a \sum_{m=1}^{n-1} (\sigma_n^m + r^n \sigma_n^{m-1}) [(1-q)a]^m + a\sigma_n^{n-1} [(1-q)a]^n r^n. \end{aligned} \quad (\text{Д.3})$$

Здесь последнее равенство первой строки следует из определения (В.3); в ряду (Д.2), входящем в фигурные скобки второй строки, выделено слагаемое,

отвечающее  $m = 0$ ; то же сделано и во втором слагаемом третьей строки, где кроме того введен индекс  $l = m - 1$ ; в четвертой строке во второе слагаемое включены обе суммы предыдущей строки, а последний член отвечает значению  $m = n - 1$ ; в последней строке проведен обратный переход к суммированию по индексу  $m = l + 1$ . В результате ряд (Д.2) принимает вид

$$S_n = a s_n + a \sum_{m=1}^{n-2} (\sigma_{n-1}^m + r^{n-1} \sigma_{n-1}^{m-1}) [(1-q)a]^m + a \sigma_{n-1}^{n-2} [(1-q)a]^{n-1} r^{n-1}, \quad (\text{Д.4})$$

где введена сумма

$$s_n \equiv \sum_{m=0}^{n-1} r^m = \frac{1 - r^n}{1 - r} \quad (\text{Д.5})$$

недеформированной геометрической прогрессии  $1, r, r^2, \dots, r^{n-1}$ . Сравнение слагаемых (Д.2) и (Д.4), отвечающих одинаковым индексам  $m$ , даёт следующие соотношения:

$$\sigma_n^0 = s_n; \quad (\text{Д.6})$$

$$\sigma_n^m = \sigma_{n-1}^m + \sigma_{n-1}^{m-1} r^{n-1}, \quad m \in [1, n-2]; \quad (\text{Д.7})$$

$$\sigma_n^{n-1} = \sigma_{n-1}^{n-2} r^{n-1}. \quad (\text{Д.8})$$

Первое из них показывает, что коэффициент низшей степени ряда (Д.2) сводится к сумме обычной геометрической прогрессии (Д.5). Легко проверить, что регрессия (Д.7) удовлетворяется подстановкой

$$\sigma_n^m = \sum_{l=0}^{n-1} \sigma_l^{m-1} r^l, \quad (\text{Д.9})$$

итерация которой даёт

$$\sigma_n^m = \sum_{l=0}^{n-1} \sigma_l^{m-1} r^l = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{l-1} \sigma_k^{m-2} r^{l+k} = \dots = \sum_{l_{m-1}=0}^{n-1} r^{l_{m-1}} \sum_{l_{m-2}=0}^{l_{m-1}-1} r^{l_{m-2}} \dots \sum_{l_0=0}^{l_1-1} \sigma_{l_0}^0 r^{l_0}. \quad (\text{Д.10})$$

Однако последнее выражение крайне неудобно для вычислений, поскольку верхний предел каждой из сумм, кроме первой, определяется индексом суммирования предыдущей суммы. Поэтому более удобно начать с определения коэффициентов (Д.9) при малых индексах  $m$ :

$$\begin{aligned} \sigma_n^1 &= \sum_{l=0}^{n-1} \sigma_l^0 r^l = \sum_{l=0}^{n-1} s_l r^l = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1-r^n}{1-r} r^l = r \frac{(1-r^n)(1-r^{n-1})}{(1-r)(1-r^2)}, \\ \sigma_n^2 &= \sum_{l=0}^{n-1} \sigma_l^1 r^l = r \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(1-r^l)(1-r^{l-1})}{(1-r)(1-r^2)} r^l = r^3 \frac{(1-r^n)(1-r^{n-1})(1-r^{n-2})}{(1-r)(1-r^2)(1-r^3)}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (\text{Д.11})$$

Эти выражения показывают, что коэффициенты  $\sigma_n^m$  пропорциональны дробям, знаменатели которых являются произведением членов  $1-r^l$  с растущими степенями  $l = 1, 2, \dots, m+1$ , а числители содержат такое же число сомножителей  $1-r^{n-l}$ ,  $l = 0, 1, \dots, m$  со спадающими степенями. Поэтому можно предположить, что искомые коэффициенты имеют вид

$$\sigma_n^m = r^{\sum_{k=1}^m k} \prod_{l=0}^m \frac{1-r^{n-l}}{1-r^{l+1}} = r^{\frac{m(m+1)}{2}} \prod_{l=0}^m \frac{1-r^{n-l}}{1-r^{l+1}}. \quad (\text{Д.12})$$

При  $m = 0$  это равенство сводится к уже установленному соотношению (Д.6). Для индексов  $m \in [1, n-2]$  подстановка (Д.12) в (Д.7) приводит к следующей

цепочке равенств:

$$\begin{aligned}
\sigma_n^m &= r^{\sum_{k=1}^m k} \prod_{l=0}^m \frac{1 - r^{n-1-l}}{1 - r^{l+1}} + r^{\sum_{k=1}^{m-1} k} \prod_{l=0}^{m-1} \frac{1 - r^{n-1-l}}{1 - r^{l+1}} r^{n-1} = \\
&= r^{\sum_{k=1}^m k} \prod_{l=0}^m \frac{1 - r^{n-1-l}}{1 - r^{l+1}} \left( 1 + \frac{1 - r^{m+1}}{1 - r^{n-m-1}} r^{n-1-m} \right) = \\
&= r^{\sum_{k=1}^m k} \frac{\prod_{l=1}^{m+1} (1 - r^{n-l})}{\prod_{l=0}^m (1 - r^{l+1})} \frac{1 - r^n}{1 - r^{n-m-1}} = \\
&= r^{\sum_{k=1}^m k} \frac{\prod_{l=0}^m (1 - r^{n-l}) \frac{1 - r^{n-(m+1)}}{1 - r^n}}{\prod_{l=0}^m (1 - r^{l+1})} \frac{1 - r^n}{1 - r^{n-m-1}} = r^{\frac{m(m+1)}{2}} \prod_{l=0}^m \frac{1 - r^{n-l}}{1 - r^{l+1}}.
\end{aligned} \tag{Д.13}$$

Здесь во второй строке вынесен общий множитель слагаемых первой строки; последняя дробь третьей строки получена суммированием слагаемых, стоящих в скобках предыдущей строки; дробь в числителе первой дроби четвёртой строки появляется благодаря выделению множителей, отвечающих нижнему  $l = 0$  и верхнему  $l = m + 1$  пределам произведения, стоящего в предыдущей строке; последнее равенство получается после сокращения дробей предыдущего выражения. И наконец, при  $m = n - 1$  выражения (Д.8) и (Д.12) принимают одинаковый вид

$$\sigma_n^{n-1} = r^{\frac{n(n-1)}{2}}. \tag{Д.14}$$

Таким образом, можно сделать вывод о применимости предположения (Д.12) при всех индексах  $m \in [0, n - 1]$ . Подстановка (Д.12) в (Д.2) даёт окончательное выражение суммы геометрической прогрессии (Д.1):

$$S_n = a \sum_{m=0}^{n-1} C_n^{m+1}(r) r^{\frac{m(m+1)}{2}} [(1 - q)a]^m, \tag{Д.15}$$

где коэффициенты имеют вид

$$C_n^m(r) \equiv \prod_{l=0}^{m-1} \frac{1 - r^{n-l}}{1 - r^{l+1}}. \quad (\text{Д.16})$$

Равенство (Д.15) удобно выразить через произведение [51]

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1-q} \left\{ \sum_{m=0}^n C_n^m(r) r^{\frac{m(m-1)}{2}} [(1-q)a]^m - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{1-q} \left\{ \prod_{m=0}^{n-1} [1 + (1-q)ar^m] - 1 \right\} = \ln_q \left[ \prod_{m=0}^{n-1} \exp_q(ar^m) \right]. \end{aligned} \quad (\text{Д.17})$$

Здесь использовано представление деформированного полинома Гаусса [28, 168]

$$\sum_{m=0}^n C_n^m(r) r^{\frac{m(m-1)}{2}} [(1-q)a]^m = \prod_{m=0}^{n-1} [1 + a(1-q)r^m]. \quad (\text{Д.18})$$

Согласно (В.4), при  $r = 1$  получаем

$$S_n = \frac{[1 + (1-q)a]^n - 1}{1-q} = n \odot_q a. \quad (\text{Д.19})$$

В пределе  $q \rightarrow 1$  это равенство принимает тривиальный вид  $S_n = na$ .

Перепишем коэффициенты (Д.16) в виде

$$C_n^m(r) = \frac{\prod_{l=(n-m)+1}^n (1-r^l)}{\prod_{l=1}^m (1-r^l)} = \frac{\prod_{l=1}^n (1-r^l)}{\prod_{l=1}^m (1-r^l) \prod_{l=1}^{n-m} (1-r^l)}, \quad (\text{Д.20})$$

из которого следует, что они сводятся к деформированным биномиальным коэффициентам [28, 168]

$$C_n^m(r) \equiv \frac{[n]_r!}{[m]_r! [n-m]_r!}, \quad (\text{Д.21})$$



Наконец, в пределе  $r \rightarrow 1$  коэффициенты (Д.21) принимают обычный вид

$$\lim_{r \rightarrow 1} C_n^m(r) = \lim_{r \rightarrow 1} \prod_{l=0}^m \frac{1 - r^{n-l}}{1 - r^{l+1}} = \prod_{l=0}^{m-1} \frac{n-l}{l+1} \equiv \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (\text{Д.27})$$



## Приложение E

С учётом определений (7.78), (7.81) левая часть уравнения (7.82) записывается в виде

$$\frac{1}{2}[\bar{\mathcal{D}}, \mathcal{D}]\Phi = (\varphi - \dot{\eta}) - \bar{\theta}\dot{\Psi} + \dot{\bar{\Psi}}\theta + \bar{\theta}\theta\dot{\varphi}. \quad (\text{E.1})$$

Правая часть этого уравнения, представляющая суперсимметричную вариационную производную, принимает вид (7.71)

$$\begin{aligned} \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\Phi} = F' (\eta + \bar{\theta}\Psi + \bar{\Psi}\theta + \bar{\theta}\theta\varphi) \\ - [\nabla^2\eta + \bar{\theta} (\nabla^2\Psi) + (\nabla^2\bar{\Psi})\theta + \bar{\theta}\theta (\nabla^2\varphi)], \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

где штрих означает дифференцирование по соответствующему аргументу. Согласно первому равенству (7.80), разложение по степеням добавки  $\bar{\theta}\Psi + \bar{\Psi}\theta + \bar{\theta}\theta\varphi$  даёт

$$\begin{aligned} F'(\Phi) = F' [\eta + (\bar{\theta}\Psi + \bar{\Psi}\theta + \bar{\theta}\theta\varphi)] \\ = F'(\eta) + F''(\eta) (\bar{\theta}\Psi + \bar{\Psi}\theta) + [F''(\eta)\varphi - F'''(\eta)\rho] \bar{\theta}\theta. \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Сравнение множителей, стоящих перед 1,  $\bar{\theta}$ ,  $\theta$  и  $\bar{\theta}\theta$ , приводит к системе (7.83) – (7.86).

В более сложном случае суперполя (7.91) выражения (E.1), (E.3) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[\bar{\mathcal{D}}, \mathcal{D}]\tilde{\Phi} = [(\varphi - \dot{\eta}) + \eta\rho] \\ - \left[ (1 - \eta) \frac{\dot{\Psi}}{\bar{\Psi}} - \dot{\eta} \right] \bar{\theta}\Psi + \left[ (1 + \eta) \frac{\dot{\bar{\Psi}}}{\bar{\Psi}} + \dot{\eta} \right] \bar{\Psi}\theta + \frac{\partial}{\partial t} (\varphi + \eta\rho) \bar{\theta}\theta, \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

$$\begin{aligned}
 F'(\tilde{\Phi}) = & F'(\eta) + F''(\eta)(1 - \eta)\bar{\theta}\Psi + F''(\eta)(1 + \eta)\bar{\Psi}\theta \\
 & + \left[ F''(\eta)(\varphi + \eta\rho) - F'''(\eta)(1 - \eta^2)\rho \right] \bar{\theta}\theta.
 \end{aligned}
 \tag{E.5}$$

Сравнение соответствующих суперсимметричных слагаемых даёт систему (7.92) – (7.95).

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Anderson P.W. More is different / P.W. Anderson // Nature. — 1972. — Vol. 177. — P. 393–396.
2. Форстер Д. Гидродинамические флуктуации, нарушенная симметрия и корреляционные функции / Д. Форстер. — Москва: Атомиздат, 1980. — 288 с.
3. Mezard M. Spin Glass Theory and Beyond / M. Mezard, G. Parisi, M.A. Virasoro. — Singapur: World Scientific, 1987. — 317 p.
4. Parisi G. Complex Systems: a Physicist's Viewpoint Physics / G. Parisi // Physica A. — 1999. — Vol. 263. — P. 557–564.
5. Sherrington D. Physics and Complexity / D. Sherrington // Phil. Trans. R. Soc. A. — 2010. — Vol. 368. — P. 1175–1189.
6. Хакен Г. Синергетика / Г. Хакен. — Москва: Мир, 1985. — 423 с.
7. Хакен Г. Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах / Г. Хакен. — Москва: Мир, 1985. — 424 с.
8. Анищенко В.С. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем / В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова, В.В. Астахов. — Саратов: Изд-во Саратовского Ун-та, 1999. — 368 с.
9. Малинецкий Г.Г. Современные проблемы нелинейной динамики / Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов. — Москва: Эдиториал УРСС, 2000. — 336 с.
10. Берже П. Порядок в хаосе (о детерминистском подходе к турбулентности) / П. Берже, И. Помо, К. Видаль. — Череповец: Меркурий Пресс, 2000. — 366 с.

11. Лихтенберг А. Регулярная и стохастическая динамика / А. Лихтенберг, М. Либерман. – М.: Мир, 1985. – 529 с.
12. Эбелинг В. Образование структур при необратимых процессах: введение в теорию диссипативных структур / В. Эбелинг ; [пер. с нем. А.С. Доброславский] – М.: Мир, 1979. – 279 с.
13. Олемской А.И. Самоорганизация самоподобных стохастических систем / А.И. Олемской, Д.О. Харченко. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007. – 296 с.
14. Mainzer К. Thinking in Complexity / К. Mainzer. – Berlin: Springer-Verlag, 1997. – 482 p.
15. Bak P. How Nature Works: the Science of Self-Organized Criticality / P. Bak. – Oxford: Oxford University Press, 1997. – 226 p.
16. Jensen H.J. Self-Organized Criticality. Emergent Complex Behavior in Physical and Biological Systems / H.J. Jensen. – Cambridge: Cambridge University Press, 1998. – 152 p.
17. Sornette D. Critical phenomena in natural Sciences / D. Sornette. – New York: Springer-Verlag, 2006. – 528 p.
18. Gell-Mann M. Nonextensive Entropy: Interdisciplinary Applications / M. Gell-Mann, C. Tsallis. – Oxford: Oxford University Press, 2004. – 440 p.
19. Колебания и бегущие волны в химических системах / [ред. Р. Филд, М. Бургер]. – Москва: Мир, 1988. – 721 с.
20. Anderson P.W. The Economy as an Evolving Complex System / P.W. Anderson, К.Ж. Arrow, Д. Пайнс. – MA: Addison-Wesley, Reading, 1988. – 334 p.
21. Weisbuch G. Complex System Dynamics / G. Weisbuch. – MA: Addison-Wesley, Reading, 1990. – 189 p.

22. Self-Organization of Complex Structures: From Individual to Collective Dynamics / [ed. by F. Schweitzer]. – London: Gordon and Breach, 1997. – 620 p.
23. Arthur W.B. The Economy as an Evolving Complex System II / W.B. Arthur, S. Durlauf, D. Lane. – MA: Addison-Wesley, Reading, 1997. – 608 p.
24. De Oliveira S.M. Evolution, Money, War and Computers / S.M. De Oliveira, P.M.C. de Oliveira, D. Stauffer. – Stuttgart: Teubner, 1999. – 156 p.
25. Хэссард Б. Теория и приложения бифуркации рождения цикла / Б. Хэссард, Н. Қазаринов, И. Вэн. – Москва: Мир, 1985. – 280 с.
26. Moss F. Noise in Nonlinear Dynamical Systems / F. Moss, P.V.E. McClintock. – Cambridge: Cambridge University Press, 1989. – 372 p.
27. Tsallis C. Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics — Approaching a Complex World / C. Tsallis. – New York: Springer, 2009. – 382 p.
28. Кас V. Quantum Calculus / V. Кас, P. Cheung. – New York: Springer-Verlag, 2002. – 112 p.
29. Alonso D. Stochastic amplification in epidemics / D. Alonso, A.J. McKane, M. Pascual // J. R. Soc. Interface. – 2007. – Vol. 4. – P. 575–582.
30. Simoes M. Stochastic fluctuations in epidemics on networks / M. Simoes, M.M. Telo da Gama, A. Nunes // J. R. Soc. Interface. – 2008. – Vol. 5. – P. 555–566.
31. Kuske R. Sustained oscillations via coherence resonance in SIR / R. Kuske, L.F. Gordillo, P. Greenwood // J. Theor. Biol. – 2007. – Vol. 245. – P. 459–469.
32. McKane A.J. Predator-Prey Cycles from Resonant Amplification of Demographic Stochasticity / A.J. McKane, T.J. Newman // Phys. Rev. Lett. – 2005. – Vol. 94. – P. 218102.

33. Pineda-Krch M. A tale of two cycles — distinguishing quasi-cycles and limit cycles in finite predator-prey populations / M. Pineda-Krch, H.J. Blok, U. Dieckmann, M. Doebeli // *Oikos*. — 2007. — Vol. 116. — P. 53–64.
34. De la Lama M.S. Van Kampen's expansion approach in an opinion formation model / M.S. de la Lama, I.G. Szendro, J.R. Iglesias, H.S. Wio // *Eur. Phys. J. B*. — 2006. — Vol. 51. — P. 435–442.
35. Gonze D. Biochemical clocks and molecular noise: Theoretical study of robustness factors / D. Gonze, J. Halloy, P. Gaspard // *J. Chem. Phys.* — 2002. — Vol. 116. — P. 10997–11010.
36. McKane A.J. Amplified Biochemical Oscillations in Cellular Systems / A.J. McKane, J.D. Nagy, T.J. Newman, M.O. Stefanini // *J. Stat. Phys.* — 2007. — Vol. 128. — P. 165–191.
37. Scott M. Estimations of intrinsic and extrinsic noise in models of nonlinear genetic networks / M. Scott, B. Ingalls, M. Kaern // *Chaos*. — 2006. — Vol. 16. — P. 026107.
38. Ben-Naim E. Finite size Fluctuations in Interacting Particle Systems / E. Ben-Naim, P.L. Krapivsky // *Phys. Rev. E*. — 2004. — Vol. 69. — P. 046113.
39. Wilczek F. Fractional Statistics and Anyon superconductivity / F. Wilczek. — Singapore: World Scientific, 1990. — 447 p.
40. Beck C. Thermodynamics of chaotic system / C. Beck, F. Schlögl. — Cambridge: University Press, 1993. — 286 p.
41. Abe S. in: Nonextensive Statistical Mechanics and its Applications / S. Abe ; [ed. by Y. Okamoto]. — Berlin: Springer, 2001. — 277 p.
42. Олемской А.И. Синергетика сложных систем: Феноменология и статистическая теория / А.И. Олемской. — Москва: изд-во КРАСАНД, 2009. — 384 с.

43. Олемской А.И. Статистическая теория самоорганизованных сложных систем / А.И. Олемской, И.А. Шуда – Сумы: изд-во СумГУ, 2010. – 373 с.
44. Коломієць С.В. Біфуркаційний аналіз динаміки одномодових твердотільних лазерів / С.В. Коломієць, І.О. Шуда // Вісник Сумського державного університету. Серія Фізика, математика, механіка. – 2005. – Т. 80, № 8. – С. 5–67.
45. Олемской А.И. Радиационные дефекты в твердых телах / А.И. Олемской, И.А. Шуда // Успехи физ. метал. – 2009. – Т. 10, № 1. – С. 1–25.
46. Олемской О.І. Самоорганізація нестійкої системи за біфуркацією Хопфа / О.І. Олемской, В.О. Харченко, І.О. Шуда // УФЖ. – 2006. – Т. 51, № 3. – С. 312–320.
47. Olemskoi A.I. Thermodynamic representation of the periodic set appearing as a result of the Hopf bifurcation / A.I. Olemskoi, I.A. Shuda // УФЖ. – 2007. – Т. 52, № 7. – С. 703–708.
48. Олемской О.І. Теорія періодичної множини граничних циклів, що народжуються внаслідок біфуркації Хопфа / О.І. Олемской, І.О. Шуда // Вісник Сумського державного університету. Серія Фізика, математика, механіка. – 2007. – № 1. – С. 86–94.
49. Олемской О.І. Умови самоорганізованої модуляції / О.І. Олемской, С.С. Борисов, І.О. Шуда // УФЖ. – 2008. – Т. 53, № 11. – С. 1120–1128.
50. Олемской А.И. Мультифрактальный анализ временных рядов / А.И. Олемской, В.Н. Борисюк, И.А. Шуда // Вісник Сумського державного університету. Серія Фізика, математика, механіка. – 2008. – № 2. – С. 70–81.
51. Олемской А.И. Деформированная сумма геометрической прогрессии / А.И. Олемской, С.С. Борисов, И.А. Шуда // Вісник Сумського державного університету. Серія Фізика, математика, механіка. – 2008. – № 2. – С. 82–89.

52. Shuda I.A. Noise-induced oscillations in non-equilibrium steady state systems / I.A. Shuda, S.S. Borysov, A.I. Olemskoi // *Phys. Scripta*. – 2009. – Vol. 79. – P. 065001.
53. Olemskoi A.I. Self-similarity degree of deformed statistical ensembles / A.I. Olemskoi, A.S. Vaylenko, I.A. Shuda // *Physica A*. – 2009. – Vol. 388. – P. 1929–1938.
54. Olemskoi A.I. Statistical theory of self-similarly distributed fields / A.I. Olemskoi, I.A. Shuda // *Phys. Lett. A*. – 2009. – Vol. 373. – P. 4012–4016.
55. Олемской А.И. Мультифрактальный анализ рентгеновских дифрактограмм сложных конденсированных сред / А.И. Олемской, С.Н. Данильченко, В.Н. Борисюк, И.А. Шуда // *Металлофиз. новейшие технол.* – 2009. – Т. 31, № 6. – С. 777–789.
56. Олемской О.И. Моделирование фазового простору складних систем / О.И. Олемской, В.М. Борисюк, І.О. Шуда // *Журн. фіз. досл.* – 2009. – Т. 13, № 2. – С. 2002–2010.
57. Олемской А.И. Исследование мультифрактальной поверхности тонких пленок, полученных методом магнетронного распыления / А.И. Олемской, В.И. Перекрестов, В.Н. Борисюк, И.А. Шуда, А.А. Мокренко // *Металлофиз. новейшие технол.* – 2009. – Т. 31, № 11. – С. 1505–1518.
58. Олемской А.И. Модель изменения структуры аморфных и многокомпонентных тонких пленок под воздействием импульсной фотонной обработки / А.И. Олемской, И.А. Шуда, Е.В. Шведов // *Металлофиз. новейшие технол.* – 2009. – Т. 31, № 12. – С. 1653–1668.
59. Олемской А.И. Мультифрактальный анализ временных рядов экономических систем / А.И. Олемской, В.Н. Борисюк, И.А. Шуда, А.А. Багдасарян // *Ж. нано- та електрон. фіз.* – 2009. – Т. 1, № 3. – С. 82–88.



60. Олемской А.И. Подавление стохастических осцилляций шумами Леви / А.И. Олемской, С.С. Борисов, И.А. Шуда, Т.А. Давыденко // Ж. нано- та електрон. фіз. – 2009. – Т. 1, № 4. – С. 7–11.
61. Olemskoi A. Generalization of multifractal theory within quantum calculus / A. Olemskoi, I. Shuda, V. Borisyuk // Europhys. Lett. – 2010. – Vol. 89. – P. 50007–50012.
62. Olemskoi A.I. Statistical field theories deformed within different calculi / A.I. Olemskoi, S.S. Borysov, I.A. Shuda // Eur. Phys. J. B. – 2010. – Vol. 77. – P. 219–231.
63. Olemskoi A.I. Supersymmetry representation of Bose-Einstein condensation of fermion pairs / A.I. Olemskoi, I.A. Shuda // Ukr. J. Phys. – 2010. – Vol. 55. – P. 830–835.
64. Шуда І.О. Фазовий аналіз когерентного випромінювання ансамблю квантових точок / І.О. Шуда // УФЖ. – 2010. – Т. 55, № 9. – С. 1029–1034.
65. Olemskoi A.I. Suppression of oscillations by Lévy noise / A.I. Olemskoi, S.S. Borysov, I.A. Shuda // Ukr. J. Phys. – 2011. – Vol. 56, № 3. – P. 287–295.
66. Olemskoi A.I. Analytical and numerical studies of creation probabilities of hierarchical trees / A.I. Olemskoi, S.S. Borysov, I.A. Shuda // Cond. Mat. Phys. – 2011. – Vol. 14, No 1. – P. 14001: 1–6.
67. Olemskoi Alexander. Creation probabilities of hierarchical trees / Alexander Olemskoi, Stanislav Borysov, Irina Shuda // J. Phys. Stud. – 2011. – Vol. 15. No 2. – P. 2002–2028.
68. Олемской О.І. Самоорганізація нестійкої системи за біфуркацією Хопфа / О.І. Олемской, І.О. Шуда, В.О. Харченко // 5 Міжнародна школа-конференція "Актуальні проблеми фізики напівпровідників 27 – 30 червня 2005 р.: тези доповідей. – Дрогобич, 2005. – С. 128.

69. Shuda I.A. Self-organization process evolving in accordance with Hopf bifurcation / I.A. Shuda, A.I. Olemskoi, V.O. Kharchenko // Statistical Physics 2005: Modern Problems and New Applications : міжнар. конф., 28 – 30 липня 2005 р.: тези доповідей. – Львів, 2005. – С. 166.
70. Shuda I.A. Noise induced Hopf bifurcation / I.A. Shuda, S.S. Borisov, A.I. Olemskoi // Int. conf. in Statistical Physics : міжнар. конф., 14 – 18 липня 2008 р.: тези доповідей. – Колімпари, Греція, 2008. – С. 105.
71. Olemskoi A.I. Non-extensivity parameter of self-similar statistical system / A.I. Olemskoi, A.S. Vaylenko, I.A. Shuda // Int. conf. in Statistical Physics : міжнар. конф., 14 – 18 липня 2008 р.: тези доповідей. – Колімпари, Греція, 2008. – С. 85.
72. Олемской О.І. Умови біфуркації Хопфа в системі Лоренца / О.І. Олемской, І.О. Шуда, С.С. Борисов // СНКПМІ-2008 : міжнар. конф., 9 – 10 квітня 2008 р.: тези доповідей. – Львів, 2008. – С. 189.
73. Шуда І.О. Умови самоорганізованої модуляції / І.О. Шуда, С.С. Борисов // Науково-технічна конференція викладачів, співробітників і студентів : міжвуз. конф., 14 – 19 квітня 2008 р.: тези доповідей. – Суми, 2008. – С. 23.
74. Olemskoi A.I. Self-similarity degree of deformed statistical ensembles / A.I. Olemskoi, I.A. Shuda // Statistical Physics 2009: Modern Trends and Applications : міжнар. конф., 23 – 25 червня 2009 р.: тези доповідей. – Львів, 2009. – С. 62.
75. Олемской А.И. Синергетический эффект облучения ферритомартенситных сталей тяжелыми ионами, ионами водорода и гелия / А.И. Олемской, А.П. Савельев, В.Е. Сторишко, И.А. Шуда // 19 Международная конференция по физике радиационных явлений и радиационному материаловедению., 6 – 11 вересня 2010 р.: тези доповідей. – Алушта, 2010. – С. 308–309.

76. Olemskoi A.I. Creation probabilities of hierarchical trees within deformed algebra / A.I. Olemskoi, S.S. Borisov, I.A. Shuda // Ukrainian-German symposium on physics and chemistry of nanostructures and on nanobiotechnology : міжнар. конф., 6 – 10 вересня 2010 р.: тези доповідей. – Берегове, АР Крим, 2010. – С. 135.
77. Olemskoi A.I. Generalization of statistical field theories within deformed calculi / A.I. Olemskoi, S.S. Borisov, I.A. Shuda // Сучасні проблеми фізики конденсованого стану : міжнар. конф., 6 – 9 жовтня 2010 р.: тези доповідей. – Київ, 2010. – С. 139.
78. Шуда И.А. Исследование гигантского импульса когерентного излучения ансамблем квантовых точек / И.А. Шуда, А.И. Олемской // 20-я Международная конференция "СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии 11 – 17 вересня 2010 р.: тези доповідей. – Севастополь, 2010. – С. 842–843.
79. Zinn-Justin J. Quantum Field Theory and Critical Phenomena / J. Zinn-Justin. – Oxford: Clarendon Press, 1993. – 996 p.
80. Feder J. Fractals / J. Feder. – New York: Plenum Publishers, 1988.- 283 p.
81. Олемской А.И. Синергетика конденсированной среды / А.И. Олемской, А.А. Кацнельсон. – Москва: Едиториал УРСС, 2003. – 336 с.
82. Ханин Я.И. Основы динамики лазеров / Я.И. Ханин. – Москва: Наука: Физматлит, 1999. – 368 с.
83. Постон Т. Теория катастроф и ее приложения / Т. Постон, И. Стюарт. – Москва: Мир, 1980. – 607 с.
84. Olemskoi A.I. Evolution of the defect structure of a solid during plastic deformation / A.I. Olemskoi, I.A. Sklyar // Sov. Phys. Uspekhi. – 1992. – Vol. 35. – P. 455–480.

85. Olemskoi A.I. Phase transitions induced by noise cross-correlations / A.I. Olemskoi, D.O. Kharchenko, I.A. Knyaz' // *Phys. Rev. E.* — 2005. — Vol. 71. — P. 041101.
86. Олемской А.И. Иерархическое представление обобщенной (неаддитивной) термодинамики / А.И. Олемской // *Письма в ЖЭТФ.* — 1999. — Т. 69. — С. 391–394.
87. Олемской А.И. Иерархическая картина супердиффузии / А.И. Олемской // *Письма в ЖЭТФ.* — 2000. — Т. 71. — P. 412–417.
88. Олемской А.И. Сложность самоподобных иерархически соподчиненных ансамблей / А.И. Олемской // *Письма в ЖЭТФ.* — 2007. — Т. 85. — С. 137–140.
89. Olemskoi A.I. Complexity of hierarchical ensembles / A.I. Olemskoi, V.I. Ostriik, S.V. Kokhan // *Physica A.* — 2009. — Vol. 388. — P. 609–620.
90. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. — Москва: Наука, 1979. — 830 с.
91. Olemskoi A.I. Theory of hierarchical coupling / A.I. Olemskoi, A.D. Kiselev // *Phys. Lett. A.* — 1998. — Vol. 247. — P. 221–226.
92. Олемской А.И. Теория самоорганизуемой модуляции / А.И. Олемской, Д.О. Харченко, В.О. Харченко // *Вісник Сумського державного університету. Серія фізика, математика, механіка.* — 2007. — № 1. — С. 75–85.
93. Ландау Л.Д. Механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — Москва: Наука, 1988. — 216 с.
94. Gozzy E. Classical adiabatic holonomy and its canonical structure / E. Gozzy, W.D. Thacher // *Phys. Rev. D.* — 1987. — Vol. 35. — P. 2398–2406.
95. Kleinert H. *Gauge Fields in Condensed Matter, Vol. I: Superflow and Vortex Lines* / H. Kleinert. — Singapore: World Scientific, 1989. — 742 p.

96. Тилли Д.Р. Сверхтекучесть и сверхпроводимость / Д.Р. Тилли, Дж. Тилли. — Москва: Мир, 1977. — 304 с.
97. Олемской А.И. Исследование вращающегося HeII вблизи лямда-точки с помощью теории Гинзбурга-Ландау-Абрикосова / А.И. Олемской // Изв. вузов СССР. Физика. — 1984. — № 5. — С. 75–81.
98. Andreev A.V. Cooperative Effects in Optics: Superradiance And Phase Transitions / A.V. Andreev, V.I. Emelyanov, Y.A. Ilinsky. — Bristol: Institute of Physics, 1993. — 467 p.
99. Mandel L. Optical Coherence and Quantum Optics / L. Mandel, E. Wolf. — Cambridge: Cambridge University, 1995. — 592 p.
100. Taşgun M.E. Quantum correlated light pulses from sequential superradiance of a condensate / M.E. Taşgun, M.Ö. Oktel, L. You, Ö.E. Müstecaplioğlu // Phys. Rev. A. — 2009. — Vol. 79. — P. 053603.
101. Yukalov V.I. Cooperative electromagnetic effects / V.I. Yukalov, E.P. Yukalova // Phys. Part. Nucl. — 2000. — Vol. 31. — P. 561–602.
102. Yukalov V.I. Coherent spin relaxation in molecular magnets / V.I. Yukalov, V.K. Henner, P.V. Kharebov // Phys. Rev. B. — 2008. — Vol. 77. — P. 134427.
103. Singh M. in Nanostructures: Physics and Technology / M. Singh, V.I. Yukalov, W. Lau; [ed. by Z. Alferov, L. Esaki]. — St. Petersburg: Ioffe Institute, 1998. — 536 p.
104. Chen Y.N. Current detection of superradiance and induced entanglement of double quantum dot excitons / Y.N. Chen, D.S. Chuu, T. Brandes // Phys. Rev. Lett. — 2003. — Vol. 90. — P. 166802.
105. Scheibner M. Superradiance of quantum dots / M. Scheibner, T. Schmidt, L. Worschech, A. Forchel, G. Bacher [et al.] // Nature Phys. — 2007. — Vol. 3. — P. 106–110.

106. Liu J. Dual-wavelength 92.5 GHz self-mode-locked InP-based quantum dot laser / J. Liu, Z. Lu, S. Raymond, P.J. Poole, P.J. Barrios [et al.] // *Opt. Lett.* — 2008. — Vol. 33. — P. 1702–1704.
107. Nomura M. Temporal coherence of a photonic crystal nanocavity laser with high spontaneous emission coupling factor / M. Nomura, S. Iwamoto, N. Kumagai, Y. Arakawa // *Phys. Rev. B.* — 2007. — Vol. 75. — P. 195313.
108. Reimann S.M. Electronic structure of quantum dots / S.M. Reimann, M. Manien // *Rev. Mod. Phys.* — 2002. — Vol. 74. — P. 1283—1342.
109. Yannouleas C. Symmetry breaking and quantum correlations in finite systems: studies of quantum dots and ultracold Bose gases and related nuclear and chemical methods / C. Yannouleas, U. Landman // *Rep. Prog. Phys.* — 2007. — Vol. 70. — P. 2067–2148.
110. Yukalov V.I. Dynamics of quantum dot superradiance / V.I. Yukalov, E.P. Yukalova // *Phys. Rev. B.* — 2010. — Vol. 81. — P. 075308–075314.
111. Horsthemke H. Noise Induced Transitions / H. Horsthemke, R. Lefever. — Berlin: Springer-Verlag, 1984. — 318 p.
112. Reimann P. Brownian motors: noisy transport far from equilibrium / P. Reimann // *Phys. Rep.* — 2002. — Vol. 361. — P. 57–265.
113. Van den Broeck C. Noise-Induced Nonequilibrium Phase Transition / C. Van den Broeck, J.M.R. Parrondo, R. Toral // *Phys. Rev. Lett.* — 1994. — Vol. 73. — P. 3395—3398; Van den Broeck C. Mean field model for spatially extended systems in the presence of multiplicative noise / C. Van den Broeck, J.M.R. Parrondo, J. Armero, A. Hernandez-Machado // *Phys. Rev. E.* — 1994. — Vol. 49. — P. 2639—2643.
114. Benzi R. The mechanism of stochastic resonance / R. Benzi, A. Sutera, A. Vulpiani // *J. Phys. A.* — 1981. — Vol. 14. — P. L453.

115. Gammaitoni L. Stochastic resonance / L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, F. Marchesoni // *Rev. Mod. Phys.* — 1998. — Vol. 70. — P. 223–287.
116. Buceta J. Noise-driven mechanism for pattern formation / J. Buceta, M. Ibaes, J.M. Sancho, Katja Lindenberg // *Phys. Rev. E.* — 2003. — Vol. 67. — P. 021113.
117. Cross M.C. Pattern formation outside of equilibrium / M.C. Cross, P.C. Hohenberg // *Rev. Mod. Phys.* — 1993. — Vol. 65. — P. 851–1112.
118. Julicher F. Modeling molecular motors / F. Julicher, A. Ajdari, J. Prost // *Rev. Mod. Phys.* — 1997. — Vol. 69. — P. 1269–1282.
119. Kautz R.L. Chaos and thermal noise in the rf-biased Josephson junction / R.L. Kautz // *J. Appl. Phys.* — 1985. — Vol. 58. — P. 424–441.
120. Arecchi F. Generalized multistability and noise-induced jumps in a nonlinear dynamical system / F. Arecchi, R. Badii, A. Politi // *Phys. Rev. A.* — 1985. — Vol. 32. — P. 402–408.
121. Gao J.B. Noise-Induced Hopf-Bifurcation-Type Sequence and Transition to Chaos in the Lorenz Equations / J.B. Gao, Wen-wen Tung, Nageswara Rao // *Phys. Rev. Lett.* — 2002. — Vol. 89. — P. 254101.
122. Osenda O. Stochastic Lorenz model for periodically driven Rayleigh-Bénard convection / O. Osenda, C.B. Briozzo, M.O. Caceres // *Phys. Rev. E.* — 1997. — Vol. 55. — P. R3824–R3827.
123. Alonso D. Stochastic amplification in epidemics / D. Alonso, A.J. McKane, M. Pascual // *J. R. Soc. Interface.* — 2007. — Vol. 4. — P. 575–582.
124. Simoes M. Stochastic fluctuations in epidemics on networks / M. Simoes, M.M. Telo da Gama, A. Nunes // *J. R. Soc. Interface.* — 2008. — Vol. 5. — P. 555–566.
125. Kuske R. Sustained oscillations via coherence resonance in SIR / R. Kuske, L.F. Gordillo, P. Greenwood // *J. Theor. Biol.* — 2007. — Vol. 245. — P. 459–469.

126. McKane A.J. Predator-Prey Cycles from Resonant Amplification of Demographic Stochasticity / A.J. McKane, T.J. Newman // *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — Vol. 94. — P. 218102.
127. Pineda-Krch M. A tale of two cycles — distinguishing quasi-cycles and limit cycles in finite predator–prey populations / M. Pineda-Krch, H.J. Blok, U. Dieckmann, M. Doebeli // *Oikos.* — 2007. — Vol. 116. — P. 53–64.
128. De la Lama M.S. Van Kampen’s expansion approach in an opinion formation model / M.S. de la Lama, I.G. Szendro, J.R. Iglesias, H.S. Wio // *Eur. Phys. J. B.* — 2006. — Vol. 51. — P. 435–442.
129. Gonze D. Biochemical clocks and molecular noise: Theoretical study of robustness factors / D. Gonze, J. Halloy, P. Gaspard // *J. Chem. Phys.* — 2002. — Vol. 116. — P. 10997–11010.
130. McKane A.J. Amplified Biochemical Oscillations in Cellular Systems / A.J. McKane, J.D. Nagy, T.J. Newman, M.O. Stefanini // *J. Stat. Phys.* — 2007. — Vol. 128. — P. 165–191.
131. Scott M. Estimations of intrinsic and extrinsic noise in models of nonlinear genetic networks / M. Scott, B. Ingalls, M. Kaern // *Chaos.* — 2006. — Vol. 16. — P. 026107.
132. Ben-Naim E. Finite size Fluctuations in Interacting Particle Systems / E. Ben-Naim, P.L. Krapivsky // *Phys. Rev. E.* — 2004. — Vol. 69. — P. 046113.
133. Bartlett M.S. Measles periodicity and community size / M.S. Bartlett // *J. R. Stat. Soc. A.* — 1957. — Vol. 120. — P. 48–70.
134. Boland R.P. How limit cycles and quasi-cycles are related in systems with intrinsic noise / R.P. Boland, T. Galla, A.J. McKane // *J. Stat. Mech.* — 2008. — Vol. 2008. — P. 09001.



135. Pikovsky A. Coherence Resonance in a Noise-Driven Excitable System / A. Pikovsky, J. Kurths // *Phys. Rev. Lett.* – 1997. – Vol. 78. – P. 775–778.
136. Lindner B. Coherence and stochastic resonance in a two-state system / B. Lindner, L. Schimansky-Geier // *Phys. Rev. E.* – 2000. – Vol. 61. – P. 6103–6110.
137. Neiman A. Coherence resonance at noisy precursors of bifurcations in nonlinear dynamical systems / A. Neiman, P.I. Saparin, L. Stone // *Phys. Rev. E.* – 1997. – Vol. 56. – P. 270–273.
138. Gang H. Stochastic resonance without external periodic force / H. Gang, T. Ditzinger, C.Z. Ning, H. Haken // *Phys. Rev. Lett.* – 1993. – Vol. 71. – P. 807–810.
139. Sagués F. Spatiotemporal order out of noise / F. Sagués, J.M. Sancho, J. Garcia-Ojalvo // *Rev. Mod. Phys.* – 2007. – Vol. 79. – P. 829–822.
140. Janson N.B. Delayed Feedback as a Means of Control of Noise-Induced Motion / N.B. Janson, A.G. Balanov, E. Schöll // *Phys. Rev. Lett.* – 2004. – Vol. 93. – P. 010601.
141. Zaikin A.A. Doubly Stochastic Resonance / A.A. Zaikin, J. Kurths, L. Schimansky-Geier // *Phys. Rev. Lett.* – 2000. – Vol. 85. – P. 227–231.
142. Grimshaw R. *Nonlinear Ordinary Differential Equations* / R. Grimshaw. – Oxford: Blackwell, 1990. – 336 p.
143. Wallace W.J. Edward. A simplified derivation of Van Kampen's system size expansion [electronic resource] / Edward W.J. Wallace // arXiv: 1004.4280. – 2010. – [http://arxiv.org/PS\\_cache/arxiv/pdf/1004/1004.4280v4.pdf](http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1004/1004.4280v4.pdf).
144. Risken H. *The Fokker-Planck Equation* / H. Risken. – Berlin: Springer-Verlag, 1984. – 454 p.
145. Van Kampen N.G. *Stochastic process in physics and chemistry* / N.G. van Kampen. – Amsterdam: North-Holland, 1992. – 480 p.

146. Lévy P. *Theorie de l'addition des variables Aléatoires* / P. Lévy. — Paris: Gauthier-Villars, 1937. — 385 p.
147. Dubkov A.A. *Lévy Flight Superdiffusion: An Introduction* / A.A. Dubkov, B. Spagnolo, V.V. Uchaikin // *Intern. Journ. of Bifurcation and Chaos*. — 2008. — Vol. 18, No. 9. — P. 2649–2672.
148. Ichiki A. *Phase transitions driven by Lévy stable noise: Exact solutions and stability analysis of nonlinear fractional Fokker-Planck equations* / A. Ichiki, M. Shino // *Eur. Phys. Lett.* — 2009. — Vol. 87. — P. 30004.
149. Schertzer D. *Fractional Fokker-Planck equation for nonlinear stochastic differential equations driven by non-Gaussian Lévy stable noises* / D. Schertzer, M. Larchevêque, J. Duan, V.V. Yanovsky, S. Lovejoy // *J. Math. Phys: Math. Gen.* — 2001. — Vol. 42. — P. 200–212.
150. Denisov S.I. *Generalized Fokker-Planck equation: Derivation and exact solutions* / S.I. Denisov, W. Horsthemke, P. Hänggi // *Eur. Phys. J. B.* — 2009. — Vol. 68. — P. 567–575.
151. Chechkin A. *Stationary states of non-linear oscillators driven by Lévy noise* // A. Chechkin, V. Gonchar, J. Klafter, R. Metzler, L. Tanatarov // *Chem. Phys.* — 2002. — Vol. 284. — P. 233–251.
152. Tsallis C. *Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics* / C. Tsallis // *J. Stat. Phys.* — 1988. — Vol. 52. — P. 479–487.
153. Curado E.M. *Generalized statistical mechanics: connection with thermodynamics* / E.M. Curado, C. Tsallis // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1991. — Vol. 24. — P. L69.
154. Tsallis C. *The role of constraints within generalized nonextensive statistics* / C. Tsallis, R.S. Mendes, A.R. Plastino // *Physica A.* — 1998. — Vol. 261. — P. 534–554.

155. Abe S. A note on the  $q$ -deformation-theoretic aspect of the generalized entropies in nonextensive physics / S. Abe // Phys. Lett. A. – 1997. – Vol. 224. – P. 326–330.
156. Kaniadakis G. Statistical mechanics in the context of special relativity / G. Kaniadakis // Phys. Rev. E. – 2002. – Vol. 66. – P. 056125.
157. Kaniadakis G. Deformed logarithms and entropies / G. Kaniadakis, M. Lissia, A.M. Scarfone // Physica A. – 2004. – Vol. 340. – P. 41–49; Kaniadakis G. Two-parameter deformations of logarithm, exponential, and entropy: A consistent framework for generalized statistical mechanics / G. Kaniadakis, M. Lissia, A.M. Scarfone // Phys. Rev. E. – 2005. – Vol. 71. – P. 046128.
158. Naudts J. Deformed exponentials and logarithms in generalized thermostatistics / J. Naudts // Physica A. – 2004. – Vol. 340. – P. 32–40.
159. Scarfone A.M. Thermodynamic equilibrium and its stability for microcanonical systems described by the Sharma-Taneja-Mittal entropy / A.M. Scarfone, T. Wada // Phys. Rev. E. – 2005. – Vol. 72. – P. 026123.
160. Lavagno A. Classical  $q$ -deformed dynamics / A. Lavagno, A.M. Scarfone, N.P. Swamy // Eur. Phys. J. B. – 2006. – Vol. 50. – P. 351–354.
161. Lavagno A. Basic-deformed thermostatistics / A. Lavagno, A.M. Scarfone, N.P. Swamy // J. Phys. A. – 2007. – Vol. 40. – P. 8635–8654.
162. Vitiello G. Topological defects, fractals and the structure of quantum field theory [electronic resource] / G. Vitiello // arXiv: 0807.2164. – 2008. – [http://arxiv.org/PS\\_cache/arxiv/pdf/0807/0807.2164v2.pdf](http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0807/0807.2164v2.pdf).
163. Biedenharn L. The quantum group  $SU_q(2)$  and a  $q$ -analogue of the boson operators / L. Biedenharn // J. Phys. A: Math. Gen. – 1989. – Vol. 22. – P. L873–L878.

164. Macfarlane A. On  $q$ -analogues of the quantum harmonic oscillator and the quantum group  $SU_q(2)$  / A. Macfarlane // J. Phys. A: Math. Gen. – 1989. – Vol. 22. – P. 4581–4588.
165. Celeghini E. Squeezing and quantum groups / E. Celeghini, M. Rasetti, G. Vitiello // Phys. Rev. Lett. – 1991. – Vol. 66. – P. 2056–2059.
166. Heine E. Heine E. Über die Reihe  $1 + \frac{(q^\alpha - 1)(q^\beta - 1)}{(q - 1)(q^\gamma - 1)}x + \frac{(q^\alpha - 1)(q^{\alpha+1} - 1)(q^\beta - 1)(q^{\beta+1} - 1)}{(q - 1)(q^2 - 1)(q^\gamma - 1)(q^{\gamma+1} - 1)} + \dots$  / E. Heine // J. Reine Angew. Math. – 1846. – Vol. 32. – P. 210–212; Heine E. Untersuchungen über die Reihe  $1 + \frac{(1 - q^\alpha)(1 - q^\beta)}{(1 - q)(1 - q^\gamma)}x + \frac{(1 - q^\alpha)(1 - q^{\alpha+1})(1 - q^\beta)(1 - q^{\beta+1})}{(1 - q)(1 - q^2)(1 - q^\gamma)(1 - q^{\gamma+1})} + \dots$  / E. Heine // J. Reine Angew. Math. – 1847. – Vol. 34. – P. 285–328.
167. Jackson F.H. // Am. J. Math. – 1909. – Vol. 38. – P. 26–28; Jackson F.H. Generalization of the Differential Operative Symbol with an Extended Form of the Boole's Equation / F.H. Jackson // Mess. Math. – 1909. – Vol. 38. – P. 57–61.
168. Exton H.  $q$ -Hypergeometric functions and applications / H. Exton. – Chichester: Ellis Horwood, 1983. – 347 p.
169. Lavagno A. Thermostatistics of a  $q$ -deformed boson gas / A. Lavagno, N.P. Swamy // Phys. Rev. E. – 2000. – Vol. 61. – P. 1218–1226; Lavagno A. Slow dynamics and aging in a nonrandomly frustrated spin system / A. Lavagno, N.P. Swamy // Phys. Rev. E. – 2002. – Vol. 65. – P. 036119.
170. Erzan A.  $q$ -Analysis of Fractal Sets / A. Erzan, J.-P. Eckmann // Phys. Rev. Lett. – 1997. – Vol. 78. – P. 3245–3248.
171. Erzan A. Finite  $q$ -differences and the discrete renormalization group / A. Erzan // Phys. Lett. A. – 1997. – Vol. 225. – P. 235–238.
172. Plastino A.R. From Gibbs microcanonical ensemble to Tsallis generalized canonical distribution / A.R. Plastino, A. Plastino // Phys. Lett. A. – 1994. – Vol. 193. – P. 140–143.

173. Abe S. Classical gas in nonextensive optimal Lagrange multipliers formalism / S. Abe, S. Martinez, F. Pennini, A. Plastino // *Phys. Lett. A.* — 2001. — Vol. 278. — P. 249–254.
174. Adiba A.B. Tsallis thermostatics for finite systems: a Hamiltonian approach / A.B. Adiba, A.A. Moreirab, J.S. Andrade Jr., M.P. Almeida // *Physica A.* — 2003. — Vol. 322. — P. 276–284.
175. Cabo A. A statistical physics of stationary and metastable states / A. Cabo, S. Curilef, A. González, N.G. Cabo-Bizet, C.A. Vera // *J. Stat. Mech.* — 2011. — Vol. 2011. — P. P02012.
176. Arik M. in: *Symmetries in Science VI: From to Rotation Group to Quantum Algebras* / M. Arik. ; [ed. by H. Samuel]. — New York: Plenum Press, 1993. — 772 p.
177. Perelomov A. *Generalized Coherent States and Their Applications* / A. Perelomov. — Berlin: Springer-Verlag, 1986. — 332 p.
178. Sornette D. Discrete scale invariance and complex dimensions / D. Sornette // *Phys. Rep.* — 1998. — Vol. 297. — P. 239–270; Zhou W.-X. Generalized  $q$  analysis of log-periodicity: Applications to critical ruptures / W.-X. Zhou, D. Sornette // *Phys. Rev. E.* — 2002. — Vol. 66. — P. 046111; Zhou W.-X. Numerical investigations of discrete scale invariance in fractals and multifractal measures / W.-X. Zhou, D. Sornette // *Physica A.* — 2009. — Vol. 388. — P. 2623–2639.
179. Абрикосов А.А. Методы квантовой теории поля в статистической физике / А.А. Абрикосов, А.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский. — М.: ГИФМЛ, 1962. — 446 с.
180. Лифшиц Е.М. Статистическая физика. Часть 2 / Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. — М.: Физматлит, 2004. — 496 с.
181. Kassel C. *Quantum Groups* / C. Kassel. — New York: Springer, 1995. — 552 p.

182. Frieden B.R. Physics from Fisher information: a unification / B.R. Frieden. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. — 328 p.
183. Callen H.B. Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics / H.B. Callen. — New York: Wiley, 1985. — 512 p.
184. Parisi G. Statistical Field Theory / G. Parisi. — Redwood City: Addison-Wesley, 1988. — 352 p.
185. Borges E.P. A possible deformed algebra and calculus inspired in nonextensive thermostatistics / E.P. Borges // Physica A. — 2004. — Vol. 340. — P. 95–101.
186. Kaniadakis G. Maximum entropy principle and power-law tailed distributions / G. Kaniadakis // Eur. Phys. J. B. — 2009. — Vol. 70. — P. 3–13.
187. Mittal D.P. On some functional equations concerning entropy, directed divergence and inaccuracy / D.P. Mittal // Metrika. — 1975. — Vol. 22. — P. 35–45.
188. Sharma B.D. Entropy of type  $(\alpha, \beta)$  and other generalized measures in information theory / B.D. Sharma, I.J. Taneja // Metrika. — 1975. — Vol. 22. — P. 205–215.
189. Olemskoi A.I. Multifractal spectrum of phase space related to generalized thermostatistics / A.I. Olemskoi, V.O. Kharchenko, V.N. Borisyuk // Physica A. — 2008. — Vol. 387. — P. 1895–1906.
190. Lavagno A. Thermostatistics of Deformed Bosons and Fermions / A. Lavagno, N.P. Swamy // Found. Phys. — 2010. — Vol. 40, No. 7. — P. 814–828.
191. Mandelbrot B.B. The fractal geometry of nature / B.B. Mandelbrot — San Francisco: Freeman, 1982. — 468 p.
192. Paladin G. Anomalous scaling laws in multifractal objects / G. Paladin, A. Vulpiani // Phys. Rep. — 1987. — Vol. 156. — P. 147–225.

193. Halsey T.C. Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets / T.C. Halsey, M.H. Jensen, L.P. Kadanoff, I. Procaccia, B.I. Shraiman // *Phys. Rev. A.* — 1986. — Vol. 33. — P. 1141–1151.
194. Kantellhardt J.W. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series / J.W. Kantellhardt, S.A. Zschiegner, E. Koscielny-Bunde, S. Havlin, A. Bunde [et al.] // *Physica A.* — 2002. — Vol. 316. — P. 87–114.
195. Perekrestov V.I. Self-organization of quasi-equilibrium steady-state condensation in accumulative ion-plasma devices / V.I. Perekrestov, A.I. Olemskoi, Yu.O. Kosminska, A.A. Mokrenko // *Phys. Lett. A.* — 2009. — Vol. 373. — P. 3386–3391.
196. Gasper G. Basic hypergeometric series, *Encyclopedia of mathematics and its applications* / G. Gasper, M. Rahman. — Cambridge: Cambridge University Press, 1990. — 307 p.
197. Boffetta G. Predictability: a way to characterize complexity / G. Boffetta, M. Cencini, M. Falcioni, A. Vulpiani // *Phys. Rep.* — 2002. — Vol. 356. — P. 367–474.
198. Brockwell P.J. *Springer Texts in Statistics. Introduction to Time Series and Forecasting* / P.J. Brockwell, R.A. Davis. — New York: Springer, 2002. — 469 p.
199. Olemskoi A. Effective temperature of self-similar time series: analytical and numerical developments / A. Olemskoi, S. Kokhan // *Physica A.* — 2006. — Vol. 360. — P. 37–58.
200. Lee J.W. Multifractal behavior of the Korean stock-market index KOSPI / J.W. Lee, K.E. Lee, P.A. Rikvold // *Physica A.* — 2006. — Vol. 364. — P. 355–361.
201. Makowiec D. Long-range dependencies in heart rate signal revisited / D. Makowiec, R. Galaska, A. Dudkowska, A. Rynkiewicz, M. Zwierg // *Physica A.* — 2006. — Vol. 369. — P. 632–644.

202. Kavasseri R.G. A multifractal description of wind speed records / R.G. Kavasseri, R. Nagarajan // *Chaos, solitons and fractals*. – 2005. – Vol. 24. – P. 165–173.
203. Anteneodo S. Non-extensive random walks / S. Anteneodo // *Physica A*. – 2005. – Vol. 358. – P. 289–298.
204. Кривоглаз М.А. Диффузное рассеяние рентгеновских лучей и нейтронов на флуктуационных неоднородностях в неидеальных кристаллах / М.А. Кривоглаз. – К.: Наукова Думка, 1984. – 288 с.
205. Волькенштейн М.В. Биофизика / М.В. Волькенштейн. – М.: Наука, 1988. – 592 с.
206. Перекрестов В.И. Фазовая и морфологическая неоднородности конденсатов системы Ti-C, полученных на границе раздела плазма-титановая подложка / В.И. Перекрестов, Ю.А. Косминская // *Письма в ЖЭТФ*. – 2003. – Т. 78, № 4. – С. 258–264.
207. Перекрестов В.И. Получение высокопористых структур металлов в условиях стационарной неравновесной конденсации / В.И. Перекрестов // *Письма в ЖЭТФ*. – 2005. – Т. 31, № 19. – С. 41–46.
208. Перекрестов В.И. О возможности формирования монокристаллических конденсатов алюминия на изотропных подложках при помощи самоорганизованных ионных распылителей / В.И. Перекрестов, А.С. Корнющенко, Ю.А. Косминская // *Письма в ЖЭТФ*. – 2006. – Т. 32, № 20. – С. 1–6.
209. Перекрестов В.И. Самоорганизация квазиравновесных систем плазма—конденсат / В.И. Перекрестов, А.И. Олемской, А.С. Корнющенко, Ю.А. Косминская // *ФТТ*. – 2009. – Т. 51, № 5. – С. 1003–1009.



210. Gao-Feng Gu. Detrended fluctuation analysis for fractals and multifractals in higher dimensions / Gao-Feng Gu, Wei-Xing Zhou // *Phys. Rev. E.* – 2006. – Vol. 74. – P. 061104.
211. Whyte L. Hierarchical structures, hierarchical thinking / L. Whyte, A.G. Wilson; [ed. by D. Wilson]. – New York: American Elsevier, 1969. – 548 p.
212. Pattee H.H. Hierarchy theory: the challenge of complex systems / H.H. Pattee. – New York: Braziller, 1973. – 156 p.
213. Allen T.F.H. Hierarchy: perspectives for ecological complexity / T.F.H. Allen, T.B. Starr. – Chicago: Chicago University Press, 1982. – 328 p.
214. Salthe S. Evolving Hierarchical Systems: their structure and representation / S. Salthe. – New York: Columbia University Press, 1985. – 343 p.
215. Nicolis J.S. Dynamics of Hierarchical Systems (An Evolutionary Approach) / J.S. Nicolis. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1986. – 397 p.
216. Kauffman S. The Origins of Order / S. Kauffman. – Oxford: Oxford University Press, 1993. – 734 p.
217. Dalenoort G.J. The Paradigm of self-Organization II / G.J. Dalenoort. – London: Gordon and Breach, 1994. – 272 p.
218. Holland J. Hidden Order / J. Holland. – New York: Addison Wesley, 1995. – 208 p.
219. Mantegna R.N. An introduction to econophysics. Correlations and complexity in finance / R.N. Mantegna, H.E. Stanley. – Cambridge: Cambridge University Press, 1999. – 162 p.
220. Holme P. Subnetwork hierarchies of biochemical pathways / P. Holme, M. Huss, H. Jeong // *Bioinformatics.* – 2003. – Vol. 19. – P. 532–538.

221. Ravasz E. Hierarchical organization in complex networks / E. Ravasz, A.-L. Barabási // *Phys. Rev. E.* – 2003. – Vol. 67. – P. 026112.
222. Albert R. Internet: Diameter of the World-Wide Web / R. Albert, H. Jeong, A.-L. Barabási // *Nature.* – 1999. – Vol. 401. – P. 130–131.
223. Jeong H. The large-scale organization of metabolic networks / H. Jeong, B. Tombor, R. Albert, Z. Oltvai, A.-L. Barabási // *Nature.* – 2000. – Vol. 407. – P. 651–654.
224. Wagner A. The small world inside large metabolic networks / A. Wagner, D.A. Fell // *Proc. R. Soc. Lond. B. Biol. Sci.* – 2001. – Vol. 268. – P. 1803–1810.
225. Jeong H. Lethality and centrality in protein networks / H. Jeong, S. Mason, A.-L. Barabási, Z.N. Oltvai // *Nature.* – 2001. – Vol. 411. – P. 41–42.
226. Wagner A. The Yeast Protein Interaction Network Evolves Rapidly and Contains Few Redundant Duplicate Genes / A. Wagner // *Mol. Biol. Evol.* – 2001. – Vol. 18. – P. 1283–1292.
227. Newman M.E.J. From the Cover: The structure of scientific collaboration networks / M.E.J. Newman // *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* – 2001. – Vol. 98. – P. 404–409.
228. Newman M.E.J. Scientific collaboration networks. I. Network construction and fundamental results / M.E.J. Newman // *Phys. Rev. E.* – 2001. – Vol. 64. – P. 016131.
229. Barabási A.-L. Evolution of the social network of scientific collaborations / A.-L. Barabási, H. Jeong, Z. Néda, E. Ravasz, A. Schubert [et al.] // *Physica A.* – 2002. – Vol. 311. – P. 590–614.
230. Barabási A.-L. Emergence of Scaling in Random Networks / A.-L. Barabási, R. Albert // *Science.* – 1999. – Vol. 286. – P. 509–512.

231. Barabási A.-L. Mean-field theory for scale-free random networks / A.-L. Barabási, R. Albert, H. Jeong // *Physica A*. – 1999. – Vol. 272. – P. 173–187.
232. Granovetter M.S. The Strength of Weak Ties / M.S. Granovetter // *Am. J. Sociol.* – 1973. – Vol. 78. – P. 1360–1380.
233. Flake G.W. Efficient identification of Web communities / G.W. Flake, S. Lawrence, C.L. Giles // *Proceedings of the Sixth International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, ACM, Boston, MA, USA. – 2000. – P. 150–160.
234. Rammal R. Ultrametricity for physicists / R. Rammal, G. Toulouse, M.A. Virasoro // *Rev. Mod. Phys.* – 1986. – Vol. 58. – P. 765–788.
235. Bachas C.P. Complexity and the Relaxation of Hierarchical Structures / C.P. Bachas, B.A. Huberman // *Phys. Rev. Lett.* – 1986. – Vol. 57. – P. 1965–1969.
236. Newman M.E.J. The structure and function of complex networks / M.E.J. Newman // *SIAM Review*. – 2003. – Vol. 45. – P. 167–256.
237. Sugden A.M. Charting the Evolutionary History of Life / A.M. Sugden, B.R. Jasny, E. Culotta, E. Pennisi // *Science*. – 2003. – Vol. 300. – P. 1691.
238. Lopez-Ruiz R. A statistical measure of complexity / R. Lopez-Ruiz, H.L. Mancini, X. Calbet // *Phys. Lett. A*. – 1995. – Vol. 209. – P. 321–326.
239. Chhabra A.B. Negative dimensions: Theory, computation, and experiment / A.B. Chhabra, K.R. Sreenivasan // *Phys. Rev. A*. – 1991. – Vol. 43. – P. 1114–1117.
240. Доценко В.С. Физика спин-стекольного состояния / В.С. Доценко // *УФН*. – 1993. – Т. 163, № 6. – С. 1–37.

241. Новиков Е.А. Перемежаемость и масштабное подобие в структуре турбулентного потока / Е.А. Новиков // ПММ. – 1971. – Т. 35. – С. 266–277.
242. Chhabra A.B. Direct determination of the  $f(\alpha)$  singularity spectrum and its application to fully developed turbulence / A.B. Chhabra, C. Meneveau, R.V. Jensen, K.R. Sreenivasan // Phys. Rev. A. – 1989. – Vol. 40. – P. 5284–5294.
243. Двуреченский А.В. Импульсная ориентированная кристаллизация твердых тел / А.В. Двуреченский // СОЖ. – 2004. – Т. 8, № 1. – С. 108–114.
244. Логвинов Г.Н. Разогрев образца лазерным импульсом / Г.Н. Логвинов, Ю.В. Дрогобицкий, Luis Nino de Rivera, Ю.Г. Гуревич // ФТТ. – 2007. – Т. 49, № 5. – С. 785–790.
245. Корнеев Ф.А. Бесстолкновительное поглощение энергии интенсивного лазерного излучения в классической наноразмерной плазме : автореф. дис. на соискание степени канд. физ.-мат. наук : спец. 01.04.02 "Теоретическая физика" / Ф.А. Корнеев. – Москва, 2007. – 26 с.
246. Зарецкий Д.Ф. Бесстолкновительное поглощение интенсивного лазерного излучения в наноплазме / Д.Ф. Зарецкий, Ф.А. Корнеев, С.В. Попруженко // Квантовая электроника. – 2007. – Т. 37, № 6. – С. 565–574.
247. Иевлев В.М. Синтез силицидов при отжиге тонких пленок твердых растворов (Ni-Pt), (Ni-Pd) и двухслойных гетероструктур Ni-Pt на (111)Si. / В.М. Иевлев, Е.В. Шведов, С.А. Солдатенко, С.Б. Кушев, Ю.В. Горожанкин // Неорганические материалы. – 2006. – Т. 42, № 2. – С. 151–159.
248. Кестер У. Кристаллизация металлических стекол / У. Кестер, У. Герольд // Металлические стекла. Ионная структура, электронный перенос и кристаллизация [под ред. Г. Гюнтеродта, Г. Бека]. – М.: Мир, 1983. – С. 326–371.

249. Ефремов М.Д. Получение на-нокристаллических пленок кремния на подложках из полиимида с применением импульсного воздействия излучения эксимерного лазера / М.Д. Ефремов, В.А. Володин, Л.И. Федина, А.А. Гутаковский, Д.В. Марин [и др.] // Письма в ЖТФ. — 2003. — Т. 39, № 13. — С. 89–94.
250. Ефремов М.Д. Образование нанокристаллов кремния с выделенной ориентацией (110) в аморфных пленках Si:H на стеклянных подложках при наносекундных воздействиях ультрафиолетового излучения / М.Д. Ефремов, В.В. Болотов, В.А. Володин, С.А. Кочубей, А.В. Кретьинин // ФТП. — 2002. — Т. 36, № 1. — С. 109–116.
251. Авакянц Л.П. Упорядочение структуры гидрогенизированных пленок кремния под влиянием непрерывного лазерного излучения / Л.П. Авакянц, В.С. Горелик, И.А. Курова // ФТТ. — 1997. — Т. 39, № 12. — С. 2152–2155.
252. Assadi H. Crystal nucleation in deeply undercooled melts of bulk metallic glass forming systems / H. Assadi, J. Schroers // Acta Materialia. — 2002. — Vol. 50. — P. 89–100.
253. Трунов М.А. Лазерно-индуцированные коллективные эффекты в пленках стеклообразных полупроводников / М.А. Трунов, В.С. Биланич, С.Н. Дуб // ЖТФ. — 2007. — Т. 33, № 16. — С. 46–53.
254. Olemskoi A.I. Explosive crystallization mechanism of ultradisperse amorphous films / A.I. Olemskoi, A.V. Khomenko, V.P. Koverda // Physica A. — 2000. — Vol. 284. — P. 79–96.
255. Скрипов В.П. Спонтанная кристаллизация переохлажденных жидкостей / В.П. Скрипов, В.П. Коверда. — М.: Наука, 1984. — 232 с.
256. Александров Л.Н. Кинетика кристаллизации и перекристаллизации полупроводниковых пленок / Л.Н. Александров. — Новосибирск: Наука, 1985. — 224 с.

257. Коверда В.П. Спонтанная кристаллизация переохлажденных жидких металлов / В.П. Коверда, В.П. Скрипов // Расплавы. — 1987. — Т. 1, № 4. — С. 3.
258. Богданов Н.М. Спонтанная взрывная кристаллизация ультратонкого порошка аморфного Ge / Н.М. Богданов, В.П. Коверда, В.Н. Скоков, В.П. Скрипов, А.А. Дик // Кристаллография. — 1988. — Т. 33, № 5. — С. 1251.
259. Kurtze D.A. Stability of incomplete explosive crystal growth / D.A. Kurtze // Phys. Rev. B. — 1986. — Vol. 34. — P. 1770–1774.
260. Шкловский В.А. Взрывная кристаллизация аморфных веществ / В.А. Шкловский, В.М. Кузьменко // УФН. — 1989. — Т. 157, № 2. — С. 311–338.
261. Коверда В.П. Спонтанная кристаллизация переохлажденных жидкостей // ЖТФ. — 1994. — Т. 64, № 3. — С. 62.
262. Olemskoi A.I. Theory of stochastic systems with singular multiplicative noise / A.I. Olemskoi // Physics–Uspekhi. — 1998. — Vol. 41. — P. 269–301.
263. Михайлова Ю.В. Кинетика образования пор из пересыщенного раствора вакансий / Ю.В. Михайлова, Л.А. Максимов // ЖЭТФ. — 1970. — Vol. 59. — С. 1368–1377.
264. Gendenstein L.E. Supersymmetry in quantum mechanics / L.E. Gendenstein, I.V. Krive // Physics–Uspekhi. — 1985. — Vol. 146. — P. 553–590.
265. Cooper F. Supersymmetry and quantum mechanics / F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme // Phys. Rep. — 1995. — Vol. 251. — P. 267–385.
266. Efetov K.B. Supersymmetry and theory of disordered metals / K.B. Efetov // Adv. Phys. — 1983. — Vol. 32. — P. 53–127.

267. Барбашов Б.М. Суперструны — новый подход к единой теории фундаментальных взаимодействий / Б.М. Барбашов, В.В. Нестеренко // УФН. — 1986. — Т. 150. — С. 489–524.
268. Казаков Д.И. Суперструны, или за пределами стандартных представлений / Д.И. Казаков // УФН. — 1986. — Т. 150. — С. 561–575.
269. Грин М. Теории суперструн в реальном мире / М. Грин // УФН. — 1986. — Т. 150. — С. 577–579.
270. Энтони С. Суперструны: всеобъемлющая теория? / С. Энтони // УФН. — 1986. — Т. 150. — С. 579–583.
271. Green M.B. Superstring Theory: Volume 1, Introduction / M.B. Green, J.H. Schwarz, E. Witten. — Cambridge: Cambridge University Press, 1988. — 484 p.
272. Parisi G. Random Magnetic Fields, Supersymmetry, and Negative Dimensions / G. Parisi, N. Surlas // Phys. Rev. Lett. — 1979. — Vol. 43. — P. 744–745.
273. Feigelman M.V. Hidden supersymmetry of stochastic dissipative dynamics / M.V. Feigelman, A.M. Tsvetik // J. Exp. Theor. Phys. — 1982. — Vol. 83. — P. 1430–1443.
274. Kurchan J. Supersymmetry in spin glass dynamics / J. Kurchan // J. Phys. (France) I. — 1992. — Vol. 2. — P. 1333–1352.
275. Олемской А.И. Теория пространственно-временной эволюции неравновесной термодинамической системы / А.И. Олемской, И.В. Коплык // УФН. — 1995. — Т. 165. — С. 1105–1144.
276. Kiselev A. Supersymmetry approach in the field theory of ergodicity breaking transitions / A. Kiselev // Physica A. — 2000. — Vol. 285. — P. 413–432.

277. Олемской А.И. Суперсимметричная теория неравновесной стохастической системы в приложении к неупорядоченным гетерополимерам / А.И. Олемской // УФН. — 2001. — Т. 171. — С. 503–538.
278. Martin P.C. Statistical Dynamics of Classical Systems / P.C. Martin, E.D. Siggia, H.A. Rose // Phys. Rev. A. — 1973. — Vol. 8. — P. 423–423.
279. Березин Ф.А. Группы Ли с коммутирующими и антикоммутирующими параметрами / Ф.А. Березин, Г.И. Кац // Матем. сб. — 1970. — Т. 83. — С. 343–359.
280. Golfand Yu.A. Extension of the Algebra of Poincare Group Generators and Violation of P invariance / Yu.A. Golfand, E.P. Likhtman // JETF Lett. — 1971. — Vol. 13. — P. 323.
281. Volkov D.V. Possible Universal Neutrino Interaction / D.V. Volkov, A.P. Akulov // JETF Lett. — 1972. — Vol. 16. — P. 438–450.
282. Volkov D. Higgs effect for Goldstone particles with spin 1/2 / D. Volkov, V. Soroka // JETF Lett. — 1973. — Vol. 18. — P. 312–314.
283. Wess J. Supergauge transformations in four dimensions / J. Wess, B. Zumino // Nucl. Phys. B. — 1974. — Vol. 70. — P. 39–50.
284. Питаевский Л.П. Конденсаты Бозе-Эйнштейна в поле лазерного излучения / Л.П. Питаевский // УФН. — 2006. — Т. 176. — С. 345–364.
285. Sneek M. Ultracold Superstrings in Atomic Boson-Fermion Mixtures / M. Sneek, M. Haque, S. Vandoren, H.T.C. Stoof // Phys. Rev. Lett. — 2005. — Vol. 95. — P. 250401.
286. Imambekov A. Exactly solvable case of a one-dimensional Bose-Fermi mixture / A. Imambekov, E. Demler // Phys. Rev. A. — 2006. — Vol. 73. — P. 021602(R);



Imambekov A. Applications of exact solution for strongly interacting one dimensional bose-fermi mixture: low-temperature correlation functions, density profiles and collective modes / A. Imambekov, E. Demler // *Ann. Phys.* — 2006. — Vol. 321. — P. 2390–2437.

287. Yue Yu. Supersymmetry and the Goldstino-Like Mode in Bose-Fermi Mixtures / Yue Yu, Kun Yang // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 100. — P. 090404.

288. Боголюбов Н.Н. Избранные труды в трёх томах / Н.Н. Боголюбов. — Киев: Наукова думка, 1971. — Т. 3. — С. 174. — 488 с.