Рассмотрим теперь композит тетрагонального строения с прямоугольной фундаментальной ячейкой (ω_1=2, ω_2=i). На рис. 3 приведены данные расчета для композита с дефектами типа пор (радиус поры — 0.2). Координаты центра включения — (-0.3;0), координаты центра поры — (0.7;0). Композиция здесь та же, что и выше.

SUMMARY

In the case of the antiplane deformation procedure of determination of connected electroelastic fields in the fibrous piezocomposite of periodic structure with the cylindrical hole system is constructed. An appropriate boundary problem is reduced to singular integrated equations. The averaging physical characteristic of piezocomposite is precisely defined as functionals of this system solutions.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях. - В кн. : Физическая акустика. Т. 1. Методы и приборы ультразвуковых исследований. Ч. А. - М.: Мир, 1966. - С. 204 - 326.
2. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Электроупругость. - Киев: Наукова думка, 1989.-280 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5 т. Т.5).
3. Фильштинский Л.А., Фильштинский М.Л. Антиплоская деформация составного пьезокерамического пространства с межфазной трещиной // Прикладная механика, 1997.– Т. 33, № 8. – С. 73–78.
4. Ахизер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. - М.: Наука, 1970.-304с.
5. Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. Периодические кусочно-однородные упругие структуры . - М.: Наука, 1992.-288 с.

Поступила в редколлегию 18 июня 1998 г.

УДК 530.145

СТОХАСТИЧЕСКОЕ УСКОРЕНИЕ КВАНТОВОЙ ЧАСТИЦЫ

С.И. Денисов, проф.

1 Стохастический механизм ускорения частиц был предложен Ферми [1] для объяснения происхождения высокоэнергичных космических лучей. Суть его состоит в том, что при столкновениях с хаотически движущимися магнитными облаками, рассматриваемыми как гигантские частицы, заряженная частица чаще приобретает энергию, чем отдает. Происходит это потому, что, вследствие изотропного (в космических масштабах) распределения скоростей облаков, частица чаще встречает те облака, которые движутся ей навстречу.

При математическом моделировании этого эффекта используются два подхода - стохастический и динамический. В первом изначально предполагается, что поведение частицы стохастично, и основной задачей, которая решается в таком подходе, является нахождение статистических характеристик частицы через заданные статистические характеристики силового поля. Во втором подходе основным является вопрос о возможности появления ускорения Ферми без априорного использования предположения о случайности силового поля. При этом второе направление развивается в рамках как классической [2,3], так и квантовой [3] механики, тогда как исследования, относящиеся к первому направлению, проводятся исключительно на классической основе. Основная причина - отсутствие точных решений нестационарного уравнения Шредингера, содержащего случайные потенциалы. Отметим в этой связи, что даже в случае детерминистических потенциалов точных решений известно крайне мало. По существу, в настоящее время имеется точное решение лишь для одной нетривиальной физической системы - осциллятора с переменной частотой, находящегося под действием переменной внешней силы [4,5]. Поэтому поиск точных решений нестационарного уравнения Шредингера, представляющих интерес для атомной физики, физики твердого тела, астрофизики и других разделов физики, является одной из важнейших задач квантовой механики.

Цель данной работы - найти решение одномерного нестационарного уравнения Шредингера в случае потенциала, отвечающего однородной случайной силе, и с его помощью изучить особенности стохастического ускорения частицы.

2 Для решения поставленной задачи установим сначала, как дополнительные условия на волновую функцию $\psi(x,t)$, накладываемые исходя из ожидаемого вида плотности вероятности $\rho=|\psi(x,t)|^2$ того, что в момент времени t частица находится в точке с координатой x, "отрабатываются" потенциальной энергией частицы $U(x,t)$. Полагая, что $\rho=\rho(x-\xi(t),t)$ ($\xi(t)$ - некоторая действительная функция времени), представим волновую функцию в виде

$$\psi(x,t)=\mathrm{e}^{i\psi_1(x-\xi(t),t)}\psi_2(x-\xi(t),t). \tag{1}$$

Поскольку последняя удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}+U(x,t)\psi(x,t) \tag{2}$$

(здесь использована система единиц, в которой постоянная Планка $\hbar$ и масса частицы m равны 1), функции $\psi_1(y,t)$ и $\psi_2(y,t)$ ($y=x-\xi(t)$) связаны между собой соотношением

$$i\frac{\partial\psi_2(y,t)}{\partial t}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi_2(y,t)}{\partial y^2}-i\left(\frac{\partial\psi_1(y,t)}{\partial y}-\dot{\xi}(t)\right)\frac{\partial\psi_2(y,t)}{\partial y}+\left[\frac{\partial\psi_1(y,t)}{\partial t}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi_1(y,t)}{\partial y}\right)^2-\dot{\xi}(t)\frac{\partial\psi_1(y,t)}{\partial y}-\frac{i}{2}\frac{\partial^2\psi_1(y,t)}{\partial y^2}-U(y+\xi(t),t)\right]\psi_2(y,t). \tag{3}$$

Предположим, что $\psi_2(y,t)$ есть решение уравнения Шредингера

$$i\frac{\partial\psi_2(y,t)}{\partial t}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi_2(y,t)}{\partial y^2}+U_0(y,t)\psi_2(y,t), \tag{4}$$

удовлетворяющее начальному условию $\psi_2(y,0)=\psi(y,0)$. Тогда, воспользовавшись (4), из (3) получаем

$$U(y+\xi(t),t)=U_0(y,t)-\frac{\partial\psi_1(y,t)}{\partial t}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi_1(y,t)}{\partial y}\right)^2+\dot{\xi}(t)\frac{\partial\psi_1(y,t)}{\partial y}+$$
$$+\frac{i}{2}\frac{\partial^2\psi_1(y,t)}{\partial y^2}+i\left(\frac{\partial\psi_1(y,t)}{\partial y}-\dot{\xi}(t)\right)\frac{\partial}{\partial y}\ln\psi_2(y,t). \tag{5}$$

Чтобы ограничить произвол в выборе функции $\psi_1(y,t)$, будем считать ее действительной. В этом случае условие действительности потенциальной энергии (5) приводит к следующему уравнению для $\psi_1(y,t)$:

$$\frac{\partial^2 \psi_1(y,t)}{\partial y^2} + 2\left(\frac{\partial \psi_1(y,t)}{\partial y} - \dot{\xi}(t)\right)\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{Re}\ln\psi_2(y,t) = 0\,. \tag{6}$$

Принимая во внимание, что $\ln\psi_2(y,t) = \ln|\psi_2(y,t)| + i\arg\psi_2(y,t)$ (здесь имеется в виду главное значение логарифмической функции), решение уравнения (6) можно записать в виде

$$\psi_1(y,t) = \alpha(t) + \beta(t)\int\limits_0^y \frac{dy'}{|\psi_2(y',t)|^2} + \dot{\xi}(t)y \tag{7}$$

($\alpha(t)$ и $\beta(t)$ - произвольные действительные функции времени). С его помощью из (5) получаем искомое выражение

$$U(x,t) = U_0(y,t) - \frac{\partial\psi_1(y,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\dot{\xi}^2(t) -$$

$$- \frac{\beta^2(t)}{2|\psi_2(y,t)|^4} - \frac{\beta(t)}{|\psi_2(y,t)|^2}\frac{\partial}{\partial y}\arg\psi_2(y,t)\,, \tag{8}$$

которое определяет класс функций $U(x,t)$, отвечающий потенциальной энергии $U_0(x,t)$ и всем допустимым функциям $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\xi(t)$. Отметим, что, поскольку $\psi_2(y,0) = \psi(y,0)$, начальное значение $\psi_1(y,t)$ можно положить равным нулю: $\psi_1(y,0) = 0$. Согласно (7), это означает, что функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\dot{\xi}(t)$ должны удовлетворять начальным условиям $\alpha(0) = \beta(0) = \dot{\xi}(0) = 0$.

Таким образом, функция (1), определяемая (4) и (7), является решением уравнения Шредингера (2), если потенциальная энергия частицы имеет вид (8). При заданных $U_0(x,t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\xi(t)$ как волновая функция $\psi(x,t)$, так и потенциальная энергия частицы $U(x,t)$ определяются однозначно. Можно рассматривать и обратную задачу, когда при заданных $U(x,t)$ и $U_0(x,t)$ требуется найти такие функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\xi(t)$, чтобы выполнялось соотношение (8). Очевидно, что решение такой задачи существует, если только $U(x,t)$ принадлежит классу функций, порождаемому $U_0(x,t)$ в указанном выше смысле.

3 Путем решения обратной задачи найдем волновую функцию частицы, движущейся в поле гауссовской δ-коррелированной случайной силы $f(t)$, которая определяется соотношениями:

$$\overline{f(t)} = 0\,, \qquad \overline{f(t)f(t+\tau)} = 2\Delta\delta(\tau)\,, \tag{9}$$

где Δ - интенсивность силы, величина которой зависит от природы $f(t)$; $\delta(\tau)$ - δ-функция, а черта обозначает усреднение по реализациям $f(t)$. Для этого, положив $U_0(x,t) = 0$ и $\beta(t) = 0$, перепишем сначала выражение (8) в обычной системе единиц (с размерными $\hbar$ и m):

$$U(x,t) = -m\ddot{\xi}(t)x - \hbar\dot{\alpha}(t) + m\dot{\xi}^2(t)/2 + m\xi(t)\ddot{\xi}(t)\,. \tag{10}$$

Затем, приняв во внимание, что в рассматриваемом случае $U(x,t) = -f(t)x$, из (10) получаем уравнения для $\xi(t)$ и $\alpha(t)$:

$$\dot{\xi}(t) = f(t)/m\,, \quad \dot{\alpha}(t) = (m/\hbar)\left(\dot{\xi}^2(t)/2 + \xi(t)\ddot{\xi}(t)\right),$$

решения которых, подчиняющиеся начальным условиям $\xi(0) = \dot{\xi}(0) = 0$ и $\alpha(0) = 0$, представим в виде:

$$\xi(t) = \frac{1}{m}\int_0^t\int_0^{t'} f(t'')dt'dt''\,, \quad \alpha(t) = \frac{m}{\hbar}\int_0^t\left(\dot{\xi}^2(t')/2 + \xi(t')\ddot{\xi}(t')\right)dt'. \tag{11}$$

Что касается уравнения (4), то его решением при $U_0(x,t) = 0$, удовлетворяющим начальному условию

$$\psi_2(y,0) = A\exp\left(-y^2/2a^2 + iky\right) \tag{12}$$

($A = 1/\pi^{1/4}a^{1/2}$), которому отвечает частица, локализованная в начальный момент времени в области $|x| \lesssim a$ и имеющая средний импульс $\hbar k$, является [6]

$$\psi_2(y,t) = \frac{A}{\left(1 + i\dfrac{\hbar t}{ma^2}\right)^{1/2}} e^{-a^2k^2/2}\exp\left[-\frac{\left(y - ia^2k\right)^2}{2a^2\left(1 + i\dfrac{\hbar t}{ma^2}\right)}\right]. \tag{13}$$

Итак, функция $\psi_1(y,t) = \alpha(t) + m\dot{\xi}(t)y/\hbar$ с $\xi(t)$ и $\alpha(t)$, определяемыми выражениями (11), и функция $\psi_2(y,t)$ из (13) полностью определяют волновую функцию частицы, движущейся в поле случайной силы $f(t)$. С ее помощью могут быть вычислены любые характеристики такой частицы. Найдем сначала плотность вероятности $\rho(x - \xi(t),t)$, усредненную по реализациям $f(t)$. Принимая во внимание, что

$$\rho(x - \xi(t),t) = \frac{A^2}{\left[1 + \left(\dfrac{\hbar t}{ma^2}\right)^2\right]^{1/2}}\exp\left\{-\frac{\left(x - \xi(t) - \dfrac{\hbar k}{m}t\right)^2}{a^2\left[1 + \left(\dfrac{\hbar t}{ma^2}\right)^2\right]}\right\},$$

а $\xi(t)$ является гауссовским случайным процессом с нулевым средним значением и дисперсией, равной $2\Delta t^3/3m^2$, нетрудно убедиться, что $\overline{\rho(x - \xi(t),t)}$ имеет вид распределения Гаусса

$$\overline{\rho(x - \xi(t),t)} = \frac{1}{\left(2\pi < \overline{x^2} >\right)^{1/2}}\exp\left[-\frac{\left(x - < \overline{x} >\right)^2}{2 < \overline{x^2} >}\right], \tag{14}$$

где $< \overline{x} > = \hbar kt/m$ - среднее значение координаты частицы (угловые скобки обозначают квантовомеханическое усреднение), а

$$< \overline{x^2} > = \frac{a^2}{2} + \frac{\hbar^2}{2m^2a^2}t^2 + \frac{2\Delta}{3m^2}t^3 \tag{15}$$

- дисперсия координаты частицы. Первое слагаемое в правой части (15) обусловлено неопределенностью начального положения частицы, задаваемого волновым пакетом (12), второе - квантовым расплыванием волнового пакета, а третье - случайным характером действующей на частицу силы $f(t)$. Согласно (15), при $t < t_c = 3\hbar^2/4\Delta a^2$ превалирует квантовый механизм расплывания пакета, а при $t > t_c$ - классический.

Найдем теперь среднюю кинетическую энергию частицы, которая определяется как

$$< \overline{E} > = -\frac{\hbar^2}{2m}\overline{\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)\,dx} \qquad (16)$$

(звездочка обозначает комплексное сопряжение). Воспользовавшись выражениями для $\psi_1(y,t)$ и $\psi_2(y,t)$, а также следующими из (11) и (9) соотношениями $\overline{\xi(t)} = 0$ и $\overline{\xi^2(t)} = 2\Delta t/m^2$, на основании (16) получаем

$$< \overline{E} > = \frac{\hbar^2}{4ma^2} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{\Delta}{m}t\,. \qquad (17)$$

Следовательно, средняя кинетическая энергия квантовой частицы, движущейся в поле случайной силы, неограниченно возрастает со временем, т.е. происходит ее стохастическое ускорение. Отметим, что при учете диссипации энергии частицы, например, за счет дипольного излучения, средняя энергия частицы при $t \to \infty$ будет иметь конечное значение, определяемое балансом между поглощенной в случайном поле энергией и излученной.

SUMMARY

The exact solution of the time-dependent Schrödinger equation for the potential corresponding to an uniform random force, is found. The peculiarities of the stochastic acceleration of a quantum particle are studied.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fermi E. //Phys. Rev. - 1949, v.75, p.1169.
2. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. - М.: Мир, 1984.- 528 с.
3. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. - М.: Наука, 1984.- 272 с.
4. Базь А.И., Зельдович Я.Б., Переломов А.М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. - М.: Наука, 1971.- 544 с.
5. Делоне Н.Б., Крайнов В.П. Атом в сильном световом поле. - М.: Атомиздат, 1978.- 287 с.
6. Флюгге З. Задачи по квантовой механике. Т.1. - М.: Мир, 1974.- 344 с.

Поступила в редколлегию 31 августа 1998 г.

УДК 539.3:534.1

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА С ТУННЕЛЬНЫМ ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

М.Л. Фильштинский, вед. науч. сотр.

Рассматривается пьезокерамический цилиндр произвольного поперечного сечения, содержащий туннельное включение в виде тонкой жесткой вставки. Колебания цилиндра осуществляются вследствие