

соответственно (длина стороны квадрата составляет 0.7 диаметра круга).

Из результатов расчетов следует, что влияние электрических граничных условий на поверхности цилиндра на поведение механических величин в динамике может быть существенным.

SUMMARY

Antiplane dynamic problem of the electroelasticity for the cylinder with tunnel rigid inclusion, which is exposed to the harmonic in time excitation, is considered. The initial boundary-value problem is reduced to the system of singular integral equations of the second kind. The examples of calculations are presented.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фильштинский М.Л., Мордик И.Н. Влияние неоднородностей типа трещин на амплитудно-частотные характеристики пьезокерамического цилиндра // Вестник СумГУ, 1997. - № 1 (7). - С. 158-170.
2. Бардзокас Д., Фильштинский М.Л. Дифракция волны сдвига на цилиндрических включениях в пьезоэлектрическом полупространстве // Изв. РАН. Механика твердого тела, 1997. - № 3. - С. 77-84.
3. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. - М.: Наука, 1988. - 471 с.
4. Фильштинский М.Л. Динамическое нагружение пьезокерамического полупространства с трещиной // Акуст. журн., 1993. Т. 39. Вып. 5. - С. 921-928.
5. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968. - 511 с.
6. Фильштинский М.Л. Взаимодействие волн механических смещений с туннельными трещинами продольного сдвига в пьезокерамическом полупространстве // Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1988. - Т. 41. - № 5. - С. 27-33.
7. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. - К.: Наук. думка, 1984. - 344 с.
8. *Erdogan F.E., Gupta G.D., Cook T.S.* The numerical solution of singular integral equations // *Mechanics of Fract.* Leyden: Noordhoff Intern. Publ., 1973. V.1. - P. 368-425.
9. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. - К.: Наук. думка, 1989. - 280 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций. - В 5 т. Т.5).

Поступила в редколлегию 11 сентября 1998 г.

УДК 539.3:534.1

КОЛЕБАНИЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПУЛЬСИРУЮЩЕГО ДАВЛЕНИЯ В ПЛОСКОСТИ, ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ОСИ СИММЕТРИИ МАТЕРИАЛА

М.Л. Фильштинский, *вед. науч. сотр.*; Д. Бардзокас*, *проф.*

(* *Национальный технический университет, Афины, Греция*)

Исследуются установившиеся колебания пьезокерамического цилиндра в условиях его плоской деформации. Рассматривается наиболее сложный с математической точки зрения случай, когда деформирование цилиндра происходит в плоскости, параллельной направлению электрического поля предварительной поляризации пьезокерамики. Соответствующая двумерная граничная задача электроупругости сводится к системе трех сингулярных интегральных уравнений второго рода. Приводятся результаты расчетов.

Решение плоской стационарной динамической задачи электроупругости о дифракции акустоэлектрических волн на туннельных полостях в пьезокерамической среде содержится в [1].

1 Рассмотрим отнесенный к декартовым прямолинейным осям x_1, x_2, x_3 бесконечно длинный вдоль оси x_2 пьезокерамический цилиндр,

поперечное сечение которого ограничено гладким контуром Γ . Будем считать, что ось x_3 совпадает с направлением силовых линий электрического поля предварительной поляризации керамики. Колебания цилиндра происходят под действием заданного на его поверхности, постоянного вдоль координаты x_2 пульсирующего давления $N = \text{Re}(N^* e^{-i\omega t})$.

В указанной постановке в цилиндре реализуется состояние плоской деформации в плоскости $x_1 O x_3$. Полная система уравнений имеет вид [2]: уравнения движения среды:

$$\partial_k \sigma_{ik} = \rho_* \partial^2 u_i / \partial t^2, \quad \partial_k = \partial / \partial x_k \quad (i, k = 1, 3), \quad (1.1)$$

уравнения электростатики:

$$\text{div} \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{E} = -\text{grad} \varphi, \quad (1.2)$$

материальные уравнения:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11} \partial_1 u_1 + c_{13} \partial_3 u_3 - e_{31} E_3, \quad \sigma_{13} = c_{44} (\partial_1 u_3 + \partial_3 u_1) - e_{15} E_1, \\ \sigma_{33} &= c_{13} \partial_1 u_1 + c_{33} \partial_3 u_3 - e_{33} E_3, \\ D_1 &= \varepsilon_{11} E_1 + e_{15} (\partial_1 u_3 + \partial_3 u_1), \quad D_3 = \varepsilon_{33} E_3 + e_{31} \partial_1 u_1 + e_{33} \partial_3 u_3. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь σ_{ik} , u_i , E_i , D_i и φ - соответственно механические напряжения, перемещения, напряженность, индукция и потенциал электрического поля; $c_{ij} = c_{ij}^E$ - модули упругости; $\varepsilon_{jj} = \varepsilon_{jj}^S$ - диэлектрические проницаемости; e_{kj} - пьезоэлектрические модули; ρ_* - плотность материала.

К системам (1.1) - (1.3) необходимо добавить механические и электрические граничные условия на поверхности цилиндра. Считая, что его поверхность граничит с вакуумом (воздухом), полагаем [2], что

$$D_n = D_1 \cos \psi + D_3 \sin \psi = 0 \quad \text{на } \Gamma. \quad (1.4)$$

В (1.4) через ψ обозначен угол между нормалью к контуру Γ и осью Ox_1 .

2 Для построения корректных интегральных представлений амплитуд перемещений потенциала и последующего сведения исходной граничной задачи к системе интегральных уравнений рассмотрим сперва вспомогательную задачу о гармоническом возбуждении пьезокерамической среды под действием сосредоточенных на линии $x_1 = 0$, $-\infty < x_2 < \infty$, $x_3 = 0$ усилий $X_k(x_1, x_3, t) = \delta(x_1, x_3) \text{Re}(P_k e^{-i\omega t})$ ($k = 1, 3$) или электрических зарядов $q(x_1, x_3, t) = \delta(x_1, x_3) \text{Re}(Q e^{-i\omega t})$, где $\delta(x_1, x_3)$ - дельта-функция Дирака. Предположим, что среда предварительно поляризована в направлении оси x_3 декартовой системы координат $Ox_1 x_2 x_3$. В этом случае имеет место плоская деформация пьезоупругой среды в $x_1 O x_3$.

Исходные уравнения динамической плоской задачи электроупругости следуют из основных соотношений (1.1) - (1.3). Полагая далее, что

$$u_j = \operatorname{Re}(U_j e^{-i\omega t}), \quad \sigma_{jk} = \operatorname{Re}(T_{jk} e^{-i\omega t}), \quad \varphi = \operatorname{Re}(\Phi e^{-i\omega t}),$$

запишем их в матричной форме относительно амплитуд перемещений и электрического потенциала:

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_1^{(1)} & U_1^{(2)} & U_1^{(3)} \\ U_3^{(1)} & U_3^{(2)} & U_3^{(3)} \\ \Phi^{(1)} & \Phi^{(2)} & \Phi^{(3)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -P_1 \delta & 0 & 0 \\ 0 & -P_3 \delta & 0 \\ 0 & 0 & Q \delta \end{vmatrix}. \quad (2.1)$$

Здесь верхний индекс $k = 1, 2, 3$ указывает на соответствие величин $U_j^{(k)}$ и $\Phi^{(k)}$ сосредоточенным нагрузкам X_1, X_3 и q , а дифференциальные операторы L_{ij} определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} L_{11} &= c_{11} \partial_1^2 + c_{44} \partial_3^2 + \rho_* \omega^2, & L_{12} &= L_{21} = (c_{13} + c_{44}) \partial_1 \partial_3, \\ L_{13} &= L_{31} = (e_{31} + e_{15}) \partial_1 \partial_3, & L_{22} &= c_{44} \partial_1^2 + c_{33} \partial_3^2 + \rho_* \omega^2, \\ L_{23} &= L_{32} = e_{15} \partial_1^2 + e_{33} \partial_3^2, & L_{33} &= -\varepsilon_{11} \partial_1^2 - \varepsilon_{33} \partial_3^2, & L_{ij} &= L_{ji}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Применим к системе (2.1) двумерное интегральное преобразование Фурье [3] по координатам x_1 и x_3 :

$$\begin{aligned} V_j^{(k)}(\xi, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int U_j^{(k)}(x, \omega) e^{i(\xi, x)} dx, & x &= (x_1, x_3), \\ U_j^{(k)}(x, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int V_j^{(k)}(\xi, \omega) e^{-i(\xi, x)} d\xi, & \xi &= (\xi_1, \xi_3). \end{aligned} \quad (2.3)$$

В результате будем иметь

$$V_j^{(k)} = \frac{\varepsilon_k R_k \Delta_j^{(k)}(\xi, \omega)}{2\pi \Delta(\xi, \omega)} \quad (k, j = \overline{1, 3}), \quad (2.4)$$

$$R_1 = P_1, \quad R_2 = P_3, \quad R_3 = Q, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1, \quad \varepsilon_3 = 1.$$

Здесь функции $V_j^{(k)} (j = \overline{1, 3})$ представляют собой трансформанты амплитуд перемещений U_1, U_3 и электрического потенциала Φ соответственно.

С учетом преобразований координат по формулам

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \rho \cos \alpha, & x_1 &= r \cos \beta, \\ \xi_3 &= \rho \sin \alpha, & x_3 &= r \sin \beta, \end{aligned} \quad (2.5)$$

величины, входящие в (2.4), можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\Delta_j^{(k)}(\rho, \alpha, \omega) &= b_j^{(k)} \rho^4 + c_j^{(k)} \gamma^2 \rho^2 + \delta_j^3 \delta_k^3 \gamma^4 c_{44}^2, \\
\Delta(\rho, \alpha, \omega) &= c_{44}^3 A(\alpha) \rho^2 (\rho^2 - \gamma^2 \rho_1^2) (\rho^2 - \gamma^2 \rho_2^2), \\
A(\alpha) &= c_{44}^{-3} (a_{11} a_{22} a_{33} + 2a_{12} a_{13} a_{23} - a_{11} a_{23}^2 - a_{22} a_{13}^2 - a_{33} a_{12}^2), \\
A_1(\alpha) &= (a_{11} a_{33} + a_{22} a_{33} - a_{23}^2 - a_{13}^2) / c_{44}, \quad A_2(\alpha) = a_{33} / c_{44}, \\
a_{11} &= -c_{11} n_1^2 - c_{44} n_3^2, \quad a_{13} = -(e_{31} + e_{15}) n_1 n_3, \\
a_{12} &= -(c_{13} + c_{44}) n_1 n_3, \quad a_{22} = -c_{44} n_1^2 - c_{33} n_3^2, \quad n_1 = \cos \alpha, \\
a_{23} &= -e_{15} n_1^2 - e_{33} n_3^2, \quad a_{33} = \varepsilon_{11} n_1^2 + \varepsilon_{33} n_3^2, \quad n_3 = \sin \alpha, \quad (2.6) \\
b_1^{(1)} &= a_{22} a_{33} - a_{23}^2, \quad b_2^{(1)} = a_{13} a_{23} - a_{12} a_{33}, \quad b_3^{(1)} = a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}, \\
b_2^{(2)} &= a_{11} a_{33} - a_{13}^2, \quad b_3^{(2)} = a_{12} a_{13} - a_{11} a_{23}, \quad b_3^{(3)} = a_{11} a_{22} - a_{12}^2, \\
c_1^{(1)} &= c_{44} a_{33}, \quad c_3^{(1)} = -c_{44} a_{13}, \quad c_2^{(1)} = 0, \quad c_2^{(2)} = c_{44} a_{33}, \\
c_3^{(2)} &= -c_{44} a_{23}, \quad c_3^{(3)} = c_{44} (a_{11} + a_{22}), \quad c_k^{(j)} = c_j^{(k)}, \quad b_k^{(j)} = b_j^{(k)}, \\
B_i(\alpha) &= \frac{A_i(\alpha)}{A(\alpha)}, \quad \gamma = \frac{\omega}{c}, \quad c = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho_*}}, \quad \rho_v^2(\alpha) = -\frac{B_1}{2} + (-1)^v \sqrt{\frac{B_1^2}{4} - B_2}.
\end{aligned}$$

Здесь δ_m^i - символ Кронекера; величины $\rho_v^2(\alpha) > 0$ ($v = 1, 2$).

Раскладывая выражение (2.4) с учетом (2.6) на простейшие дроби, получим

$$\begin{aligned}
V_j^{(k)} &= \frac{\varepsilon_k R_k}{2\pi c_{44}^3 A(\alpha)} \left\{ \sum_{v=1}^2 \frac{\lambda_{vj}^{(k)}}{\rho^2 - \gamma^2 \rho_v^2} + \delta_j^3 \delta_k^3 \frac{\lambda_0}{\rho^2} \right\} \quad (j, k = \overline{1, 3}), \\
\lambda_{vj}^{(k)} &= \frac{\rho_v^2 b_j^{(k)} + c_j^{(k)} + \delta_j^3 \delta_k^3 c_{44}^2 / \rho_v^2}{(-1)^v (\rho_2^2 - \rho_1^2)}, \quad \lambda_0 = \frac{c_{44}^2}{\rho_1^2 \rho_2^2}.
\end{aligned} \quad (2.7)$$

Обращая преобразование Фурье, находим, что

$$\begin{aligned}
W_j^{(k)}(r, \beta, \omega) &= \frac{\varepsilon_k R_k}{2\pi^2 c_{44}^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \left\{ \sum_{v=1}^2 \frac{\lambda_{vj}^{(k)} \rho \cos[r\rho \cos(\alpha - \beta)]}{A(\alpha) (\rho^2 - \gamma^2 \rho_v^2)} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\delta_j^3 \delta_k^3 \lambda_0 \cos[r\rho \cos(\alpha - \beta)]}{A(\alpha) \rho} \right\} d\rho d\alpha, \quad (2.8)
\end{aligned}$$

$$W_1^{(k)} = U_1^{(k)}, \quad W_2^{(k)} = U_3^{(k)}, \quad W_3^{(k)} = \Phi^{(k)} \quad (k = \overline{1, 3}).$$

Несобственный интеграл в (2.8) в соответствии с принципом предельного поглощения [4] необходимо понимать в следующем смысле [3, 5]:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x \cos ax dx}{x^2 - b^2 - i0} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^\infty \frac{x \cos ax dx}{x^2 + b_*^2} = \frac{1}{2} \{ e^{-iab} E_1(-iab) - e^{iab} Ei(-iab) \}, \\
b_* &= -i\sqrt{b^2 + i\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \quad a > 0, \quad \text{Re} b_* > 0,
\end{aligned}$$

где $E_1(z), Ei(z)$ - интегральные показательные функции [6]. С учетом этого замечания, а также значения интеграла [5] ($C = 0.5772\dots$ - постоянная Эйлера)

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax dx}{x} = -\ln a - C \quad (a > 0)$$

получаем формулы для определения амплитуд перемещений и электрического потенциала:

$$W_j^{(k)}(r, \beta, \omega) = \frac{\varepsilon_k R_k}{2\pi^2 c_{44}^3} \int_0^{\pi} \left\{ \sum_{v=1}^2 \lambda_{vj}^{(k)} \Psi(\theta_v) + \delta_j^3 \delta_k^3 \lambda_0 \Omega(\theta) \right\} \frac{d\alpha}{A(\alpha)},$$

$$\Psi(x) = \frac{\pi i}{2} e^{ix} - \cos x \operatorname{ci} x - \sin x \operatorname{si} x, \quad \Omega(x) = -\ln x - C, \quad (2.9)$$

$$\theta_v = \gamma \rho_v r |\cos(\alpha - \beta)|, \quad \theta = r |\cos(\alpha - \beta)| \quad (j, k = \overline{1, 3})$$

Здесь $\operatorname{si} x, \operatorname{ci} x$ - соответственно интегральные синус и косинус [6].

Таким образом, фундаментальное решение определяется в замкнутом виде по формулам (2.9).

3 Используя матрицу фундаментальных решений (2.9), запишем интегральные представления амплитуд перемещений и электрического потенциала в виде формул:

$$W_j(z) = \sum_{k=1}^3 \int_{\Gamma} p_k(\zeta) g_{kj}(\zeta, z) ds,$$

$$g_{kj}(\zeta, z) = \frac{\varepsilon_k}{2\pi^2 c_{44}^3} \int_0^{\pi} \left\{ \sum_{v=1}^2 \lambda_{vj}^{(k)} \Psi(\theta_v^*) + \delta_j^3 \delta_k^3 \lambda_0 \Omega(\theta^*) \right\} \frac{d\alpha}{A(\alpha)}, \quad (3.1)$$

$$\theta_v^* = \gamma \rho_v r^* |\cos(\alpha - \beta^*)|, \quad \theta^* = r^* |\cos(\alpha - \beta^*)|,$$

$$r^* = |\zeta - z|, \quad \beta^* = \arg(\zeta - z), \quad z = x_1 + ix_3, \quad \zeta \in \Gamma.$$

Здесь $p_k(\zeta)$ - неизвестные плотности, подлежащие определению; ds - элемент дуги контура Γ . Интегральные представления (3.1) обладают необходимой полнотой по отношению к рассматриваемой граничной задаче.

Дифференцируя (3.1), находим, что

$$\partial_l W_j(z) = \sum_{k=1}^3 \int_{\Gamma} p_k(\zeta) G_{kj}^{(l)}(\zeta, z) ds \quad (l = 1, 3),$$

$$G_{kj}^{(l)}(\zeta, z) = \frac{\varepsilon_k}{2\pi^2 c_{44}^3} \int_0^{\pi} \left\{ \sum_{v=1}^2 \lambda_{vj}^{(k)} \Psi^{(l)}(\theta_v^*) + \delta_j^3 \delta_k^3 \lambda_0 \Omega^{(l)}(\theta^*) \right\} \frac{d\alpha}{A(\alpha)}, \quad (3.2)$$

$$\Psi^{(l)}(\theta_v^*) = -\gamma \rho_v n_l H(\theta_v^*) \operatorname{sign} \cos(\alpha - \beta^*),$$

$$\Omega^{(l)}(\theta^*) = -\frac{n_l}{r^* \cos(\alpha - \beta^*)}, \quad H(x) = \frac{\pi}{2} e^{ix} + \frac{1}{x} + \cos x \operatorname{si} x - \sin x \operatorname{ci} x.$$

С учетом функций (3.2) и материальных уравнений (1.2) можно определить выражения для амплитуд напряжений и компонентов векторов электрической индукции и напряженности в любой точке области $z \notin \Gamma$. В том случае, когда $z \rightarrow \zeta_0 \in \Gamma$, при вычислении величин $\partial_l W_j(z)$ необходимо учитывать внеинтегральные члены, возникающие вследствие сингулярного характера ядер $G_{kj}^{(l)}(\zeta, z)$ в точке $z = \zeta$. Можно показать, что сингулярные слагаемые, фигурирующие в функциях $G_{kj}^{(l)}(\zeta, z)$, отвечают статическому случаю ($\omega = 0$). Действительно, в силу (2.4), (2.6), (2.7) и легко выводимого соотношения $\sum_{v=1}^2 \lambda_{vj}^{(k)} = b_j^{(k)} - \delta_j^3 \delta_k^3 \lambda_0$

имеем

$$\begin{aligned} V_j^{(k)} - V_{j0}^{(k)} &= \frac{\varepsilon_k R_k}{2\pi} \left\{ \frac{\Delta_j^{(k)}(\xi, \omega)}{\Delta(\xi, \omega)} - \frac{\Delta_j^{(k)}(\xi, 0)}{\Delta(\xi, 0)} \right\} = \\ &= \frac{\varepsilon_k R_k}{2\pi c_{44}^3 A(\alpha)} \sum_{v=1}^2 \lambda_{vj}^{(k)} \left(\frac{1}{\rho^2 - \gamma^2 \rho_v^2} - \frac{1}{\rho^2} \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Обращая (3.3) по формуле (2.3) и вычисляя соответствующие производные, получим

$$\partial_l (W_j^{(k)} - W_{j0}^{(k)}) = \frac{\varepsilon_k R_k}{2\pi^2 c_{44}^3} \sum_{v=1}^2 \int_0^\pi \lambda_{vj}^{(k)} \Psi_*^{(l)}(\theta_v) \frac{d\alpha}{A(\alpha)}, \quad (3.4)$$

$$\Psi_*^{(l)}(\theta_v) = -\gamma \rho_v n_l h(\theta_v) \text{sign} \cos(\alpha - \beta), \quad h(x) = H(x) - 1/x.$$

Следовательно, функция (3.4) при $z = \zeta$ обращается в нуль, т.е. является регулярной.

Громоздкая процедура аналитического вычисления интегралов, соответствующих статической части производных от фундаментального решения (2.9), приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \partial_l W_{j0}^{(k)} &= -\frac{\varepsilon_k R_k}{2\pi^2 c_{44}^3} \int_0^\pi \frac{b_j^{(k)} n_l d\alpha}{A(\alpha) \cos(\alpha - \beta)} = R_k \text{Re} \sum_{v=1}^3 \frac{\omega_{kv} m_{lv} A_{vj}^{(k)}}{z_v - z_{v0}}, \\ A_{v1}^{(1)} &= -(c_{44} + c_{33} \mu_v^2)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33} \mu_v^2) - (e_{15} + e_{33} \mu_v^2)^2, \\ A_{v2}^{(1)} &= \mu_v [(c_{44} + c_{13})(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33} \mu_v^2) + (e_{15} + e_{31})(e_{15} + e_{33} \mu_v^2)], \\ A_{v3}^{(1)} &= \mu_v [(c_{44} + c_{13})(e_{15} + e_{33} \mu_v^2) - (e_{15} + e_{31})(c_{44} + c_{33} \mu_v^2)], \\ A_{v2}^{(2)} &= -(c_{11} + c_{44} \mu_v^2)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33} \mu_v^2) - \mu_v^2 (e_{15} + e_{31})^2, \\ A_{v3}^{(2)} &= \mu_v^2 (e_{15} + e_{31})(c_{44} + c_{13}) - (e_{15} + e_{33} \mu_v^2)(c_{11} + c_{44} \mu_v^2), \\ A_{v3}^{(3)} &= (c_{11} + c_{44} \mu_v^2)(c_{44} + c_{33} \mu_v^2) - \mu_v^2 (c_{31} + c_{44})^2, \quad A_{vi}^{(k)} = A_{vk}^{(i)}, \\ m_{1v} &= 1, m_{3v} = \mu_v, z_v = x_1 + \mu_v x_3, z_{v0} = x_{10} + \mu_v x_{30}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где μ_ν ($\text{Im } \mu_\nu > 0, \nu = 1, 2, 3$) - корни алгебраического уравнения;

$$a\mu^6 + b\mu^4 + c\mu^2 + d = 0,$$

$$a = -c_{44}c_{33}\varepsilon_{33}(1+k_{33}^2), \quad k_{33}^2 = \frac{e_{33}^2}{c_{33}\varepsilon_{33}}, \quad k_{15}^2 = \frac{e_{15}^2}{c_{44}\varepsilon_{11}},$$

$$b = c_{44}(2c_{13}\varepsilon_{33} - c_{33}\varepsilon_{11} + 2e_{31}e_{33}) - c_{11}c_{33}\varepsilon_{33}(1+k_{33}^2) - c_{33}(e_{15} + e_{31})^2 + 2e_{33}c_{13}(e_{15} + e_{31}) + c_{13}^2\varepsilon_{33},$$

$$c = c_{44}(2c_{13}\varepsilon_{11} - e_{31}^2) + 2c_{13}e_{15}(e_{15} + e_{31}) + c_{13}^2\varepsilon_{11} - c_{11}(c_{44}\varepsilon_{33} + c_{33}\varepsilon_{11} + 2e_{15}e_{33}), \quad d = -c_{11}c_{44}\varepsilon_{11}(1+k_{15}^2).$$

Константы ω_{kv} определяются из трех систем линейных алгебраических уравнений:

$$\text{Im} \sum_{\nu=1}^3 d_{\nu j}^{(k)} \omega_{kv} = f_j^{(k)} \quad (j = \overline{1, 6}; k = \overline{1, 3}),$$

$$d_{\nu 1}^{(k)} = -\gamma_\nu^{(k)} \mu_\nu, \quad d_{\nu 2}^{(k)} = \gamma_\nu^{(k)}, \quad d_{\nu 3}^{(k)} = -r_\nu^{(k)}, \quad d_{\nu, i+3}^{(k)} = -A_{\nu i}^{(k)},$$

$$f_i^{(k)} = \delta_i^k / 2\pi, \quad f_{i+3}^{(k)} = 0 \quad (i = \overline{1, 3}),$$

$$\gamma_\nu^{(k)} = c_{13}A_{\nu 1}^{(k)} + (c_{33}A_{\nu 2}^{(k)} + e_{33}A_{\nu 3}^{(k)})\mu_\nu,$$

$$r_\nu^{(k)} = (\varepsilon_{33}A_{\nu 3}^{(k)} - e_{33}A_{\nu 2}^{(k)})\mu_\nu - e_{31}A_{\nu 1}^{(k)}.$$

Таким образом, интегральные представления (3.2) при учете (3.4), (3.5) можно записать в виде следующих формул:

$$\partial_l W_j(z) = \sum_{k=1}^3 \int_{\Gamma} p_k(\zeta) F_{kj}^{(l)}(\zeta, z) ds \quad (l = \overline{1, 3}), \quad (3.6)$$

$$F_{kj}^{(l)}(\zeta, z) = \text{Re} \sum_{\nu=1}^3 \frac{\omega_{kv} m_{l\nu} A_{\nu j}^{(k)}}{z_\nu - \zeta_\nu} + \frac{\varepsilon_k}{2\pi^2 c_{44}^3} \sum_{\nu=1}^2 \int_0^\pi \lambda_{\nu j}^{(k)} \Psi_*^{(l)}(\theta_\nu^*) \frac{d\alpha}{A(\alpha)}.$$

Подставляя предельные значения производных (3.6) при $z \rightarrow \zeta_0 \in \Gamma$ в механические и электрическое граничные условия, приходим к системе трех сингулярных интегральных уравнений второго рода относительно функций $p_k(\zeta)$:

$$-\frac{1}{2} p_l(\zeta_0) + \sum_{k=1}^3 \int_{\Gamma} p_k(\zeta) M_{lk}(\zeta, \zeta_0) ds = N_l(\zeta_0) \quad (l = \overline{1, 3}),$$

$$M_{1k} = T_{11}^{(k)} n_1^* + T_{13}^{(k)} n_3^*, \quad M_{2k} = T_{13}^{(k)} n_1^* + T_{33}^{(k)} n_3^*,$$

$$M_{3k} = [e_{15}(F_{0k2}^{(1)} + F_{0k1}^{(3)}) - \varepsilon_{11} F_{0k3}^{(1)}] n_1^* + (e_{31} F_{0k1}^{(1)} + e_{33} F_{0k2}^{(3)} - \varepsilon_{33} F_{0k3}^{(3)}) n_3^*,$$

$$T_{11}^{(k)} = c_{11} F_{0k1}^{(1)} + c_{13} F_{0k2}^{(3)} + e_{31} F_{0k3}^{(3)}, \quad T_{13}^{(k)} = c_{44}(F_{0k2}^{(1)} + F_{0k1}^{(3)}) + e_{15} F_{0k3}^{(1)}, \quad (3.7)$$

$$T_{33}^{(k)} = c_{13} F_{0k1}^{(1)} + c_{33} F_{0k2}^{(3)} + e_{33} F_{0k3}^{(3)}, \quad F_{0kj}^{(l)} = F_{kj}^{(l)}(\zeta, \zeta_0),$$

$$N_1(\zeta_0) = N^* n_1^*, \quad N_2(\zeta_0) = N^* n_3^*, \quad N_3(\zeta_0) = 0,$$

$$n_1^* = \cos \psi_0, \quad n_3^* = \sin \psi_0, \quad \psi_0 = \psi(\zeta_0), \quad \zeta, \zeta_0 \in \Gamma.$$

4 Для определения динамической концентрации напряжений в цилиндре вычислим нормальное напряжение σ_θ на контуре Γ . С учетом интегральных представлений (3.6) имеем

$$\sigma_\theta = \operatorname{Re}(T_\theta e^{-i\omega t}), \quad T_\theta(\zeta_0) = \sum_{k=1}^3 \left\{ p_k(\zeta_0) t_k(\zeta_0) + \int_{\Gamma} p_k(\zeta) T_\theta^{(k)}(\zeta, \zeta_0) ds \right\},$$

$$t_k(\zeta_0) = \pi \operatorname{Im} \sum_{v=1}^3 \frac{(\mu_v n_3^* + n_1^*)^2}{\mu_v n_1^* - n_3^*} \omega_{kv} \gamma_v^{(k)}, \quad T_\theta^{(k)} = T_{11}^{(k)} (n_3^*)^2 + T_{33}^{(k)} (n_1^*)^2 - 2T_{13}^{(k)} n_1^* n_3^*.$$

(4.1)

Фигурирующие здесь величины $T_{ij}^{(k)}$ определены в (3.7).

В качестве примера рассмотрим круговой цилиндр (материал - пьезокерамика PZT-4 [7]). Функции $p_k(\zeta)$ ($k=1,3$) вычисляли из системы (3.7) методом квадратур [8], затем по формуле (4.1) определяли амплитуду напряжения $T_\theta(\zeta_0)$. Для керамики PZT-4 комплексные корни уравнения (3.5) равны: $\mu_1 = 1.203802i$, $\mu_{2,3} = \pm 0.200427 + 1.069137i$.

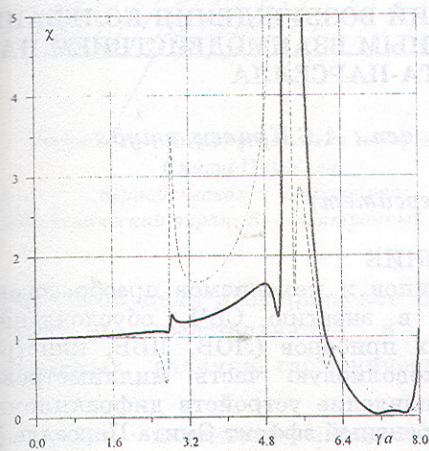


Рисунок 1

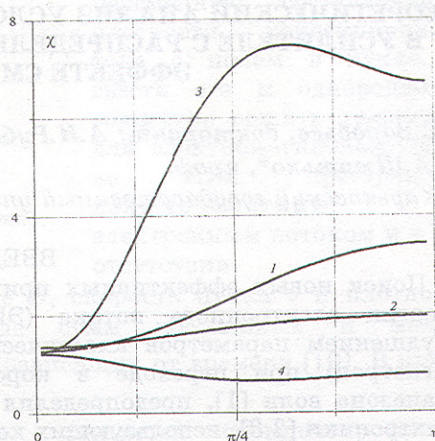


Рисунок 2

Рис. 1 иллюстрирует изменение величины $\chi = |T_\theta/N^*|$ в точках $\eta = \pi$ (сплошная линия) и $\eta = 9\pi/19$ (штриховая линия) контура цилиндра в функции нормализованного волнового числа γa (η - полярный угол; a - радиус цилиндра). Распределение величины χ на контуре цилиндра показано на рис. 2. Кривые 1-4 построены для значений $\gamma a = 2.84, 4, 5.07$ и 6 соответственно.

Из результатов расчета следует, что в процессе динамического возбуждения происходит перераспределение напряжения σ_θ на поверхности цилиндра.

SUMMARY

Plane problem of electroelasticity for a cylinder which is exposed to the pulsatory pressure, is considered. The corresponding dynamic boundary-value problem is reduced to the system of

three singular integral equations of the second kind. Examples of calculations are presented.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Filshinsky M.L., Shaban K. The steady-state wave process in a piezoceramic medium with cavities (plane deformation) / Proc. 20th International Conference "The Boundary Element Method" (BEM 20). - Orlando (USA). - 1998. - Vol. 4. - P. 167-176.
2. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических электропроводных тел. М.: Наука, 1988. - 471 с.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1981. - 512 с.
4. Ворovich И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. - М.: Наука, 1979. - 319 с.
5. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. - 287 с.
6. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. - М.: Мир, 1980. - 608 с.
7. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях: Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона. - М.: Мир, 1966. - М.1. - Ч. А. - С. 204-326.
8. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. - К.: Наук. думка, 1984. - 344 с.

Поступила в редколлегию 11 сентября 1998 г.

УДК 621.385.6

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УСЛОВИЙ ВОЗБУЖДЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ В УСИЛИТЕЛЕ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ НА ЭФФЕКТЕ СМИТА-ПАРСЕЛЛА

Г.С.Воробьев, докторант; А.И.Рубан, асп.; А.С.Кривец, студ.;
А.А.Шматько*, проф.

(*Харьковский государственный университет)

ВВЕДЕНИЕ

Поиск новых эффективных принципов и механизмов преобразования энергии электронного потока (ЭП) в энергию СВЧ, обусловленный ухудшением параметров классических приборов (ЛОВ, ЛБВ, клистрон магнетрон) при переходе в коротковолновую часть миллиметрового диапазона волны [1], предопределил появление устройств дифракционной электроники [2,3], использующих когерентный эффект Смита-Парселла [4]. Наличие обратной связи в высокодобротных открытых резонаторах таких устройств позволяет эффективно реализовать для них режимы регенеративного усиления колебаний [5]. В то же время, предложенные в [6,7] схемы приборов на базе открытого волновода (ОВ) с периодической структурой и анализ физических процессов взаимодействия ЭП с полем периодической структуры в режиме излучения [8,9] указывают на возможность создания усилителей с распределенным взаимодействием на объемных волнах. Отсутствие теоретического анализа таких устройств и недостаточный объем экспериментальных исследований весьма затрудняют их практическую реализацию.

1 ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ УСИЛИТЕЛЯ

Задача о взаимодействии ЭП с полем периодической структуры в режиме ДИ, в зависимости от конечной цели, имеет много подходов и решений. Наиболее предпочтительным представляется самосогласованный подход [10], заключающийся в совместном решении уравнений поля и уравнений движения электронов. Такой подход позволяет учесть обратное влияние излучения на ЭП и выяснить основные особенности процесса усиления электромагнитных колебаний. Теоретически это сводится к