

УДК 330.43

**ПОСТРОЕНИЕ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ  
С ЛАГОВЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ ПРИ ОПИСАНИИ ВВП**

**А.М. Назаренко, Н.В. Бондарь**

*Сумский государственный университет, г. Сумы*

*Данная статья посвящена проблеме построения эконометрической модели динамики производства ВВП. Модель строилась с помощью лаговых переменных, так как производство ВВП занимает некоторое время. В статье были реализованы два метода построения модели: метод наименьших квадратов и обобщенный метод перебора. Основной целью статьи было определение какой из методов дает наиболее адекватные результаты. После многочисленных исследований было определено, что обобщенный метод перебора лучше, чем МНК при построении модели динамики производства ВВП.*

**ВВЕДЕНИЕ**

Интеграция стран в мировую экономику вызывает необходимость ввести единую систему для оценки уровней развития экономики каждой из них. В связи с этим введена система национальных счетов (СНС), отражающая взаимосвязь между экономическими операциями и содержащая целостную информацию о процессах, связанных с производством на макроуровне, а также включающая информацию о распределении и перераспределении доходов, конечном потреблении [1].

Центральным показателем СНС является валовой внутренний продукт (ВВП). Ключевой показатель совокупного производства – это один из главных факторов, с помощью которого оценивают уровень развития экономики страны. Владея этой информацией, можно принимать решения относительно будущего развития экономики. Поэтому задача построения модели динамики производства ВВП является актуальной и важной [2,3]. В данной работе рассматривается один из методов моделирования динамики ВВП.

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ**

Целью данной работы является изучение и анализ подходов к построению модели динамики производства ВВП в форме уравнений с лаговыми переменными. Рассматриваются два метода оценивания неизвестных параметров уравнения ВВП: метод наименьших квадратов (МНК) и обобщенный метод перебора (ОМП). Предлагается способ выбора наиболее оптимальной модели.

**МЕТОД РЕШЕНИЯ**

ВВП представляет собой количество товаров и услуг, произведенных и реализованных на территории страны в течение определенного периода (года или квартала) [4]. Так как большинство продуктов проходят несколько производственных стадий, то для правильного подсчета ВВП необходимо учитывать только рыночную стоимость конечных продуктов

и исключать стоимость промежуточной продукции. Таким образом, исключается двойной счет. Из ВВП также изымаются непроемственные сделки.

Информация, которая содержится в ВВП, необходима в первую очередь органам государственной власти для выработки экономической политики, принятия управленческих решений.

Для анализа состояния экономики той или иной страны важно знать не столько конкретные значения ВВП для выбранного периода, сколько динамику его изменения, которая описывается некоторой моделью.

Существует два метода подсчета валового продукта: затратный и доходный. При построении предложенной в данной работе модели используется затратный метод, также называемый производственным. Согласно этому способу ВВП рассматривается как сумма всех расходов, необходимых для того, чтобы выкупить на рынке весь объем произведенной продукции [4]:

$$ВВП = C + I + G + X_n . \quad (1)$$

Здесь  $C$  – личные потребительские расходы,  $I$  – валовые частные инвестиции,  $G$  – государственная закупка товаров и услуг,  $X_n$  – чистый экспорт (разность между зарубежными расходами на приобретение товаров и услуг и расходами, которые терпит государство на закупку иностранной продукции).

При анализе данных временных рядов и построении динамической модели необходимо учитывать, что воздействие одних экономических факторов на другие осуществляется не мгновенно, а с некоторым временным запаздыванием. Производство ВВП имеет долговременный характер, так как, например, вложенные инвестиции реализовываются только через некоторый период времени; люди тратят свои деньги постепенно, а не мгновенно (что влияет на потребительские расходы). Поэтому и возникает необходимость учитывать переменные, влияние которых характеризуется определенным запаздыванием, при построении модели. Эти переменные принято называть лаговыми переменными. Существует два класса динамических моделей с лаговыми переменными: модели, которые содержат в качестве лаговых переменных лишь независимые (объясняющие) переменные, и модели, уравнения которых в качестве лаговых принимают зависимые (объясняемые) переменные. В данной работе строится модель с лаговой зависимой переменной, так как на текущее значение показателя  $Y$  (ВВП) оказывают воздействие предыдущие его значения.

При построении модели динамики ВВП будем выбирать два наиболее существенно влияющих на него показателя: валовые частные инвестиции  $I$  и объем налоговых поступлений  $T$  – составляющую  $G$ . Остальные два фактора  $C$  и  $X_n$  исключаем из модели, а их влияние будем учитывать путем введения в модель лаговых переменных, отражающих уровень ВВП в предшествующие периоды времени.

Рассмотрим модель с запаздыванием, в которой лаговой переменной выступает объясняемая переменная (ВВП):

$$Y_t = a_0 + a_1 I_t + a_2 T_t + \sum_{i=1}^k \beta_i Y_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (2)$$

где  $Y_t$ ,  $I_t$ , и  $T_t$  – конкретные значения ВВП, налогов и инвестиций соответственно в момент времени  $t$ ;  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\beta_i$  – неизвестные

коэффициенты, подлежащие оцениванию;  $k$  – длина лага;  $\varepsilon_t$  – случайное отклонение.

Методику использования лаговой зависимой переменной будем осуществлять по следующей схеме.

1. Оценивается линейная модель без лагов:

$$Y_t = a_0 + a_1 I_t + a_2 T_t + \varepsilon_t . \quad (3)$$

Качество приближения регрессионной модели будем характеризовать коэффициентом детерминации  $R^2$ , который рассчитывается по формуле [4]

$$R^2 = 1 - \frac{\sum \hat{\varepsilon}_i^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} . \quad (4)$$

Значение  $R^2$  в процентах означает, что линейная модель (3) объясняет  $R^2$  % дисперсии переменной  $Y$ , остальные  $(1 - R^2)$  % не обусловлены линейной моделью, а связаны с ее случайностью. Поэтому чем ближе  $R^2$  к единице, тем более адекватную модель мы получим. Следует отметить, как это вытекает из (4), максимизация коэффициента детерминации  $R^2$  эквивалентна минимизации функции ошибок по МНК.

Для определения значимости МНК – оценок  $\hat{a}_0$ ,  $\hat{a}_1$ ,  $\hat{a}_2$  неизвестных коэффициентов  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  используется критерий Стьюдента [4]:

$$\left| \frac{\hat{a}_i}{\sigma_{\hat{a}_i}} \right| > t_{кр} , \quad i = 0, 1, 2 , \quad (5)$$

где критическое значение  $t_{кр}$  вычисляется при числе степеней свободы  $k = n - m - 1 = n - 3$  и уровне значимости  $\alpha = 0.05$  ( $n$  – объем выборки). Если выполняется условие (5) в случае  $i = 1$  и  $i = 2$ , то это означает, что между  $Y$  (ВВП) и факторами  $I$  (валовые частные инвестиции) и  $T$  (налоговые поступления) присутствует стохастическая связь.

3. Строится модель вида (2) с длиной лага  $k = 1$ , которую будем записывать в виде

$$Y_t - \beta_1 Y_{t-1} = a_0 + a_1 I_t + a_2 T_t + \varepsilon_t . \quad (6)$$

Используя метод перебора значений параметра  $\beta_1$  из отрезка  $[-1; 1]$  с шагом  $h = 0,01$ , проводим оценивание модели (6) и вычисляем качество модели  $R^2$  (4), сравнивая полученное значение  $R^2$  с предыдущим значением для модели (3). Очевидно, новое значение  $R^2$  будет больше предыдущего.

4. Строим модель вида (2) с длиной лага  $k = 2$ :

$$Y_t - \beta_1 Y_{t-1} - \beta_2 Y_{t-2} = a_0 + a_1 I_t + a_2 T_t + \varepsilon_t . \quad (7)$$

Здесь необходимо осуществлять перебор значений двух параметров  $\beta_1$  и  $\beta_2$  из отрезка  $[-1; 1]$  с шагом  $h = 0,01$ .

5. Процесс увеличения длины лага  $k$  продолжается до тех пор, пока коэффициент детерминации  $R^2$  не будет принимать значение достаточно близкое к единице. На каждом шаге  $k$  оценивается вклад новой лаговой переменной  $Y_{t-k}$  и делается вывод о значимости этой переменной при влиянии на текущее значение ВВП.

В качестве примера рассмотрим развитие экономики Дании за 1975-2007гг. (табл.1).

Таблица 1 – Статистические данные о развитии экономики Дании за 1975 – 2007 гг. (в млн евро)

Год	Y	I	T
1975	88174,9	14762,4	13437,1
1976	93547,8	18049,3	15355
1977	95399	17676,4	15482,5
1978	97568,9	17303,4	15857,9
1979	101423	18267,2	16168,6
1980	101052,7	15637,6	15253,7
1981	100156,4	13553,9	14631,2
1982	103876,3	15178	15015,8
1983	106630,9	15583,2	15671,5
1984	111072,7	18521	16242,9
1985	115542,8	20768,8	17173
1986	121261,2	24468,5	19588,9
1987	121612,8	23401,3	18799,1
1988	121439,4	22592,6	17495,5
1989	122135,1	23467,1	17014,1
1990	123945,7	23137,5	16640,3
1991	125557,5	21961,2	16911,2
1992	128037,8	22265,2	17488,7
1993	127923	20268,5	16712,2
1994	134991,4	23425,8	18464,6
1995	139129,2	27139,7	18882,7
1996	143072,9	27600,6	19897,4
1997	147649,1	31620,8	20745,9
1998	150838,9	33973	21556
1999	154701,1	32376,6	21717,6
2000	160160	36125,7	21415,1
2001	161289	35138,8	21524,4
2002	162040,3	35641,3	21809,2
2003	162662,2	34769,3	21923,5
2004	166397,7	37114,7	23425,6
2005	170489	38096,5	25035,4
2006	177143,4	44435,7	26082,1
2007	180331,2	46365,6	26275,4

Для данных табл.1 оцененная модель (3) приобретает вид

$$\hat{Y}_t = 54383,26 + 2,78 \cdot I_t + 0,31 \cdot T_t, \quad R^2 = 94,95\%, \quad (8)$$

(с. о.)      (16480,91)      (0,64)      (1,71)

где внизу под значениями МНК – оценок приводятся их стандартные ошибки, необходимые для проверки критерия Стьюдента (5).

В данном случае объем выборки  $n = 30$ , число степеней свободы  $n - 3 = 27$ , уровень значимости  $\alpha = 0,05$  и, следовательно,  $t_{кр} = 2,05$  [4]. Как видим, критерий Стьюдента не выполняется для одного из факторов ( $T$ ). Это означает, что валовые частные инвестиции существенно влияют на текущее значение ВВП, а налоговые поступления незначимы на данном промежутке в модели без лаговых переменных. Следовательно, в качестве начального приближения модель (8) использовать нежелательно. Кроме того, коэффициент детерминации  $R^2 = 94,54\%$  модели (8) недостаточно высокий. Поэтому возникает необходимость в привлечении моделей с лаговой зависимой переменной (2).

При реализации МНК для модели (2) было получено, что с увеличением длины лага значение коэффициента детерминации  $R^2$  стремится к единице. Уже для модели с длиной лага  $k = 1$  (6) получен следующий результат:

$$Y_t = -338,32 + 0,13 \cdot I_t + 0,87 \cdot T_t + 0,87 \cdot Y_{t-1}, R^2 = 99,51\%. \quad (9)$$

(с.о.)      (149,36)      (0,05)      (0,41)

Программная реализация построенных алгоритмов показала, что наилучшее приближение в случае длины лага  $k = 1$  (9) достигается при значении  $\beta_1 = 0,87$ . При этом сравнение моделей (8) и (9) показывает, что в модели с лаговой переменной роль налоговых поступлений значительно усиливается. Это может быть объяснено тем, что собранные налоги усваиваются не мгновенно, а с некоторым запаздыванием.

Исследуем модель (7) с длиной лага, равной двум. Расчеты показали, что оцененное уравнение регрессии имеет вид

$$Y_t = -402,04 + 0,13 \cdot I_t + 0,88 \cdot T_t + 0,85 \cdot Y_{t-1} + 0,02 \cdot Y_{t-2}, R^2 = 99,51\%. \quad (10)$$

(с.о.)      (184,81)      (0,05)      (0,42)

Анализируя (10) отметим, что коэффициент детерминации усиленной модели практически не изменяется. Значения МНК – оценок также остаются на прежнем уровне. Это свидетельствует о том, что модель ВВП Дании может быть описана с высокой точностью с помощью модели с одной лаговой переменной и дальнейшее увеличение длины лага не имеет смысла.

На рис. 1 иллюстрируются динамика ВВП Дании и результаты ее аппроксимации моделями: без лагов (сплошная линия) и с лагом длины  $k = 1$  (пунктирная линия); точками здесь обозначены статистические данные. Видно, что лаговая модель существенно улучшает качество приближения и практически накладывается на исходные данные. Модель (10) не приводится на рис. 1, поскольку ее график практически совпадает с (9).

На рис. 2 приведены зависимости коэффициента детерминации  $R^2$  от лаговых параметров  $\beta_1$  (а) и  $\beta_1, \beta_2$  (б). Отметим, что оба графика имеют единственный ярко выраженный максимум, который достигается при оптимальных значениях оценок указанных параметров.

При численной реализации во всех случаях объем выборки выбирался равным  $n = 30$ . При этом осуществлялся сдвиг в данных влево на один год в случае длины лага  $k = 1$  и на два года в случае  $k = 2$ . Такой подход позволяет качественно сравнивать построенные модели, поскольку они будут совпадать в начале координат.

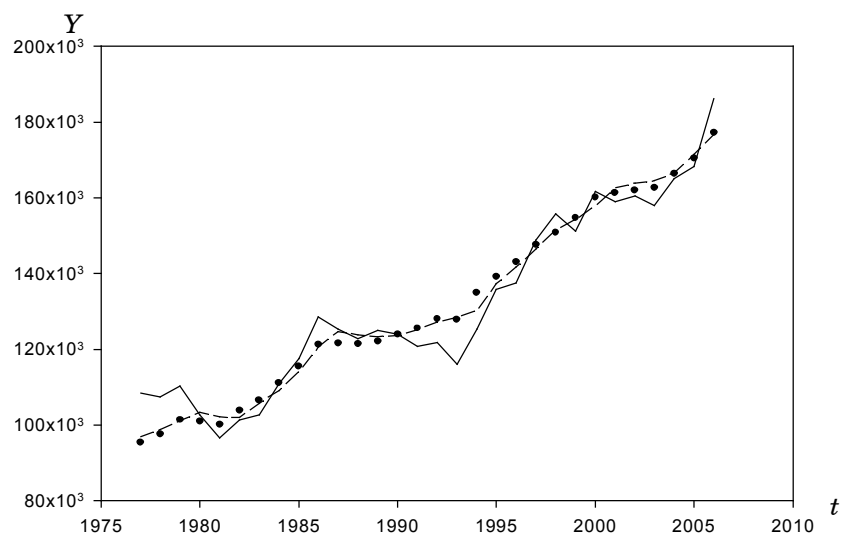


Рисунок 1 – Динамика изменения ВВП Дании за период 1975 – 2007 гг.

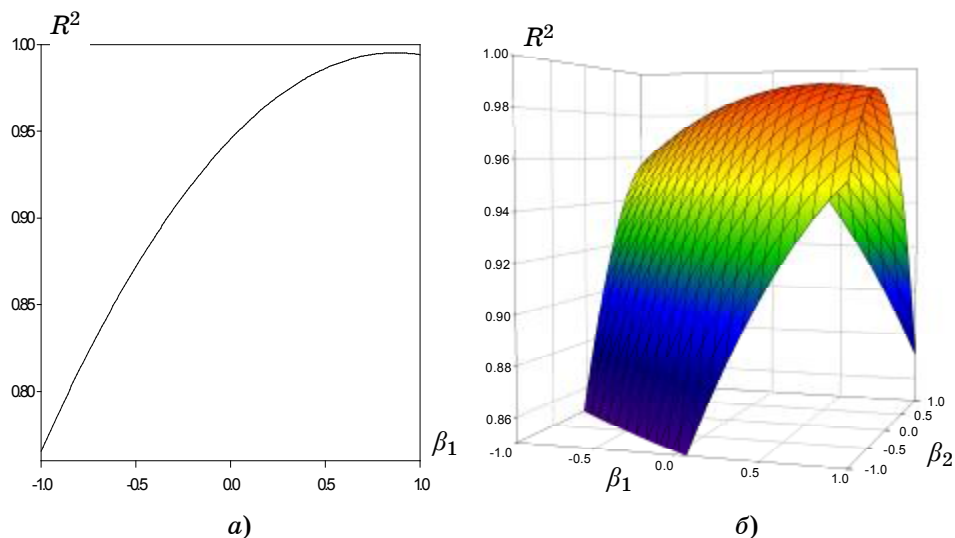


Рисунок 2 – Графики зависимости коэффициента детерминации  $R^2$  от лаговых параметров

### ВЫВОДЫ

В данной работе представлены два метода построения статистической модели макроэкономической динамики. Главной целью было определить, какой из предложенных методов дает более адекватные результаты. Как показывают численные эксперименты, обобщенный метод перебора дает более качественные результаты. Полученные графики значений критерия оптимальности подтверждают высокие дескриптивные свойства разработанных моделей. Построенные модели могут быть эффективно использованы при моделировании макроэкономической динамики.

## SUMMARY

*The article is devoted to the study of the gross domestic product dynamic model. We have taken into consideration that production of GDP takes some time, so we have built the model with lag variables. In our paper we have used two separate methods for the unknown coefficients estimation: ordinary least squares and enumerative technique. The main aim was to analyze the aforementioned methods and to decide what method is more appropriate. After numerical investigations we have obtained that enumerative technique is much better than ordinary least squares.*

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Базилевич В.Д., Базилевич К.С., Баластрик Л.О. Макроекономіка: Підручник. – К.: Знання, 2007. – 703 с.
2. Колемаев В. А., Калинина В. Н. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие. – М.: ИНФРА-М, 1997. – 301 с.
3. Greene W.H. Econometric analysis. Fifth Edition. – New Jersey: Prentice Hall Upper Saddle River, 2003. – 802 p.
4. Назаренко О. М. Основи економетрики: Підручник. – Вид. 2 – ге, перероб. – К.: Центр навчальної літератури, 2005. – 392 с.
5. Romer, D. Advanced Macroeconomics. – McGraw– Hill, 1996. – 539 p.
6. Макконнелл К. Р., Брю С. Л. Экономика: принципы, проблемы и политика / Пер. с 14-го англ. изд. – М.: ИНФРА-М, 2003. – XXXVI. – 972 с.
7. Справочник по прикладной статистике: В 2-х т. – Т.1: Пер. с англ. /Под ред. Э. Ллойда, У. Ледермана, Ю. Н. Тюрина. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 510 с.

**Назаренко А.М.**, канд. техн. наук, доцент;  
**Бондарь Н.В.**, студентка

*Поступила в редакцию 12 мая 2008 г.*