КЛИМЕНКО В.А., КЛИМЕНКО А.В.

ДО ПИТАННЯ ПРО МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ІСТОРИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Відомо, що математичне моделювання сьогодні є дуже актуальним і ефективним. Останні роки все більше звертаються до моделювання різних соціальних процесів: історії, політології, культурології. Для вивчення і прогнозування різних соціальних явищ важливо використовувати математичні моделі, моделюючі комплекси, які включають реалізацію багатьох математичних моделей, дослідницьких проектів.

Математична модель при відомих (що реально існували) параметрах поводиться так, як поводилася реально існуюча, наприклад, історична система, і дає результати, які збігаються з результатами, уже відомими.

Математичний комп'ютерний експеримент, звичайно ж, не є елементом традиційного соціального чи культурологічного дослідження. Проте, якщо виходити з уявлення про те, що одна з основних функцій, наприклад, історії це дослідження майбутнього, то побудова моделей представляється вельми ефективним і науково легітимним прийомом. Комп'ютерне моделювання дозволяє використовувати досягнення гуманітарних наук в галузях знання, що вивчають сучасне суспільство і перспективи його розвитку.

Сьогодні широкого застосування в практиці математичного моделювання нелінійної динаміки природних і соціальних систем знаходять так звані концептуальні моделі. До цього класу моделей відносяться моделі, які зосереджуються на описі основних взаємодій між окремими компонентами досліджуваних процесів. Концептуальні математичні моделі, як правило, становлять системи дискретних різностей або безперервних диференційних рівнянь. Результати досліджень, виконаних із використанням концептуальних моделей, дозволяють, зокрема, визначити динамічні особливості явищ, які вивчаються в просторі ключових параметрів. Такі якісні оцінки можуть бути корисними, оскільки дають можливість виявляти основні закономірності функціонування природних і соціальних спільнот.

Актуальність: метод математичного моделювання в гуманітарних дисциплінах, доповнюючи інші методи дослідження, сьогодні набуває все більшого значення і актуальності, оскільки дає можливість вивчення альтернатив розвитку, потенціалу різних галузей гуманітарних наук, прогнозування.

В даній статті ми пропонуємо два аспекти концептуальної математичної моделі на прикладі демографічної динаміки селянської общини в дореформений період.

Ми можемо показати, що приріст населення (в даному випадку селянської общини), яка залежить багато в чому від використання продуктів, які в ній виробляються, може якісно змінювати характер такої общини і впливати на передбаченість демографічної динаміки.

Чисельність населення общини - N_t, що змінюється в часі в даній моделі визначається числом селянських дворів(сімей). Можна прийняти, що середня чисельність сімї - 5 чоловік. Динаміка чисельності населення задається логічним рівнянням:

$$N_t = r(p_{t-1})N_{t-1}\left(1-\frac{N_{t-1}}{K}\right)-(\mu-1)N_{t-1} \qquad \mathbf{(1)}$$

Де *швидкість приросту населення r* залежить від функції p_t, *яка описує споживання населенням виробленої ними сільськогосподарської продукції, K - врожайність земельних ділянок, м-смертність населення.* Одиниця t відповідає одному сільськогосподарському року. Функція, яка визначає швидкість приросту населення общини, задається наступним чином:

$$r(p) = \frac{2}{\pi} r_{\max} arctg\left(\frac{p}{p_{\min}}-1\right) \qquad \mathbf{(2)}$$

Де p_{min} - *мінімальна норма споживання*. З рівняння (2) видно, що величина швидкості приросту населення обмежена параметром rmax.

Максимально можливу площу орних земель будемо вимірювати числом стандартних земельних наділів S. Якщо чисельність дворів N перевищує S, то деякі наділи можуть обробляти декілька сімей.

Нехай а - врожайність, яка виражається числом мінімальних сімейних пайків зерна, які можна зібрати зі стандартного наділа. Врожай Y(вимірюється числом пайків) задається наступним чином:

$$Y_t = \begin{cases} aN_t, ÿêùîN_t \lhd S \\ aS, ÿêùîN_t \geq S \end{cases} \qquad \mathbf{(3)}$$

Якщо питоме виробництво $y_t = Y_t / N_t$ більше деякої величини «*задовільного споживання*» $p_1(p_1>1)$, то селяни споживають не все зерно, а відкладають частину надлишків у çàïàñè (будемо вважати, що вони відкладають половину надлишків). В силу умов зберігання селянські запаси Z_t не можуть збільшуватися до нескінченності, вони обмежені деякою величиною Z_{max}. Якщо питоме виробництво нижче рівня p_1, то селяни беруть зерно з запасів, підіймаючи, по можливості, споживання до рівня p_1.

Таким чином, якщо $y_t \geq p_l$ то $y_t \geq p_l$

$$p_t = \begin{cases} p_l + \frac{1}{2}(y_t - p_t) \equiv \frac{1}{2}(y_t + p_l), \text{ÿêùî} Z_t \lhd Z_{max} \\ p_l + \frac{1}{2}(y_t + p_l) + (Z_t - Z_{max}), \text{ÿêùî} Z_t \geq Z_{max} \end{cases} \quad \textbf{(4)}$$

Та

$$Z_t = \begin{cases} Z_{t-1} + \frac{1}{2}(y_t - p_l), \text{ÿêùî} Z_{t-1} \lhd Z_{max} \\ Z_{max}, \text{ÿêùî} Z_{t-1} \geq Z_{max} \end{cases} \quad \textbf{(5)}$$

Якщо $y_t \lhd p_l$, то

$$p_t = \begin{cases} y_t + Z_{t-1}, \text{ÿêùî} Z_{t-1} \lhd \frac{d_t}{N_t} \\ p_l, \text{ÿêùî} Z_{t-1} \geq \frac{d_t}{N_t} \end{cases} \quad \textbf{(6)}$$

Та

$$Z_t = \begin{cases} 0, \text{ÿêùî} Z_{t-1} \lhd \frac{d_t}{N_t} \\ Z_{t-1} - \frac{d_t}{N_t}, \text{ÿêùî} Z_{t-1} \geq \frac{d_t}{N_t} \end{cases} \quad \textbf{(7)}$$

В рівняннях 6 та 7 $d_t = (p_l - y_t)N_t \rhd 0$

Результати проведених досліджень з використанням рівнянь 1-7 показують, що характер демографічної динаміки та передбаченість досліджуваної модельної системи значною мірою залежить від параметрів S та r_{max}. Від параметра r_{max}, як видно з рівняння 2, залежить швидкість приросту населення, а S, як вказувалося вище, являє собою число стандартних земельних наділів.

Для оцінки передбачуваності використовується алгоритм:

1) побудова вектора

$$\bar{u}\left(\frac{T}{2}\right) = \left(u\left(\frac{T}{2}\right), u\left(\frac{T}{2}-1\right), u\left(\frac{T}{2}-2\right), \ldots, u\left(\frac{T}{2}-(d-1)\right)\right)$$

d- так звана «*розмірність простору вкладення*»

2) пошук на інтервалі $\left[0, \frac{T}{2}\right]$ d-розмірних векторів

$$\overline{U}(t_i) = \left(U(t_i), U(t_i - 1), \ldots, U(t_i - (d-1))\right), i = 1,2,\ldots, m$$

Таких, що

$$\left|\bar{u}\left(\frac{T}{2}\right) - \overline{U}(t_i)\right| \lhd \varepsilon$$

3) передбачення величини

$$u'\left(\frac{T}{2}+1\right) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} U(t_i + 1)$$

4) побудова вектора $\bar{u}'\left(\frac{T}{2}+1\right)$згідно з пунктом 1 з урахуванням того, що величина $u'\left(\frac{T}{2}+1\right)$ тепер відома.

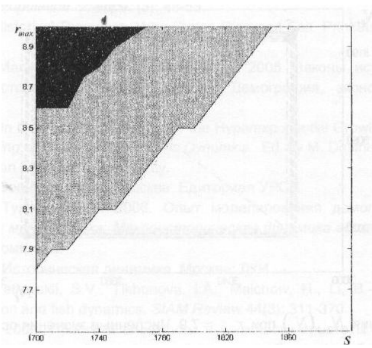
5) наступна ітерація на інтервалі $\left[0, \frac{T}{2}+1\right]$та повторення ітерацій до досягнення точки t=T.

6) вирахування помилки передбачення

$$E(t) = \frac{1}{n}\sum_{\frac{T}{2}+2}^{t=\frac{T}{2}+n} \left|\frac{u'(t) - u'(t-1)}{u(t) - u(t-1)} - 1\right| \quad \textbf{(8)}$$

Отже, чим ближче передбачуване значення u' до реальної величини u, тим менше похибка передбачення.

(7) оцінка горизонту передбачуваності $t_н$ як функція передбачення похибки E(t). Для оцінки величини $t_н$ задається деяке граничне значення E<<1. Як порогову для оцінки горизонта передбачуваності нами обрано значення E=0.1.



Мал.1 Портрет моделі (1)-(7) в просторі параметрів (S, r_{max}). Чисельні значення інших параметрів моделі:

$K=5000$, $p_{min}=1$, $a=2$, $p_l=1.1$, $z_{max}=8$, $м=0.03$

Мал.1 демонструє залежність характеру та передбачуваності досліджуваної нами демографічної динаміки як від параметра rmax, яке характеризує приріст населення, так і від числа стандартних земельних наділів S. Видно, що в просторі цих параметрів переважає виділена білим кольором ділянка, якій відповідає похибка передбачення $E(t)=0$. Таке значення похибки передбачення характеризує стаціонарність, незмінність в часі, а також - регулярні коливання чисельності населення N_t. При цьому регулярні коливання мають місце у вузькій смужці, що примикає до границі «*білої*» ділянки. Чорна ділянка в просторі параметрів (мал.1) відповідає погано передбачувані хаотичні коливання чисельності населення N_t. З мал.1 видно, що хаотичність та погана передбачуваність поведінки модельованої системи досягається при збільшенні параметра r_{max}, відповідального за швидкість приросту населення, в порівняно вузькому діапазоні значень параметра S, тобто при умові, що число земельних наділів, які обробляються селянською общиною, не перевищує деяку критичну величину.

Очевидно, що усі типи гарно передбачуваної динаміки, характерні для досліджуваної системи, можуть зазнавати постійних перешкод з боку зовнішніх(наприклад, погодних) факторів.

У даній роботі ми обмежилися аналізом якісних особливостей власної, внутрішньої динаміки селянської общини, не беручи до уваги зовнішні фактори. Порівняння внутрішньої динаміки з тією, яка є результатом спільної дії зовнішніх та внутрішніх факторів, дозволяє оцінити ступінь впливу зовнішніх факторів на динамічні характеристики та передбачуваність поведінки досліджуваної системи. Така оцінка є цікавою і потребує подальшого дослідження.