

77. Воробьев Г.С., Петровский М.В., Журба В.О., Крутько Ю.А. Перспективы использования пространственно-развитых резонансных структур в дифракционной электронике // 15-я Международная Крымская конференция "СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии" (КрыМиКо'2005). – Севастополь: Вебер, 2005. – С. 265 – 266.
78. Вальднер О.А., Милованов О.С., Собенин Н.П. Техника сверхвысоких частот. Учебная лаборатория. – М.: Атомиздат, 1974. – 232 с.
79. Чернушенко А.М., Петров Б.В., Малорацкий Л.Г. Конструирование экранов и СВЧ-устройств. – М.: Радио и связь, 1990. – 352 с.
80. Петрушин А.А., Балаклицкий И.М., Шестопалов В.П. Установка для изучения электромагнитных полей в открытых резонаторах миллиметрового диапазона // ПТЭ. – 1970. – №2. – С. 147 – 151.
81. Воробьев Г.С. Обоснование выбора режимов моделирования черенковского и дифракционного излучений на металлодиэлектрических структурах // Вісник Сумського державного університету. – 2000. – №16. – С. 60 – 64.
82. Cullen A.L. Millimeter-wave open-resonator techniques // International Journal of Infrared and Millimeter Waves. – 1983. – Vol.10 – P. 233 – 281.
83. Cullen A.L., Yu P.K. Proc. R. Soc. A 366. – 1979. – P. 155 – 171.
84. Электродинамическое моделирование методом конечных разностей во временной области (FDTD) / Под. ред. В.Н. Малышева. – СПб.: Изд-во СПб. ГЭТУ "ЛЭТИ", 2000. – 76 с.
85. Чурюмов Г.И., Максимов И.С., Еремеев Д.Б. Математическое моделирование электромагнитных явлений методом конечных разностей. 1. Общие положения // Радиотехника. – 2003. – Вып.135. – С. 7 – 14.
86. Сиренко Ю.К. Моделирование и анализ переходных процессов в открытых периодических, волноводах и компактных резонаторах / ИРЭ НАН Украины. – Харьков: ЭДЭНА, 2003. – 363 с.

Поступила в редакцию 24 мая 2006 г.

УДК 519.814:519.17:004.738.5

СТАТИСТИКА СЛОЖНЫХ СЕТЕЙ (ОБЗОР)

***А.И. Олемской, д-р физ.-мат. наук, профессор; И.А. Олемской**
Сумский государственный университет*

Проведен обзор статистических свойств сложных сетевых структур, включающий определение характеристик случайных графов, описание наиболее популярных моделей, построение соответствующих статистических ансамблей, обсуждение локальных и глобальных свойств и описание топологических фазовых переходов. В качестве приложения определены статистические характеристики одной из компьютерных сетей Интернета.

1 ВВЕДЕНИЕ

Сложные структуры сетевого типа охватывают широкий класс систем, имеющих важное практическое и научное значение. Наиболее популярными примерами таких структур являются:

- ячейки химических реакций, действующие по сетевому принципу;
- социальные системы, вершины которых представляют люди, являющиеся носителями определённых интересов и идей, а рёбра отвечают социальным связям между ними;
- всемирная паутина (английская аббревиатура WWW – от World Wide Web), представляющая виртуальную сеть гипертекстовых и иных документов, объединённых направленными гиперсвязями (по-английски они обозначаются как Uniform Resource Locator, аббревиатура URL, и представляют унифицированный указатель

информационного ресурса в виде стандартизированной строки символов, определяющей местонахождение документа в сети);

- Интернет, представляющий сеть связанных компьютеров (см. рис. 1).

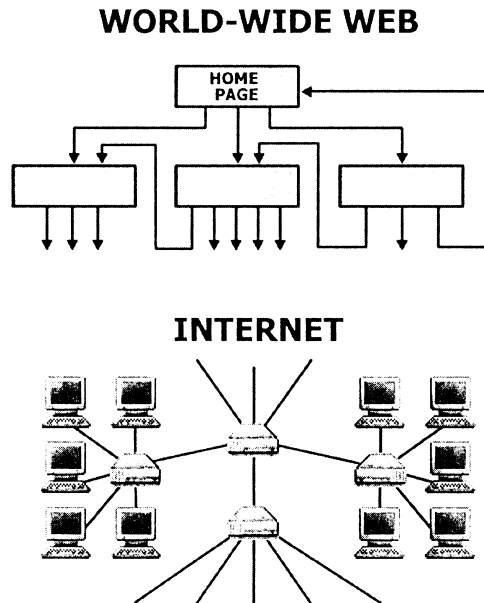


Рисунок 1 - Сетевая структура всемирной паутины и Интернета [1]

Хотя приведенные примеры далеко не исчерпывают всего многообразия сложных сетей, их достаточно, чтобы понять, почему в последнее время настолько возрос интерес к исследованию механизмов, определяющих топологию сложных сетей.

С исторической точки зрения, первым исследователем *графов*, являющихся математическим образом сложных сетей, был Леонард Эйлер (1707–1783гг.). В 50-х годах прошлого века выдающийся вклад был внесён венгерским математиком Альфредом Реньи, который ввёл, в частности, принципиально важное понятие *классического случайного графа*. К концу 90-х годов был накоплен большой фактический материал о различных сетевых структурах, и основные усилия сосредоточились на количественном описании этих систем (см. обзоры [1]–[3] и ссылки в них).

С геометрической точки зрения сеть представляет множество однотипных компонентов – *вершин*, связанных друг с другом *рёбрами*. Очевидно, при большом числе таких элементов количественное описание графов (например, при их оптимизации) может быть достигнуто использованием методов статистической физики.

Обзору статистических свойств сложных сетей посвящена настоящая работа, построенная следующим образом. В разделе 2 даются определения статистических характеристик случайных графов, представляющие основу излагаемой теории. Раздел 3 посвящён описанию наиболее популярных моделей и построению *статистических ансамблей* равновесных графов. В разделе 4 обсуждаются локальные и глобальные свойства сложных сетей. Раздел 5 содержит описание топологических фазовых переходов, при которых образуется *гигантский кластер*, связывающий конечную часть полного набора вершин. Наконец, раздел 6 посвящён определению статистических характеристик сети Интернет

«Avenue», охватывающей пользователей от 8-го до 12-го микрорайона города Сум.

К основным результатам относится построение микроканонического, канонического и большого канонического ансамблей, которые генерируются равновесными процессами, не нарушающими условия детального равновесия и эргодичности. Указанная процедура обобщается на системы, которым невозможно приписать на эвристическом уровне определённые значения энергии. Исследованы свойства равновесных статистических ансамблей графов, из которых основное внимание уделяется корреляциям в распределении рёбер по вершинам, размерам компонентов связанных вершин и спектральным свойствам. Рассмотрены непрерывный и прерывистый топологические переходы в равновесных ансамблях графов. Изложенный статистический анализ равновесных ансамблей служит основой практического применения таких методов, как оптимизация графов.

2 ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим *простые неориентированные графы* (они называются также *невыврожденными графами*), у которых любые две вершины либо не соединены, либо связаны неориентированными рёбрами, но ни одна из вершин не соединена с самой собой (в *вырожденных* или *псевдографах* возможны многократные связи между вершинами и рёбрами, что требует введения их *удельных весов*). Количество рёбер, присоединённых к *i*-й вершине, называется *порядком* k_i этой вершины, а две вершины, соединённые ребром, – *соседними*. Перечень порядков графа определяет *распределение вероятностей* p_k по порядкам k . Соответственно, бинарная функция $p(k, k')$ даёт *совместную вероятность* одной вершине иметь порядок k , а другой – k' .

Коэффициент кластеризации *i*-й вершины представляет отношение числа n_i рёбер, соединяющих k_i соседних вершин, к количеству всех возможных рёбер между этими вершинами:

$$C_i = \frac{n_i}{k_i(k_i - 1)/2}. \quad (1)$$

Коэффициент C_i является усреднённой характеристикой всех вершин графа. *Кратчайшее расстояние* $d_{i,j}$ является числом, выражающим наименьшее количество рёбер, ведущих от вершины i к вершине j . Совокупность вершин, связанных между собой рёбрами, но отделённых от остальной части графа, называется *компонентом* графа.

Поскольку основными составляющими простого графа являются вершины и рёбра, то принципиально важным является вопрос – различимы ли они? Рассмотрим *помеченные графы*, для которых различаются как вершины, так и рёбра. Каждый из таких графов можно представить *матрицей смежности* A , для которой элемент A_{ij} определяет количество рёбер между вершинами i , j , если $i \neq j$, или удвоенное число рёбер, если $i = j$. Для простых графов это симметричная матрица с диагональными элементами, равными 0, и недиагональными элементами, равными 0 или 1. Заметим, что на матрицу смежности никак не влияет различимость рёбер графа, поскольку замена любых двух рёбер даст ту же матрицу A .

Введём *классы эквивалентности* помеченных графов, основываясь на их изоморфизме: два помеченных графа являются эквивалентными, если возможна такая перестановка вершин, которая превращает первый граф во второй. В результате любой класс эквивалентности помеченных графов представляется непомеченным, в котором рёбра и вершины неразличимы.

В дальнейшем классы эквивалентности будут представляться *топологией* – предполагается, что два графа имеют общую топологию, если у них одинаковый класс эквивалентности. В теории графов это определение эквивалентно определению топологий геометрических тел: два тела имеют одинаковую топологию, если они могут трансформироваться друг в друга посредством деформации, не приводящей к разрывам и наложениям.

Представим, наконец, процессы *реструктуризации* графов. Если обозначить скорость трансформации графа a в b как $r_{a \rightarrow b}$, то вероятность реализации графа a изменяется со временем согласно уравнению

$$\frac{\partial P_a}{\partial t} = \sum_b (P_b r_{b \rightarrow a} - P_a r_{a \rightarrow b}). \quad (2)$$

При выполнении условия *детального равновесия*

$$P_a^{\text{stat}} r_{a \rightarrow b} = P_b^{\text{stat}} r_{b \rightarrow a} \quad (3)$$

система стремится к стационарному распределению P_a^{stat} , не зависящему от времени.

В обратной ситуации, когда стационарное распределение задано заранее, всегда можно генерировать динамику, которая приводит к данному распределению. Такая динамика должна удовлетворять условию детального равновесия (3) и требованию эргодичности $r_{a \rightarrow b} > 0$. Поскольку условие (3) определяет скорости прямой и обратной трансформации графов a, b , то в общем случае можно записать

$$r_{a \rightarrow b} = v_{ab} P_b, \quad (4)$$

где значения $v_{ab} = v_{ba}$ являются произвольными, поскольку не нарушают эргодичность.

3 АНСАМБЛИ ГРАФОВ

Согласно основным представлениям статистической физики анализ поведения сложной сети требует определения *микрканонического, канонического и большого канонического ансамблей* графов. При этом следует иметь в виду, что если даже одна из необходимых переменных (например, энергия) не определена, то возможно статистическое описание ансамбля графов.

Будем исходить из того, что в равновесных сетях рёбра представляют частицы, а заданный граф представляет состояние системы. Условие сохранения объёма обеспечивается требованием неизменного числа вершин.

3.1 Ансамбли графов с заданной энергией

Энергия является ключевым понятием теории оптимизации. Однако если даже невозможно сопоставить её значение заданному графу, всегда можно, основываясь на эвристических представлениях, приписать эффективное значение энергии какому-либо феноменологическому параметру.

Микрканонический ансамбль графов. В статистической физике микрканонический ансамбль определяется приданием одинаковых удельных весов каждому состоянию системы с данными значениями энергии E и количеством частиц M ; все остальные состояния имеют нулевой вес. Таким образом, микрканонический ансамбль графов задаётся весом

$$p^{MC} = n^{-1} \quad (5)$$

каждого из n графов, имеющих M рёбер и энергию E .

Канонический ансамбль графов. Канонический ансамбль состоит из графов с заданным числом рёбер и весом графа a :

$$P_a^C = \frac{e^{-E_a/T}}{Z^C}, \quad (6)$$

где T – температура; E_a – энергия графа; статистическая сумма представляется выражением

$$Z^C = \sum_b e^{-E_b/T}. \quad (7)$$

К этой категории принадлежат графы с постоянным числом рёбер и функцией стоимости, сводящей к минимуму отклонения от ожидаемых свойств (например, при постоянном числе треугольников).

Большой канонический ансамбль графов. Большой канонический ансамбль характеризуется заданными значениями температуры T и химического потенциала μ . Энергия и количество рёбер (частиц) могут изменяться, а вероятность реализации графа a представляется равенством

$$P_a^{GC} = \frac{e^{-(E_a - \mu M_a)/T}}{Z^{GC}}, \quad (8)$$

где E_a и M_a обозначают энергию и количество рёбер; статистическая сумма представляется выражением

$$Z^{GC} = \sum_b e^{(E_b - \mu M_b)/T}. \quad (9)$$

3.2 Ансамбли графов, не обладающих энергией

Микроканонический ансамбль графов. Многочисленные сетевые модели определяют статическим набором допустимых графов, в котором не протекает реструктурирующих процессов. Хотя значения энергии и вероятности для этих графов неопределены, микроканонический ансамбль может быть задан приписыванием одинаковых весов каждому из допустимых графов. Это равносильно приданию одинаковых значений энергии всем допустимым графам.

Канонический ансамбль графов. Если в модели графа задано значение вероятности P_a для комплекса графов с одинаковым числом рёбер, то его можно считать каноническим. При этом энергия определяется значением вероятности согласно уравнению (6):

$$E_a = -T \ln P_a + \ln Z. \quad (10)$$

Большой канонический ансамбль графов. Этот ансамбль сводится к каноническому, в котором можно варьировать число рёбер. При этом энергия определяется уравнением (8):

$$E_a = -T \ln P_a + \mu M_a + \ln Z. \quad (11)$$

3.3 Основные типы графов

Классический случайный граф. Этот тип сетей представляет классический пример равновесного ансамбля графов, который обладает постоянным числом вершин N . Существуют две модели классического случайного графа: в первой принимается, что M рёбер распределены произвольно и независимо между N вершинами графа; во второй модели фиксируется вероятность p , с которой может объединяться каждая пара вершин. В пределе $N \rightarrow \infty$ для обоих вариантов распределение порядков вершин k определяется формулой Пуассона

$$P_k = \frac{\langle k \rangle^k e^{-\langle k \rangle}}{k!}, \quad (12)$$

где среднее значение порядка $\langle k \rangle = 2M/N$ для первой модели и $\langle k \rangle = pN$ для второй. Если рассматривать рёбра как частицы, то модель с постоянным числом вершин N отвечает микроканоническому ансамблю графов, поскольку каждая конфигурация генерируется с одинаковой вероятностью. В рамках модели с фиксированной вероятностью p постоянным является лишь среднее значение числа частиц, что отвечает использованию большого канонического ансамбля графов.

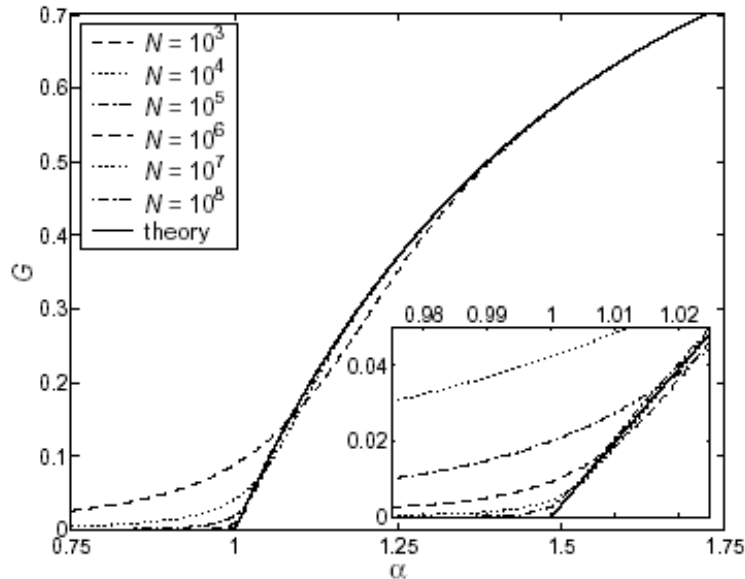


Рисунок 2 – Размер гигантского кластера классического случайного графа в зависимости от среднего порядка вершин $\alpha = \langle k \rangle$.

На вставке показана окрестность порога $\alpha_c = 1$ [4]

Рассмотрим теперь процесс генерирования случайного графа. Пусть вначале имеются N изолированных вершин, к которым последовательно добавляются рёбра, случайным образом соединяющие произвольные пары вершин. В ходе этого процесса граф сначала будет состоять из множества малых компонент, разрастание которых приведёт к образованию гигантского кластера связанных вершин, число которых составляет конечную долю полного числа N . Характерно, что образование гигантского кластера наблюдается только при условии, что вероятность p

связывания вершин, постепенно возрастающая в процессе генерации, приобретёт значение, превышающее критический порог p_c . В результате произойдёт спонтанное образование гигантского кластера, напоминающее конденсацию капли воды в пересыщенном паре. Такой процесс имеет ярко выраженный характер *фазового перехода*, в результате которого доля связанных вершин, принадлежащих гигантскому кластеру, определяется выражением

$$G = 1 - \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} (\langle k \rangle e^{-\langle k \rangle})^n. \quad (13)$$

Зависимость (13), показанная на рисунке 2 сплошной линией, обнаруживает при $N > 10^6$ практически полное совпадение с данными численного моделирования Монте - Карло (прерывистые кривые).

Модель графа «Малый мир». В большинстве случаев модели сложных сетей были генерированы на компьютерах как численные реализации графов. Отдельное место занимает модель «Малый мир», которая была осознана задолго до появления вычислительной техники. Перебирая круг своих ближайших знакомых, затем людей, знающих наших ближайших знакомых (но не знающих нас непосредственно), и т.д. легко убедиться в следующем: достаточно проследить за небольшим числом цепочек таких знакомств, чтобы понять, что любой из нас опосредовано знаком с любым членом общества (например, с Президентом страны). В этом смысле наш мир является малым, откуда и пошло название модели – «Малый мир».

Компьютерная модель «Малого мира» была разработана Уоттсом и Строгацем [5] несколько лет назад. Её построение начинается с одномерной периодической цепочки, состоящей из N вершин (см. рисунок 3).

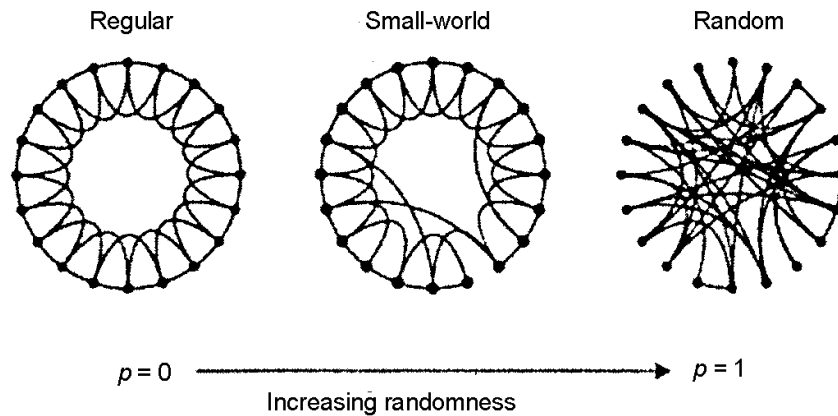


Рисунок 3 – Схема рандомизации Уоттса-Строгаца [5], представляющая трансформацию регулярной цепочки в граф «Малого мира», а затем в случайный граф. Параметр p определяется вероятностью переброса рёбер в случайные положения

Сначала каждая вершина соединяется с k соседями, где k – чётное положительное число. Затем с некоторой вероятностью p каждое ребро перебрасывается в произвольную позицию. Нетрудно видеть, что такая модель сводится к каноническому ансамблю графов, поскольку число

рёбер постоянно, а значения вероятности реализации графов разные (ввиду варьирования числа случайно переброшенных рёбер).

Ансамбли со степенным законом распределения. Как показывает опыт, множество реальных графов обладают степенным законом распределения k^{-a} . Поскольку степенная функция является признаком самоподобия системы, которая не обладает каким-либо масштабом изменения характерных величин, то такие графы называют также *безмасштабными*. Основная черта таких графов состоит в том, что классический случайный граф определяется законом распределения (12), который имеет намного более быстро спадающий хвост $1/k! \approx k^{-k}$, чем безмасштабный.

Существуют несколько алгоритмов построения графов со степенным законом распределения p_k , требующим, чтобы на каждом шаге генерации порядки всех вершин оставались постоянными. Среди них основными являются метод рандомизации (разброса) рёбер и метод рандомизации вершин. В обоих методах сначала выбираются два ребра, а затем переставляются концы каждого из них (из рисунка 4 видно, что при этом остаются неизменными порядки всех вершин). Генерируемый в результате такой процедуры канонический ансамбль будет иметь одинаковые порядки вершин и различающиеся удельные веса p_k графов. Установлено, что при рандомизации рёбер корреляция порядков разных вершин ослабляется, а при рандомизации вершин усиливается.

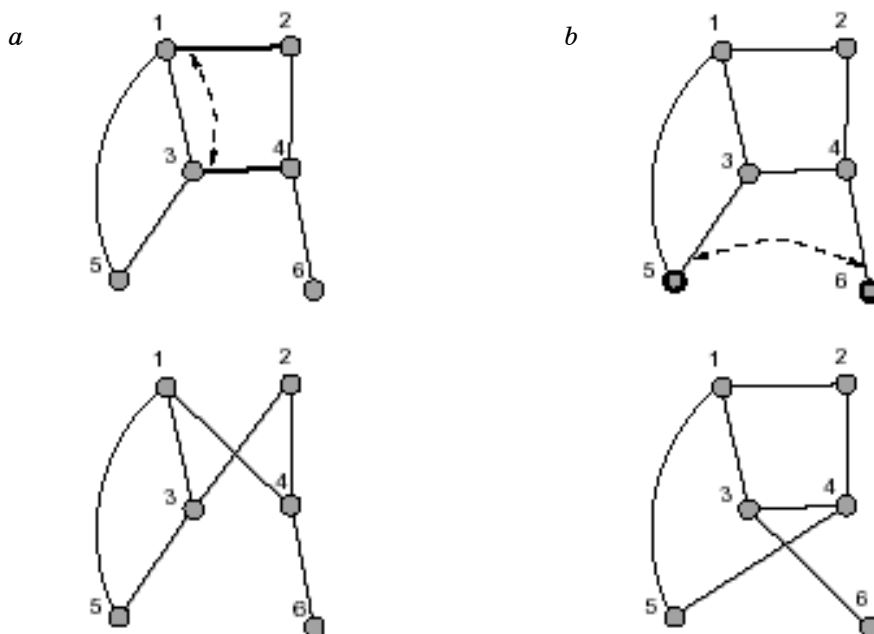


Рисунок 4 - Схема генерирования графов методами рандомизации, при которых остаются неизменными порядки вершин: а - рандомизация рёбер (сначала выбираются рёбра 1-2, 3-4 и вершины 1, 3; последние затем переставляются); б - рандомизация вершин (сначала выбираются вершины 5, 6 и рёбра 3-5, 4-6; затем концы, прилегающие к вершинам, переставляются)

3.4 Примеры видов энергии графов

Энергии, определяемые порядками отдельных вершин. Поскольку вершины являются основным атрибутом графов, то логично присвоить значение энергии $f(k_i)$ каждой из них. В результате полная энергия графа определяется суммой по всем вершинам:

$$E = \sum_{i=1}^N f(k_i). \quad (14)$$

Если число рёбер M постоянно, то линейная часть функции $f(k_i)$ не имеет принципиального значения, поскольку её сумма в (14) даёт величину, пропорциональную числу M , которая перенормирует химический потенциал большого канонического ансамбля. В результате такой ансамбль сводится в пределе бесконечной температуры к классическому случайному ансамблю графов. В том случае, если функция $f(k_i)$ изменяется более быстро, чем по линейному закону, следует учесть квадратичный вклад

$$E = -\sum_{i=1}^N k_i^2. \quad (15)$$

При этом в пределе низких температур типичные графы будут иметь неравномерное распределение порядков: малое число вершин с высокими порядками и большое с низкими. Чтобы избежать появления изолированных вершин и вершин с большими порядками, следует ввести кубическое слагаемое

$$E = \sum_{i=1}^N \left(-\frac{k_i^2}{2} + \eta k_i^3 \right). \quad (16)$$

Энергия, определяемая порядками соседних вершин. Если присваивать значения энергии не вершинам, а рёбрам, то полная энергия графа определяется суммой по ближайшим соседям:

$$E = \sum_{(i,j)} g(k_i, k_j), \quad (17)$$

где функция $g(k_i, k_j)$ определяет корреляцию между вершинами. В простейшем случае она имеет вид

$$g(k_i, k_j) = \zeta \delta_{k_i,1} \delta_{k_j,1} \quad (18)$$

и приводит к графу, показанному на рисунке 5а. Характерная особенность такого графа состоит в том, что его рёбра объединяют, как правило, вершины с сильно различающимися порядками. Такая же ситуация возникает (см. рисунок 6) при выборе

$$g(k_i, k_j) = \frac{\min(k_i, k_j)}{\max(k_i, k_j)} - 1. \quad (19)$$

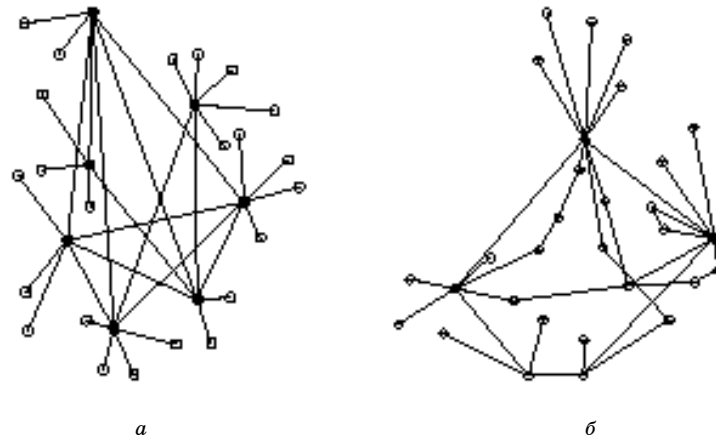


Рисунок 5 – Оптимизированные сети, полученные с использованием: а) энергии локальных связей (17); б) энергии глобальных свойств (23). В обоих случаях температура T выбрана достаточно низкой. (Вершины с высокими порядками обозначены тёмными кружками, с низкими – светлыми) [6]

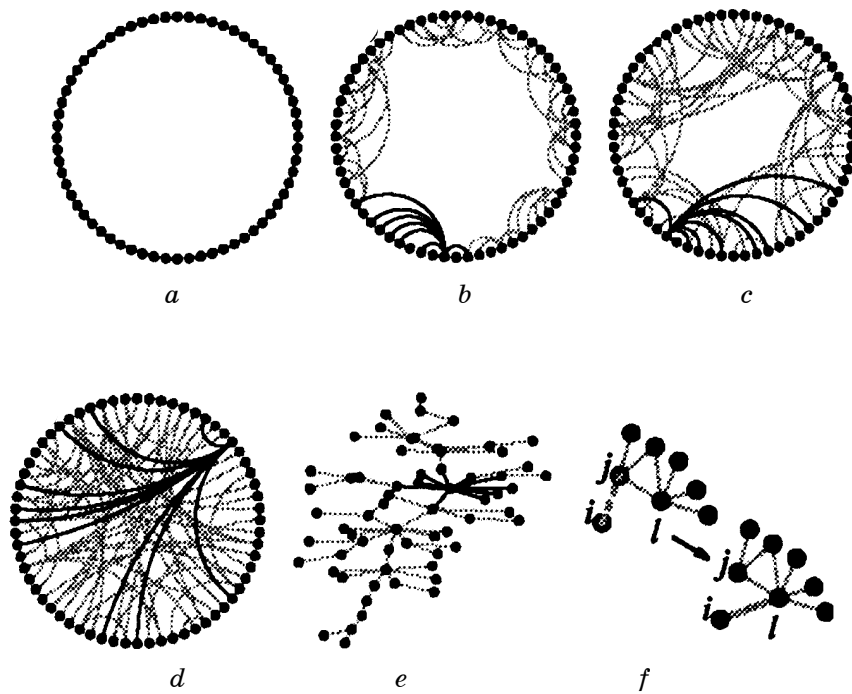


Рисунок 6 – а - d – графы, полученные при генерировании безмасштабных равновесных сетей на основе гамильтоновой динамики; е - f то же с использованием метода Монте-Карло.

Исходная система представляет цепочку, состоящую из последовательно соединённых N вершин и M рёбер. Затем добавляются $M - N > 0$ рёбер и сравнением энергии (19) производится выбор между исходным ребром, соединяющим вершины i, j_1 , и ребром, соединяющим ранее разъединённую пару i, j_2 . (Тёмные рёбра присоединены к вершине с самым высоким порядком) [7]

Если определяющий вклад дают удалённые соседи, то следует исходить из матрицы смежности \mathbf{A} , которая учитывает связи всех вершин. Так, отрицательные вклады треугольников определяются энергией

$$E = -\frac{1}{6} \text{Tr } \mathbf{A}^3. \quad (20)$$

Если число рёбер равно $M = n(n - 2)/2$, где целое $n < N$, то при низких температурах возникает граф, состоящий из n полностью соединённых вершин (остальные $N - n$ вершин будут изолированными).

Энергия, определяемая глобальными свойствами графа. Основной глобальной характеристикой сети является её размер, который определяется числом вершин, входящих в её компоненты. Однако при статистическом описании графов частицам сопоставляются рёбра, в связи с чем роль глобальной статистической характеристики играет число s_i рёбер, входящих в i -й компонент. Поэтому глобальная энергия может быть записана в следующем виде:

$$E = \sum_{i=1}^n f(s_i), \quad (21)$$

где n – число компонентов графа.

Если основной вклад даёт наибольший компонент, содержащий s_{\max} рёбер, то формула (21) принимает простейший вид

$$E = -s_{\max}. \quad (22)$$

В системе с такой энергией понижение температуры приводит к фазовому переходу, подобному описанному выше при изменении числа рёбер в классическом случайном графе. Оказывается, что линейная зависимость (22) приводит к *непрерывному превращению*, тогда как

квадратичная $E = -s_{\max}^2$ (или более сложная зависимость $E = -\sum_{i=1}^N s_i^2$)

приводят к *прерывистому превращению*.

Одна из целей оптимизации графов сводится к уменьшению их диаметра. В таком случае следует использовать энергию вида

$$E = -\sum_{i,j} d_{i,j}, \quad (23)$$

где суммирование проводится по всем парам вершин. На основе этого выражения были построены графы, представленные на рисунке 5.

3.5 Представление графа моделью решёточного газа

Простейший пример отображения графа, имеющего N вершин, на квадратную решётку, имеющую $N(N - 2)/2$ сторон, представлен на рисунке 7 (при этом каждый узел решётки отвечает ребру графа, а сама решётка – двурёберному графу, имеющему N полностью соединённых вершин). Каждая частица решёточного газа соответствует ребру графа и может располагаться на любом из $N(N - 1)/2$ узлов. Два узла решётки считаются соседними, если соответствующие им позиции рёбер (не обязательно занятые ими) имеют одну общую вершину. Следует иметь в

виду, что такая решётка значительно отличается от обычно используемых в модели решёточного газа. Так, если взять произвольное ребро графа, то существует $2(N - 2)$ рёбер, которые имеют общий конец с данным ребром. Поэтому в решёточном газе каждый узел имеет $2(N - 2)$ ближайших соседей, а остальные $N(N - 1)/2 - 2(N - 2) - 1$ являются вторыми соседями.

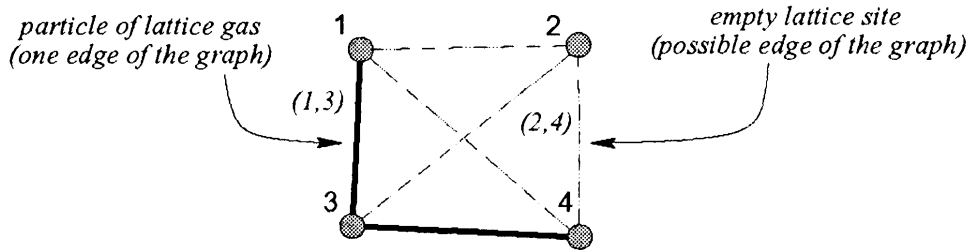


Рисунок 7 – Представление графа моделью решёточного газа (ребро графа отвечает частице, вершина – стороне решётки)

Легко видеть, что квадратичная энергия одновершинной модели (14) сводится к определению энергии решёточного газа, обладающего притяжением ближайших соседей:

$$E = - \sum_{(\alpha, \beta)} n_{\alpha} n_{\beta} = - \sum_{i=1}^N \frac{k_i (k_i - 1)}{2}. \quad (24)$$

Здесь n_a – числа заполнения узлов решётки a , которые равны 0 или 1 в зависимости от того, имеется или нет соответствующее ребро в исходном графе. Первое суммирование в (24) выполняется по парам ближайших соседей решёточного газа, что отвечает второй сумме по парам рёбер, имеющих общий конец.

Как известно, решёточный газ отвечает модели Изинга, описывающей динамику спинов $s_{\alpha} = 2n_{\alpha} - 1 = \pm 1$, для которых энергия (24) принимает вид

$$E = - \sum_{(\alpha, \beta)} \frac{1 + s_{\alpha}}{2} \frac{1 + s_{\beta}}{2}. \quad (25)$$

Эту формулу удобно переписать образом

$$E = - \frac{N(N-1)(N-2)}{8} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N(N-1)/2} s_{\alpha} - \frac{1}{4} \sum_{(\alpha, \beta)} s_{\alpha} s_{\beta}. \quad (26)$$

Здесь первое слагаемое, зависящее только от числа вершин решётки $N(N - 1)/2$, можно опустить, принимая его за начало отсчёта; второй член, линейный по спинам s_{α} , даёт суммарную намагниченность решётки, которая перенормирует внешнее поле – подобно тому, как линейное слагаемое в (14) перенормировало химический потенциал вершин графа; наконец, квадратичный член энергии (26) действует по аналогии с соответствующим вкладом вершин (15). Таким образом,

отображение равновесного ансамбля графов с энергией вершин $E = -\sum_i k_i^2$

на решёточный газ с энергией рёбер $E = -\sum_{(\alpha,\beta)} n_\alpha n_\beta$ показывает, что

разница между указанными моделями сводится лишь к геометрии решётки.

3.6 Ансамбли вырожденных графов

Вырожденные графы встречаются практически во всех сетях: пищевых (каннибализм), системах биохимических связей (автокаталитические или, по-другому, цепные реакции), технологических системах (множественные связи между подгруппами), сетях сотрудничества (постоянное соавторство), а также в теории возмущений, представленной диаграммами Фейнмана.

Ансамбли вырожденных графов можно представить подобно простым сетям. Так, набор помеченных вырожденных графов сводится к микроканоническому ансамблю, если возможно присвоить одинаковые веса каждому графу, имеющему N вершин и M рёбер. Число таких графов может быть задано следующим образом. Поскольку имеются $N(N+1)/2$ возможных позиций для каждого ребра вырожденного графа, то, выбирая две вершины, соединённые $N(N-1)/2$ различными способами, получаем число самосоединений, равное N . Учитывая, что каждое из M рёбер может занимать две из $N(N+1)/2$ позиций, для вероятности микроканонического распределения простых графов получаем

$$p^{MC} = \left(\frac{N(N+1)}{2} \right)^{-M}. \quad (27)$$

Достаточно просто определить также микроканонический ансамбль системы помеченных вырожденных графов. Поскольку распределение порядка вершин присуще большинству реальных графов, то естественно использовать его как основную характеристику группы графов, имеющих N вершин и заданное распределение порядка p_k , которое для каждого значения k определяет число вершин $N(k) = Np_k$. Данное распределение реализуется на множестве матриц смежности, а поскольку сами рёбра являются различимыми, то каждая матрица смежности отвечает множеству помеченных вырожденных графов.

Учитывая, что в микроканоническом ансамбле все графы имеют одинаковый вес, легко видеть, что вероятность реализации данной матрицы смежности \mathbf{A} пропорциональна количеству различных графов $N(\mathbf{A})$, которые отвечают данной матрице:

$$p^{MC} \propto N(\mathbf{A}) = M! \prod_{i=1}^N \frac{1}{(A_{ii}/2)!} \prod_{j < k=1}^N \frac{1}{A_{jk}!}. \quad (28)$$

Здесь мы учли, что M рёбер графа могут быть переставлены $M!$ способами, однако $A_{jk}!$ из этих перестановок, коммутирующих рёбра между вершинами j и k , не изменяют граф – точно также, как и $(A_{ii}/2)!$ перестановок петель, замыкающихся на данную вершину i .

Можно построить канонический ансамбль вырожденных графов, используя равновесный процесс, при котором сохраняется порядок

распределения и количество рёбер. На каждом этапе такого процесса один конец произвольного ребра перебрасывается к новой вершине i , вес которой составляет $w(k_i)$. Подобным образом можно показать, что удаление ребра между вершинами i и j со скоростью λN и его последующее восстановление со скоростью, пропорциональной $w(k_i)w(k_j)$, приводит к большому каноническому ансамблю.

4 ЛОКАЛЬНЫЕ И ГЛОБАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РАВНОВЕСНЫХ ГРАФОВ

Рассмотрим сначала более простые локальные свойства, а затем исследуем большие ансамбли вершин.

4.1 Локальные корреляции

Большинство сетей, наблюдающихся в эксперименте, являются сильно коррелирующими системами, что требует учёта при построении адекватных моделей. Если граф построен так, что наиболее часто соединяются вершины с одинаковыми свойствами (например, порядком), то принято говорить об *ассортативности*, а при высокой вероятности соединения вершин с разным порядком говорят о *дисассортативности*. Как ассортативность, так и дисассортативность наблюдаются в биологических и социальных системах.

Один из методов построения случайного графа с заданной функцией корреляции порядков $p(k, k')$ состоит в следующем. Сначала определяем функцию распределения порядков p_k из уравнения

$$\sum_{k'} p(k, k') = \frac{k p_k}{\langle k \rangle}, \quad (29)$$

где средний порядок задаётся условием самосогласования $\langle k \rangle = \sum_k k p_k$.

Далее придаём произвольное значение q_i распределению порядков p_k в вершине i . Наконец, перебираем все пары вершин i, j , приписывая им связи с вероятностью

$$\frac{\langle k \rangle p(q_i, q_j)}{N p_{q_i} p_{q_j}}. \quad (30)$$

Распределение, построенное на основании такого алгоритма, будет стремиться к функции $p(k, k')$ в пределе $N \rightarrow \infty$ только при условии, что зависимость $p(k, k')$ спадает медленнее, чем $\exp(-\sqrt{k} - \sqrt{k'})$. В рамках подхода, альтернативного изложенному алгоритму, канонический ансамбль генерируется на основании функции стоимости (энергии), которая обеспечивает подавление отклонений от указанного распределения $p(k, k')$.

4.2 Глобальные характеристики

Размеры компонент. Одной из наиболее важных глобальных характеристик сетей является размер наибольшего компонента. Как только число вершин s_{\max} в этом компоненте достигает порядка общего числа вершин, его называют гигантским кластером. В классическом случайном графе гигантский компонент появляется при критической плотности рёбер $\langle k \rangle = 1$. До этого момента такой компонент имеет число

вершин порядка $\ln(N)$, а после начинает линейно увеличиваться с ростом N .

В случайном графе с фиксированным распределением порядка p_k условие возникновения гигантского кластера определяется неравенством

$$\sum_{k=3}^N k(k-2)p_k > p_1. \quad (31)$$

В точке превращения распределение размеров компонентов случайного графа, обладающего определённым распределением порядков вершин, спадает по степенному закону с показателем $-3/2$. В окрестности этой точки распределение размеров также следует степенному закону, который, однако, обрезается экспоненциальным хвостом. Такое поведение подобно явлению перколяции (протекания), где в критическом состоянии размеры компонентов также распределены по степенному закону.

Спектральные свойства. Основу исследований спектральных свойств стохастических систем заложила работа Вигнера, в которой он показал, что плотность собственных состояний λ сложных ядер подчиняется закону полукруга

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} (2\pi)^{-1} \sqrt{4 - \lambda^2}, & \text{if } |\lambda| < 2, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (32)$$

Впоследствии оказалось, что такое распределение присуще не только большим ядрам, но и всем сложным квантово-механическим системам, а также объектам статистической физики и физики твёрдого тела. Более того, было показано, что спектральная плотность классического случайного графа также представляется законом полукруга (32). Поскольку в классическом случайном графе число рёбер $pN^2/2$, $p = \text{const}$ квадратично возрастает с числом вершин N , то роль параметра λ играет величина (\mathbf{A} / \sqrt{pN}) , определяемая значениями матрицы смежности \mathbf{A} . При этом наибольшее собственное значение отделено от остальной части спектра и определяется соотношением $pN = \langle k \rangle$, тогда как второе наибольшее собственное значение даёт равенством $2\sqrt{pN} = 2\sqrt{\langle k \rangle}$. С уменьшением плотности рёбер распределение (32) теряет силу: в частности, усиление неоднородности графа приводит к сингулярному характеру зависимости $\rho(\lambda)$.

Рассмотрим, наконец, стохастические ансамбли графов со степенным законом распределения порядков вершин. Как для реальных, так и модельных сетей было показано, что в этом случае поведение спектральной плотности и наибольших собственных значений является существенно отличным от представленного выше (см. рисунок 8). Так, численные и аналитические исследования показали, что степень γ распределения порядков вершин связана с показателем α степенного хвоста спектральной плотности следующим образом:

$$\alpha = 2\gamma - 1, \quad \text{if } \gamma > 2.5. \quad (33)$$

Что касается больших собственных значений, то их значения оказались пропорциональными квадратному корню из соответствующих порядков вершин. Как уже упоминалось, в рамках аналитического подхода спектральные свойства графа представляются моделью

случайных блужданий, а экспериментально – электрическим сопротивлением случайной сети резисторов.

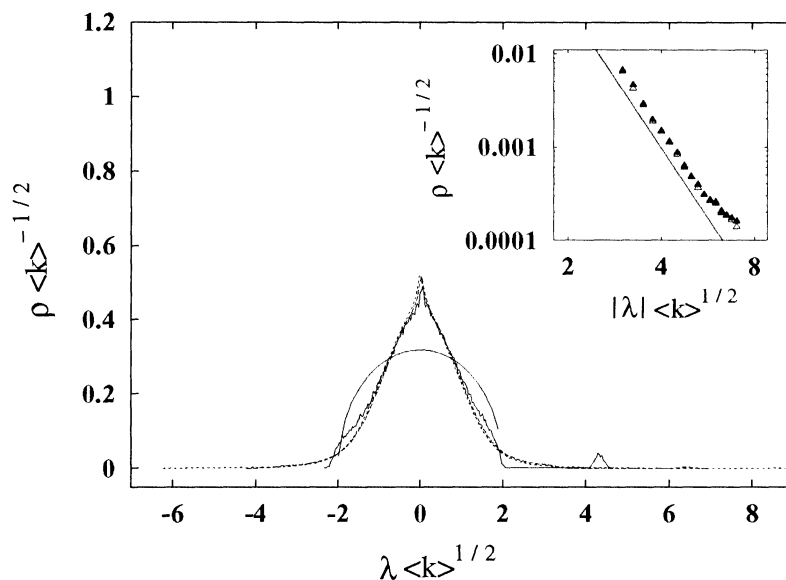


Рисунок 8 – Усреднённые спектральные плотности безмасштабных графов со средним порядком $\langle k \rangle = 10$. Основной рисунок показывает плотности для графов с числом вершин $N = 100$ (·), $N = 1000$ (–) и $N = 7000$ (---) (для сравнения непрерывной линией показано распределение полукруга). На вставке приведены хвосты распределения $\rho(\lambda)$ безмасштабных графов с $N = 40000$ и показателем $\gamma=5$ [8]

5 ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В РАВНОВЕСНЫХ АНСАМБЛЯХ СЕТЕЙ

Как уже упоминалось, наиболее исследованным фазовым переходом в равновесных ансамблях сетей является образование гигантского кластера при увеличении плотности рёбер в классическом случайном графе. Такой переход наблюдается при $\langle k \rangle < 1$ в системе с энергией $E = -s_{\max}$, величина которой изменяется с температурой (см. ниже). Очевидно, наиболее естественным параметром порядка такого рода фазовых переходов является нормированный размер наибольшего компонента $\Phi_s = s_{\max} / M$. Соответственно, при фазовых переходах, где происходит конденсация рёбер на одну или несколько вершин, параметр порядка сводится к наибольшему порядку вершин $\Phi_k = k_{\max} / M$, нормированному на полное число рёбер. В общем случае переходы, при которых происходит глобальное изменение топологических свойств, называются *топологическими фазовыми переходами*.

Ансамбли с одновершинной энергией. Легко видеть, что в системах с энергией $E = -\sum_i k_i^2$ изменение температуры всегда будет приводить к топологическому фазовому переходу. Действительно, в пределе $T \rightarrow \infty$,

когда независимо от вида энергии динамические процессы обеспечивают случайные перестановки вершин, реализуется классический случайный граф. При низких температурах основную роль играет энергия системы, спадание которой требует повышения порядков вершин, что и обеспечивает конденсацию кластера с многократно связанными вершинами.

Аналитическое исследование ансамбля графов с энергией $E = -\sum_i k_i^2$ показывает, что при $\langle k \rangle < 1$ между фазой классического случайного графа (высокие температуры) и звездообразной фазой (низкие температуры) существует конечный диапазон температур, где обе фазы устойчивы и метастабильны. Этот вывод подтверждается данными численного моделирования Монте-Карло (см. рисунок 9).

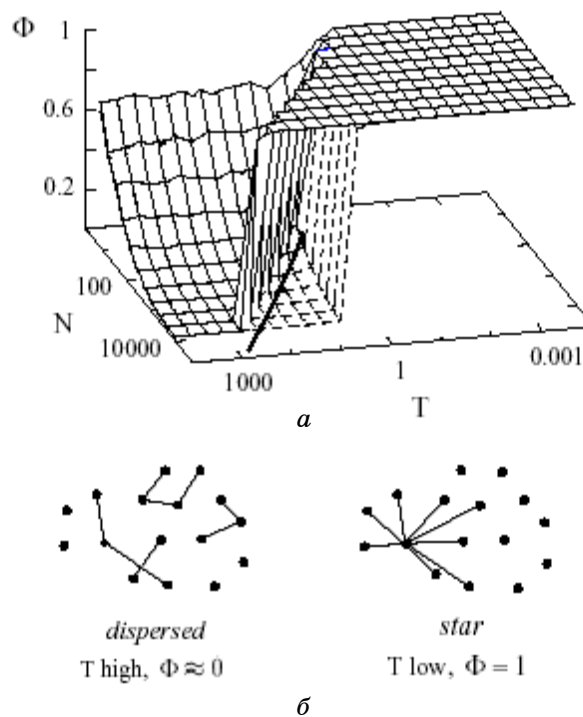


Рисунок 9 – Топологический фазовый переход в ансамбле графов с энергией $E = -\sum_i k_i^2/2$. а - Зависимость параметра порядка $\Phi = \Phi_k = k_{\max}/M$ от температуры и размера системы при $\langle k \rangle = 0.5$. Моделирование начиналось либо со звездообразного графа при $T=0$ (непрерывная линия), либо с классического случайного графа, отвечающего $T=\infty$ (пунктирная линия). Жирная линия показывает аналитическую спинополь $T_s = M/\ln(N)$. б - Типичные графы присущие различным фазам (при низких температурах рёбра конденсируются на вершине ($\Phi = 1$), а общая энергия изменяется как N^2 ; при высоких температурах образуется классический случайный граф с $\Phi \approx 0$ и энергией, пропорциональной N) [9]

Два фазовых перехода наблюдаются также в системе графов с энергией $E = -\sum_i k_i \ln(k_i)$, где аналитические и численные исследования показывают, что с понижением температуры классический случайный граф распадается на несколько звездообразных кластеров. Это приводит к скачку параметра порядка Φ_k , представленному на рис. 10а (более тщательное рассмотрение показывает, что в пределе $N \rightarrow \infty$ этот скачок сводится к непрерывному фазовому переходу, который характеризуется большим критическим показателем). Дальнейшее понижение температуры приводит к ещё одному переходу, представляющему уплотнение кластеров, при котором все рёбра распределяются по минимально возможному числу вершин (см. рис. 10 б). Этот переход является прерывистым и обладает гистерезисом.

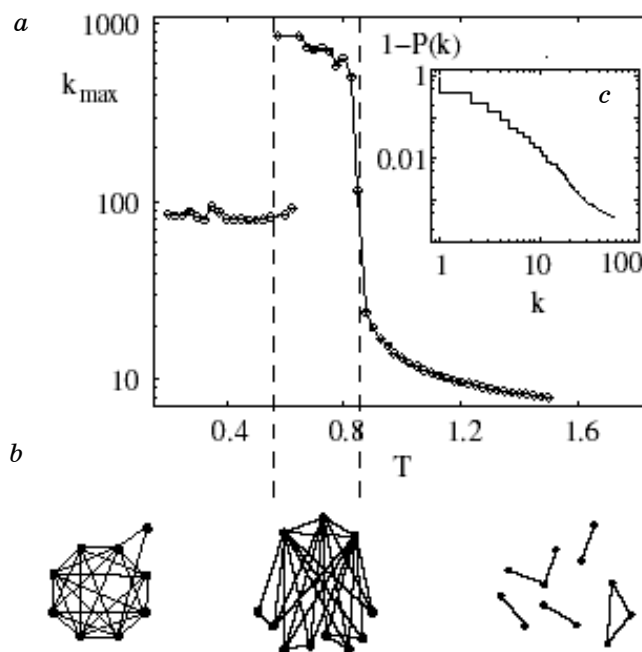


Рисунок 10 - Топологические фазы ансамбля графов, обладающего энергией

$E = -\sum_i k_i \ln(k_i)$. а - Максимальный порядок k_{max} , найденный для $N = 10224$ вершин и $M = 2556$ рёбер. (Каждая точка даёт значение k_{max} , усреднённое по времени, измеренному в интервале между $t = 5000N$ и $20000N$ шагов Монте-Карло. Вблизи точки $T = 0.85$ происходит хорошо выраженный непрерывный переход, а в интервале $T = 0.5-0.6$ наблюдается прерывистое превращение, обладающее гистерезисом). б - Топологические фазы, отвечающие различным участкам зависимости (а): полностью связанный граф с $k_{max} \approx \sqrt{M}$; звездообразная фаза с $k_{max} \approx M$ (несколько звёзд связывают соседние вершины); классический случайный граф с $k_{max} \approx 1$. с - Степенное распределение вероятности

$$1 - P(k) = \int_0^k dk' p_{k'}. \text{ при } T = 0.84, t = 600N \text{ [9]}$$

Переходные ансамбли в растущих сетях. Использование неравновесных явлений типа процессов роста позволяет генерировать различные сетевые ансамбли. Некоторые из них могут быть построены на основе равновесной динамики как *переходные ансамбли*, которые представляют промежуточные, недолговременно существующие сети, образующиеся при переходе от исходного к конечному набору графов.

Так, в ансамблях с энергией $E = -\sum_i k_i \ln(k_i)$ превращение классического случайного графа в полностью связанный кластер протекает при $T_c = 1$ через промежуточную звездообразную фазу – как это показано на рисунке 10 б (при этом распределение порядков вершин спадает по степенному закону, представленному рисунком 10 с). Качественная картина такого превращения представляется следующим образом: изначально имеется «бассейн» рёбер, присоединённых к вершинам с малыми порядками, и небольшое число вершин с высокими порядками, которые представляют центры конденсации. Изменение энергии, связанное с движением рёбер в «бассейне», является незначительным, тогда как центры конденсации поглощают рёбра со значительной скоростью, пропорциональной их порядкам (действительно, присоединение ребра к вершине ведёт к изменению энергии $\Delta E = \partial E / \partial k = -\ln k - 1$; тогда скорость конденсации при $T_c=1$ определяется множителем $e^{-\Delta E/T} \propto k$).

Ансамбли с корреляцией вершин. Исследование канонического ансамбля соединённых графов с энергией (19) обнаруживает свойство дисассортативности, означающее отрицательную корреляцию порядков разных вершин. С изменением температуры в такой системе обнаруживаются следующие фазы: при $T \rightarrow \infty$ реализуется классический случайный граф, который с понижением температуры трансформируется в безмасштабную структуру; при низких температурах образуется фаза, содержащая небольшое число звездообразных элементов.

Системы с энергией компонентов. Как и в случае с изолированными вершинами, спадание энергии с ростом размера компонента может привести к фазовому переходу. Рассмотрим наиболее простой случай $E = -s_{\max}$. При низких значениях плотности $\langle k \rangle < 1$ в пределе $T \rightarrow \infty$ реализуется классический случайный граф, а при низких температурах образуется гигантский кластер. Температура перехода между этими фазами определяется выражением

$$T_c = \frac{1}{\langle k \rangle - 1 - \ln \langle k \rangle}, \quad (34)$$

которое подтверждается результатами численного моделирования (рис.11). При температурах, близких к критической, параметр порядка определяется выражением

$$\Phi = 2 \frac{T^{-1} - T_c^{-1}}{\langle k \rangle^2 - 3\langle k \rangle + 2}, \quad (35)$$

которое указывает на непрерывный характер перехода, следующий из рисунка 11.

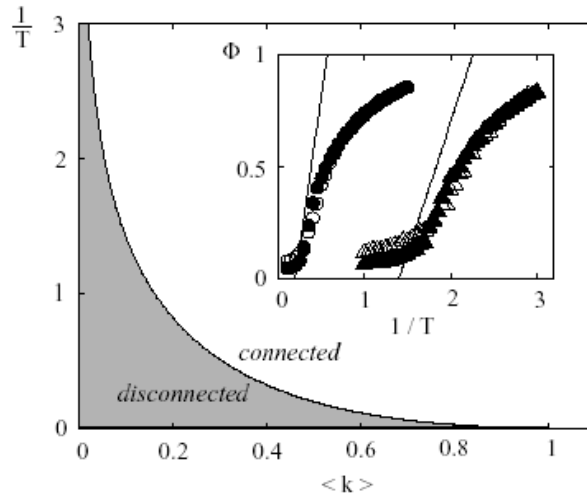


Рисунок 11 – Фазовая диаграмма, полученная аналитически и моделированием Монте-Карло (энергия имеет вид $E = -s_{\max}$). Основной рисунок: светлый и заштрихованный участки отвечают упорядоченной (содержащей гигантский кластер) и неупорядоченной фазам, которые разделены зависимостью (34). Вставка: данные моделирования Монте-Карло для зависимости параметра порядка $\Phi = s_{\max} / M$ от обратной температуры при $\langle k \rangle = 0.1$ (треугольники) и $\langle k \rangle = 0.5$ (окружности). Каждая точка показывает средние значения, взятые по 10 шагам Монте-Карло между значениями $t = 100N$ и $500N$. Светлые и тёмные символы отвечают ансамблям, состоящим из $N = 500$ и 1000 вершин. В соответствии с аналитическими результатами критический показатель, определённый по сплошным линиям, равен 1 [9]

Другие виды систем. Исследования ансамбля вырожденных графов с весами, распределёнными по закону $w(k) \propto k + 1 - \gamma$, фиксируемому показателем γ , обнаружили, что ниже линии $\langle k \rangle = k_c(\gamma)$ распределение порядков вершин имеет экспоненциальный хвост, а выше неё образуется конденсат, где конечный ансамбль рёбер прикрепляется к бесконечно малому числу вершин. В ансамбле соединённых графов, характеризуемом фиксированным распределением порядков вершин, картина фазового перехода определяется показателем этого распределения γ и вероятностью образования субграфов α (см. рисунок 12).

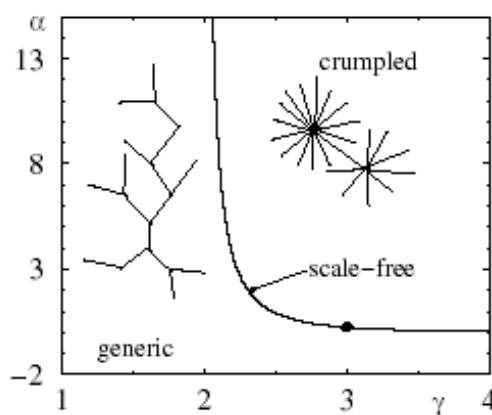


Рисунок 12 – Фазовая диаграмма безмасштабного ансамбля графов [10]

6 СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА СЕТИ «AVENUE»
 Конфигурация сети представлена рисунком 13.

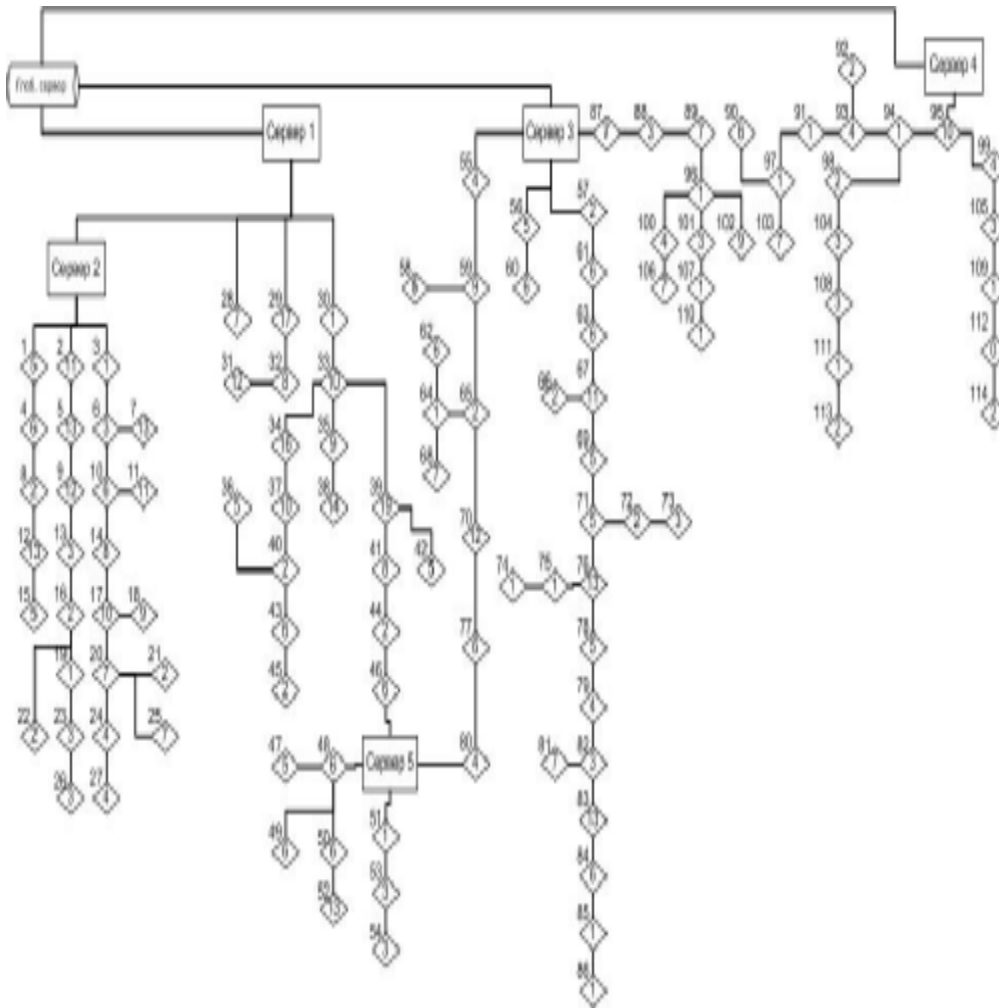


Рисунок 13 – Схема компьютерной сети «Avenue» (цифры в ромбиках, обозначающих свитчи, определяют число присоединённых к ним пользователей; цифры у ромбиков нумеруют свитчи)

В таблице 1 указаны вершины этой сети, их числа и порядки.

Таблица 1

Тип вершины	Номер типа	Число вершин N_i	Порядок вершины k_i
Глоб. сервер	1	1	3
Сервер	1	1	5
Сервер	2	1	4
Сервер	3	1	5
Сервер	4	1	2
Сервер	5	1	4

Продолжение таблицы 1

Свитч	1	1	7
Свитч	2	1	13
Свитч	3	1	3
Свитч	4	1	8
Свитч	5	1	15
Свитч	6	1	6
Свитч	7	1	14
Свитч	8	1	4
Свитч	9	1	14
Свитч	10	1	9
Свитч	11	1	12
Свитч	12	1	15
Свитч	13	1	5
Свитч	14	1	10
Свитч	15	1	6
Свитч	16	1	5
Свитч	17	1	13
Свитч	18	1	10
Свитч	19	1	3
Свитч	20	1	11
Свитч	21	1	3
Свитч	22	1	3
Свитч	23	1	5
Свитч	24	1	6
Свитч	25	1	8
Свитч	26	1	4
Свитч	27	1	5
Свитч	28	1	8
Свитч	29	1	19
Свитч	30	1	3
Свитч	31	1	13
Свитч	32	1	10
Свитч	33	1	14
Свитч	34	1	18
Свитч	35	1	11
Свитч	36	1	6
Свитч	37	1	12
Свитч	38	1	15
Свитч	39	1	22
Свитч	40	1	5
Свитч	41	1	10
Свитч	42	1	6
Свитч	43	1	8
Свитч	44	1	4
Свитч	45	1	3
Свитч	46	1	8

Продолжение таблицы 1

Свитч	47	1	6
Свитч	48	1	10
Свитч	49	1	7
Свитч	50	1	8
Свитч	51	1	3
Свитч	52	1	14
Свитч	53	1	5
Свитч	54	1	4
Свитч	55	1	6
Свитч	56	1	7
Свитч	57	1	4
Свитч	58	1	6
Свитч	59	1	12
Свитч	60	1	7
Свитч	61	1	8
Свитч	62	1	7
Свитч	63	1	8
Свитч	64	1	4
Свитч	65	1	5
Свитч	66	1	3
Свитч	67	1	14
Свитч	68	1	8
Свитч	69	1	7
Свитч	70	1	14
Свитч	71	1	8
Свитч	72	1	4
Свитч	73	1	4
Свитч	74	1	2
Свитч	75	1	3
Свитч	76	1	16
Свитч	77	1	8
Свитч	78	1	7
Свитч	79	1	6
Свитч	80	1	6
Свитч	81	1	8
Свитч	82	1	6
Свитч	83	1	15
Свитч	84	1	8
Свитч	85	1	3
Свитч	86	1	2
Свитч	87	1	9
Свитч	88	1	5
Свитч	89	1	9
Свитч	90	1	7
Свитч	91	1	3
Свитч	92	1	3

Продолжение таблицы 1

Свитч	93	1	7
Свитч	94	1	4
Свитч	95	1	13
Свитч	96	1	5
Свитч	97	1	4
Свитч	98	1	4
Свитч	99	1	6
Свитч	100	1	6
Свитч	101	1	5
Свитч	102	1	10
Свитч	103	1	8
Свитч	104	1	5
Свитч	105	1	5
Свитч	106	1	8
Свитч	107	1	3
Свитч	108	1	5
Свитч	109	1	3
Свитч	110	1	2
Свитч	111	1	3
Свитч	112	1	2
Свитч	113	1	3
Свитч	114	1	3
Пользователь	1-631	631	1

Для определения вероятности p_k подсчитываем число $N(k)$ вершин с заданным порядком k и делим его на полное число вершин $N=751$. В результате получаем распределение, данное таблицей 2.

Таблица 2

k	$N(k)$	Распределение порядков p_k в сети «Avenue»
1	631	0,84021
2	5	0,00666
3	18	0,02397
4	13	0,01731
5	15	0,01997
6	13	0,01731
7	9	0,01198
8	15	0,01997
9	3	0,00399
10	6	0,00799
11	2	0,00266
12	3	0,00399
13	4	0,00533
14	6	0,00799
15	4	0,00533

Продолжение таблицы 2

16	1	0,00133
17	0	0
18	1	0,00133
19	1	0,00133
20	0	0
21	0	0
22	1	0,00133

Средний порядок сети составляет $\langle k \rangle = 4,948$. Как видно из таблицы 2, при этом основной вклад дают пользователи, вершины которых имеют порядок $k=1$. Если пренебречь ими, то полное число серверов и свитчей составит $N=120$ и распределение вероятностей даётся таблицей 3 и рисунком 14.

Таблица 3

k	$N(k)$	Распределение порядков p_k в сети «Avenue»	Распределение Пуассона (12)	Степенной закон $p_k = k^{-1,5}$
2	5	0,041666667	0,019696215	0,353553391
3	18	0,15	0,046843923	0,192450090
4	13	0,108333333	0,084125485	0,125000000
5	15	0,125	0,121194359	0,089442719
6	13	0,108333333	0,145698201	0,068041382
7	9	0,075	0,150252568	0,053994925
8	15	0,125	0,135647627	0,044194174
9	3	0,025	0,108891289	0,037037037
10	6	0,05	0,078689514	0,031622777
11	2	0,016666667	0,051703611	0,027410122
12	3	0,025	0,031145196	0,024056261
13	4	0,033333333	0,017319736	0,021334623
14	6	0,05	0,008944167	0,019090089
15	4	0,033333333	0,004311236	0,017213259
16	1	0,008333333	0,001948303	0,015625000
17	0	0	0,000828705	0,014266801
18	1	0,008333333	0,000332916	0,013094570
19	1	0,008333333	0,000126707	0,012074512
20	0	0	4,58143E-05	0,011180340
21	0	0	1,57769E-05	0,010391328
22	1	0,008333333	5,18615E-06	0,009690942

Согласно таблице 3 пренебрежение элементарными вершинами, отвечающими пользователям, приводит к гораздо большему среднему значению $\langle k \rangle = 7,233$. В свою очередь, из рисунка 14 видно, что

распределение порядков существенно немонотонно и спадает гораздо медленнее, чем распределение Пуассона (12), но быстрее степенного закона $p_k \propto k^{-1.5}$. Это указывает на то, что сеть «Avenue» является промежуточной между классическим случайным и безмасштабным графами.

В результирующей таблице 4 приведены основные статистические характеристики наиболее популярных сетей, дополненные данными о сети «Avenue». Видно, что при переходе от Интернета к объединениям актёров среднее число связей значительно нарастает. Что касается исследуемой сети «Avenue», то средний порядок её вершин является намного меньшим.

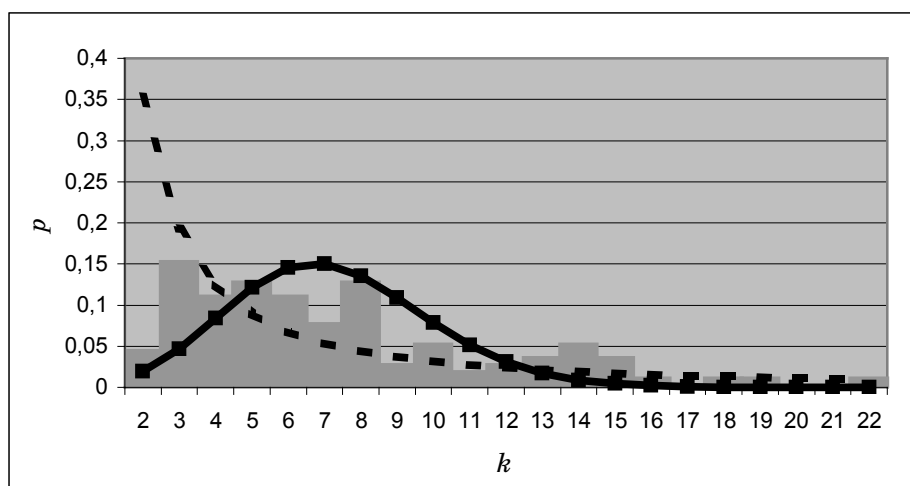


Рисунок 14 – Распределение порядков вершин сети «Avenue» (гистограмма) в сравнении с формулой Пуассона (12) (сплошная линия) и степенным законом $p_k \propto k^{-1.5}$ (штриховая линия)

Таблица 4

Сеть	Число вершин N	Средний порядок вершин $\langle k \rangle$	Распределение порядков вершин p_k
Домен Интернет	3015–6209	3,52–4,11	Распределение Пуассона (12)
Соавторство в физике	52,909	9,7	Распределение Пуассона (12)
Домен WWW	153,127	35,21	Распределение Пуассона (12)
Объединения актёров кино	225,226	61	Распределение Пуассона (12)
Сеть «Avenue» (с учетом пользователей)	751	4,948	Основной вклад даёт $p_1=0,840$
Сеть «Avenue» (без учета пользователей)	120	7,233	Немонотонная зависимость

SUMMARY

The review of statistical properties of complex network structures is carried out to include definitions of typical characteristics of random graphs, description of the most popular models, construction of related statistical ensembles, study of both local and global properties, as well as the consideration of topological phase transitions. As an example of the above method applications, statistical characteristics of some computer network Internetis studied.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Albert R., Barabasi A.-L. Statistical mechanics of complex networks //Rev. Mod. Phys.- 2002.- V.74. – P. 42-97.
2. Mendes J. F. F., Dorogovtsev S. N. Evolution of Networks: From Biological Nets to the Internet and WWW.- Oxford: Oxford University Press, 2003.
3. Handbook of Graphs and Networks, From the Genome to the Internet / Ed. By S. Bornholdt and H. G. Schuster. - Berlin: Wiley-VCH, 2002.
4. Dall J., Christensen M. Random geometric graphs //Phys. Rev. E. – 2002. - V.66. – P. 016121.
5. Watts D. J., Strogatz S. H. Collective Dynamics of 'Small-World' Networks // Nature. –1998. - V.393. –P. 440.
6. Berg J., Lassig M. Correlated Random Networks // Phys. Rev. Lett. – 2002. - V.99. – P. 328701.
7. Baiesi M., Manna S. Small-world properties of the Indian Railway networks // Phys. Rev. E. – 2003. - V.78. – P.047103.
8. Farkas I. J., Derenyi I., Barabasi A.-L., Vicsek T. Spectra of “real-world” graphs: Beyond the semicircle law // Phys. Rev. E. – 2001. - V.64. – P.026704.
9. Palla G., Farkas I., Derenyi I., Vicsek T. Statistical mechanics of topological phase transitions in networks // Phys. Rev. E – 2004.- V.69. – P.046117.
10. Burda Z., Correia J. D., Krzywicki A. Statistical ensemble of scale-free random graphs //Phys. Rev. E. – 2001. - V.64. – P.046118.

Поступила в редакцію 27 февраля 2006 г.

УДК 535.24.2

МАГНІТОТРАНСПОРТНІ І ТЕРМОРЕЗИСТИВНІ ВЛАСТИВОСТІ БАГАТОШАРОВИХ ПЛІВКОВИХ МАТЕРІАЛІВ НА ОСНОВІ Fe і Cr (ОГЛЯД)

**В. В. Бібик, здобувач; Л. В. Однорець, канд. фіз.-мат. наук, доцент;
Н. І. Шумакова, канд. фіз.-мат. наук, доцент;
С. І. Проценко, канд. фіз.-мат. наук**
Сумський державний університет

Представлений короткий огляд літературних і власних даних про магніторезистивні і електрофізичні властивості багатошарових плівкових систем періодичного (мультишари) або загального типу на основі Fe і Cr. Проаналізовано питання про вплив іонного опромінення на ефект гігантського магнітного опору та про перспективи технічного застосування названих плівкових матеріалів.

ВСТУП

Особлива увага до мультишарів [Fe/Cr]_n/Π або багатошарових плівкових систем Fe/Cr.../Fe/Cr/Π (Π - підкладка) пов'язана з тим, що в цих мультишарах вперше [1] в 1988 році спостерігався ефект спін-залежного розсіювання електронів, або ефект гігантського магнітного опору (ГМО). Подальші дослідження показали, що ГМО має місце і в інших плівкових структурах, наприклад, Co/Cu, Co/Ag, Ru/Cu та ін. (більш детально див. [2]). Крім того, система Fe/Cr вважається однією з