Черв'яков Володимир Дмитрович
Кандидат технічних наук, доцент кафедри комп'ютерних наук Сумського державного університету. Член редколегії Всеукраїнського науково-технічного журналу "Автоматика. Автоматизація. Електротехнічні комплекси і системи". Має 168 наукових та навчально-методичних праць. Галузь наукової діяльності - методологія синтезу об'єктно-орієнтованих систем управління.

Журавльов Олександр Юрійович
Кандидат технічних наук, доцент кафедри комп'ютерних наук Сумського державного університету. Має 32 наукових та навчально-методичних праць. Галузь наукової діяльності – системи автоматизації технологічних процесів.

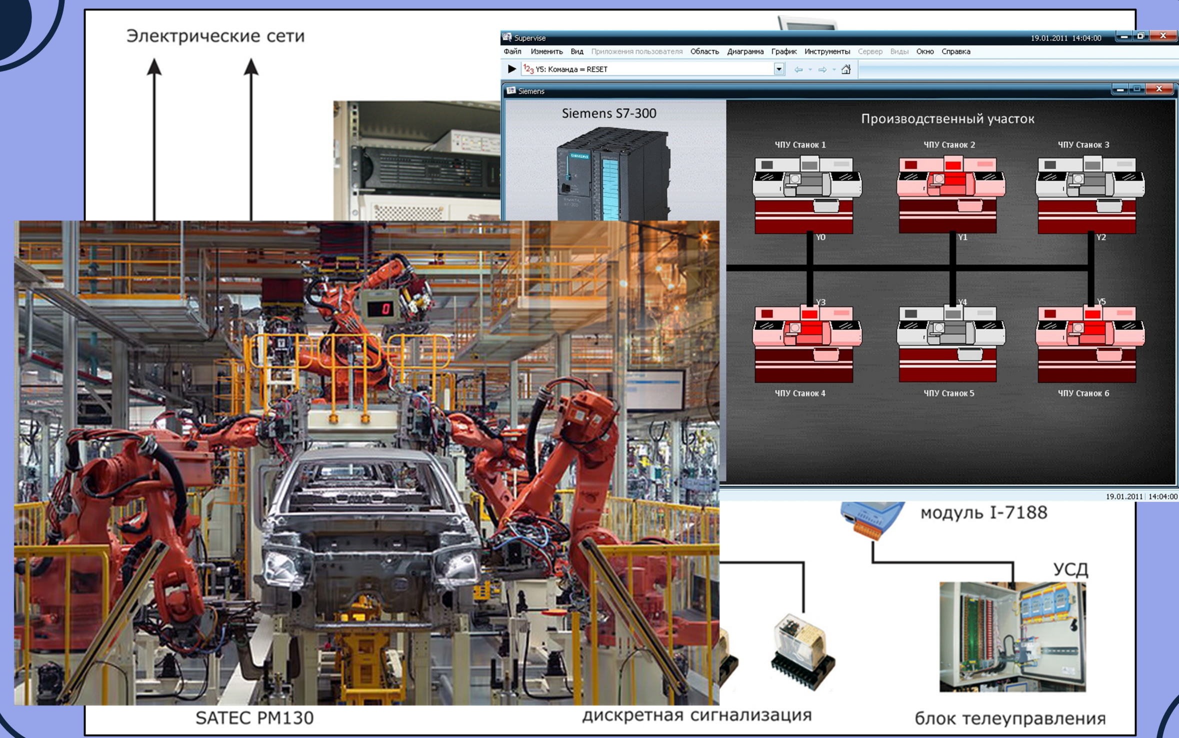
Павлов Андрій Володимирович
Кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри комп'ютерних наук Сумського державного університету. Має 42 наукових та навчально-методичних праць. Галузь наукової діяльності – математичне моделювання в технологічних та фізичних системах.

ОСНОВИ НАДІЙНОСТІ ОБ'ЄКТІВ СИСТЕМОТЕХНІКИ

В. Д. Черв'яков А. В. Павлов
О. Ю. Журавльов

ОСНОВИ НАДІЙНОСТІ ОБ'ЄКТІВ СИСТЕМОТЕХНІКИ

Навчальний посібник



Видавництво СумДУ

В. Д. Черв'яков, А. В. Павлов,
О. Ю. Журавльов

ОСНОВИ НАДІЙНОСТІ ОБ'ЄКТІВ СИСТЕМОТЕХНІКИ

Навчальний посібник

Рекомендовано Міністерством освіти і науки,
молоді та спорту України

Суми
Сумський державний університет
2011

УДК 519.718 (075.8)
ББК 32.97
Ч 45

Рецензенти:

С. Ф. Теленик - доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри автоматики і управління в технічних системах Національного технічного університету України «КПІ»;

Р. Н. Квєтний - доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри автоматики та інформаційно-вимірювальної техніки Вінницького національного технічного університету;

Е. Г. Петров - доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри системотехніки Харківського національного університету радіоелектроніки

Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за напрямом підготовки "Системна інженерія" (лист № 1/11–6229 від 15.07.11)

Черв'яков В. Д.

Ч 45 Основи надійності об'єктів системотехніки: навч. посіб. /В. Д. Черв'яков, А. В. Павлов, О. Ю. Журавльов. – Суми: Сумський державний університет, 2011. – 245 с.
ISBN 978-966-657-387-5

Викладено основні поняття та положення теорії надійності, методи розрахунку і аналізу безвідмовності технічних систем. Розглянуто основну методологію проведення дослідів об'єктів щодо оцінки імовірнісних показників їх безвідмовної роботи, статистичної обробки результатів випробувань. Розглянуті технологічні та математичні аспекти структурної надійності систем. Наведено контрольні завдання, приклади розв'язування типових задач і контрольні питання, що сприяє кращому засвоєнню навчального матеріалу та надає інструментарій для виконання розрахунків показників надійності технічних систем під час виконання курсових та дипломних проектів.

Для студентів вищих технічних навчальних закладів.

УДК 519.718 (075.8)
ББК 32.97

ISBN 978-966-657-387-5

Зміст

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

ПЕОМ – персональна електронно - обчислювальна машина
НКТД – нормативно-технічна та (або) конструкторська документація
ІС – інтегральна схема
ІВ – інтенсивність відмов
ВІС – велика інтегральна схема
МО – математичне очікування
СКВ – середнє квадратичне відхилення
ЗНР – зрізаний нормальний розподіл
ОС – основна система
ТЗ – технічне завдання
ОЕ – основний елемент
РЕ – резервний елемент
ПП – перемикальний пристрій

ВСТУП

Однією з основних вимог, що висуваються до сучасних проектованих пристроїв і систем (об’єктів системотехніки) є виконання функцій, покладених на них, зі збереженням впродовж визначеного інтервалу часу і в заданих межах значень експлуатаційних показників, тобто проектований об’єкт повинен бути надійним.

Забезпечення надійності систем управління (будь-яких технічних систем) є одним з основних завдань науки і техніки. Це зумовлено застосуванням складних електронних систем і значними втратами, пов’язаними з їх відмовами. Існує багато об’єктів, для яких втрата працездатності пристроїв та систем управління може призвести до тяжких наслідків, пов’язаних з руйнуваннями та людськими жертвами. Тому до таких об’єктів висуваються особливі вимоги щодо забезпечення їхньої надійності.

Ступінь надійності сучасних об’єктів системотехніки забезпечується в результаті вирішення таких завдань:

– прогнозування надійності на етапах проектування з метою виявлення слабких місць і видачі рекомендацій щодо забезпечення надійності;

– контроль рівня надійності на кінцевих етапах розроблення на основі результатів досліджень;

– оптимізація надійності проектованого об’єкта.

Етапи аналізу надійності мають назви апріорного та апостеріорного. На першому з цих етапів показники надійності пристроїв та систем розраховуються на стадії проектування. За результатами розрахунків робляться висновки щодо способів підвищення надійності проектованих об’єктів, якщо в цьому виникає необхідність. Цей аналіз передбачає, що повністю всі характеристики надійності елементів проектованого об'єкта відомі. Проте часто для нових елементів достовірні дані кількісних характеристик надійності відсутні, їх можна задавати за аналогією до відомих елементів або інтуїтивно. Але, незважаючи на це, апріорний аналіз є досить корисним для порівняння показників надійності варіантів структурних схем проектованого об'єкта, виявлення слабких місць та відкидання незадовільних варіантів його побудови.

Другий етап дослідження показників надійності (апостеріорний) полягає в експериментальній оцінці надійності створеного об'єкта на основі статистичних даних про його працездатність, які отримані в процесі налагодження, випробувань та експлуатації.

У цьому навчальному посібнику викладені основні поняття і відомості щодо складових та основних показників надійності та безвідмовності технічних об'єктів. Розглянуті основні закони напрацювання об'єктів до їх відмови, аспекти структурної надійності та методи розрахунку показників надійності.

Навчальний посібник призначений для професійної підготовки студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за напрямом «Системна інженерія», з питань забезпечення надійності проектованих об'єктів системотехніки.

Без знань основ теорії надійності та методів розрахунку показників надійності неможливе створення високонадійних технічних систем. Тому вивчення та практичне засвоєння методів оцінки надійності проектованих об'єктів є невід'ємною частиною професійної підготовки фахівців у галузі автоматики і управління, взагалі будь-яких технічних та інформаційних систем. В основу навчального посібника покладено матеріали навчальних дисциплін «Проектування пристроїв і систем управління» та «Надійність об'єктів системотехніки», що викладаються авторами в

Сумському державному університеті студентам напряму підготовки «Системна інженерія» та спеціальності «Системи управління і автоматики». У навчальному посібнику також використано матеріали, опубліковані в літературних джерелах.

Структура навчального посібника дає можливість читачеві послідовно, від простого до складного, вивчити основні поняття та положення теорії надійності, оскільки це потребує знань з таких розділів математики, як теорія ймовірностей та математична статистика, необхідні відомості з яких внесені до змісту цього навчального посібника. До основного змісту навчального посібника належать наведені у ньому основні поняття, терміни та визначення складових надійності, формулювання та визначення основних показників безвідмовності об’єктів; методологія розрахунку надійності технічних систем; розрахунок показників надійності на основі статистичних даних про результати випробувань для різних законів розподілу напрацювання технічних об’єктів до відмови; розрахунки структурної надійності систем з різними типами з’єднання елементів та кратністю резервування; визначення показників надійності невідновлюваних і відновлюваних об’єктів; практичний аналіз надійності об’єктів системотехніки.

Навчальний посібник містить приклади розв’язання типових задач. Кожний розділ супроводжується переліком контрольних питань, що сприяє кращому засвоєнню навчального матеріалу. В останньому розділі навчального посібника пропонуються варіативно побудовані завдання для самостійної роботи, виконання яких дає додаткові знання студентам щодо практичних навичок виконання розрахунків показників надійності пристроїв і систем.

Набутими знаннями з теорії надійності та методів розрахунку надійності об’єктів системотехніки студенти можуть скористатися під час вивчення інших дисциплін, а також при курсовому і дипломному проектуванні.

Автори сподіваються, що навчальний посібник буде корисним як студентам напрямів підготовки в галузях технічних наук, так і інженерно-технічним працівникам, навчальна або практична діяльність яких потребує знань і навичок практичної оцінки надійності технічних систем.

При написанні навчального посібника вступ, розділ 11, предметний покажчик та додатки підготовлені канд. техн. наук, доцентом В.Д. Черв'яковим, розділи 1-5 – канд. фіз.-мат. наук А.В. Павловим, розділи 6-10 – канд. техн. наук О.Ю. Журавльовим. Загальна редакція виконана В.Д. Черв'яковим.

Автори вдячні за зауваження стосовно змісту навчального посібника рецензентам: Сергію Федоровичу Теленику – доктору технічних наук, професору, завідувачу кафедри автоматики і управління в технічних системах Національного технічного університету України «КПІ»; Роману Наумовичу Квєтному - доктору технічних наук, професору, завідувачу кафедри автоматики та інформаційно-вимірювальної техніки Вінницького національного технічного університету; Едуарду Георгійовичу Петрову - доктору технічних наук, професору, завідувачу кафедри системотехніки Харківського національного університету радіоелектроніки.

Побажання і відгуки щодо цього навчального посібника просимо надсилати за адресою: Сумський державний університет, вул. Римського-Корсакова, 2, м.Суми, 40007, Україна.

Розділ 1

НАДІЙНІСТЬ СИСТЕМ. ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ І ВИЗНАЧЕННЯ

1.1 Поняття про об'єкт та його властивості

Об'єкт - технічний виріб певного цільового призначення, що розглядається впродовж його життєвого циклу, тобто в періоди проектування, виготовлення, випробувань і експлуатації, з точки зору надійності.

Об'єктами можуть бути різні системи (сукупності об'єктів, поєднані загальним призначенням і метою функціонування), пристрої та їх елементи.

За складністю (залежно від кількості елементів та зв'язків між ними) об'єкти електронної апаратури прийнято поділяти на 4 основних групи: елементи, пристрої, системи і комплекси [1].

Елемент - проста складова частина виробу, що не підлягає розбиранню і ремонту.

У задачах визначення надійності систем елемент може складатися з багатьох деталей, однак у конкретному дослідженні він розглядається як неподільний.

Пристрій – сукупність елементів, об'єднаних у самостійну, технічно завершену конструкцію, що може мати самостійне експлуатаційне призначення.

Кількість елементів у пристрої може бути великою, іноді досягати тисяч.

Система – технічно обґрунтована сукупність елементів і пристроїв, що спільно діють, призначена для самостійного виконання заданих функцій.

Комплекс – сукупність систем, що поєднані єдиною метою для вирішення досить широкого кола завдань.

Необхідно зазначити, що поняття елемента і системи трансформуються залежно від поставленого завдання дослідження. Наприклад, ПЕОМ при визначенні її власної надійності розглядається як система, що складається з окремих елементів (монітор, системний блок, джерело безперебійного живлення тощо), а при вивченні надійності системи управління - як окремий елемент цієї системи.

Нижче розглянуті можливі з'єднання елементів, що утворюють систему.

Послідовне з'єднання – з'єднання, при якому вихід з ладу будь-якого елемента системи призводить до виходу з ладу всієї системи (рис. 1.1).

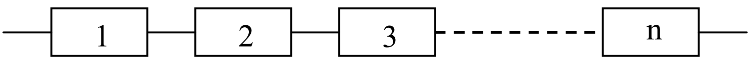


Рисунок 1.1

Отже, система послідовно з'єднаних елементів є мінімально необхідною для забезпечення нормальної роботи, тобто вона працює тільки в тому випадку, коли всі її елементи є *працездатними*.

При *паралельному з'єднанні* елементів (рис. 1.2) система виходить з ладу тільки у разі виходу з ладу всіх її елементів. Тобто до того часу, поки хоч один елемент системи є працездатним, система в цілому зберігає свою працездатність.

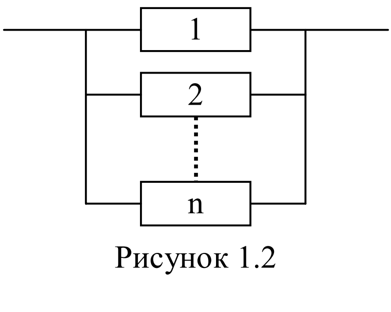


Рисунок 1.2

Необхідно зазначити, що будь-яка система може складатися з підсистем, які містять у собі різну кількість послідовно та паралельно з'єднаних елементів (*змішана система*) і не завжди може бути приведена до простого паралельного та послідовного з'єднання елементів. Одним із таких прикладів є *місткова структурна схема з'єднань* елементів (рис. 1.3).

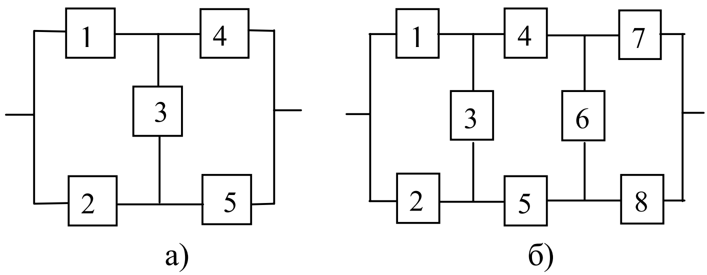


Рисунок 1.3

1.2 Основні терміни та визначення теорії надійності

Надійність - властивість об'єкта зберігати в часі у встановлених межах значення всіх параметрів, які характеризують здатність виконувати задані функції у заданих режимах та умовах застосування, технічного обслуговування, ремонту, зберігання та транспортування.

З точки зору надійності об'єкти прийнято поділяти на такі.

Ремонтований об'єкт – об'єкт, ремонт якого можливий і передбачений нормативно-технічною, ремонтною і (обо) конструкторською (проектною) документацією.

Відновлюваний об'єкт – ремонтований об'єкт, який після відмови і усунення несправності знову здатний виконувати потрібні функції із заданими кількісними показниками надійності.

Невідновлюваний об'єкт – це об'єкт, для якого працездатність у разі виникнення відмови не підлягає відновленню. Невідновлювані об'єкти можуть бути ремонтованими або неремонтованими.

До невідновлюваних об'єктів можна віднести, наприклад, напівпровідникові прилади. Об'єкти, що складаються з багатьох елементів, наприклад, персональні електронно-обчислювальні машини (ПЕОМ), є відновлюваними, оскільки їх відмови пов'язані з пошкодженнями одного або небагатьох елементів, які можуть бути замінені.

У ряді випадків один і той самий об'єкт залежно від особливостей етапів експлуатації або призначення може вважатися відновлюваним або невідновлюваним

Надійність об'єкта характеризується такими основними *станами.*

Справний стан - стан об'єкта, при якому він відповідає усім вимогам, встановленим нормативно-технічною та (або) конструкторською документацією (НТКД).

Працездатний стан - стан об'єкта, при якому значення усіх параметрів, що характеризують його здатність виконувати задані функції, відповідають вимогам НТКД.

Поняття *справний стан* ширше, ніж поняття *працездатний стан*. Працездатний об'єкт зобов'язаний задовольняти лише ті вимоги НТКД, виконання яких забезпечує нормальне застосування об'єкта за призначенням. Таким чином, якщо об'єкт непрацездатний, то це свідчить про його несправність. З іншого боку, якщо об'єкт несправний, то це не означає, що він непрацездатний.

Граничний стан - стан об'єкта, при якому його застосування за призначенням неприпустиме або недоцільне.

Застосування (використання) об'єкта за призначенням припиняється в таких випадках:
- при неусувному порушенні безпеки;
- при неусувному відхиленні величин заданих параметрів

від значень, зафіксованих у НТКД;
- при неприпустимому збільшенні експлуатаційних витрат.

Для деяких об'єктів граничний стан є останнім в його функціонуванні, тобто об'єкт знімається з експлуатації, для інших - певною фазою в експлуатаційному графіку, що вимагає проведення ремонтно - відновлювальних робіт.

1.3 Класифікація і аналіз відмов

Будь-яка система не є ідеальною, тому в процесі екплуатації допускає появу відмов, тобто порушення працездатності.

Відмова - подія, що полягає в порушенні працездатного стану об'єкта.

Критерій відмови - відмітна ознака або сукупність ознак непрацездатного стану об'єкта. Наприклад, відсутність напруги на вихідних клемах одного з пристроїв системи.

Причини відмови – явища, події або стани, які зумовлюють виникнення відмови. Наприклад – неправильний розрахунок режиму роботи трансформатора.

Ознаки відмови – безпосередній обо опосередкований вплив на органи почуття спостерігача явищ, характерних для непрацездатного стану системи. Наприклад - поява диму, характерного запаху, підвищена температура корпусу пристрою.

Характер відмови – зміни в системі, пов'язані з виникненням її відмови. Наприклад – коротке замикання обмоток трансформатора.

За *типом* відмови поділяються на:
– *відмови функціонування* (виконання основних функцій об'єктом припиняється);
– *відмови параметричні* (деякі параметри об'єкта змі-

нюються в неприпустимих межах).

За своєю *природою* відмови можуть бути:

– *випадкові*, зумовлені непередбаченими перевантаженнями, дефектами матеріалу, помилками персоналу або збоями системи управління і т.п.;

– *систематичні*, зумовлені закономірними і неминучими явищами, що викликають поступове накопичення пошкоджень: втома, знос, старіння і т.п.

Розглянемо основні класифікації відмов:

– за характером виникнення;
– за причиною виникнення;
– за способом усунення;
– за наслідками відмов;
– за подальшим використанням об'єкта;
– за легкістю виявлення;
– за часом виникнення.

Опишемо докладніше кожну із класифікаційних ознак.

1. За характером виникнення:

– *раптова (катастрофічна) відмова* - відмова, що виявляється в різкій (миттєвій) зміні характеристик об'єкта;

– *поступова відмова* - відмова, що відбувається в результаті повільного, поступового погіршення значень одного або кількох параметрів об'єкта.

Раптові відмови, як правило, виявляються в апаратурі, яка має незначний термін експлуатації, і не супроводжуються попередніми видимими ознаками їх наближення. Раптова відмова характеризується незалежністю моменту настання від часу попередньої роботи. У цьому випадку найчастіше виходять з ладу елементи з прихованими дефектами.

Поступові відмови пов'язані зі зносом деталей і старінням матеріалів. Вони можуть бути попереджені шляхом проведення замірів та аналізу їх результатів з метою виявлення зміни параметрів об'єкта.

2. За причиною виникнення:
– *конструкційна відмова*, викликана недоліками і невдалою конструкцією об'єкта (помилки проектування);
– *виробнича відмова*, пов'язана з помилками при виготовленні об'єкта внаслідок недосконалості або порушення технології на стадії виготовлення;
– *експлуатаційна відмова*, викликана порушенням правил експлуатації (вплив різного роду факторів на стадії експлуатації);
– *відмова, що виникла внаслідок старіння, зносу елементів.*

3. За способом усунення:
– *стійка відмова* – відмова, для усунення якої необхідно вжити спеціальних заходів;
– *відмова, яка чергується (виникає/самоусувається)* – відмова, яка виникає тимчасово і без зовнішнього втручання.

4. За наслідками відмови:
– *легка відмова* (легко усувається);
– *середня відмова* (що не викликає відмови суміжних вузлів - вторинних відмов);
– *важка відмова* (що викликає вторинні відмови або така, що призводить до загрози життю і здоров'ю людини).

5. За подальшим використанням об'єкта:
– *повні (часткові) відмови* – відмови, що виключають (не виключають) можливість використання об'єкта за призначенням до їх усунення;

6. За легкістю виявлення:
– *очевидні (явні) відмови* – відмови, що виявляються негайно після їх виникнення без застосування спеціальної апаратури;
– *приховані (неявні) відмови.*

7. За часом виникнення:
– *відмови періоду припрацювань*, що виникають у почат-

ковий період експлуатації;

– *відмови при нормальній експлуатації*;
– *відмови періоду зносу*, викликані необоротними процесами зносу деталей, старіння матеріалів та ін.

1.4 Складові надійності

Надійність є комплексною властивістю, що включає в себе, залежно від призначення об’єкта або умов його експлуатації, ряд простих властивостей:

– *безвідмовність*;
– *довговічність*;
– *ремонтопридатність;*
– *збережність.*

Безвідмовність - властивість об’єкта безперервно зберігати працездатність впродовж деякого напрацювання або протягом деякого часу.

Напрацювання - тривалість або обсяг роботи об’єкта, вимірювана в будь-яких величинах (одиниця часу, кількість циклів навантаження, кількість вмикань, кілометри пробігу і т. п.).

Напрацювання до відмови – напрацювання об’єкта від початку експлуатації до виникнення першої відмови.

Напрацювання на відмову - напрацювання об’єкта від завершення відновлення його працездатного стану після відмови до виникнення наступної відмови.

Довговічність - властивість об’єкта зберігати працездатність до настання граничного стану при встановленій системі технічного обслуговування і ремонтів.

Ремонтопридатність - властивість об’єкта, що полягає в його пристосованості до попередження і виявлення причин виникнення відмов, підтримки і відновлення працездатності шляхом проведення ремонтів і технічного обслуговування.

Збережність - властивість об’єкта неперервно зберігати необхідні експлуатаційні показники впродовж (і після) терміну зберігання і транспортування.

Надійність об’єкта може визначатися всіма переліченими властивостями або їх частиною. Наприклад, надійність колеса зубчастої передачі, підшипників визначається їх довговічністю, а верстата - довговічністю, безвідмовністю та ремонтопридатністю.

1.5 Основні показники надійності

Показник надійності кількісно характеризує, якою мірою даному об’єкту притаманні певні властивості, що зумовлюють надійність. Одні показники надійності (наприклад, технічний ресурс, термін служби) можуть мати розмірність, ряд інших (наприклад, ймовірність безвідмовної роботи, коефіцієнт готовності) є безрозмірними.

Розглянемо показники складової надійності - *довговічності.*

Технічний ресурс - напрацювання об’єкта від початку його експлуатації або відновлення експлуатації після ремонту до настання граничного стану.

Строго кажучи, технічний ресурс може бути регламентований таким чином: до середнього, капітального, від капітального до найближчого середнього ремонту і т.п. Якщо регламентація відсутня, то мають на увазі ресурс від початку експлуатації до досягнення граничного стану після усіх видів ремонтів.

Для невідновлюваних об’єктів поняття технічного ресурсу і напрацювання повністю збігаються.

Середній ресурс – математичне очікування технічного ресурсу.

Призначений ресурс - сумарне напрацювання об'єкта, при досягненні якого експлуатація повинна бути припинена незалежно від його стану.

Термін служби - календарна тривалість експлуатації від її початку до настання граничного стану.

На рис.1.4 наведений приклад послідовності часових інтервалів у життєвому циклі об'єкта, де:

$t_0 = 0$ - початок експлуатації;

t_1, t_5 - моменти відключення з технологічних причин;

t_2, t_4, t_6, t_8 - моменти включення об'єкта;

t_3, t_7 - моменти виведення об'єкта в ремонт, відповідно середній і капітальний;

t_9 - момент припинення експлуатації;

t_{10} - момент відмови об'єкта.

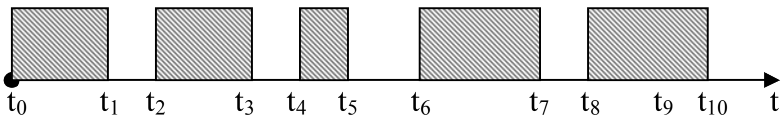


Рисунок 1.4

Перелічені вище показники надійності для цього прикладу визначаються таким чином:

- технічний ресурс (напрацювання до відмови)

$$T_{TP} = t_1 + (t_3 - t_2) + (t_5 - t_4) + (t_7 - t_6) + (t_{10} - t_8);$$

- призначений ресурс

$$T_{\Pi P} = t_1 + (t_3 - t_2) + (t_5 - t_4) + (t_7 - t_6) + (t_9 - t_8);$$

- термін служби об'єкта

$$T_C = t_{10}.$$

Для більшості об’єктів електромеханіки та електроніки як критерій довговічності найчастіше використовується технічний ресурс.

1.6 Методи підвищення надійності

Як зазначалося вище, заходи щодо забезпечення надійності можуть проводитися на стадії проектування, виготовлення та експлуатації об’єкта. Проте, як показує практика, забезпечення високої надійності при мінімальних затратах можливе лише тоді, коли проблемі надійності приділяється увага на всіх стадіях життєвого циклу об’єкта, а початок робіт у цьому напрямі збігається з початком проектування [2].

Шляхи забезпечення надійності на різних етапах життєвого циклу об’єкта можна подати в такій послідовності.

1. Аванпроект виробу:

– аналіз інформації про надійність кращих аналогів;
– обгрунтування обраного варіанта побудови виробу;
– оцінка очікуваного рівня надійності виробу;
– формування вимог щодо надійності на стадії ескізного проекту.

2. Ескізний проект виробу:

– вибір структурних рішень, що забезпечують виконання вимог надійності;
– моделювання процесів функціонування виробу;
– оцінка впливу зовнішніх дестабілізуючих факторів на надійність виробу;
– складання переліку типів можливих відмов;
– виявлення «слабких» за надійністю частин виробу;
– складання переліку критеріїв відмов і граничних станів;
– аналіз впливу відмов частин виробу на його працездатність;

– розроблення заходів щодо попередження відмов і захисту від їх наслідків;
– розроблення програми випробувань виробу на надійність;
– вибір системи контролю справності і діагностики виробу при експлуатації;
– розроблення правил технічного обслуговування і ремонту виробу;
– визначення комплекту запасних виробів і приладів;
– формування вимог щодо надійності для розроблення технічного проекту виробу.

3. Технічний проект виробу:
– розроблення режимів експлуатації;
– складання переліку комплектуючих виробу, що підлягають вхідному контролю;
– розрахунки надійності з урахуванням теплових режимів, вібрації, шумів, міцності конструкцій;
– вибір способів і засобів захисту від зовнішніх впливів;
– розроблення системи технічного обслуговування і ремонту.

4. Розроблення технічної документації:
– аналіз технологічності виробу;
– розроблення спеціального випробувального устаткування;
– розроблення ремонтної і експлуатаційної документації;
– перевірка безпеки і живучості при порушенні умов експлуатаці;
– аналіз результатів випробування дослідного зразка виробу і виявлення причин відмов.

5. Поставлення виробу на виробництво:
– оцінка надійності технологічних систем;
– розроблення систем контролю надійності у процесі виготовлення;

– організація обліку відмов, виявлених при виготовленні;
– розроблення системи неруйнівного контролю і діагностики при виготовленні.

6. Серійне виробництво виробу:
– збір і аналіз інформації про надійність серійних виробів;
– аналіз результатів приймальних випробувань;
– усунення причин технологічних відмов виробу;
– контроль за дотриманням технології виготовлення.

7. Введення в експлуатацію:
– навчання обслуговуючого персоналу;
– організація обліку даних про відмови;
– аналіз якості монтажних робіт.

8. Експлуатація:
– контроль за дотриманням правил експлуатації;
– організація підконтрольної експлуатації;
– збір і аналіз даних про надійність при експлуатації.

9. Організація ремонтних робіт:
– навчання персоналу правил забезпечення надійності при ремонті;
– розроблення документацій для виконання ремонтних робіт;
– оцінка технічного стану виробів, що надійшли в ремонт;
– виявлення причин відмов відремонтованих виробів і оцінка їх надійності.

Методи підвищення надійності об’єктів електронної техніки у загальному вигляді наведені в таблиці 1.1. Спрощення і оптимізація параметрів схем, розширення допусків на параметри компонент і збільшення їх стабільності підвищує надійність при поступових відмовах.

Таблиця 1.1

1. Проектування	1.1. Спрощення схем
	1.2. Оптимізація параметрів схем
	1.3. Розширення допусків на параметри компонент
	1.4. Збільшення стабільності компонент
	1.5. Створення схем з обмеженими наслідками відмов
	1.6. Створення полегшених режимів роботи
	1.7. Використання найбільш надійних компонент
	1.8. Застосування ІС більш високого ступеня інтеграції
	1.9. Створення завадостійких схем
	1.10. Полегшення ремонту
	1.11. Створення систем контролю і діагностики
	1.12. Резервування
2. Виготовлення	2.1. Удосконалення технології, автоматизація
	2.2. Контроль якості (вхідний і вихідний)
	2.3. Тренування елементів і систем
3. Експлуатація	3.1. Спрощення схем
	3.2. Оптимізація параметрів схем
	3.3. Розширення допусків на параметри компонент
	3.4. Збільшення стабільності компонент
	3.5. Створення схем з обмеженими наслідками відмов

Схеми з обмеженими наслідками відмов (табл.1.1, п.1.5) запобігають лавинному виходу з ладу компонент внаслідок електричних або інших перевантажень, викликаних відмовою будь-якого елемента або видачею сигналів, здатних викликати відмови або аварійні ситуації в інших схемах системи. Для створення таких схем промисловістю випускаються електронні прилади для захисту електронних систем від електричних перевантажень.

Створення полегшених режимів роботи технічних об'єктів (табл.1.1, п.1.6), наприклад, шляхом примусової вентиляції, позитивно позначається на надійності. З цією ж метою тепловидільні елементи забезпечують радіаторами і розташовують на місцях, що сприяють тепловідведенню.

Застосування найбільш надійних елементів (табл.1.1, п.1.7) завжди бажане, проте зростання надійності компонент інтегральних схем (ІС) відстає від потреб практики, а подальше зменшення інтенсивності відмов (ІВ) λ пов'язане із труднощами, про що свідчить уповільнення темпів зниження λ.

Використання ІС з підвищеним ступенем інтеграції (табл.1.1, п.1.8) так само позитивно позначається на надійності, оскільки λ збільшується зі зростанням ступеня інтеграції значно повільніше, ніж кількість елементів в ІС. Для цього застосовують замовлені великі інтегральні схеми (ВІС) на основі базових матричних кристалів, які замінюють десятки і сотні ІС малого і середнього ступеня інтеграції. Надійність при цьому зростає як за рахунок зменшення кількості ІС, так і за рахунок зменшення кількості з'єднань паянням і з'єднувачів плат.

Важливим конструктивним чинником підвищення надійності систем є зменшення впливу наводок і завад (табл.1.1, п.1.9). З цією метою широко використовують різного роду заземлювальні екрани. Для уникнення наведення завад по колах живлення всі ці кола повинні мати малий імпеданс, а довжина з'єднувальних дротів повинна бути мінімально можливою. Заходи, спрямовані на полегшення ремонту (табл.1.1, п.1.10), сприяють підвищенню коефіцієнта готовності. Найбільш дієвими заходами в даному напрямі є застосування автоматизованої схемної і програмної діагностики (табл.1.1, п.1.11) у поєднанні з укрупненими знімними блоками. Ремонт при цьому полягатиме у візуальному спостереженні за сигнальною індикацією і заміні блоків, що відмовили, на справні. Операції такого типу можуть виконуватися навіть працівниками низької кваліфікації.

Проте найбільш ефективним схемним методом є резервування (табл.1.1, п.1.12), тобто введення апаратурної надлишковості. Ідея методу полягає в тому, що в систему замість одного якогось елемента вводять два ідентичні елементи, кожен з яких здатний виконувати функцію іншого, тобто відмова даного резервованого елемента настане лише тоді, коли відмовить як основний, так і резервний елемент. Кількість елементів у резервній групі називається кратністю резервування. Введення апаратурної надлишковості дозволяє підвищити надійність як за відмовами, так і за збоями. Внаслідок цього даний метод набув широкого застосування у технічних системах. Окрім апаратурного резервування, може бути використано і часове резервування, що дозволяє підвищувати надійність, як правило, за збоями, наприклад, шляхом трикратного виконання деякої операції з подальшим виявленням правильного результату за принципом більшості (два із трьох).

При виготовленні систем управління підвищення надійності здійснюється в основному за рахунок удосконалення технології автоматизації виробництва (табл.1.1, п.2.1) і контролю якості (табл.1.1, п.2.2). У деяких випадках ефективним методом підвищення надійності є тренування елементів і систем (табл.1.1, п.2.3), яке полягає у попередньому (тобто перед початком експлуатації) включенні в роботу елементів і систем, що мають чітко виражену стадію припрацювання. Час тренування вибирається так, щоб основна частина малонадійних елементів за час тренування відмовила.

Важливі заходи щодо забезпечення надійності можуть бути проведені на стадії експлуатації (табл.1.1, пп.3.1-3.5). Науково обґрунтований метод експлуатації (табл.1.1, п.3.1), що включає: ретельно розроблені і обґрунтовані інструкції і методики з експлуатації, профілактики і ремонту; чітко встановлені права, обов'язки і відповідальність обслуговуючого персоналу; збір і узагальнення досвіду експлуатації (табл.1.1, п.3.2) як з метою його використання при проектуванні нових систем, так і для оптимізації стратегії обслуговування відповідних систем. На ефективність експлуатації і надійність систем суттєво впливає кваліфікація обслуговуючого персоналу (табл.1.1, п.3.4). Особливо це виявляється при ремонті після відмови системи. Так, наприклад, якщо система, що вийшла з ладу, попередньо обслуговувалася техніком, то, як правило, при ремонті замінюється в 2-3 рази більше елементів, ніж у системі, яка обслуговувалась інженером [2].

Простим прикладом стійких до збоїв програм (табл.1.1, п. 3.5) є програма з двократним рахунком із подальшим порівнянням їх результатів.

Контрольні питання

1. Дайте визначення поняття «об'єкт». Наведіть приклади об'єктів у галузі вашої професійної діяльності.
2. На які групи за складністю поділяються об'єкти? Дайте визначення цих груп.
3. Поясніть зміст послідовного і паралельного з'єднання елементів. У чому особливість місткової схеми з'єднання елементів?
4. У чому полягає поняття надійності як властивості об'єкта?
5. Якими можуть бути об'єкти за здатністю до відновлення працездатного стану?
6. У чому полягає відмінність між ремонтованим і віднов-

лювальним об'єктами? Чи можуть невідновлювані об'єкти бути ремонтованими?
7. У чому спільність і відмінність станів об'єкта «справний» і «працездатний»? Чи може несправний об'єкт бути працездатним?
8. За яких умов настає граничний стан об'єкта? У яких випадках використання об'єктів за призначенням припиняється?
9. Дайте визначення відмови об'єкта. Якими можуть бути відмови за типом і природою походження?
10. Перелічіть основні ознаки класифікації відмов. Які типи відмов належать до кожної з ознак?
11. Перелічіть і дайте визначення властивостей (складових) надійності.
12. Дайте визначення показника надійності. Перелічіть і поясніть показники довговічності.
13. Які методи підвищення надійності застосовують на стадії проектування об'єкта?
14. У чому полягає метод резервування?
15. За допомогою яких заходів можливе підвищення надійності на стадії виготовлення виробу?
16. Поясніть доцільність тренування елементів системи під час їх виготовлення.
17. Як можна підвищити надійність систем під час експлуатації?

Розділ 2

ЗАСТОСУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ У ЗАДАЧАХ АНАЛІЗУ НАДІЙНОСТІ СИСТЕМ

Визначення вибіркових оцінок базується на математичних моделях теорії ймовірностей та математичної статистики. Тому виникає необхідність викласти у даному розділі мінімально необхідні відомості з теорії ймовірностей [3,4].

Подією називається деякий факт (вихід), який у результаті досліду (випробування, експерименту) може відбутися або не відбутися. Кожній із таких подій можна поставити у відповідність певне число, назване його ***ймовірністю,*** яка є мірою можливого здійснення цієї події.

Сучасна побудова теорії ймовірностей ґрунтується на аксіоматичному підході і спирається на елементарні поняття теорії множин.

Множина - це сукупність об’єктів довільної природи, кожний з яких називається елементом множини. Множини позначаються по-різному: або однією великою буквою, або переліком його елементів, поданим у фігурних дужках, або зазначенням (у тих самих фігурних дужках) правила, за яким елемент належить до множини. Наприклад, кінцева множина *M* натуральних чисел від 1 до 100 може бути записана у вигляді

$$M = \{1, 2 .,100\} = \{i \text{ - ціле; } 1 \le i \le 100\}.$$

Припустимо, що проводиться деякий дослід (експеримент, випробування), результат якого наперед не відомий, випадковий. Тоді множина Ω усіх можливих результатів досліду являє собою простір можливих елементарних подій, а кожен його елемент $\alpha \in \Omega$ (один окремий результат досліду) є елементарною подією. Будь-який набір A елементарних подій (будь-яке їх поєднання) вважається ***підмножиною*** (частиною) множини Ω і є випадковою подією, тобто будь-яка подія A - це підмножина множини Ω: $A \subseteq \Omega$.

У загальному випадку, якщо множина Ω містить n елементів, то в ній можна виділити 2^n підмножин (подій).

Розглядаючи подію $A=\Omega$, можна відзначити, що вона є ***достовірною подією***, тобто здійснюється при будь-якому досліді. Порожня множина $\varnothing$ як подія є *неможливою*, тобто при будь-якому досліді свідомо не може відбутися.

Сумісні (несумісні) події - такі події, поява однієї з яких не виключає (виключає) можливості появи іншої.

Залежні (незалежні) події - такі події, поява однієї з яких впливає (не впливає) на появу іншої події.

Протилежна подія відносно деякої вибраної події A - це подія, що полягає в нез'явленні цієї події A (позначається $\overline{A}$).

Повна група подій - така сукупність подій, при якій у результаті досліду повинна відбутися хоч б одна з подій цієї сукупності. Очевидно, що події A і $\overline{A}$ складають повну групу подій.

Одна з причин застосування теорії множин у теорії ймовірностей полягає в тому, що для множин визначені важливі перетворення, які мають просте геометричне представлення і полегшують розуміння змісту цих перетворень. Це геометричне представлення має назву діаграми Ейлера-Венна, на якій різні множини зображуються у вигляді плоских фігур, обмежених замкнутими лініями. Приклад діаграми, що ілюструє включення множин $C \subset B \subset A \subset \Omega$, наведений на рис. 2.1.

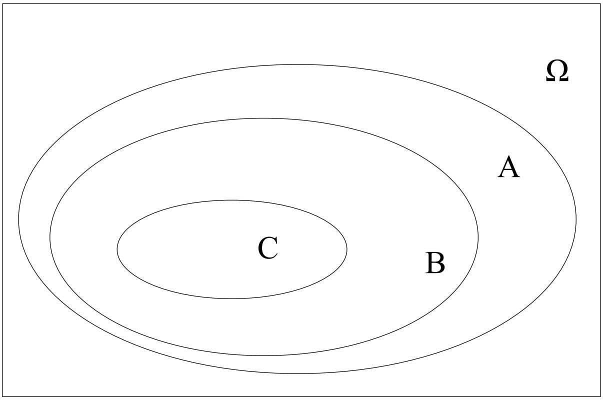


Рисунок 2.1

2.1 Алгебра подій

У прикладних задачах основними є не прямі, а посередні методи обчислення ймовірностей подій, що цікавлять нас, через ймовірності інших, з ними пов'язаних. Для цього потрібно уміти виражати події, що цікавлять нас, через інші, тобто використовувати *алгебру подій*.

Відзначимо, що всі поняття, що вводяться нижче, справедливі тоді, коли події, про які йдеться, є підмножинами одного й того самого простору *Ω* елементарних подій.

Сума, або об'єднання, подій $A_1, A_2,..., A_n$ - така подія A, поява якої в досліді еквівалентна появі в тому самому досліді хоча б однієї з подій $A_1, A_2, ..., A_n$. Сума позначається

$$A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \,, \tag{2.1}$$

де $\cup$ - знак логічного складання подій; $\bigcup$ - знак логічної суми подій.

Добуток (або перетин) подій $A_1, A_2, \dots, A_n$ - така подія A, поява якої в досліді еквівалентна появі в тому самому досліді всіх подій $A_1, A_2, \dots, A_n$ одночасно. Добуток позначається

$$A = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i\ , \qquad (2.2)$$

де $\cap$ - знак логічного множення подій; $\bigcap$ - знак логічного добутку подій.

Операції складання і множення подій мають ряд властивостей, притаманних звичайному складанню і множенню, а саме: переміщуючу, сполучну і розподільчу, які очевидні і не потребують пояснення.

Діаграми Ейлера-Венна для суми і добутку двох подій A_1 і A_2 наведені на рис. 2.2.

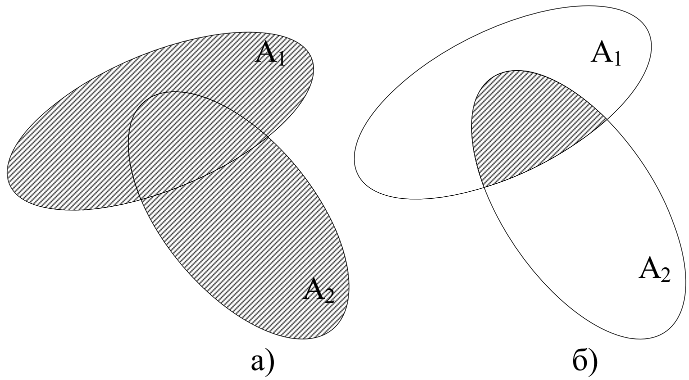


Рисунок 2.2

Сумою (об'єднанням) подій A_1 і A_2 є подія, що полягає в появі хоча б однієї з цих подій (заштрихована область на рис. 2.2 а). Добуток подій A_1 і A_2 - це подія, що полягає в сумісному виконанні обох подій (заштрихований перетин подій A_1 і A_2 на рис. 2.2 б).

Із визначення суми і добутку подій випливає, що:

$$A \cup A=A; \quad A \cup \varnothing=A; \quad A \cup \Omega=\Omega;$$

$$A \cap A=A; \quad A \cap \varnothing=\varnothing; \quad A \cap \Omega=A.$$

Якщо події A_i ($i=1,\ldots, n$), або $\{A_i\}^n$, складають повну групу подій, то їхня сума є достовірною подією:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = Щ. \tag{2.3}$$

Зображення протилежної події $\overline{A}$ наведене на рис. 2.3.

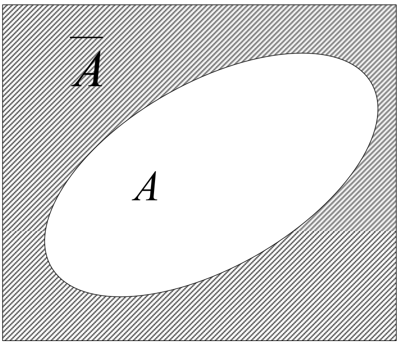


Рисунок 2.3

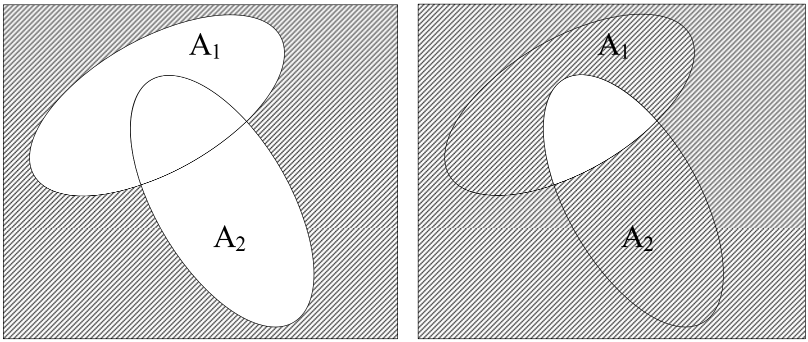
Область $\overline{A}$ (рис. 2.3) доповнює A до повного простору можливих результатів досліду Ω. З визначення протилежної події випливає, що

$$\overline{(\overline{A})} = A; \ \overline{Щ}=\varnothing; \ \ \overline{\varnothing} = Щ \ . \tag{2.4}$$

Інші властивості протилежних подій відображені в законах де Моргана:

$$\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}; \quad \overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}\ , \qquad (2.5)$$

ілюстрацією яких є рис. 2.4 а і 2.4 б відповідно.



а) б)

Рис. 2.4

2.2 Аксіоми теорії ймовірностей

Зіставимо кожній події *A* число, назване, як і раніше, його ймовірністю, що позначається $P(A)$. Ймовірність як числова характеристика здійсненості події *A* повинна задовольняти такі аксіоми.

Аксіома 1. З кожною подією *A* із множини проведених випробувань пов'язується число $P(A)$, яке називається ймовірністю події *A* та відповідає умові

$$P(\varnothing) \le P(A) \le P(\Omega)\ , \qquad (2.6)$$

де $P(\Omega) = 1;\ P(\varnothing) = 0$ (усі можливі події становлять повну групу).

Аксіома 2. Ймовірність достовірної події дорівнює одиниці:

$$P(U) = 1. \qquad (2.7)$$

Аксіома 3. Якщо A_i і A_j - несумісні події, тобто $A_i \cap A_j = \varnothing$, то

$$P(A_i \cup A_j) = P(A_i) + P(A_j). \qquad (2.8)$$

Аксіому (2.8) можна узагальнити на будь-яку кінцеву кількість несумісних подій $\{A_i\}^n$:

$$P\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\} = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \qquad (2.9)$$

За допомогою аксіом можна обчислити ймовірності будь-яких подій (підмножин простору Ω) за допомогою ймовірностей елементарних подій.

Припустимо, що в досліді простір Ω можна подати у вигляді повної групи несумісних подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Згідно з (2.3) їх сума становить достовірну подію:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$$

Оскільки події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ несумісні, то згідно з аксіомами (2.6) і (2.9)

$$P\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\} = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(\Omega) = 1. \qquad (2.10)$$

Якщо події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ рівноможливі, то ймовірність кожної з них однакова і дорівнює

$$P(A_1) = P(A_2) = ... = P(A_n) = \frac{1}{n}.$$

Звідси безпосередньо випливає ***частотне визначення ймовірності*** будь-якої події A з рівноможливих:

$$P(A) = \frac{m_A}{n} \qquad (2.11)$$

як відношення кількості випадків m_A, що сприяють появі події A, до загальної кількості випадків (можливої кількості результатів досліду) n.

Вочевидь, що частотна оцінка ймовірності є не чим іншим як наслідком аксіоми складання ймовірностей. Уявивши, що число n необмежено зростає, можна спостерігати явище, що називається статистичним упорядкуванням, коли частота події A все менше змінюється і наближається до якогось постійного значення, яке і становить ймовірність події A.

2.3 Основні теореми теорії ймовірностей

2.3.1 Теорема складання ймовірностей. Якщо $A_1, A_2, ..., A_n$ - несумісні події і A - сума цих подій, то ймовірність події A дорівнює сумі ймовірностей подій $A_1, A_2, ..., A_n$:

$$P(A) = P\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\} = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \qquad (2.12)$$

Ця теорема безпосередньо виходить з аксіоми складання ймовірностей (2.8).

Зокрема, оскільки дві протилежні події A і $\overline{A}$ несумісні і утворюють повну групу, то сума їхніх ймовірностей

$$P(A)+P(\overline{A})=1. \qquad (2.13)$$

2.3.2 Теорема множення ймовірностей. Щоб сформулювати у загальному випадку теорему множення ймовірностей, введемо поняття умовної ймовірності.

Умовна ймовірність події A_1 при настанні події A_2 - це ймовірність події A_1, визначена у припущенні, що подія A_2 відбулася.

Ймовірність добутку (сумісної появи) двох подій A_1 і A_2 дорівнює ймовірності однієї з них, помноженої на умовну ймовірність іншої, в припущенні, що перша подія відбулася:

$$P(A_1 \cap A_2)=P(A_1)\,P(A_2|A_1)=P(A_2)\,P(A_1|A_2). \qquad (2.14)$$

Для будь-якої кінцевої кількості подій теорема множення має вигляд

$$P\{\bigcap_{i=1}^{n} A_i\} = P(A_1\,|A_2 \dots A_n)\cdot P(A_2\,|\,A_3 \dots A_n)\cdot \dots \times$$
$$\times P(A_{n-1}\,|\,A_n)\cdot P(A_n). \qquad (2.15)$$

У випадку, якщо події A_1 і A_2 незалежні, то відповідні умовні ймовірності

$$P(A_1\,|A_2)=P(A_1); \qquad P(A_2\,|\,A_1)=P(A_2),$$

тому теорема множення ймовірностей набирає вигляду

$$P(A_1 \cap A_2)=P(A_1)\,P(A_2), \qquad (2.16)$$

а для кінцевої кількості n незалежних подій

$$P\{\bigcap_{i=1}^{n} A_i\} = \prod_{i=1}^{n} P\{A_i\}. \qquad (2.17)$$

Наслідком правил складання і множення ймовірностей є ***теорема про повторення дослідів (схема Бернуллі)***: *досліди вважаються незалежними, якщо ймовірність того або іншого результату кожного з них не залежить від того, які результати мали інші досліди.*

Нехай у деякому досліді ймовірність події A дорівнює $P(A)=p$, ймовірність того, що вона не відбудеться, $P(\overline{A})=q$. Тоді згідно з (2.13)

$$P(A)+P(\overline{A})=p+q=1.$$

Якщо проводиться n незалежних дослідів, у кожному з яких подія A з'являється з імовірністю p, то ймовірність того, що в даній серії n дослідів подія A з'являється рівно m разів, визначається за виразом

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad (2.18)$$

де $C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ - біноміальний коефіцієнт.

Часто виникають задачі визначення ймовірності того, що деяка подія A відбудеться щонайменше m разів або не більше m разів. Подібна ймовірність визначається складанням ймовірності всіх результатів, які складають дану подію. Розрахункові вирази для цього типу ситуацій мають такий вигляд:

- P {Подія A відбудеться в n дослідах менше ніж m разів} $=\sum\limits_{i=0}^{m-1}P_n(i)$;
- P {Подія A відбудеться в n дослідах більше ніж m ра-

зів} $= \sum_{i=m+1}^{n} P_n(i)$;

- P {Подія A відбудеться в n дослідах не більше ніж m разів} $= \sum_{i=0}^{m} P_n(i)$;

- P {Подія A відбудеться в n дослідах не менше ніж m разів} $= \sum_{i=m}^{n} P_n(i)$,

де $P_n(i)$ визначається за (2.18).

При великих m обчислення біноміальних коефіцієнтів C_n^m і піднесення до великих ступенів p і q пов'язане із значними труднощами, тому доцільно застосовувати спрощені способи розрахунків. Наближення, що має назву *теорема Муавра-Лапласа*, використовується, якщо $npq>>1$, а $|m-np|<(npq)^{0,5}$, у такому разі вираз (2.18) записується як

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi pqn}} \exp(-\frac{(m-np)^2}{2npq}). \qquad (2.19)$$

2.4 Формули повної ймовірності і Бейєса

2.4.1 Формула повної ймовірності. Якщо за наслідками досліду можна зробити n припущень (гіпотез) H_1, H_2, ..., H_n, що становлять повну групу несумісних подій, то ймовірність події A, яка може з'явитися тільки з однією з цих гіпотез, визначається як

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i) \ , \qquad (2.20)$$

де $P(H_i)$ - ймовірність гіпотези H_i; $P(A|H_i)$ - умовна ймовірність події A при достовірності гіпотези H_i.

Оскільки подія A може з'явитися з однією з гіпотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$, то

$$A = (A \cap H_1) \cap (A \wedge H_2) \cap \ \ldots \cap (A \cap H_n),$$

але гіпотези $H_1, H_2, \ldots, H_n$ несумісні, тому

$$P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + \ldots. + P(A \cap H_n) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A \cap H_i).$$

З причини залежності події A від появи події (гіпотези) H_i згідно з (2.14) можемо записати

$$P(A \cap H_i) = P(H_i)\, P(A|\, H_i),$$

звідки і випливає вираз (2.20).

2.4.2 Теорема гіпотез (формула Бейєса). Якщо до досліду ймовірності гіпотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$ дорівнювали $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$, а в результаті досліду відбулася подія A, то нові (умовні) ймовірності гіпотез обчислюються як

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}{P(A)}. \quad (2.21)$$

Переддослідні (первинні) ймовірності гіпотез $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$ називаються ***апріорними***, а післядослідні - $P(H_1|\, A)$. $P(H_n|\, A)$ - ***апостеріорними.***

Теорема гіпотез є наслідком теореми множення та формули повної ймовірності. Доведення формули Бейєса випливає із попереднього матеріалу. Використовуючи формулу (2.14), отримаємо:

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}{P(A)},$$

звідки з урахуванням (2.20) отримуємо вираз (2.21).

Якщо після досліду, що дав подію A, проводиться ще один дослід, у результаті якого може відбутися чи не відбутися подія A_1, то умовна ймовірність цієї останньої події обчислюється за (2.20), в яку входять не колишні ймовірності гіпотез $P(H_i)$, а нові - $P(H_i| A)$:

$$P(A_1 \mid A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i \mid A) \cdot P(A_1 \mid H_i \cap A). \qquad (2.22)$$

Вираз (2.22) називають формулою *ймовірності майбутніх подій.*

Приклади

Приклад 1. Робота двигуна контролюється двома регуляторами. Розглядається визначений період часу t, протягом якого бажано забезпечити безвідмовну роботу двигуна. За наявності обох регуляторів двигун відмовляє з ймовірністю $q_{1,2}$, при роботі лише першого з них — із ймовірністю q_1, при роботі лише другого — із ймовірністю q_2, при відмові обох регуляторів — із ймовірністю q_0. Перший із регуляторів має надійність P_1, другий — P_2. Усі елементи виходять із ладу незалежно один від одного. Визначити повну надійність (ймовірність безвідмовної роботи) двигуна.

Розв'язання. Розглянемо гіпотези:

$H_{1,2}$ — працюють обидва регулятори;

H_1 — працює лише перший регулятор (другий вийшов із ладу);

H_2 — працює лише другий регулятор (перший вийшов із ладу);

H_3 — обидва регулятори вийшли з ладу.

Подія A — безвідмовна робота двигуна.

Ймовірності гіпотез дорівнюють:

$$P(H_{1,2})= P_1P_2; \qquad P(H_1)= P_1(1-P_2);$$

$$P(H_2)= P_2(1- P_1); \quad P(H_0)= (1-P_1)(1-P_2).$$

Умовні ймовірності події A при цих гіпотезах задані:

$$P(A|\, H_{1,2})=1- q_{1,2}\,; \quad P(A|\, H_1)=1- q_1;$$

$$P(A|\, H_2)= 1- q_2; \qquad P(A|\, H_0)=1- q_0.$$

За формулою (2.20) отримаємо:

$$P(A)=P_1P_2(1-q_{1,2})+P_1(1-P_2)(1-q_1)+P_2(1-P_1)(1-q_2)+$$
$$+(1-P_1)(1-P_2)(\,1- q_0).$$

Приклад 2. Прилад може збиратися з високоякісних деталей і з деталей звичайної якості; взагалі близько 40% приладів збирається з високоякісних деталей. Якщо прилад зібраний із високоякісних деталей, то його ймовірність безвідмовної роботи за час t дорівнює 0,95; якщо з деталей звичайної якості — ймовірність безвідмовної роботи цього приладу за час t дорівнює 0,7. Прилад випробовувався протягом часу t і працював безвідмовно. Знайти ймовірність того, що він зібраний із високоякісних деталей.

Розв'язання. Можливі дві гіпотези: H_1 — прилад зібраний із високоякісних деталей; H_2 — прилад зібраний із деталей звичайної якості. Ймовірність цих гіпотез до досліду:

$$P(H_1) = 0{,}4; \quad P(H_2) = 0{,}6.$$

У результаті досліду спостережувана подія A — прилад безвідмовно працював час t. Умовні ймовірності цієї події при гіпотезах H_1 і H_2 дорівнюють

$$P(A|\,H_1) = 0{,}95; \qquad P(A|\,H_2) = 0{,}7.$$

За формулою (2.21) знаходимо ймовірність гіпотези H_1 після досліду:

$$P(H_1|A) = (0{,}4 \cdot 0{,}95)/(\,0{,}4 \cdot 0{,}95 + 0{,}6 \cdot 0{,}7) = 0{,}475.$$

Контрольні питання

1. Дайте визначення поняттям: подія, множина, сумісні (несумісні) події, залежні (незалежні) події, протилежна подія, повна група подій.
2. Поясніть поняття суми та добутку подій, наведіть формули для їх визначення.
3. Сформулюйте аксіоми теорії ймовірностей.
4. Дайте визначення та поясніть теорему складання ймовірностей.
5. Дайте визначення та поясніть теорему множення ймовірностей.
6. Наведіть формулу повної ймовірності. Поясніть її сенс.
7. Наведіть формулу теореми гіпотез (формулу Бейєса).

Розділ 3

ПОКАЗНИКИ БЕЗВІДМОВНОСТІ ОБ'ЄКТІВ

Найбільш важливі показники надійності об'єктів - показники безвідмовності, до яких належать:

– *ймовірність безвідмовної роботи;*
– *щільність розподілу відмов;*
– *інтенсивність відмов;*
– *середнє напрацювання до відмови.*

Показники надійності подаються у двох формах (визначеннях):

– *статистичні* (вибіркові оцінки);
– *ймовірнісні*.

Статистичні визначення (вибіркові оцінки) показників отримують за результатами випробувань на надійність.

Для позначення статистичних оцінок використовуватимемо знак ˆ зверху.

3.1 Ймовірність безвідмовної роботи

Основною кількісною характеристикою безвідмовності прийнято вважати *ймовірність безвідмовної роботи* на заданому часовому інтервалі, тобто ймовірність того, що напрацювання *T* до першої відмови більше заданої величини *t*. Інакше кажучи, ймовірність безвідмовної роботи визначається як ймовірність того, що в межах заданого напрацювання *T* відмова системи не відбудеться [5]:

$$P(t)=P\{T>t\}, \quad t>0. \tag{3.1}$$

Статистична оцінка ймовірності безвідмовної роботи (емпірична функція надійності) визначається відношенням кількості $N(t)$ об'єктів, що безвідмовно працювали до моменту напрацювання t, до кількості N об'єктів, справних до початку випробувань ($t = 0$), тобто до загальної кількості об'єктів N:

$$\hat{P}(t) = \frac{N(t)}{N} = \frac{N - n(t)}{N} \quad , \tag{3.2}$$

де $n(t)$– кількість об'єктів, що відмовили до моменту часу t. Тобто оцінку ймовірності безвідмовної роботи можна розглядати як показник частини працездатних об'єктів до моменту напрацювання t.

Оскільки $N(t)= N - n(t)$, то ймовірність безвідмовної роботи за формулою (3.2) можна виразити формулою

$$\hat{P}(t) = 1 - \frac{n(t)}{N} = 1 - \hat{Q}(t)\,, \tag{3.3}$$

де $\hat{Q}(t) =$ $n(t)/ N$ - *оцінка ймовірності відмови*.

У статистичному визначенні оцінка $\hat{Q}$ ймовірності відмови становить емпіричну функцію розподілу відмов.

Оскільки події, що полягають у настанні або ненастанні відмови до моменту напрацювання t, є протилежними, то

$$\hat{P}(t) + \hat{Q}(t) = 1\,. \tag{3.4}$$

Неважко переконатися, що ймовірність безвідмовної роботи є такою, що спадає, а ймовірність відмови - зростаючою функцією напрацювання. Дійсно:

- у момент початку випробувань $t = 0$ кількість працездатних об'єктів дорівнює загальній їх кількості $N(0)= N,$ а кількість тих, що відмовили, $n(0)=0$. Тому $\hat{P}(0)=1$, а $\hat{Q}(0)=0$;

- при $t\to\infty$ усі об'єкти, поставлені на випробування, відмовлять, тобто $N(\infty)=0$, а $n(\infty)=N$. Тому $\hat{P}(\infty)=0$, а $\hat{Q}(\infty)=1$.

Вочевидь, ймовірність відмови буде функцією розподілу випадкової величини T і являє собою ймовірність того, що напрацювання до відмови виявиться менше деякого заданого напрацювання t:

$$Q(t)=P\{T<t\}. \tag{3.5}$$

Графіки *ймовірності безвідмовної роботи* та *ймовірності відмови* наведені на рис. 3.1.

Зі зростанням кількості N (збільшенням вибірки) випробовуваних об'єктів $\hat{P}(t)$ і $\hat{Q}(t)$ збігаються за ймовірністю (наближаються за значеннями) до $P(t)$ і $Q(t)$.

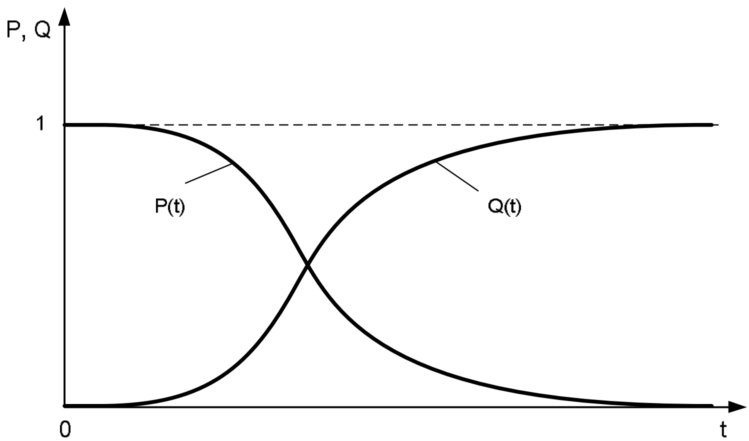


Рисунок 3.1

Збіг за ймовірністю подається так:

$$P\{\lim_{N \to \infty} \left| \hat{P}(t) - P(t) \right| = 0\} = 1 . \qquad (3.6)$$

Практичний інтерес являє визначення ймовірності безвідмовної роботи в *інтервалі напрацювання* $[t,\ t+\Delta t]$ за умови, що об’єкт безвідмовно працював до початку цього інтервалу часу. Визначимо цю ймовірність, використовуючи теорему множення ймовірностей і виділивши такі події:

– A = { безвідмовна робота об’єкта до моменту t };

– B = { безвідмовна робота об’єкта в інтервалі Δt };

– $C=A \cap B$={безвідмовна робота об’єкта до моменту $t+\Delta t$}.

Вочевидь, $P(C)= P(A \cap B)= P(A) \cdot P(B|A)$, оскільки події A і B будуть залежними.

Умовна ймовірність $P(B|A)$ являє собою ймовірність безвідмовної роботи $P(t,\ t+\Delta t)$ в інтервалі $[t,\ t+\Delta t]$, тому

$$P(B|\ A)= P(t,\ t + \Delta t)= P(C)/\ P(A)= P(t + \Delta t)/\ P(t). \qquad (3.7)$$

Ймовірність відмови в інтервалі напрацювання $[t,\ t+\Delta t]$ із урахуванням (3.7) дорівнює:

$$\begin{aligned} Q(\ t,\ t + \Delta t\ ) &= 1 - P(\ t,\ t + \Delta t\ )= \\ &= [\ P(t\ ) - P(t + \Delta\ t\ )]\ /\ P(t\ ). \end{aligned} \qquad (3.8)$$

Для випадку з’єднання елементів системи, наведеного на рис. 1.1 (послідовне з’єднання) визначимо ймовірність безвідмовної роботи системи з незалежними і випадковими відмовами цих елементів впродовж часу t.

Якщо A_i – подія, що полягає в безвідмовній роботі i–го елемента протягом інтервалу $(0,t)$, тоді згідно з теоремою множення ймовірностей ймовірність безвідмовної роботи системи дорівнює добутку ймовірностей безвідмовної роботи її елементів:

$$P(t) = \prod_{i=1}^{n} p_i(t). \tag{3.9}$$

Для системи, що складається з двох елементів, з’єднаних паралельно (рис.1.2), ймовірність безвідмовної роботи системи протягом часового інтервалу $(0,t)$ за умови, що елемент 1 – робочий, 2 – резервний, а відмови елементів випадкові і незалежні, здійснюється наступним чином.

Система працює безвідмовно впродовж заданого інтервалу часу при здійсненні однієї з несумісних подій:

– A_1 - за час t не відмовить жоден елемент;

– A_2 - за час t відмовить елемент 2, а елемент 1 буде працювати безвідмовно;

– A_3 - за час t відмовить елемент 1, а елемент 2 буде працювати безвідмовно.

На основі формули (2.12) ймовірність безвідмовної роботи системи протягом часу t дорівнює сумі ймовірностей подій A_1, A_2, A_3, тобто

$$P(A)=P(A_1)+ P(A_2)+ P(A_3).$$

Прийнявши ймовірності безвідмовної роботи елементів 1 і 2 відповідно $P_1(t)$ та $P_2(t)$, згідно з теоремою множення ймовірностей отримаємо:

$$P(A_1) = P_1(t) \cdot P_2(t);$$

$$P(A_2) = P_1(t) \cdot [1-P_2(t)];$$

$$P(A_3) = [1-P_1(t)] \cdot P_2(t).$$

Підставивши отримані вирази у формулу (2.12), отримуємо

$$P(t) = P_1(t) + P_2(t) - P_1(t) \cdot P_2(t). \qquad (3.10)$$

3.2 Щільність розподілу відмов

Статистична оцінка щільності розподілу відмов визначається відношенням кількості $\Delta n(t,\ t + \Delta t)$ об'єктів, що відмовили в інтервалі напрацювання $[t,\ t + \Delta t]$, до добутку загальної кількості N об'єктів на тривалість інтервалу напрацювання Δt:

$$\hat{f}(t) = \frac{\Delta n(t, t+\Delta t)}{N \cdot \Delta t} \text{ (од.напрацювання}^{-1}\text{)}. \qquad (3.11)$$

Оскільки $\Delta n\ (t,\ t + \Delta t) = n\ (t + \Delta t) - n(t)$,

де $n(t + \Delta t)$ - кількість об'єктів, що відмовили до моменту напрацювання $t + \Delta t$, оцінку щільності розподілу відмов можна подати так:

$$\hat{f}(t) = \frac{n(t+\Delta t) - n(t)}{N \cdot \Delta t} =$$
$$= \frac{1}{\Delta t}[\hat{Q}(t+\Delta t) - \hat{Q}(t)] = \frac{\hat{Q}(t, t+\Delta t)}{\Delta t}, \qquad (3.12)$$

де $\hat{Q}(t, t+\Delta t)$ - оцінка ймовірності відмови в інтервалі напрацювання, тобто приріст ймовірності відмови за час Δt.

Оцінка щільності розподілу відмов являє собою «частоту» відмов, тобто кількість відмов за одиницю часу напрацювання, віднесену до початкової кількості об'єктів.

Ймовірнісне визначення щільності розподілу відмов випливає з (3.12) при прямуванні інтервалу напрацювання $\Delta t \to 0$ і збільшенні об'єму вибірки $N \to \infty$:

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\hat{Q}(t, t + \Delta t)}{\Delta t} = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{d[1 - P(t)]}{dt} = -\frac{dP(t)}{dt}. \quad (3.13)$$

Щільність розподілу відмов, по суті, є щільністю розподілу (щільністю ймовірності) випадкової величини T напрацювання об'єкта до відмови.

Оскільки $Q(t)$ є функцією свого аргументу, що не спадає, то $f(t) > 0$. Один з можливих видів графіка $f(t)$ наведений на рис.3.2.

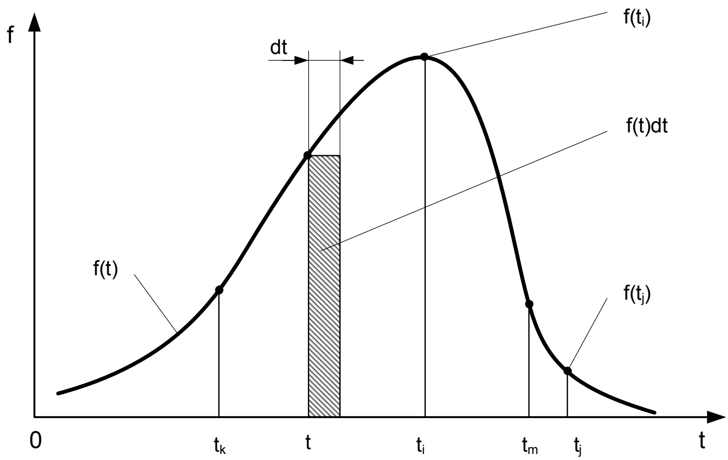


Рисунок 3.2

Як видно з рис.3.2, щільність розподілу відмов $f(t)$ характеризує частоту відмов (або зведену ймовірність відмов), з якою розподіляються конкретні значення напрацювань усіх N об'єктів ($t_1, \ldots, t_N$), які складають випадкову величину напрацювання до відмови об'єкта даного типу.

Припустимо, у результаті випробувань встановлено, що значення напрацювання t_i властиве найбільшій кількості об'єктів, про що свідчить максимальна величина $f(t_i)$. Навпаки, велике напрацювання t_j було зафіксоване тільки у декількох об'єктів, тому і частота $f(t_j)$ появи такого напрацювання на загальному фоні буде малою.

Відкладемо на осі абсцис (рис. 3.2) деяке напрацювання t і нескінченно малий інтервал напрацювання шириною dt, що примикає до t. Тоді ймовірність потрапляння випадкової величини напрацювання T на елементарну ділянку шириною dt

$$P\{T \in (t, t+dt)\} = P\{t < T < t+dt\} \approx f(t)dt \,. \quad (3.14)$$

Геометрично $f(t)dt$ - це площа заштрихованого прямокутника, що спирається на відрізок dt.

Аналогічно ймовірність потрапляння напрацювання T в інтервал $[t_k, t_m]$ дорівнює

$$P\{T \in (t_k, t_m)\} \underset{t_i \in (t_k, t_m)}{\approx} \sum f(t_i)dt_i \approx \int_{t_k}^{t_m} f(t)dt \,, \quad (3.15)$$

що геометрично інтерпретується площею під кривою $f(t)$, яка спирається на ділянку $[t_k, t_m]$.

Ймовірність відмови та ймовірність безвідмовної роботи можна виразити у функції щільності розподілу відмов. Оскільки $Q(t)=P\{T<t\}$, то, використовуючи вираз (3.15), отримаємо

$$Q(t) = P\{0 < T < t\} = P\{T \in (0, t)\} = \int_0^t f(t)dt \,. \quad (3.16)$$

Розширення інтервалу зліва до нуля викликане тим, що час T не може бути від'ємним.

Оскільки $P(t)= P\{T>t\}$, то

$$P(t) = P\{t \le T < \infty\} = \int_{t}^{\infty} f(t)dt \ . \qquad (3.17)$$

Вочевидь, $Q(t)$ являє собою площу (рис. 3.2) під кривою $f(t)$ зліва від t, а $P(t)$ - площа під $f(t)$ праворуч від t. Оскільки всі отримані при випробуваннях значення напрацювань лежать під кривою $f(t)$, то

$$\int_{0}^{\infty} f(t)dt = \int_{0}^{t} f(t)dt + \int_{t}^{\infty} f(t)dt = Q(t) + P(t) = 1 . \qquad (3.18)$$

3.3 Інтенсивність відмов

Статистична оцінка інтенсивності відмов визначається відношенням кількості об'єктів $\Delta n(t,\ t + \Delta t)$, що відмовили в інтервалі напрацювання $[t,\ t + \Delta t]$, до добутку кількості $N(t)$ працездатних об'єктів у момент t на тривалість інтервалу напрацювання Δt:

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{\Delta n(t, t + \Delta t)}{N(t) \cdot \Delta t} \text{ (од.напрацювання}^{-1}\text{)}. \qquad (3.19)$$

Можна відзначити, що інтенсивність відмов *дещо повніше характеризує надійність об'єкта на момент напрацювання t*, оскільки показує частоту відмов, віднесену до фактично працездатної кількості об'єктів на момент напрацювання t.

Імовірнісне визначення інтенсивності відмов отримаємо, помноживши і поділивши праву частину виразу (3.19) на N:

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{\Delta n(t, t+\Delta t)}{N(t)\cdot \Delta t}\cdot\frac{N}{N} = \frac{\Delta n(t, t+\Delta t)}{N\cdot \Delta t}\cdot\frac{N}{N(t)}.$$

З урахуванням (2.10) оцінку інтенсивності відмов $\hat{\lambda}(t)$ можна представити так:

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{\hat{Q}(t, t+\Delta t)}{\Delta t}\cdot\frac{1}{\hat{P}(t)},$$

звідки при $\Delta t \to 0$ отримуємо

$$\hat{\lambda}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\hat{Q}(t, t+\Delta t)}{\Delta t}\cdot\frac{1}{\hat{P}(t)} = \frac{dQ(t)}{dt}\cdot\frac{1}{P(t)} = \frac{f(t)}{P(t)}. \quad (3.20)$$

Таким чином, і*нтенсивність відмов* – це умовна щільність ймовірності відмови невідновлюваного об’єкта, яка визначається для моменту t за умови, що до цього моменту відмова ще не виникла. На рис. 3.3 наведені графіки можливих видів зміни інтенсивності відмов $\lambda(t)$.

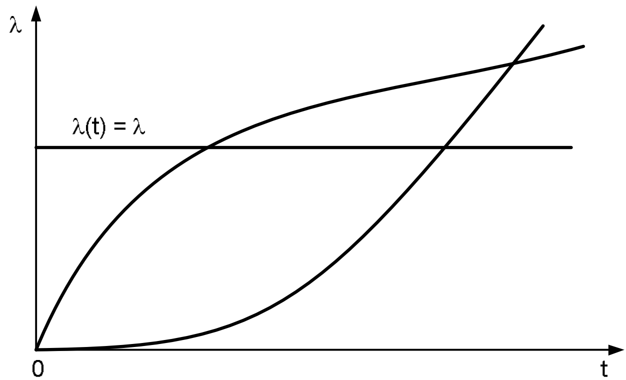


Рисунок 3.3

3.4 Взаємозв'язок показників надійності

Вище наведені вирази (3.16,3.17), що визначають ймовірність безвідмовної роботи та ймовірність відмов у функції щільності розподілу відмов $f(t)$. Оскільки інтенсивність відмов $\lambda(t)$ є більш повною характеристикою надійності, то виразимо $P(t)$ через $\lambda(t)$.

Використовуючи вираз (3.20) для інтенсивності відмов, з урахуванням (3.13) отримаємо

$$dP(t)\,/dt = -\,\lambda(t)\cdot P(t).$$

Розділяючи змінні (помноживши обидві частини рівняння на $dt/P(t)$), отримаємо

$$dP(t)/\,P(t) = -\,\lambda(t)\,dt.$$

Інтегруючи обидві частини рівняння від 0 до t і беручи до уваги, що при $t=0$ ймовірність безвідмовної роботи об'єкта $P(0)=1$, отримуємо

$$\int_0^t \frac{dP(t)}{P(t)} = \ln P(t)\,\Big|_0^t = \ln P(t) = -\int_0^t \lambda(t)dt\,,$$

звідки рівняння зв'язку основних показників надійності набирає вигляду

$$P(t) = \exp\{-\int_0^t \lambda(t)dt\}\ . \qquad (3.21)$$

Підінтегральний вираз $\lambda(t)dt$ є ймовірністю того, що елемент, який безвідмовно працював в інтервалі напрацювання $(0,\ t)$, відмовить в інтервалі $[t,\ t + dt]$.

Рівняння зв'язку показує, що всі показники надійності

$P(t)$, $Q(t)$, $f(t)$ і $\lambda(t)$ рівноправні в тому сенсі, що, знаючи один із них, можна визначити інші. Функціональний зв'язок показників надійності поданий у таблиці 3.1.

Таблиця 3.1

Відомий показник надійності	Формули для визначення інших показників			
	$q(t)$	$f(t)$	$p(t)$	$\lambda(t)$
$q(t)$	--	$\frac{dq(t)}{dt}$	$1-q(t)$	$\frac{1}{1-q(t)}\frac{dq(t)}{dt}$
$f(t)$	$\int_0^t f(t)dt$	--	$1-\int_0^t f(t)dt$	$\frac{f(t)}{1-\int_0^t f(t)dt}$
$p(t)$	$1-p(t)$	$\frac{dp(t)}{dt}$	--	$-\frac{1}{p(t)}\frac{dp(t)}{dt}$
$\lambda(t)$	$1-e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$	$\lambda(t)\cdot e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$	$e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$	--

3.5 Кількісні характеристики безвідмовності невідновлюваних об'єктів

Розглянуті вище функціональні показники надійності $P(t)$, $Q(t)$, $f(t)$ і $\lambda(t)$ повністю описують випадкову величину напрацювання $T \in \{0, t_1, ..., t_N\}$. У той самий час для вирішення ряду практичних завдань іноді достатньо знати деякі кількісні характеристики цієї випадкової величини і, в першу чергу, *середнє напрацювання до відмови*.

Візьмемо наступну *схему випробувань* для оцінки надійності. Нехай на випробування поставлено N однакових серійних об'єктів. Умови випробувань ідентичні, а випробування кожного з об'єктів проводяться до його відмови. Введемо такі позначення:

– $N(t)$ - кількість об'єктів, що зберегли свою працездатність на момент часу t;

– $n(t)$ - кількість об'єктів, що відмовили до моменту напрацювання t;

– $n(t, t + \Delta t)$ - кількість об'єктів, що відмовили в інтервалі напрацювання $[t, t + \Delta t]$.

Припустимо, що в ході випробувань якоїсь кількості однотипних об'єктів N отримане кінцеве число параметра, що нас цікавить, - напрацювання T до відмови. Отримані числа яляють собою вибірку деякого об'єму із загальної «генеральної сукупності», що має необмежений обсяг даних про напрацювання об'єкта до відмови.

Кількісні показники, визначені для «генеральної сукупності», є *істинними (у ймовірнісному сенсі)* показниками, оскільки об'єктивно характеризують випадкову величину - напрацювання до відмови.

Показники, визначені для вибірки, які дозволяють зробити певні висновки про випадкову величину, є *вибірковими (статистичними) оцінками.* Вочевидь, при досить великій кількості випробувань (великій вибірці) оцінки *наближаються* до ймовірнісних показників.

Ймовірнісна форма представлення показників зручна при аналітичних розрахунках, а статистична - при експериментальному дослідженні надійності.

Статистична оцінка середнього напрацювання до відмови

$$\hat{T}_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i \quad , \tag{3.22}$$

де t_i - напрацювання до відмови i-го об'єкта.

При *імовірнісному визначенні* середнє напрацювання до відмови є *математичним очікуванням* (МО) випадкової величини T і визначається так:

$$T_0 = M(T) = \int_0^{\infty} t \cdot f(t)dt \ , \qquad (3.23)$$

де $M(T)$ – математичне очікування величини T.

Використовуючи вираз для щільності розподілу відмов і інтегрування по частинах, (3.23) можна перетворити до вигляду

$$T_0 = \int_0^{\infty} P(t)dt \qquad (3.24)$$

з урахуванням того, що $P(0)= 1$, $P(\infty) = 0$.

З (3.24) випливає, що середнє напрацювання до відмови геометрично інтерпретується як площа під кривою $P(t)$, як це показано на рис. 3.4.

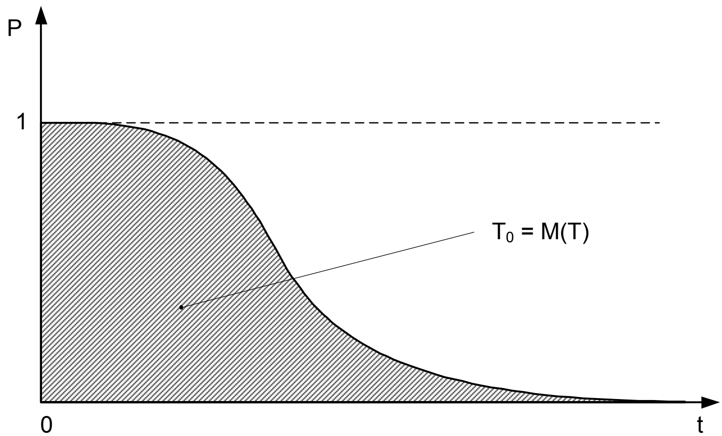


Рис. 3.4

Якщо $\lambda(t) = \lambda=const$, то з урахуванням формул (3.21), (3.24) отримуємо:

$$T_0 = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \quad . \tag{3.25}$$

Вочевидь, зі збільшенням вибірки випробувань $N \to \infty$ середнє арифметичне напрацювання (оцінка $\hat{T}_0$) збігається за ймовірністю з МО напрацювання до відмови.

МО напрацювання T_0 означає очікуване напрацювання до відмови однотипних елементів, тобто усереднене напрацювання до першої відмови.

На практиці також становлять інтерес умовні середні напрацювання:

1) *середнє корисне напрацювання* ($T_0 |_{t \le t1}$) визначене за умови, що, досягши напрацювання $t1$, об'єкти, які все ж залишилися працездатними, знімаються з експлуатації;

2) *середня тривалість майбутньої роботи* ($T_0 |_{t > t1}$) за умови, що об'єкт безвідмовно працював на інтервалі ($0, t1$).

Причини використання цих показників:

1. Високонадійні об'єкти (елементи електронних схем), як правило, експлуатуються менший термін, ніж T_0, тобто заміняються внаслідок морального старіння раніше, ніж встигають напрацювати T_0.
2. Часто для високонадійних об'єктів скорочують період випробувань (випробування проводять до напрацювань, що відповідають їх моральному старінню), тому T_0 у такому разі розуміють як середнє напрацювання, яке дійсно мало б місце, якби інтенсивність відмов залишалася такою, якою вона була у початковий період випробувань.

Середнє корисне напрацювання (за аналогією з T_0)

$$T_0 |_{t \le t1} = \int_0^{t1} P(t) dt \, . \tag{3.26}$$

Середня тривалість майбутньої роботи

$$T_0\,|_{t>t1} = M\{T - t1\} = \frac{1}{P(t1)}\int_{t1}^{\infty} P(t)dt\,. \qquad (3.27)$$

Графічну інтерпретацію характеристик $T_0|_{t \le t1}$ і $T_0|_{t > t1}$ ілюструє рис. 3.5.

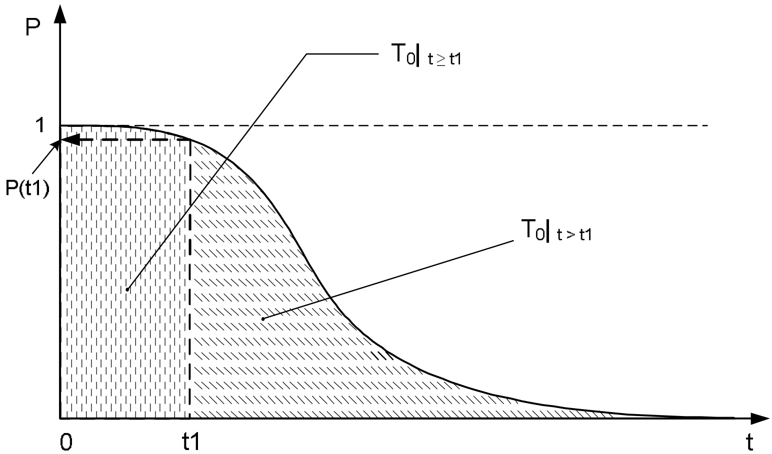


Рисунок 3.5

Середнє напрацювання не може повністю характеризувати безвідмовність об'єкта. Так, при однакових середніх напрацюваннях до відмови T_0 надійність об'єктів 1 і 2 може досить істотно розрізнятися (рис.3.6). Вочевидь, що з причини більшого розсіювання напрацювання до відмови (крива щільності розподілу відмов $f_2(t)$ нижча і ширша), об'єкт 2 менш надійний, ніж об'єкт 1. Тому для оцінки надійності об'єкта за величиною $\hat{T}_0$ необхідно ще знати і показник розсіювання випадкової величини $T \in \{t\}$ біля середнього напрацювання T_0.

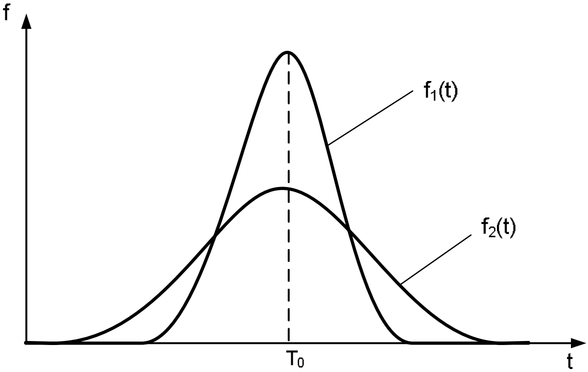


Рисунок 3.6

До показників розсіювання відносять *дисперсію* і *середнє квадратичне відхилення* (*СКВ*) *напрацювання до відмови*.

Дисперсія випадкової величини напрацювання:

- статистична оцінка

$$\hat{D} = \frac{1}{N-1}\sum_{1}^{N}(t_i - \hat{T}_0)^2 \quad ; \qquad (3.28)$$

- імовірнісне визначення

$$D = D\{T\} = M\{(T - T_0)^2\} = \int_0^{\infty}(t - T_0)^2 f(t)dt\,; \qquad (3.29)$$

СКВ випадкової величини напрацювання:

$$\hat{S}^2 = \hat{D} \text{ або } S^2 = S^2\{T\} = D\{T\}\,. \qquad (3.30)$$

Середнє напрацювання до відмови T_0 і *СКВ* напрацювання S мають розмірність «од. напрацювання», а дисперсія D – «од. напрацювання^2».

Приклади

Приклад 1. У результаті випробувань 1000 елементів відмовило 55 елементів протягом напрацювання 250 годин. Яка ймовірність безвідмовної роботи та відмови елементів протягом даного напрацювання?
Розв'язання. Згідно з виразами (3.2), (3.3):

$$\hat{P}(t) = \frac{1000-55}{1000} = 0{,}945\,;\ \hat{Q}(t) = \frac{55}{1000} = 0{,}055\,.$$

Приклад 2. Прилад може працювати у двох режимах: 1 і 2. Режим 1 спостерігається у 80% випадків, режим 2 - у 20% випадків за час роботи Т. Ймовірність того, що прилад відмовить при роботі в режимі 1 дорівнює 0,1, а ймовірність відмови приладу в режимі 2 – 0,7. Знайти ймовірність відмови приладу за час Т.
Розв'язання. Прилад працює у першому режимі з ймовірністю 80%, у другому-з ймовірністю 20%. Отже, ймовірність відмови приладу визначається як

$$Q=0{,}8Q_1+0{,}2\ Q_2=0{,}08+0{,}14=0{,}22,$$

де Q_1 і Q_2 – ймовірності відмови приладу у першому та другому режимах відповідно.

Приклад 3. Прилад складається з 4 блоків. Структурна схема надійності приладу наведена на рис. 3.7. Ймовірність того, що за час Т роботи приладу відмовить блок 1, дорівнює 0,1; блок 2 – 0,2; блок 3 – 0,3; блок 4 – 0,4. Знайти ймовірність того, що за час Т прилад пропрацює безвідмовно.

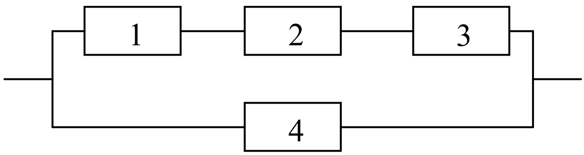


Рисунок 3.7

Розв'язання. Визначимо ймовірність безвідмовної роботи кожного з елементів приладу, використовуючи залежність (3.3). Отже,

$$P_1=1-Q_1;\ P_2=1-Q_2;\ P_3=1-Q_3;\ P_4=1-Q_4,$$

де P_i і Q_i –ймовірність безвідмовної роботи та ймовірність відмови i - го елемента. Перетворимо задану структурну схему надійності в еквівалентну (рис.3.8), визначивши ймовірність безвідмовної роботи ділянки приладу протягом часу Т, що складається з блоків 1,2,3, згідно з формулою (3.9). Отже, отримаємо

$$P_{123}= P_1 P_2 P_3=(1-Q_1)(1-Q_2)(1-Q_3)=0,9\cdot 0,8\cdot 0,7=0,504.$$

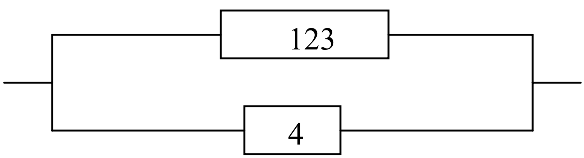


Рисунок 3.8

Далі за формулою (3.10) визначаємо ймовірність безвідмовної роботи приладу протягом часу T :

$$P= P_{123}+ P_4- P_{123} P_4=0,504+0,4-0,504\cdot 0,4=0,7024.$$

Контрольні питання

1. Перелічіть показники безвідмовності об'єкта і поясніть, у чому відмінності статистичних оцінок надійності від ймовірнісної форми їх подання.
2. Дайте визначення ймовірності безвідмовної роботи об'єкта.
3. Чим відрізняється ймовірність безвідмовної роботи об'єкта до напрацювання t від імовірності безвідмовної роботи в інтервалі напрацювання $[t, t + \Delta t]$?
4. Дайте визначення щільності розподілу відмов при оцінці надійності об'єкта.
5. Дайте графічну інтерпретацію понять ймовірності безвідмовної роботи та ймовірності відмов.
6. Дайте визначення інтенсивності відмов при оцінці надійності об'єкта.
7. Дайте визначення статистичної оцінки та ймовірнісного подання середнього напрацювання до відмови.
8. Перелічіть умовні середні напрацювання до відмови і поясніть умови їх використання.
9. Дайте визначення статистичних оцінок та ймовірнісного подання характеристик розсіювання випадкової величини напрацювання.

Розділ 4

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТЕОРІЇ НАДІЙНОСТІ. СТАТИСТИЧНА ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ВИПРОБУВАНЬ

Для вирішення завдань з оцінки надійності і прогнозування працездатності об'єкта необхідно мати математичну модель, яка представлена аналітичними виразами одного з показників $P(t)$, $f(t)$ і $\lambda(t)$. Основний шлях для отримання моделі полягає у проведенні випробувань, обчисленні статистичних оцінок та їх апроксимації аналітичними функціями. У цьому розділі будуть розглянуті моделі, що використовуються в теорії надійності.

4.1 Моделі надійності

З'ясуємо, як змінюється безвідмовність об'єктів при їх експлуатації, що дозволить класифікувати моделі і визначити можливості їх застосування. Досвід експлуатації показує [6], що зміна інтенсивності відмов $\lambda(t)$ переважної більшості об'єктів описується U - подібною кривою (рис. 4.1). Криву (рис. 4.1) можна умовно розділити на три характерні ділянки:

- перша - період припрацювання;
- друга - період нормальної експлуатації;
- третя - період старіння об'єкта.

Період припрацювання об'єкта має підвищену інтенсивність відмов, викликану відмовами припрацювання, зумовленими дефектами виробництва, монтажу, налагодження. Іноді із закінченням цього періоду пов'язують гарантійне обслуговування об'єкта, коли усунення відмов проводиться виготовлювачем.

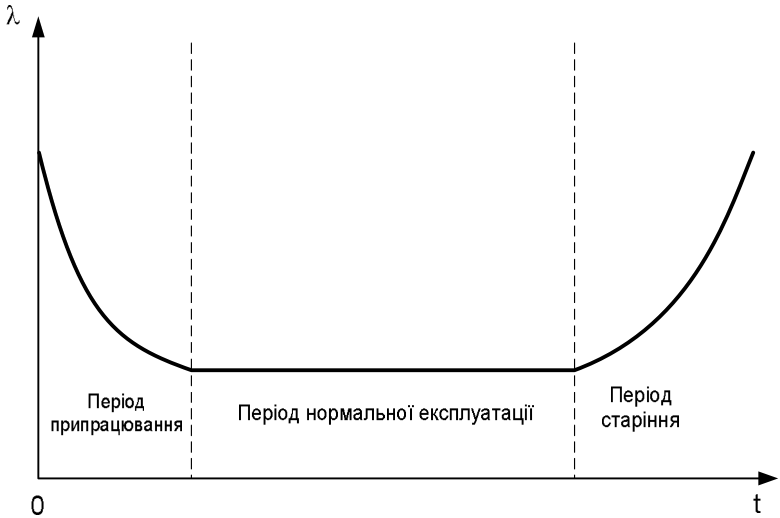


Рисунок 4.1

У *період нормальної експлуатації* інтенсивність відмов зменшується і практично залишається постійною, при цьому відмови мають випадковий характер і з'являються раптово, перш за все внаслідок недотримання умов експлуатації, випадкових змін навантаження, несприятливих зовнішніх чинників і т.п. Саме цей період відповідає основному часу експлуатації об'єкта.

Зростання інтенсивності відмов належить до *періоду старіння* об'єкта і викликане збільшенням кількості відмов від причин, пов'язаних із тривалою експлуатацією.

Вид аналітичної функції, що описує зміну показників надійності $P(t)$, $f(t)$ або $\lambda(t)$, визначає ***закон розподілу випадкової величини***, який вибирається залежно від властивостей об'єкта, умов його роботи і характеру відмов.

4.2 Експериментальне визначення показників надійності. Плани випробувань

Забезпечення надійності виробів неможливе без достовірних даних про надійність їх елементів. Найбільш поширеним шляхом одержання таких даних є обробка інформації про відмови під час випробувань на надійність. Унаслідок цього всі провідні фірми, які виробляють електронне обладнання, мають випробувальні центри [7].

Види випробувань на надійність можна розділити на дві основні групи: *визначальні і контрольні.* У результаті проведення *визначальних* випробувань знаходять кількісні показники надійності. Мета *контрольних* випробувань - виявлення відповідності кількісних показників надійності вимогам технічних умов.

Важливе значення при проведенні випробувань має відтворення факторів, що впливають на надійність технічних засобів. Вибір цих факторів залежить від призначення і умов експлуатації випробовуваної апаратури. Найбільш важливими факторами, що враховуються при випробуваннях на надійність, є такі: тиск (високий, низький, вакуум); температура (висока, низька, діапазон і швидкість зміни); наявність твердих частинок (пісок, пил, град, сніг); склад атмосфери (горючі та агресивні гази, аерозолі); вид та рівень радіації (сонячна, космічна, ядерна); вологість (вогкість, цвіль, обмерзання, дощ, туман); вібрації, шуми, ударні навантаження, звукові хвилі; фізичні поля (електромагнітні, гравітаційні).

Залежно від величини навантаження розрізняють: випробування при номінальному навантаженні; прискорені випробування при граничному навантаженні; випробування на визначення допустимого навантаження. Перший вид випробувань відповідає нормальним умовам експлуатації. З метою прискорення випробувань часто використовують *форсований* режим роботи при граничному навантаженні, що призводить до більш швидкої появи відмов. Метою останнього виду випробувань є визначення величини навантаження, дія якого призводить до відмови системи за короткий час.

Важливе значення при експериментальній оцінці надійності має *план випробувань*. Плани відрізняються один від одного трудомісткістю, тривалістю, точністю та іншими параметрами. Державні стандарти встановлюють види подібних планів, у кожному з яких визначена кількість N об'єктів випробувань (ОВ); дії U, R або M , що виконуються при виникненні відмов (U - об'єкт, що відмовив, не відновлюють і не замінюють на справний; R - замінюють новим; M - відновлюють у процесі випробувань); T – час випробувань або напрацювання до припинення випробувань; r – кількість відмов або виробів, що відмовили. Умовні позначення цих планів і короткий їх зміст такі.

[NUT] - одночасно випробовують N об'єктів; об'єкти, що відмовили під час випробування, не відновлюють і не замінюють; випробування припиняють при досягненні напрацювання T.

[NUr] - те саме, що [NUT], але випробування припиняють, коли кількість ОВ досягла r (для r = N маємо різновид [NUN] цього плану або повну вибірку).

[NU(r,T)] - те саме, що і [NUT], але випробування припиняють, коли кількість ОВ досягне r або при досягненні напрацювання T - залежно від того, яка з цих умов буде виконана раніше.

[NRT] - те саме, що і [NUT], але ОВ замінюють на нові.

[NRr] - те саме, що і [NUr], але ОВ замінюють на нові.

[NR(r,T)] - те саме, що і [NU(r,T)], але ОВ замінюють на нові.

[NMT] - те саме, що і [NUT], але ОВ відновлюють.

[NMT_{Σ}] - те саме, що і [NUT], але ОВ відновлюють; випробування припиняють при досягненні сумарного за всіма об'єктами напрацювання T_{Σ}.

[NMr] - те саме, що і [NUr], але ОВ відновлюють.

[NM(r,T_{Σ})] - одночасно випробовують N об'єктів; ОВ відновлюють; випробування припиняють, коли сумарна за всіма об'єктами кількість відмов досягне r або при досягненні сумарного за всіма об'єктами напрацювання T_{Σ}.

[NU(r_1,n_1),(r_2,$n2_1$),…,(r_{k-1},n_{k-1}),r_k]- одночасно випробовують N об'єктів; ОВ при випробуваннях не відновлюють і не замінюють; після відмови r_i об'єктів (i = 1,2,...,k-1) з випробувань знімають n_i, об'єктів, що не відмовили; випробування припиняють після виникнення r_k відмов.

[NU(T_1,n_1),(T_2,$n2_1$),…,(T_{k-1},n_{k-1}),T_k]- те саме, що і попередній план, але з випробувань знімають n_i об'єктів, що не відмовили, при досягненні напрацювання T_i; випробування припиняють при досягненні напрацювання T_k.

[NUz] - одночасно випробовують N об'єктів; ОВ під час випробування не відновлюють і не замінюють; і-й об'єкт (i = 1,2, ...,N) випробовують протягом напрацювання τ_i.

У деяких планах об'єкти, що не відмовили, знімають з випробувань достроково. Необхідність цього може виникнути з ряду причин, наприклад, через відмову складових частин, надійність яких не досліджується з метою скорочення тривалості випробувань. Таку дію, що призводить до припинення випробувань об'єкта до настання відмови, прийнято називати *цензуруванням*. Обсяг випробувань у цьому випадку визначають напрацюваннями на відмови і напрацюваннями до цензурування випробовуваних об'єктів. Чим більша сума зазначених напрацювань по всіх випробуваних об'єктах, тим достовірніші результати випробувань, якими є так звана цензурована вибірка, елементами якої є значення напрацювань на відмови і напрацювань на цензурування всіх випробуваних об'єктів. За цензурованою вибіркою, наприклад, методом максимуму правдоподібності, визначають параметри розподілу і кількісні показники надійності.

Проте в сучасних умовах практично єдиним способом визначення даних щодо надійності ПЕОМ є збір даних щодо відмов її складових протягом експлуатації шляхом опитування користувачів. Статистичні дані у результаті опитування майже 10000 користувачів ПЕОМ були такі [8]: термін експлуатації 99% ПЕОМ був до 5 років (середній термін становив приблизно 2 роки); у 52% ПЕОМ відмов не було, у 24% - по одній відмові, у 12% - по дві відмови, у 1% - більше десяти відмов.

Причинами відмов були: накопичувачі HDD – 35%, материнська плата – 13%, FDD - 12%, блок живлення - 11%, відео карта і монітор - 8%, плати розширення - 7%, модулі оперативної пам’яті - 4%, кабелі і батареї живлення - по 2%, вимикачі, розніми, процесори - по 1%. Причинами відмов за цими блоками були: 78% - випадкові, 5% - необережна робота, 4% - підвищення напруги в мережі живлення, 2% - програмні помилки, 1% - наслідок дії блискавки, 10% - інші випадки.

Маючи дані, отримані при випробуваннях, легко визначити експериментальні функції надійності.

4.3 Статистична обробка результатів випробувань і визначення показників надійності

4.3.1. Постановка задачі. За наслідками випробувань N невідновлюваних однакових об’єктів отримана статистична вибірка - масив напрацювання (у будь-яких одиницях вимірювання) до відмови кожного з N об’єктів, що випробовувалися. Вибірка характеризує випадкову величину напрацювання до відмови об’єкта $T = \{t\}$. Необхідно вибрати закон розподілу випадкової величини T і перевірити правильність вибору за відповідним критерієм.

Підбір закону розподілу здійснюється на основі апроксимації (згладжування) експериментальних даних про напрацювання до відмови, які повинні бути наведені в найбільш компактному графічному вигляді. Вибір тієї або іншої апроксимуючої функції має характер гіпотези, яку висуває дослідник. Експериментальні дані можуть з більшою або меншою правдоподібністю підтверджувати або не підтверджувати справедливість тієї або іншої гіпотези. Тому дослідник повинен отримати відповідь на питання: чи узгоджуються результати експерименту з гіпотезою про те, що випадкова величина напрацювання підпорядкована вибраному ним закону розподілу? Відповідь на це питання дається у результаті розрахунку спеціальних критеріїв.

4.3.2 Алгоритм обробки результатів і розрахунку показників надійності.

1. *Формування статистичного ряду.*

При великій кількості випробовуваних об'єктів отриманий масив напрацювань $\{..., t_i ,....\}$ є громіздкою і мало наочною формою запису випадкової величини T. Тому для компактності і наочності вибірка подається у графічному зображенні статистичного ряду - гістограмі напрацювання до відмови. Для цього необхідно:

- встановити інтервал напрацювання $[t_{min} , t_{max}]$ та його довжину

$$\zeta_t = t_{max} - t_{min} ,$$

де $t_{min} \le MIN\{..., t_i ,....\}$, $t_{max} \ge MAX \{..., t_i ,....\}$;

- розбити інтервал напрацювання $[t_{min} , t_{max}]$ на k інтервалів (кроків гістограми) довжиною

$$\Delta t = \frac{\zeta_t}{k}, \Delta t = t_{i+1} - t_i = t_i - t_{i-1};$$

- підрахувати частоти появи відмов в усіх k інтервалах:

$$\hat{Q}_i = \frac{\Delta n(t_{i-1}, t_{i-1} + \Delta t)}{N} = \frac{\Delta n(t_{i-1}, t_i)}{N}, \qquad (4.1)$$

де $\Delta n(t_{i-1},\ t_{i-1} + \Delta t)$ - кількість об'єктів, що відмовили в інтервалі $[t_{i-1},\ t_{i-1} + \Delta t]$. Вочевидь, що $\sum_1^k Q_i = 1$;

- отриманий статистичний ряд наводиться у вигляді гістограми, яка будується так. По осі абсцис *(t)* відкладаються інтервали Δt, на кожному з яких, як на основі, будується прямокутник, висота якого пропорційна (у вибраному масштабі) відповідній частоті $\hat{Q}_i$ (приклади гістограм наведені нижче).

2. *Розрахунок емпіричних функцій.*

Використовуючи дані сформованого статистичного ряду, визначаються статистичні оцінки показників надійності, тобто емпіричні функції:

- *функція розподілу відмов* (оцінки ймовірності відмов)

$$\hat{Q}(t_{\min}) = \frac{n(t_{\min})}{N} = 0;$$

$$\hat{Q}(t_1) = \frac{n(t_1)}{N} = \frac{\Delta n(t_{\min}, t_1)}{N} = \hat{Q}_1;$$

$$\hat{Q}(t_2) = \frac{n(t_2)}{N} = \frac{\Delta n(t_{\min}, t_1) + \Delta n(t_1, t_2)}{N} = \hat{Q}_1 + \hat{Q}_2;$$

::

$$\hat{Q}(t_{\max}) = \frac{n(t_{\max})}{N} = \sum_1^k \hat{Q}_i = 1;$$

- *функція надійності* (оцінки ймовірності безвідмовної роботи)

$$\hat{P}(t_{\min}) = 1 - \hat{Q}(t_{\min}) = 1;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\hat{P}(t_{\max}) = 1 - \hat{Q}(t_{\max}) = 0; \qquad (4.2)$$

- *щільність розподілу відмов* (оцінка щільності розподілу відмов)

$$\hat{f}(t_i) = \frac{\Delta n(t_{i-1}, t_i)}{N \cdot \Delta t}; \qquad (4.3)$$

- *інтенсивність відмов* (оцінка інтенсивності відмов)

$$\hat{\lambda}(t_i) = \frac{\Delta n(t_{i-1}, t_i)}{N(t_i) \cdot \Delta t} = \frac{\Delta n(t_{i-1}, t_i)}{[N - n(t_i)] \cdot \Delta t}. \qquad (4.4)$$

На рис. 4.2, 4.3, 4.4 наведені відповідно графіки статистичних оцінок $\hat{Q}(t), \hat{P}(t), \hat{f}(t), \hat{\lambda}(t)$. Правила побудови графіків випливають з наведених вище розрахункових формул. Кожний із графіків має свій масштаб.

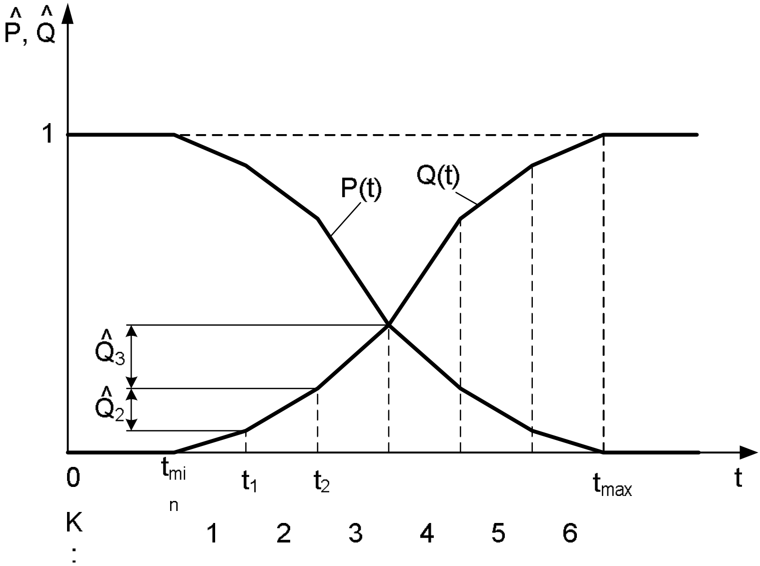
3. *Розрахунок статистичних оцінок кількісних характеристик.*

Для розрахунку статистичних оцінок кількісних характеристик можна скористатися даними сформованого статистичного ряду.

Оцінки характеристик визначаються так:

- *оцінка середнього напрацювання до відмови (статистичне середнє напрацювання*)

$$\hat{T}_0 = \sum_{1}^{K} \tilde{t}_i \cdot \hat{P}_i;$$



Риунок 4.2

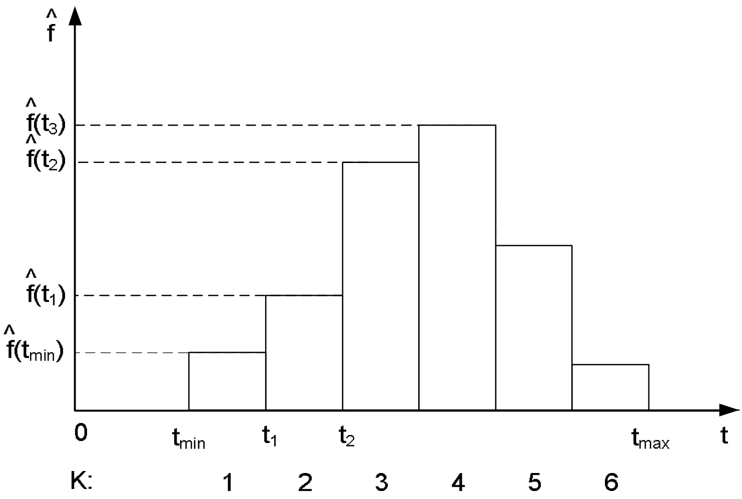


Рисунок 4.3

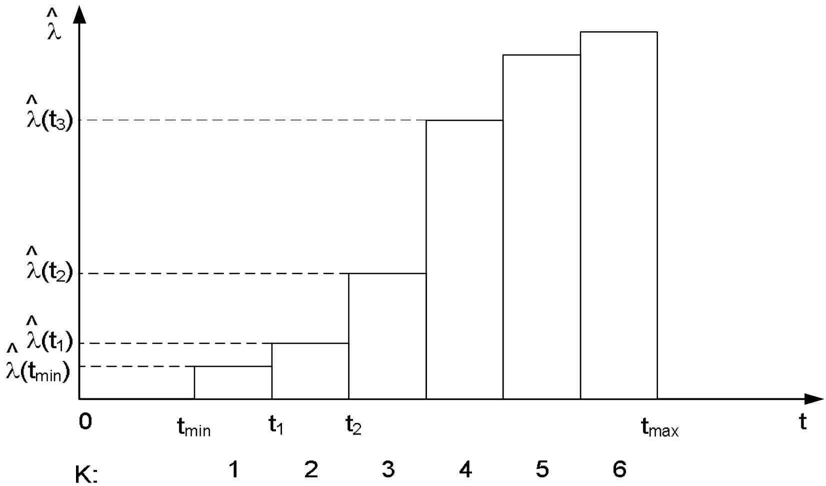


Рисунок 4.4

- *оцінка дисперсії напрацювання до відмови (емпірична дисперсія напрацювання)*

$$\hat{D} = \sum_{1}^{K} (\tilde{t}_i - \hat{T}_0)^2 \cdot \hat{P}_i,$$

де $\tilde{t}_i = t_i + \Delta t / 2 = t_{i+1} - \Delta t / 2$ - середина *i*-го інтервалу напрацювання, тобто середнє значення напрацювання в інтервалі;

- *оцінка СКВ*

$$\hat{D} = \hat{S}^2 .$$

Доцільно розрахувати оцінки і деяких допоміжних характеристик розсіювання випадкової величини *T*:

- *вибірковий коефіцієнт асиметрії напрацювання до відмови*

$$A = \sum_{1}^{K} (\tilde{t}_i - \hat{T}_0)^3 \cdot \hat{P}_i / \hat{S}^3 ;$$

- вибірковий ексцес напрацювання до відмови

$$E = [\sum_{1}^{K} (\tilde{t}_i - \hat{T}_0)^4 \cdot \hat{P}_i / \hat{S}^4] - 3 .$$

Ці характеристики використовуються для вибору апроксимуючої функції. Так, коефіцієнт асиметрії є характеристикою «скошеності» розподілу. Наприклад, якщо розподіл симетричний щодо МО, то $A = 0$.

На рис.4.5 а розподіл $f_2(t)$ має додатню асиметрію $A > 0$, а $f_3(t)$ – від'ємну $A < 0$. Значення ексцесу характеризує «крутизну» (гостро- або плосковерхість) розподілу. Для нормального розподілу ексцес $E = 0$.

Криві $f(t)$, більш гостроверхі порівняно з нормальною, мають $E > 0$, а навпаки - більш плосковерхі, $E < 0$ (рис.4.5 б).

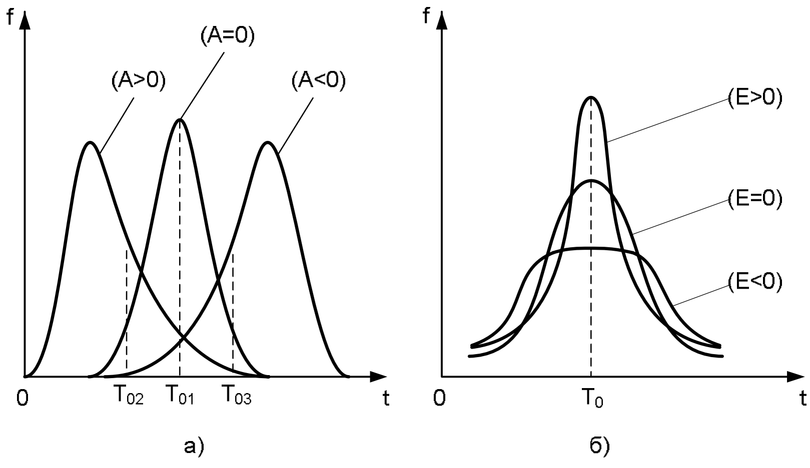


Рисунок 4.5

4. *Вибір апроксимуючого закону розподілу показників надійності.*

Вибір закону розподілу полягає в підборі аналітичної функції, що найкраще апроксимує функції надійності.

Вибір закону розподілу значною мірою є процедурою невизначеною і багато в чому суб'єктивною, при цьому багато залежить від апріорних знань про об'єкт і його властивості, умови роботи, а також виду графіків $\hat{P}(t)$, $\hat{f}(t)$, $\hat{\lambda}(t)$.

Вочевидь, вибір закону розподілу залежатиме перш за все від виду експериментальної функції щільності розподілу відмов $\hat{f}(t)$. Отже, вибір закону розподілу має характер прийняття тієї або іншої гіпотези.

Припустимо, що за тих або інших міркувань обраний гіпотетичний закон розподілу заданий функцією теоретичного розподілу щільності відмов

$$f(t) = \Psi(t, a, b, c, ...),$$

де *a, b, c* - невідомі параметри розподілу.

Потрібно підібрати ці невідомі параметри так, щоб функція $f(t)$ найкращим чином згладжувала ступінчастий графік $\hat{f}(t)$, тобто гістограму (рис. 4.3), побудовану за результатами випробувань. При цьому використовується такий прийом: параметри *a, b, c* вибираються з таким розрахунком, щоб декілька найважливіших числових характеристик теоретичного розподілу дорівнювали відповідним статистичним оцінкам.

На графіку разом з $\hat{f}(t)$ будується теоретична щільність розподілу відмов $f(t)$, що дозволяє візуально оцінити результати апроксимації (розбіжність між $\hat{f}(t)$ і $f(t)$). Оскільки ця розбіжність неминуча, то виникає питання: чи пов'язана вона з тим, що теоретичний розподіл вибраний помилково? Відповідь на це питання дає розрахунок *критерію згоди.*

5. *Розрахунок критерію згоди.*

Критерій згоди - це критерій перевірки гіпотези про те, що випадкова величина T, представлена своєю вибіркою, має розподіл попередньо вибраного типу.

Перевірка полягає в наступному. Розраховується критерій як деяка міра розбіжності теоретичного та емпіричного розподілів, причому ця міра є випадковою величиною. Чим більша міра розбіжності, тим гірша узгодженість емпіричного розподілу з теоретичним, тобто гіпотезу про вибір закону розподілу необхідно відкинути як малоправдоподібну. В іншому випадку експериментальні дані не суперечать прийнятому теоретичному розподілу. З відомих критеріїв найбільш застосований критерій згоди χ^2 (хі-квадрат) Пірсона.

Перевірка узгодженості розподілів за критерієм χ^2 проводиться так:

- розраховується критерій «міра розбіжності»

$$\chi^2 = N\sum_{i}^{k}(\hat{P}_i - P_i)^2 / P_i ,$$

де $P_i = f(\tilde{t}_s)\Delta t$ - теоретична частота (ймовірність) потрапляння випадкової величини в інтервал $[t_i,\ t_i + \Delta t]$;

- визначається кількість ступенів вільності $R = k - L$, де L - кількість незалежних умов збігу, накладених на частоти $\hat{P}_i$, наприклад, $\sum \hat{P}_i = 1$, $\sum \tilde{t}_i \hat{P}_i = T_0$, $\sum(\tilde{t}_i - T_0)^2 \cdot \hat{P}_i = D$ і т.д. Найчастіше $L = 3$. Чим більша кількість ступенів вільності, тим більше випадкова величина χ^2 підпорядковується розподілу Пірсона;

- за розрахованими χ^2 і R визначається ймовірність $P(\chi^2, R)$

того, що величина, яка має розподіл Пірсона з R ступенями вільності, перевищить розраховане значення χ^2.

Відповідь на питання «наскільки малою повинна бути ймовірність $P(\chi^2, R)$, щоб відкинути гіпотезу про вибір того або іншого закону розподілу» багато в чому не визначена. На практиці, якщо $P(\chi^2, R) < 0{,}1$, то рекомендується підібрати інший закон розподілу.

У цілому за допомогою критерію згоди можна спростувати вибрану гіпотезу, якщо ж $P(\chi^2, R)$ досить велика, то це не може служити доведенням правильності гіпотези, а свідчить лише про те, що гіпотеза не суперечить даним експерименту.

Приклади

Приклад 1. За результатами випробувань N=100 однотипних елементів відомо, що кількість елементів $n(t_i)$, що відмовили, до моменту напрацювання t_i становить: n(100)=5; n(150)=8; n(200)=11; n(250)=15; n(300)=21 (рис.4.6). Інтервал часу напрацювання Δt =50 годин. Визначити показники надійності $\hat{P}(t_i)$, $\hat{Q}(t_i)$, $\hat{f}(t_i)$, $\hat{\lambda}(t_i)$ для заданих напрацювань t_i. Побудувати графіки отриманих показників.

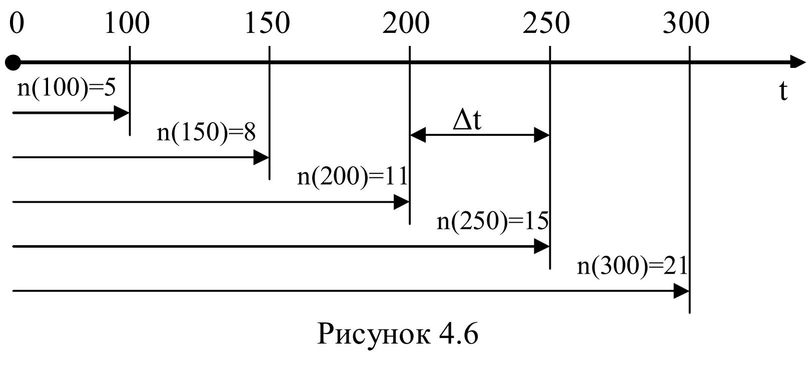


Рисунок 4.6

Розв'язання. За формулами (4.1) і (4.2) визначаємо:

$$\hat{Q}(100) = \frac{n(100)}{N} = \frac{5}{100} = 0{,}05\,; \quad \hat{Q}(150) = \frac{n(150)}{N} = \frac{8}{100} = 0{,}08\,;$$

$$\hat{Q}(200) = \frac{n(200)}{N} = \frac{11}{100} = 0{,}11\,; \quad \hat{Q}(250) = \frac{n(250)}{N} = \frac{15}{100} = 0{,}15\,;$$

$$\hat{Q}(300) = \frac{n(300)}{N} = \frac{21}{100} = 0{,}21\,.$$

$$\hat{P}(100) = \frac{N - n(100)}{N} = 1 - \hat{Q}(100) = \frac{95}{100} = 1 - 0.05 = 0{,}95\,;$$

$$\hat{P}(150) = \frac{N - n(150)}{N} = 1 - \hat{Q}(150) = \frac{92}{100} = 0{,}92;$$

$$\hat{P}(200) = \frac{N - n(200)}{N} = 1 - \hat{Q}(200) = \frac{89}{100} = 0{,}89;$$

$$\hat{P}(250) = \frac{N - n(250)}{N} = 1 - \hat{Q}(250) = \frac{85}{100} = 0{,}85;$$

$$\hat{P}(300) = \frac{N - n(300)}{N} = 1 - \hat{Q}(300) = \frac{79}{100} = 0{,}79.$$

За формулами (4.3) і (4.4) визначаємо:

$$\hat{f}(100) = \frac{\Delta n(t_{i-1}, t_i)}{N \cdot \Delta t} = \frac{\Delta n(0{,}100)}{100 \cdot (100 - 0)} = \frac{5}{10000} = 0{,}0005;$$

$$\hat{f}(150) = \frac{\Delta n(100{,}150)}{100 \cdot (150 - 100)} = \frac{3}{5000} = 0{,}0006;$$

$$\hat{f}(200) = \frac{\Delta n(150{,}200)}{100 \cdot (200 - 150)} = \frac{3}{5000} = 0{,}0006;$$

$$\hat{f}(250) = \frac{\Delta n(200{,}250)}{100 \cdot (250 - 200)} = \frac{4}{5000} = 0{,}0008;$$

$$\hat{f}(300) = \frac{\Delta n(250{,}300)}{100 \cdot (300 - 250)} = \frac{6}{5000} = 0{,}0012.$$

$$\hat{\lambda}(100) = \frac{\Delta n(0{,}100)}{[100 - n(100)] \cdot (100 - 0)} = \frac{5}{[100 - 5] \cdot 100} \approx 0{,}00053;$$

$$\hat{\lambda}(150) = \frac{\Delta n(100{,}150)}{[100 - n(150)] \cdot (150 - 100)} = \frac{3}{[100 - 8] \cdot 50} \approx 0{,}00065;$$

$$\hat{\lambda}(200) = \frac{\Delta n(150{,}200)}{[100 - n(200)] \cdot (200 - 150)} = \frac{3}{[100 - 11] \cdot 50} \approx 0{,}00067;$$

$$\hat{\lambda}(250) = \frac{\Delta n(200{,}250)}{[100 - n(250)] \cdot (250 - 200)} = \frac{4}{[100 - 15] \cdot 50} \approx 0{,}00094;$$

$$\hat{\lambda}(300) = \frac{\Delta n(250{,}300)}{[100 - n(300)] \cdot (300 - 250)} = \frac{6}{[100 - 21] \cdot 50} \approx 0{,}0015.$$

За отриманими результатами розрахунків будуємо графіки залежностей показників безвідмовності $\hat{P}(t_i)$, $\hat{Q}(t_i)$, $\hat{f}(t_i)$, $\hat{\lambda}(t_i)$ (рис. 4.7, 4.8) . Кусково – лінійні графіки можуть еквівалентно подаватися відповідними гістограмами (рис. 4.9 – 4.12). Приклади графіків розподілу показників надійності наведені в розділі 5.

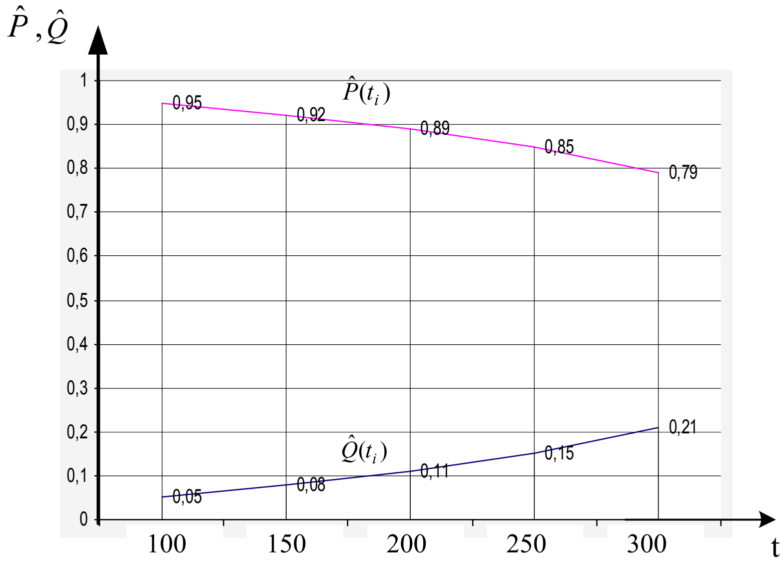


Рисунок 4.7

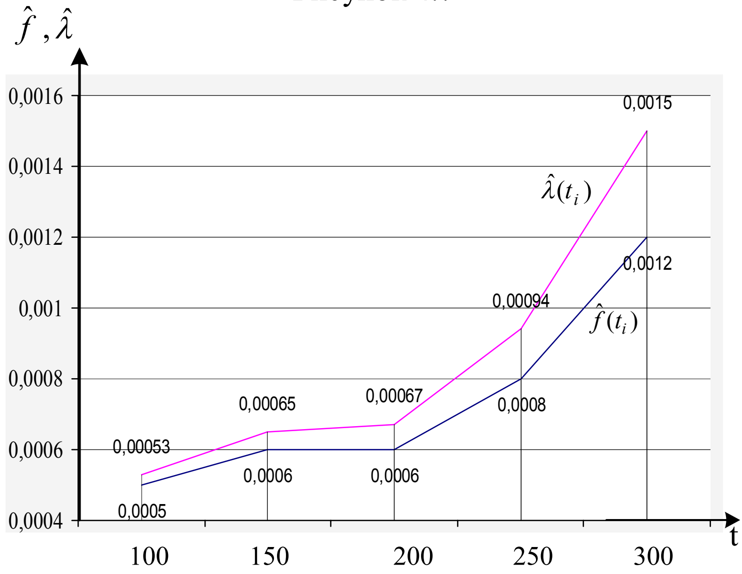


Рисунок 4.8

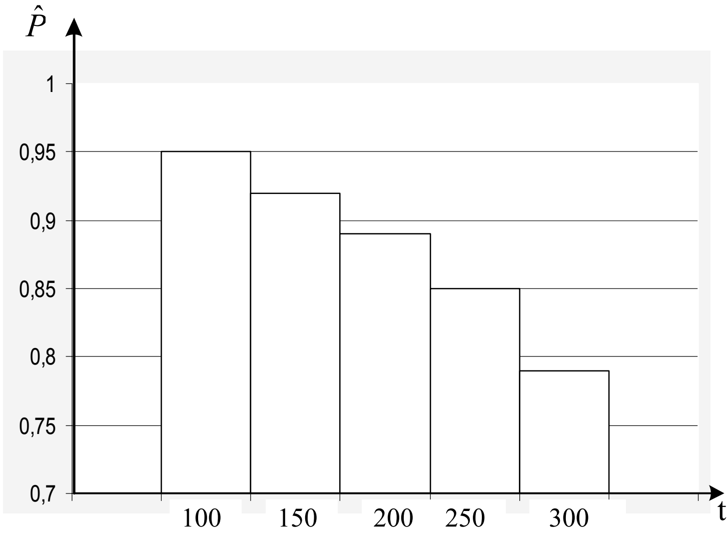


Рисунок 4.9

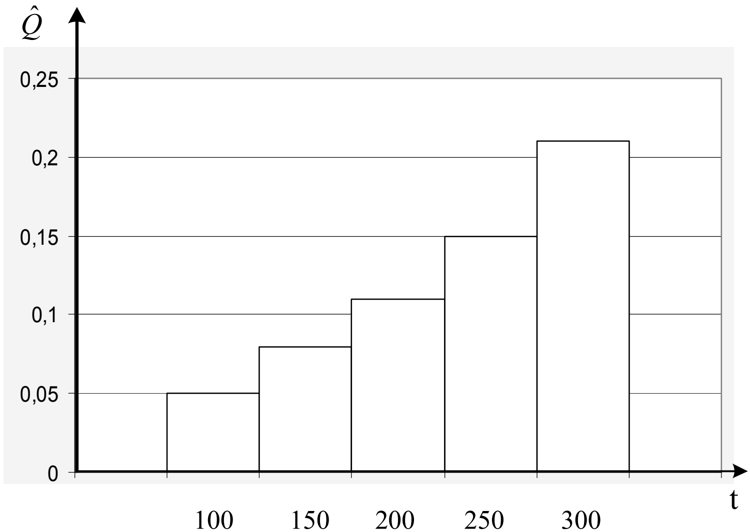


Рисунок 4.10

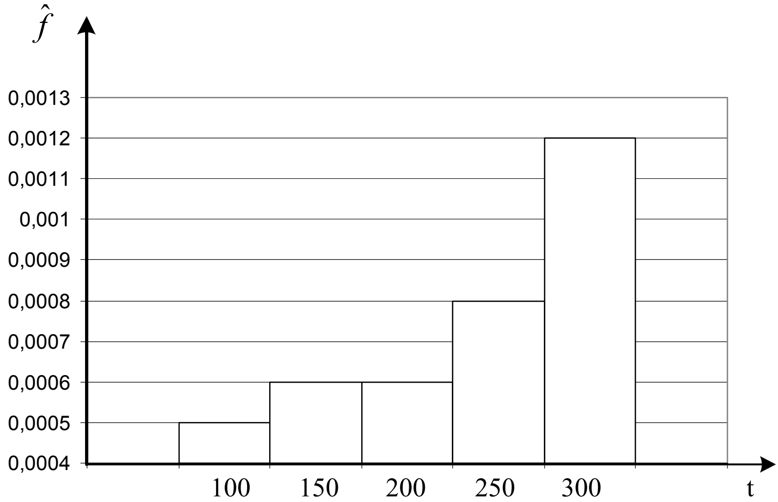


Рисунок 4.11

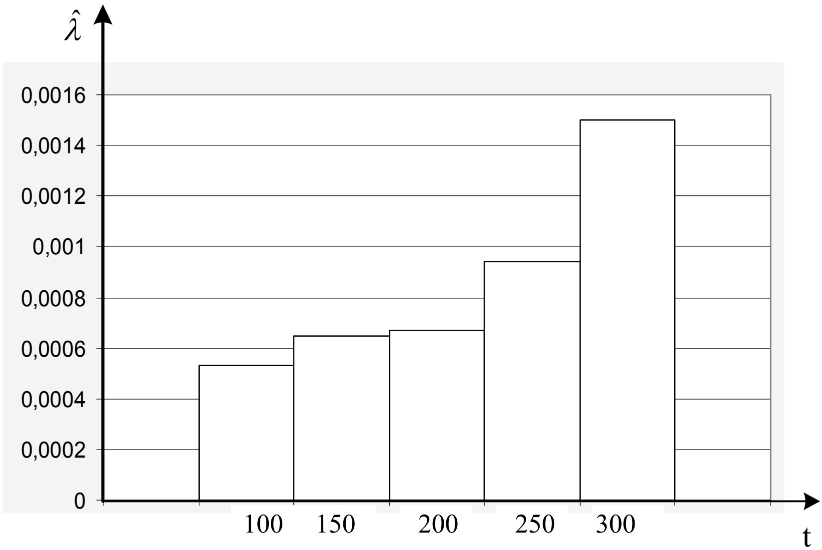


Рисунок 4.12

Приклад 2. На випробування поставлено 1000 елементів. За 3000 годин відмовило 80 елементів, а в проміжку часу 3000-4000 годин відмовило ще 50 елементів (рис.4.13). Визначити статистичні оцінки основних показників надійності цієї партії елементів за 3000 годин і в часовому проміжку 3000-4000 годин.

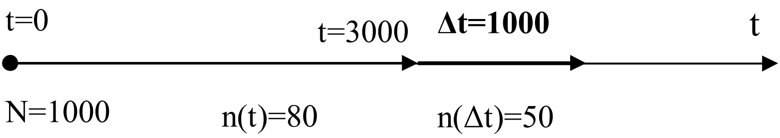


Рисунок 4.13

Розв'язання. Згідно з формулами (4.1),(4.2) визначимо:

$$\hat{P}(3000) = \frac{N - n(t)}{N} = \frac{1000 - 80}{1000} = 0{,}92;$$

$$\hat{Q}(3000) = \frac{n(t)}{N} = \frac{80}{1000} = 0{,}08;$$

$$n(3500) = N - Ncep = N - \frac{N_i - N_{i+1}}{2} = 1000 - \frac{920 + 870}{2} = 105 -$$

кількість елементів, що відмовили за час t =3500 годин (середина інтервалу).

$$\hat{P}(3500) = \frac{N - n(3500)}{N} = \frac{1000 - 105}{1000} = 0{,}895.$$

Отже, згідно із залежностями (4.3) і (4.4) отримаємо:

$$\hat{f}(3000) = \frac{\Delta n(t_{i-1}, t_i)}{N \cdot \Delta t} = \frac{\Delta n(0{,}3000)}{1000 \cdot 3000} = \frac{80}{3000000} \approx 2{,}67 \cdot 10^{-5};$$

$$\hat{f}(3500) = \frac{\Delta n(3000{,}4000)}{1000 \cdot 1000} = \frac{50}{1000000} = 5 \cdot 10^{-5};$$

$$\hat{\lambda}(3000) = \frac{\Delta n(t_{i-1}, t_i)}{Ncep \cdot \Delta t} = \frac{\Delta n(0{,}3000)}{895 \cdot 3000} = \frac{80}{2685000} \approx 2{,}98 \cdot 10^{-5};$$

$$\hat{\lambda}(3500) = \frac{\Delta n(3000{,}4000)}{895 \cdot 1000} = \frac{50}{895000} \approx 5{,}59 \cdot 10^{-5}.$$

Контрольні питання

1. Що являє собою математична модель та з якою метою вона використовується у задачах надійності?
2. З яких умов вибирається закон розподілу напрацювання до відмови об’єкта?
3. Наведіть формулювання постановки задачі при випробуваннях об’єктів на надійність.
4. Що являє собою процедура формування статистичного ряду за результатами випробувань?
5. Які емпіричні функції розраховуються при обробці результатів випробувань?
6. У чому полягає вибір закону розподілу напрацювання до відмови за результатами випробувань?
7. Що являє собою критерій згоди?

Розділ 5

ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ НАПРАЦЮВАННЯ ДО ВІДМОВИ

5.1 Класичний нормальний розподіл

Нормальний розподіл (розподіл Гауса) є найбільш універсальним, зручним і широко застосовуваним. Вважається, що напрацювання підпорядковане нормальному розподілу (нормально розподілене), якщо щільність розподілу відмов описується виразом

$$f(t) = \frac{1}{S\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-a)^2}{2S^2}}\ , \tag{5.1}$$

де a і S - параметри розподілу відповідно МО і СКВ, які за наслідками випробувань приймаються рівними:

$$a \approx \hat{T}_0; S^2 = \hat{D}$$

де $\hat{T}_0, \hat{D}$ - оцінки середнього напрацювання та дисперсії.

Графіки зміни показників безвідмовності при нормальному розподілі наведені на рис.5.1. З'ясуємо зміст параметрів T_0 і S нормального розподілу. З графіка $f(t)$ видно, що T_0 є центром симетрії розподілу, оскільки при зміні знаку різниці (t - T_0) вираз значення $f(t)$ згідно з (5.1) не змінюється. При $t=T_0$ щільність розподілу відмов досягає свого максимуму:

$$f(t)_{\max}\ |_{t=T_0} = \frac{1}{S\sqrt{2\pi}}.$$

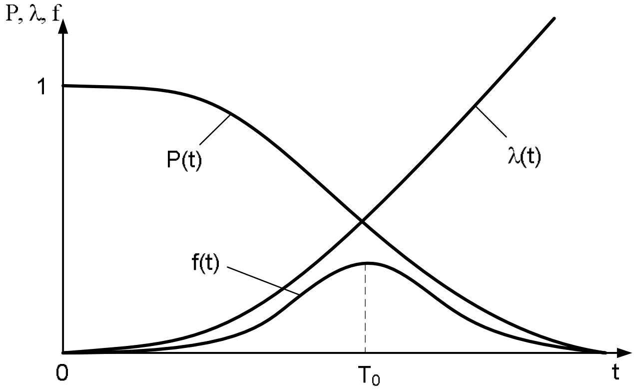


Рисунок 5.1

При зсуві T_0 ліворуч/праворуч за віссю абсцис, крива $f(t)$ зміщується в тому самому напрямі, не змінюючи своєї форми. Таким чином, T_0 є центром розсіювання випадкової величини T, тобто T_0 *є* МО значення T.

Параметр S характеризує форму кривої $f(t)$, тобто розсіювання випадкової величини T. Крива щільності розподілу відмов $f(t)$ тим вища і гостріша, чим менше S.

Зміну графіків $P(t)$ і $\lambda(t)$ при різних СКВ напрацювань ($S1 < S2 < S3$) і $T_0 = const$ ілюструє рис.5.2.

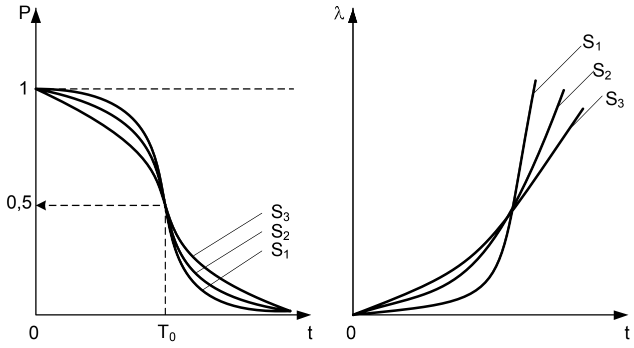


Рис. 5.2

Використовуючи отримані раніше співвідношення між показниками надійності, можна було б записати вирази для $P(t)$; $Q(t)$ і $\lambda(t)$ за виразом (5.1) для $f(t)$. Для практичного розрахунку показників надійності обчислення інтегралів замінимо використанням таблиць. З цією метою перейдемо від випадкової величини t до деякої випадкової величини

$$x = \frac{t - T_0}{S}, \tag{5.2}$$

розподіленої нормально з параметрами $a=T_0=0$ і $S=1$. Тоді щільність розподілу випадкової величини x згідно з (5.1) визначимо за формулою

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad . \tag{5.3}$$

Вираз (5.3) описує щільність так званого нормованого нормального розподілу (рис.5.3). Значення показової функції (5.3) наведені в таблиці 5.1.

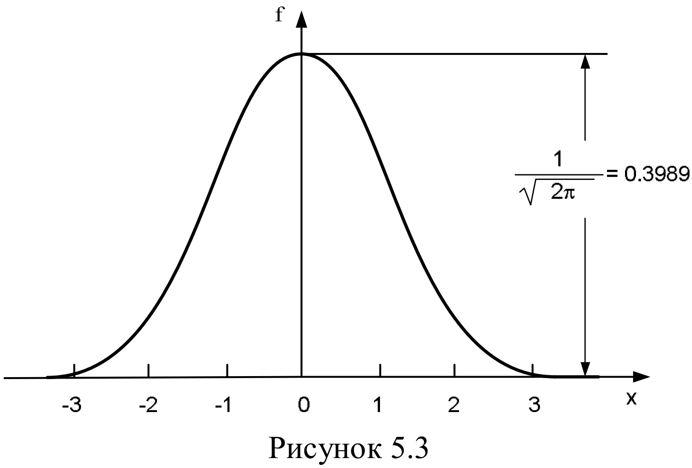


Рисунок 5.3

Таблиця 5.1

x	e^{x}	e^{-x}	x	e^{x}	e^{-x}
0,00	1,0000	1,0000	**1.55**	4,7115	0,2122
0.05	1,0513	0,9512	**1,60**	4,9530	0,2019
0,10	1,1052	0,9048	**1.65**	5,2070	0,1920
0.15	1,1618	0,8607	**1,70**	5,4739	0,1827
0,20	1,2214	0,8187	**1.75**	5,7546	0,1738
0.25	1,2840	0,7788	**1,80**	6,0496	0,1653
0,30	1,3499	0,7408	**1.85**	6,3598	0,1572
0.35	1,4191	0,7047	**1,90**	6,6859	0,1496
0,40	1,4918	0,6703	**1.95**	7.0287	0,1423
0.45	1,5683	0,6376	**2,00**	7,3891	0,1353
0,50	1,6487	0,6065	**2.05**	7,7679	0,1287
0,55	1,7333	0,5769	**2,10**	8,1662	0,1225
0,60	1,8221	0,5488	**2.15**	8,5849	0,1165
0.65	1,9155	0,5220	**2,20**	9,0250	0,1108
0,70	2,0138	0,4966	**2.25**	9,4877	0,1054
0.75	2,1170	0,4724	**2,30**	9,9742	0,10026
0,80	2,2255	0,4493	**2.35**	10,486	0,09537
0.85	2,3396	0,4274	**2,40**	11,023	0,09072
0,90	2,4596	0,4066	**2.45**	11,588	0,08629
0.95	2,5857	0,3867	**2,50**	12,182	0,08208
1,00	2,7183	0,3679	**2.55**	12,807	0,07808
1.05	2,8577	0,3499	**2,60**	13,464	0,07427
1,10	3,0042	0,3329	**2.65**	14,154	0,07065
1.15	3,1582	0,3166	**2,70**	14,880	0,06721
1,20	3,3201	0,3012	**2.75**	15,643	0,06393
1.25	3,4903	0,2865	**2,80**	16,445	0,06081
1,30	3,6693	0,2725	**2.85**	17,288	0,05784
1.35	3,8574	0,2592	**2,90**	18,174	0,05502
1,40	4,0552	0,2466	**2.95**	19,106	0,05234
1.45	4,2631	0,2346	**3,00**	20,086	0,04979
1,50	4,4817	0,2231			

Функція розподілу випадкової величини x запишеться у вигляді

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx\,, \tag{5.4}$$

а з симетрії кривої $f(x)$ відносно МО напрацювання $T_0=0$ випливає, що $f(-x) = f(x)$, звідки $F(-x) = 1 - F(x)$.

У довідковій літературі [3, 9] наведені розрахункові значення функцій $f(x)$ для різних $x = (t - T_0)/S$.

Показники безвідмовності об'єкта через табличні значення $f(x)$ і $F(x)$ визначаються за виразами:

$$f(t)= f(x) /S; \tag{5.5}$$

$$Q(t)= F(x); \tag{5.6}$$

$$P(t)= 1 - F(x); \tag{5.7}$$

$$\lambda(t) = f(x) /S(1 - F(x)). \tag{5.8}$$

У практичних розрахунках часто замість функції $F(x)$ користуються функцією Лапласа [3, 4, 9], що являє собою розподіл додатних значень випадкової величини x у вигляді

$$\Phi(x) = \int_{0}^{x} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\ . \tag{5.9}$$

Вочевидь, що $F(x)$ пов'язана з $\Phi(x)$ таким чином:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{x} f(x)dx = 0{,}5 + \Phi(x)\,. \tag{5.10}$$

Як і будь-яка функція розподілу, функція $\Phi(x)$ маєт такі властивості:

$$\Phi(-\infty) = -0,5; \ \ \Phi(\infty)=0,5; \ \ \Phi(-x) = -\Phi(x) .$$

Значення функції $\Phi(x)$ наведені в таблиці 5.2.

Таблиця 5.2

x	$\boldsymbol{\Phi(x)}$	$\boldsymbol{\Phi(1+x)}$	$\boldsymbol{\Phi(2+x)}$	$\boldsymbol{\Phi(3+x)}$
0,00	0,00	0,3414	0,4772	0,49865
0,05	0,020	0,3532	0,4798	0,49886
0,10	0,040	0,3644	0,4821	0,499032
0,15	0,060	0,3750	0,4842	0,499184
0,20	0,079	0,3850	0,4861	0,499313
0,25	0,099	0,3944	0,4878	0,499423
0,30	0,118	0,4032	0,4893	0,499517
0,35	0,137	0,4115	0,4906	0,499596
0,40	0,155	0,4192	0,49180	0,499663
0,45	0,174	0,4265	0,49286	0,499720
0,50	0,191	0,4332	0,49379	0,499767
0,55	0,209	0,4394	0,49461	0,499807
0,60	0,226	0,4452	0,49534	0,499841
0,65	0,242	0,4505	0,49590	0,499869
0,70	0,258	0,4554	0,49653	0,499892
0,75	0,273	0,4599	0,49702	0,499912
0,80	0,288	0,4641	0,49745	0,4999277
0,85	0,302	0,4678	0,49781	0,4999409
0,90	0,316	0,4713	0,49813	0,4999519
0,95	0,329	0,4744	0,49841	0,4999609

Показники надійності об'єкта можна визначити через $\Phi(x)$, використовуючи вирази (5.5) - (5.8) і (5.10):

$$Q(t) = 0{,}5 + \Phi(x); \tag{5.11}$$

$$P(t) = 0{,}5 - \Phi(x); \tag{5.12}$$

$$\lambda(t) = f(x) / S(0{,}5 - \Phi(x)). \tag{5.13}$$

Найчастіше при оцінці надійності об'єкта доводиться розв'язувати ***пряму задачу*** - при заданих параметрах T_0 і S нормально розподіленого напрацювання до відмови визначається той або інший показник безвідмовності (наприклад, ймовірність безвідмовної роботи) для значення напрацювання t, що нас цікавить. Але в ході проектних робіт доводиться розв'язувати і ***зворотну задачу*** - визначення напрацювання, що задовольняє ймовірності безвідмовної роботи об'єкта, зумовленої технічним завданням.

Для вирішення подібних завдань використовують квантилі нормованого нормального розподілу.

Позначимо: t_p- значення напрацювання, що відповідає ймовірності P безвідмовної роботи; x_p - значення випадкової величини X, яке відповідає ймовірності P.

Тоді з рівняння (5.2) зв'язку x і t при $x = x_p$; $t = t_p$ отримуємо

$$t_p = T_0 + x_p S,$$

де t_p, x_p - ненормовані і нормовані квантилі нормального розподілу, що відповідають ймовірності P. Значення квантилів x_p наводяться у довідковій літературі для $P \geq 0{,}5$. При заданій ймовірності $P < 0{,}5$ використовується співвідношення

$$x_p = - x_{1-p} .$$

Наприклад, при $P = 0,3$

$$x_{0,3} = - x_{1-0,3} = - x_{0,7}\,.$$

Ймовірність потрапляння випадкової величини напрацювання T у заданий інтервал $[t_1, t_2]$ напрацювання визначається так:

$$P\{T\epsilon(t_1,t_2)\}=F(x_2) -F(x_1)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1), \qquad (5.14)$$

де $x_1 = (t_1 - T_0)/S,\ x_2 = (t_2 - T_0)/S$.

Відзначимо, що напрацювання до відмови завжди додатне, а крива щільності розподілу відмов $f(t)$ у загальному випадку починається від $t = -\infty$ і поширюється до $t = \infty$. Це не є істотним недоліком, якщо $T_0 >> S$, оскільки за (5.14) неважко підрахувати, що ймовірність потрапляння випадкової величини T в інтервал $[T_0 - 3S\ ,\ T_0 + 3S]$ дорівнює $P(T_0 - 3S\leq T \leq,\ T_0 + 3S)$≈1,0 з точністю до 1%. А це означає, що всі можливі значення (з похибкою не вище 1%) нормально розподіленої випадкової величини T знаходяться на ділянці $T_0 \pm 3S$.

При більшому розкиді значень випадкової величини T область можливих її значень обмежується зліва $(0,\infty)$, і використовується зрізаний нормальний розподіл при $t\geq 0$ (п.5.2).

5.2 Зрізаний нормальний розподіл

Відомо, що коректність використання класичного нормального розподілу напрацювання досягається при $T_0 \geq 3S$.

При малих значеннях T_0 і великому S може виникати ситуація, коли $f(t)$ «покриває» своєю лівою гілкою область від'ємних напрацювань (рис.5.4).

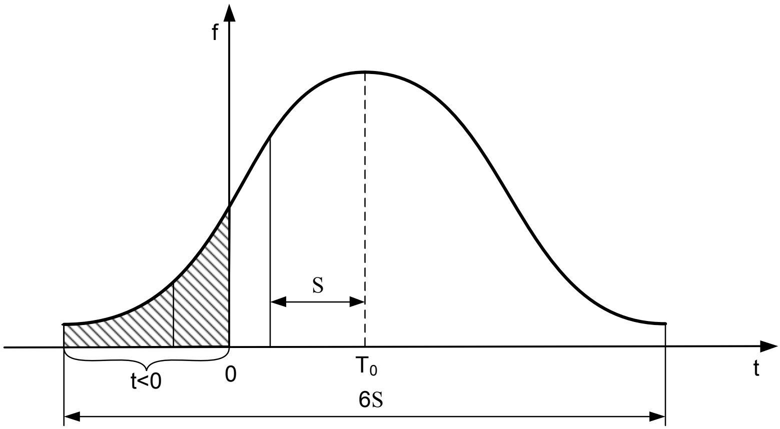


Рисунок 5.4

У таких випадках нормальний розподіл, який є загальним випадком розподілу випадкової величини в діапазоні (-∞;∞), лише частково може бути використаний для моделей надійності.

Зрізаним нормальним розподілом (ЗНР) називається розподіл, що отримується з класичного нормального при обмеженні інтервалу можливих значень напрацювання до відмови. У загальному випадку зрізання може бути:

– лівим - $t \in (0;\infty)$;
– двостороннім - $t \in [t_1, t_2]$, $t_1>0$.

Розглянемо ЗНР для випадку обмеження випадкової величини напрацювання інтервалом (t_1, t_2).

Щільність ЗНР пов'язана із щільністю нормального розподілу нормуючим множником c [10] :

$$\bar{f}(t)=cf(t),$$

де c визначається з умови, що площа під кривою $\bar{f}(t)$ дорівнює 1, тобто

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{f}(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} cf(t)dt = c\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = 1.$$

Отже,

$$c = \frac{1}{\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt}, \qquad (5.15)$$

де

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = P(t_1 < T < t_2) = F(t_2) - F(t_1) = Q(t_2) - Q(t_1).$$

Застосовуючи перехід від випадкової величини $T \in \{t\}$ до величини $X \in \{x\}$, а саме:

$$x_1 = (t_1 - T_0)/S; \qquad x_2 = (t_2 - T_0)/S,$$

отримуємо

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = Q(t_2) - Q(t_1) = 0{,}5 + \Phi(x_2) -$$
$$- 0{,}5 - \Phi(x_1) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (5.16)$$

тому нормуючий множник c дорівнює [9]:

$$c = \frac{1}{\Phi(x_2) - \Phi(x_1)}. \qquad (5.17)$$

Оскільки $\Phi(x_2)$ - $\Phi(x_1) < 1$, то $c > 1$, тому $\bar{f}(t) > f(t)$. Крива $\bar{f}(t)$ вища, ніж $f(t)$, оскільки площі під кривими $\bar{f}(t)$ і $f(t)$ однакові і дорівнюють 1 (рис.5.5).

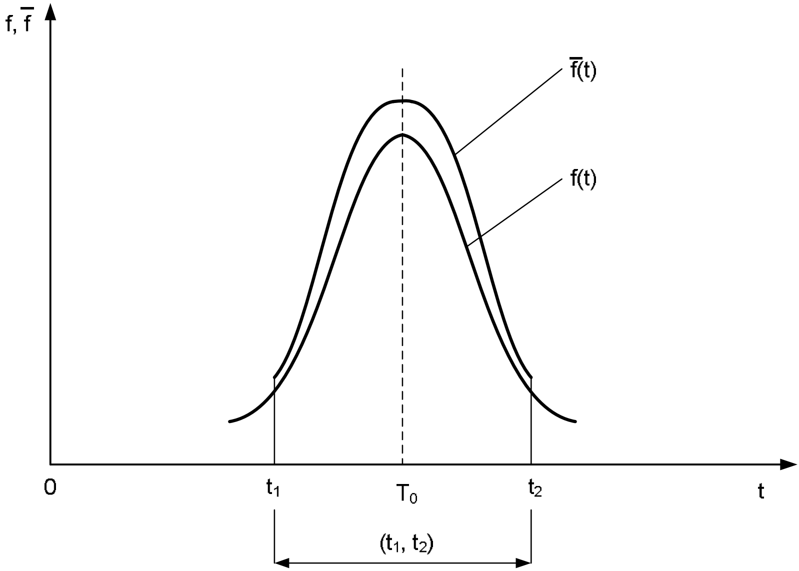


Рисунок 5.5

Показники безвідмовності для ЗНР у діапазоні (t_1, t_2):

$$\bar{f}(t) = cf(t) = cf(x)/S; \qquad (5.18)$$

$$\overline{P}(t) = \int_t^{\infty} cf(t)dt = c\int_t^{\infty} f(t)dt = c[0{,}5 - \Phi(x)]; \qquad (5.19)$$

$$\overline{Q}(t) = 1 - c[0{,}5 - \Phi(x)]; \qquad (5.20)$$

$$\overline{\lambda}(\mathrm{t}) = \bar{f}(t)/\overline{P}(t) = f(x)/(S(0{,}5 - \Phi(x)) = \lambda(\mathrm{t})\,. \qquad (5.21)$$

Для додатного напрацювання до відмови у діапазоні *(0;∞)* ЗНР має щільність розподілу відмов

$$\bar{f}(t) = c_0 f(t)\ , \qquad (5.22)$$

де c_0 - нормуючий множник, який визначається з умови

$$c_0 \int_0^\infty f(t)dt = 1\,, \qquad (5.23)$$

звідки

$$c_0 = \frac{1}{\int_0^\infty f(t)dt} = \frac{1}{Q(\infty) - Q(0)} = \frac{1}{\Phi(\infty) - \Phi(-T_0/\mathrm{S})} =$$

$$= \frac{1}{0{,}5 + \Phi(T_0 / S)}.$$

Показники безвідмовності ЗНР (0;∞):

$$\bar{f}(t) = c_0 f(x) / S; \qquad (5.24)$$

$$\overline{P}(t) = c_0[0{,}5 - \Phi(x)]; \qquad (5.25)$$

$$\overline{Q}(t) = 1 - c_0[0{,}5 - \Phi(x)]; \qquad (5.26)$$

$$\bar{\lambda}(\mathrm{t}) = f(x)/(S(0{,}5 - \Phi(x)) = \overline{f}(t)/\overline{P(t)} = \lambda(\mathrm{t}). \qquad (5.27)$$

Зміна нормуючого множника c_0 залежно від відношення T_0/S наведена на рис.5.6.

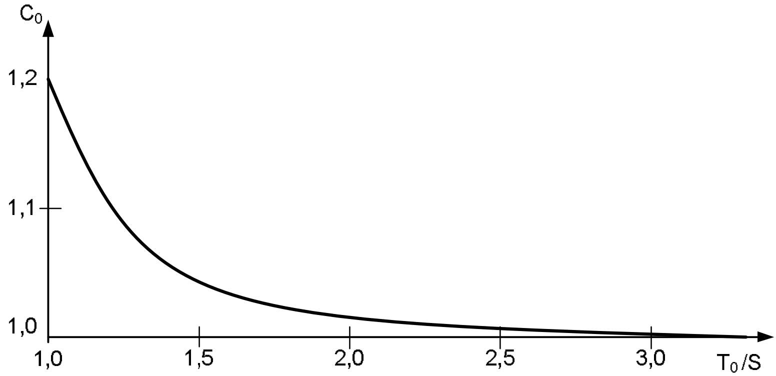


Рисунок 5.6

При $T_0 / S = 1$ маємо $c_0 = max\ (\approx 1{,}2),\ \bar{f}(t) = c_0 f(t)$, а при $T_0 / S \geq 2{,}5$ значення $c_0 \approx 1{,}0$, тобто $\bar{f}(t) \approx f(t)$.

5.3 Логарифмічно нормальний розподіл

При логарифмічно нормальному (логнормальному) розподілі нормально розподіленим є логарифм $lg\ t$, а не сама величина t.

Логнормальний розподіл має добрі властивості вирівнювання сильно розсіяних статистичних даних [5] і багато в чому точніше, ніж нормальний, описує напрацювання до відмови тих об’єктів, у яких відмова виникає внаслідок втоми, наприклад, підшипників кочення, електронних пристроїв та ін.

Якщо величина $lg\ t$ має нормальний розподіл з параметрами U (математичне очікування) і V (середньоквадратичне відхилення), то величина T вважається логарифмічно нормально розподіленою із щільністю розподілу відмов

$$f(t) = \frac{1}{Vt\sqrt{2\pi}} \exp(-(\lg t - U)^2 / 2V^2)\,. \qquad (5.29)$$

Параметри U і V за результатами випробувань приймаються рівними:

$$U \approx \hat{U} = \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} \lg t_i\ ; \qquad (5.30)$$

$$V \approx \hat{V} = \frac{1}{N-1}\sum_{1}^{N} (\lg t_i - \hat{U})^2\,, \qquad (5.31)$$

де $\hat{U}$ і $\hat{V}$ - статистичні оцінки параметрів U і V.

Показники надійності можна розрахувати за наведеними вище виразами, користуючись табульованими функціями $f(x)$ і відповідно $F(x)$ і $\Phi(x)$ для нормального розподілу при $x = (lg\ t - U)/V$.

Графіки зміни показників надійності при логарифмічно нормальному розподілі наведені на рис. 5.7.

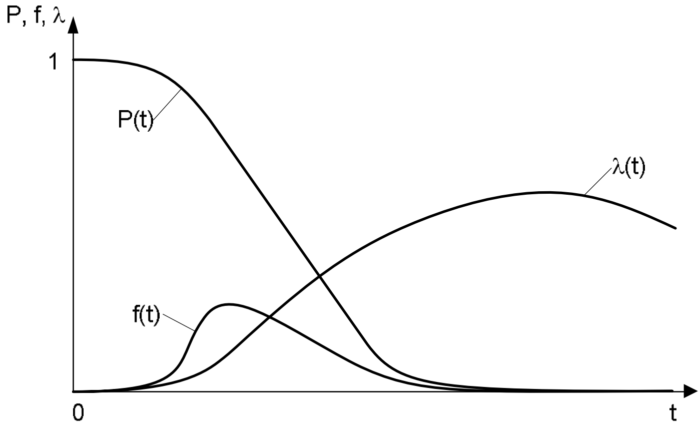


Рисунок 5.7

Кількісні характеристики напрацювання до відмови [4]:

- *середнє напрацювання* (МО *напрацювання*) *до відмови*

$$T_0 = exp\ (U+V^2/2); \qquad (5.32)$$

- *дисперсія напрацювання до відмови*

$$D=D\{T\} = exp\ (2U+V^2)[exp(V^2)-1]\ . \qquad (5.33)$$

5.4 Розподіл Вейбулла

Досвід експлуатації дуже багатьох електронних приладів і значної кількості електромеханічної апаратури показує, що для них характерні три види залежностей інтенсивності відмов від часу (рис. 4.1), що відповідають трьом періодам життя цих пристроїв. Графік функції $\lambda(t)$ відповідає розподілу Вейбулла. Названі три види залежності інтенсивності відмов від часу можна отримати, використовуючи для ймовірнісного опису випадкового напрацювання до відмови двопараметричний розподіл Вейбулла [9].

Розподіл Вейбулла широко застосовується в теорії надійності при дослідженні характеристик надійності напівпровідникових приладів [11]. Крім того, він застосовується при прискорених випробуваннях елементів у форсованих режимах, при дослідженні надійності елементів у процесі припрацювання. Згідно з цим розподілом щільність ймовірності моменту відмови

$$f(t) = \lambda\delta \cdot t^{\delta-1} \cdot e^{-(\lambda t^{\delta})}\ , \qquad (5.34)$$

де δ - параметр форми (визначається підбором у результаті обробки експериментальних даних $\delta > 0$); λ - параметр масштабу:

$$\lambda = \frac{1}{\hat{T}_0}.$$

Інтенсивність відмов визначається за виразом

$$\lambda(t) = \lambda\delta \cdot t^{\delta-1}. \qquad (5.35)$$

Графіки розподілів Вейбулла для $f(t)$ і $\lambda(t)$ наведені на рис. 5.8

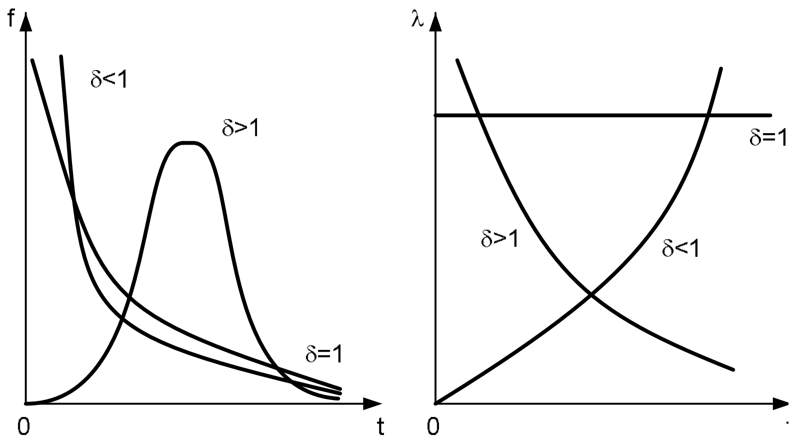


Рисунок 5.8

Ймовірність безвідмовної роботи

$$P(t) = \int_0^t e^{-\lambda(t)dt} = e^{-\lambda t^{\delta}}. \qquad (5.36)$$

Середнє напрацювання до відмови

$$T_0 = \int_0^\infty P(t)dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t^\delta} dt = \lambda^{-\frac{1}{\delta}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\delta}\right), \quad (5.37)$$

де $\Gamma(x)$ – повна гамма-функція, що визначається за виразом

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x+1} e^{-t} dt .$$

Для великих значень x

$$\Gamma(x)=(x-1)\Gamma(x-1)=(x-1)(x-2)\Gamma(x-2)=\ldots .$$

Наприклад: $\Gamma(4.7)=3,7\cdot 2,7\cdot 1,7\cdot \Gamma(1,7)$, де $\Gamma(1,7)=0,9086$ (вибираємо з таблиці 5.3).

Таблиця 5.3

x	**Γ(x)**	**x**	**Γ(x)**	**x**	**Γ(x)**	**x**	**Γ(x)**	**x**	**Γ(x)**
1,00	1,00000	**1,20**	0,91817	**1,40**	0,88726	**1,60**	0,89352	**1,80**	0,93138
1,02	0,98884	**1,22**	0,91311	**1,42**	0,88636	**1,62**	0,89592	**1,82**	0,93685
1,04	0,97814	**1,24**	0,90852	**1,44**	0,88581	**1,64**	0,89864	**1,84**	0,93969
1,06	0,96874	**1,26**	0,90440	**1,46**	0,88560	**1,66**	0,90167	**1,86**	0,94869
1,08	0,95973	**1,28**	0,90072	**1,48**	0,88575	**1,68**	0,90500	**1,88**	0,95507
1,10	0,95135	**1,30**	0,89747	**1,50**	0,88623	**1,70**	0,90864	**1,90**	0,96177
1,12	0,94359	**1,32**	0,89464	**1,52**	0,88704	**1,72**	0,91258	**1,92**	0,96877
1,14	0,93642	**1,34**	0,89222	**1,54**	0,88818	**1,74**	0,91683	**1,94**	0,97610
1,16	0,92980	**1,36**	0,89018	**1,56**	0,88964	**1,76**	0,92137	**1,96**	0,98374
1,18	0,92373	**1,38**	0,88854	**1,58**	0,89142	**1,78**	0,92623	**1,98**	0,99171

Якщо x<0, то $\Gamma(x)=\Gamma(x+1)/x=\Gamma(x+2)/x(x+1)=\ldots$.
Наприклад, $\Gamma(0,7)=\Gamma(1,7)/0,7=1,298;$
$\Gamma(-3,2)=\Gamma(1,8)/[(-3,2)\cdot(-2,2)\cdot(-1,2)\cdot(-0,2)\cdot 0,8]=0,698.$

Дисперсія часу безвідмовної роботи для розподілу Вейбулла визначається за виразом:

$$D = \lambda^{-2/\delta}[\Gamma(1+\frac{2}{\delta}) - \Gamma^2(1+\frac{1}{\delta})]. \qquad (5.38)$$

Відзначимо, що при параметрі $\delta = 1$ розподіл Вейбулла переходить в експоненціальний, а при $\delta = 2$ – у розподіл Релея. При $\delta < 1$ інтенсивність відмов монотонно спадає (період припрацювання), а при $\delta > 1$ монотонно зростає (період зносу) (рис. 4.1).

Отже, шляхом підбору параметра δ можна отримати на кожній із трьох ділянок таку теоретичну криву $\lambda(t)$, яка досить близько збігається з експериментальною кривою, і тоді розрахунок необхідних показників надійності можна проводити на основі відомого розподілу, що найбільш точно відображує криву $\lambda(t)$.

5.5 Експоненціальний розподіл

Експоненціальний розподіл є частковим випадком розподілу Вейбулла при $\delta=1$. Даний розподіл описує напрацювання до відмови об’єктів, у яких у результаті здавальних випробувань (вихідного контролю) відсутній період припрацювання, а призначений ресурс встановлений до закінчення періоду нормальної експлуатації. Ці об’єкти можна віднести до «не старіючих», для них $\lambda(t)=\lambda=const$. Коло таких об’єктів широке: складні технічні системи з безліччю компонентів, засоби обчислювальної техніки, системи автоматичного регулювання і т.п.

Таким чином випадкова величина напрацювання об’єкту до відмови підпорядкована експоненціальному розподілу, якщо щільність розподілу відмов описується виразом

$$f(t)= \lambda \, exp(-\lambda \, t) \,, \qquad (5.39)$$

де λ – параметр розподілу, який за наслідками випробувань приймається рівним:

$$\lambda \approx 1/\hat{T}_0 \,,$$

де $\hat{T}_0$ - оцінка середнього напрацювання до відмови.

Решта показників безвідмовності при відомій $f(t)$ визначається так:

- *ймовірність безвідмовної роботи*

$$P(t)= exp\,(\,-\,\lambda\, t); \qquad (5.40)$$

- *ймовірність відмови*

$$Q(t)= 1 - exp\,(\,-\,\lambda\, t); \qquad (5.41)$$

- *інтенсивність відмов*

$$\lambda(t) = \lambda\, exp\,(\,-\,\lambda\, t\,)\,/\,exp\,(\,-\,\lambda\, t) = \lambda\,. \qquad (5.42)$$

З (5.42) випливає, що інтенсивність відмов є постійною величиною, не залежною від часу, і обернено пропорційною оцінці середнього напрацювання $\lambda(t) = \lambda = 1\,/\hat{T}_0$.

Кількісні характеристики напрацювання до відмови визначаються так:

- *середнє напрацювання (МО напрацювання) до відмови*

$$T_0 = \int_0^\infty P(t)dt = 1/\lambda\,; \qquad (5.43)$$

- *дисперсія напрацювання до відмови*

$$D = D\{t\} = \int_0^\infty (t - T_0)^2 f(t)dt = 1/\lambda^2\,. \qquad (5.44)$$

Графіки зміни показників безвідмовності при експоненціальному розподілі наведені на рис.5.9.

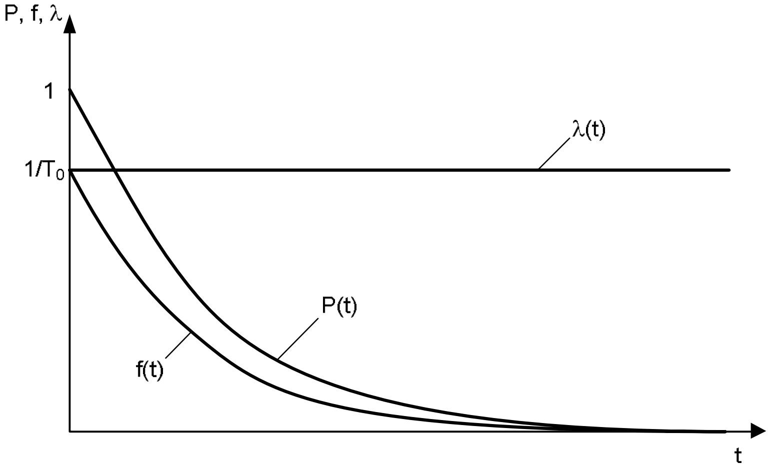


Рисунок 5.9

Необхідно зазначити, що при $\lambda t << 1$, тобто при напрацюванні t, набагато меншому, ніж середнє напрацювання T_0, вирази (5.39) – (5.42) можна спростити, замінивши $e^{-\lambda t}$ двома першими членами розкладання $e^{-\lambda t}$ у степеневий ряд.

Наприклад, вираз для ймовірності безвідмовної роботи набере вигляду

$$P(t)=1-\lambda t+\frac{(\lambda t)^2}{2!}-\frac{(\lambda t)^3}{3!}+....\approx 1-\lambda t,$$

при цьому похибка обчислення $P(t)$ не перевищує $0,5(\lambda\, t)^2$.

Усі розглянуті далі закони розподілу напрацювання до відмови використовуються на практиці для опису надійності «старіючих» об'єктів, здатних до відмов спрацювання.

5.6 Розподіл Релея

Щільність ймовірності в законі Релея (рис. 5.10) має такий вигляд:

$$f(t)=\frac{t}{\sigma^2}e^{-\left(\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)}, \qquad (5.45)$$

де σ – параметр розподілу Релея (дорівнює моді цього розподілу).

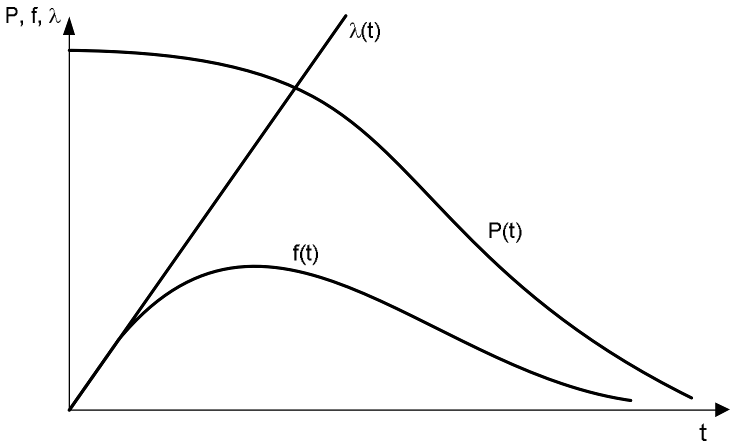


Рисунок 5.10

Мода неперервного розподілу є точкою максимуму щільності розподілу $f(t)$. Модою дискретного розподілу є таке спектральне значення ξ_m , при якому попередні і наступні спектральні значення мають ймовірності, менші ніж $P(\xi_m)$.

Інтенсивність відмов визначається за формулою

$$\lambda(t) = \frac{t}{\sigma^2} \quad . \tag{5.46}$$

Характерною ознакою розподілу Релея є прямая лінія графіка $\lambda(t)$, що виходить з початку координат. Ймовірність безвідмовної роботи об'єкта у цьому випадку визначається за виразом

$$P(t) = e^{\left[-\int\limits_0^t \lambda(t)dt\right]} = e^{-\left(\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)} . \tag{5.47}$$

Середнє напрацювання до відмови

$$T_0 = \int\limits_0^\infty P(t)dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sigma = 1.253\sigma . \tag{5.48}$$

Дисперсія часу безвідмовної роботи

$$D = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2 = 0.4292\sigma^2 . \tag{5.49}$$

5.7 Гамма-розподіл

Гамма-розподіл використовується при оцінці надійності елементів і систем у початковий період експлуатації, при дослідженні надійності електромеханічних і механічних пристроїв, елементів високонадійної апаратури з інтенсивністю відмов, що зменшується в часі. Крім того, даний розподіл описує розподіл часу відмов систем, резервованих способом заміщення, якщо напрацювання на відмову основної та резервних систем підпорядковане показовому закону [12].

Випадкова величина напрацювання до відмови T має гамма-розподіл із параметрами λ (масштабний параметр) і δ (параметр форми), де $\lambda,\delta > 0$, причому δ – ціле число, якщо її щільність розподілу відмов описується виразом

$$f(t) = \frac{\lambda^{\delta} t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} \exp(-\lambda t), \tag{5.50}$$

де $\Gamma(\delta)=(\delta-1)!$ – гамма-функція Ейлера. Вочевидь, при $\delta=1$ вираз (5.50) спрощується до вигляду (5.39), який відповідає експоненціальному розподілу.

Гамма-розподіл найкраще описує розподіл суми незалежних випадкових величин, кожна з яких розподілена за експоненціальним законом.

Гамма-розподіл при цілих значеннях δ іноді називають *розподілом Ерланга.* Для такого розподілу ймовірність безвідмовної роботи на інтервалі $(0,t)$ визначається так:

$$P(t) = \exp(-\lambda t) \sum_{i=0}^{\delta-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}. \tag{5.51}$$

Щільність розподілу відмов

$$f(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^{\delta-1}}{(\delta-1)!} \exp(-\lambda t). \tag{5.52}$$

Інтенсивність відмов

$$\lambda(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{\delta-1}}{(\delta-1)!\sum_{i=0}^{\delta-1}\frac{(\lambda t)^i}{i!}}. \tag{5.53}$$

Графіки зміни показників надійності при гамма-розподілі наведені на рис. 5.11.

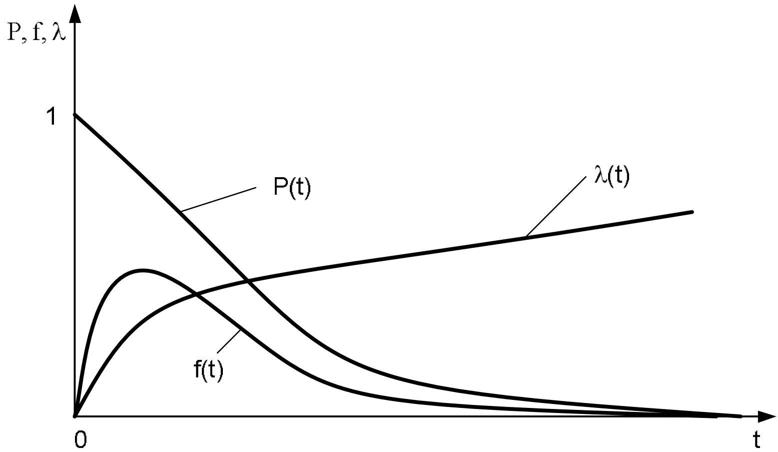


Рисунок 5.11

Кількісні характеристики напрацювання до відмови:
- середнє напрацювання (МО напрацювання) до відмови

$$T_0 = \delta/\lambda, \tag{5.54}$$

- дисперсія напрацювання до відмови

$$D = D\{T\} = \delta/\lambda^2. \tag{5.55}$$

Прикладом використання гамма-розподілу є резервована система, що складається з δ однакових елементів. При цьому під навантаженням знаходиться один елемент. Інші елементи почергово автоматично включаються в роботу після відмови працюючого елемента.

Для опису характеристик надійності в широкому інтервалі часу експлуатації, що включає в себе періоди початкових відмов і старіння, використовуються композиції законів розподілів. Звичайно для початкового періоду експлуатації застосовують закони Вейбулла і гамма-розподіл, для періоду нормальної експлуатації – експоненціальний розподіл, а для періоду старіння – нормальний, логарифмічно-нормальний або Релея [12].

Приклади

Приклад 1. Напрацювання до відмови системи підпорядковане зрізаному нормальному розподілу з параметрами: $T_0=8000$ годин, $S=2000$ годин. Визначити основні показники надійності системи за час $t=4000$ годин.

Розв'язання. Згідно із залежністю (5.24) визначаємо

$$\bar{f}(t) = c_0 f(t) = c_0 f(x)/S,$$

де $c_0 = \dfrac{1}{0{,}5 + \Phi\left(\dfrac{T_0}{S}\right)} = \dfrac{1}{0{,}5 + \Phi(4)} \approx 1$; $\Phi(4) \approx 0{,}5$ знаходимо

за таблицею 5.2. Підставляючи отримані розрахункові дані, отримуємо:

$$f(x) = f\left(\frac{t - T_0}{S}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-T_0)^2}{2S^2}} = 0{,}399 e^{-\frac{(4000-8000)^2}{2 \cdot 2000^2}} =$$

$$= 0{,}399e^{-2} = 0{,}399 \cdot 0{,}1353 = 0{,}05399.$$

Отже, $\bar{f}(4000) = 1 \cdot \dfrac{0{,}05399}{2000} \approx 2{,}7 \cdot 10^{-5}$ 1/год.

Ймовірність безвідмовної роботи системи протягом заданого часу знаходимо за залежністю (5.25):

$$\overline{P}(4000) = c_0\left[0{,}5 - \Phi(x)\right] = 1 \cdot \left[0{,}5 - \Phi(-2)\right] = 0{,}5 + \Phi(2) = 0{,}9772.$$

Інтенсивність відмов системи протягом заданого часу визначаємо за залежністю (5.27):

$$\overline{\lambda}(4000) = \bar{f}(4000)/\overline{P}(4000) = 2{,}7 \cdot 10^{-5}/0{,}9772 \approx$$

$$\approx 2{,}73 \cdot 10^{-5}\ 1/\textit{год}.$$

Приклад 2. Визначити середнє напрацювання та інтенсивність відмов для системи, час безвідмовної роботи якої підпорядковується закону Вейбулла з параметрами $\delta=1,8$; $\lambda=3\cdot 10^{-4}$ 1/год протягом часу $t=300$ год.

Розв'язання. Для визначення значення T_0 використовуємо вираз (5.37)

$$T_0 = \lambda^{-\frac{1}{\delta}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) = (3 \cdot 10^{-4})^{-0,56} \cdot \Gamma(1{,}56).$$

За допомогою таблиці 5.3 знаходимо значення гамма-функції $\Gamma(1,56)=0,88964$. Підставляючи значення у формулу, отримуємо $T_0 \approx 83{,}5$ години.

Підставивши у формулу (5.35) параметри розподілу Вейбулла δ і λ, визначимо інтенсивність відмов системи протягом 300 годин:

$$\lambda(300) = \lambda\delta \cdot 100^{\delta-1} = 3 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}8 \cdot 100^{0{,}8} \approx 2{,}15 \cdot 10^{-2}\ \text{1/год}.$$

Приклад 3. Напрацювання до відмови системи описується експоненціальним розподілом з параметром λ=3·10^{-4} 1/год. Визначити ймовірність безвідмовної роботи, щільність розподілу відмов за час t=1000 годин, а також середнє напрацювання до відмови.

Розв'язання. Згідно із залежністю (5.39) отримуємо

$$f(1000) = 3\cdot 10^{-4}\cdot e^{-3\cdot 10^{-4}\cdot 1000} \approx 2{,}22\cdot 10^{-4} \text{ 1/год.}$$

Згідно із залежністю (5.40) отримуємо

$$P(1000) = e^{-3\cdot 10^{-3}\cdot 1000} \approx 0{,}741\,.$$

На основі формули (5.43) отримуємо $T_0=1/\lambda$=3,3·10^3 год.

Приклад 4. Час напрацювання до відмови виробу підпорядковується розподілу Релея. Визначити основні показники надійності для t = 500 і 1000 годин, якщо параметр розподілу σ=1000 годин.

Розв'язання. Згідно із залежностями (5.45)–(5.48) отримуємо

- для t=500 год.:

$$P(500) = e^{-\left(\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)} = e^{-\frac{500^2}{2\cdot 1000^2}} = e^{-0.125} = 0{,}88;$$

$$f(500) = \frac{t}{\sigma^2}e^{-\left(\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)} = \frac{500}{1000^2}e^{-\frac{500^2}{2\cdot 1000^2}} = 0{,}44\cdot 10^{-3} \text{ 1/год.};$$

$$\lambda(500) = \frac{t}{\sigma^2} = \frac{500}{1000^2} = 0{,}5\cdot 10^{-3} \text{ 1/год.};$$

$$T_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\sigma = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot 1000 = 1253 \text{ год.};$$

- для $t=1000$ год.:

$$P(1000) = e^{-\frac{1000^2}{2\cdot 1000^2}} = e^{-0.5} = 0{,}606\,;$$

$$f(1000) = \frac{1000}{1000^2} e^{-\frac{1000^2}{2 \cdot 1000^2}} = 0{,}606 \cdot 10^{-3} \text{ 1/год.};$$

$$\lambda(1000) = \frac{1000}{1000^2} = 10^{-3} \text{ 1/год.}$$

Контрольні питання

1. Яке напрацювання до відмови підпорядковується нормальному розподілу?
2. Поясніть вплив параметрів розподілу МО та СКВ на зміну кривої щільності розподілу відмов.
3. Наведіть розрахункові вирази для показників безвідмовності, визначені через табличні функції: $f(x)$ *і* $\Phi(x)$.
4. За яких умов доцільно використовувати класичний нормальний, а в яких випадках - зрізаний нормальний розподіли?
5. Наведіть розрахункові вирази показників безвідмовності для зрізаного «зліва» нормального розподілу.
6. У чому полягає відмінність логнормального розподілу від класичного нормального?
7. Для яких об'єктів доцільніше використовувати логарифмічно нормальний розподіл?
8. У яких випадках доцільно використовувати розподіл Вейбулла?
9. Наведіть формули для визначення показників безвідмовності при розподілі Вейбулла. Поясніть значення змінних в цих виразах.
10. За якої умови розподіл Вейбулла переходить в експоненціальний розподіл?
11. Як описується зміна щільності розподілу відмов при експоненціальному розподілі напрацювання до відмови?
12. Отримайте розрахунковий вираз для ймовірності безвідмовної роботи, ймовірності відмов та інтенсивності від-

мов при експоненціальному розподілі напрацювання до відмови.
13. Як пов'язані кількісні характеристики напрацювання до відмови з інтенсивністю відмов при експоненціальному розподілі напрацювання до відмови?
14. Поясніть значення параметра σ в розподілі Релея.
15. Яка характерна ознака розподілу Релея стосується графіка інтенсивності відмов?
16. Наведіть залежності для визначення показників надійності розподілу Релея.
17. У якому випадку доцільно використовувати гамма-розподіл?
18. За яких умов гамма-розподіл сходиться до нормального?
19. Наведіть вираз для визначення щільності розподілу відмов при гамма-розподілі.

Розділ 6

ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ РОЗРАХУНКУ НАДІЙНОСТІ

6.1 Методологічні основи розрахунку надійності систем

Мета розрахунку надійності - визначення показників безвідмовності системи, що складається з невідновлюваних елементів, за даними про надійність елементів і зв'язки між ними.

На підставі визначених показників надійності вирішуються практичні завдання:

– обгрунтування вибору того або іншого системотехнічного (конструктивного) рішення;
– з'ясування можливості і доцільності резервування;
– з'ясування досяжності необхідної надійності системи на всіх стадіях її життєвого циклу.

Розрахунок надійності складається з таких етапів.

1. Визначення складу показників надійності, що розраховуються.
2. Складання структурної схеми надійності, що базується на аналізі функціонування системи (які блоки увімкнені, у чому полягає принцип їх роботи, перелік властивостей справної системи і т. п.), вибір методу розрахунку надійності.
3. Складання математичної моделі, що пов'язує показники надійності системи, які розраховуються, з показниками надійності її елементів.
4. Виконання розрахунку, аналіз отриманих результатів, коригування розрахункової моделі.

Склад показників, що розраховуються.

Для системи з невідновлюваними елементами:

- середнє напрацювання до відмови (T_{0C});
- ймовірність безвідмовної роботи до заданого напрацювання $P_C(t)$;
- інтенсивність відмов до заданого напрацювання $\lambda_C(t)$;
- щільність розподілу відмов до заданого напрацювання $f_C(t)$.

Для системи з відновлюваними елементами:

- T_{0C};
- $P_C(t)$;
- коефіцієнт готовності;
- параметр потоку відмов.

Два останні показники у попередніх розділах не розглядалися. Їх визначення, а також практичне застосування наведені в розділі 9.

Структурна схема надійності системи - логічна схема взаємодії елементів, що визначає працездатність системи, або інакше - графічне відображення системи, що дозволяє однозначно визначити її стан (працездатна/непрацездатна) за станом елементів (працездатний/ непрацездатний).

За структурною схемою надійності системи можуть бути такими:

– система без резервування або основна система (ОС);
– система з резервуванням.

Для одних і тих самих технічних систем можуть бути складені різні структурні схеми надійності залежно від виду відмов елементів (табл. 6.1).

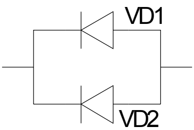
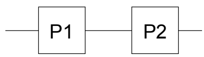
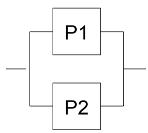
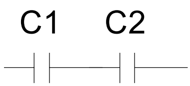
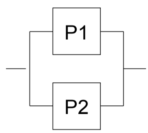
На підставі стуктурної схеми надійності системи будується її математична модель у вигляді системи алгебраїчних, інтегральних та диференціальних рівнянь або графа станів.

Першими етапами розрахунку надійності є складання структурної схеми надійності системи і визначення показників надійності складових її елементів.

На цих етепах передусім класифікуються види відмов, які істотно впливають на працездатність системи, а також враховуються такі обставини:

- до складу системи у вигляді окремих елементів можуть входити електричні з’єднання паянням, стисненням або зварюванням, а також інші з’єднання (штепсельні та ін.), оскільки на їх частку припадає 10-50% загальної кількості відмов;
- якщо є неповна інформація про показники надійності елементів, то доводиться інтерполювати показники або використовувати показники аналогів.

Таблиця 6.1

Электронна принципова схема	*Опис структури надійності*	*Структура надійності*
	*Для відмови типу **«к.з.»** система стає непрацездатною при відмові одного діода*	
	*Для відмови типу **«обрив»** система працездатна, поки працездатний хоча б один діод*	
	*Для відмови типу **«к.з.»** (пробій конденсатора) система залишається працездатною*	

Практично розрахунок надійності проводиться у такій послідовності:

1. На стадії складання технічного завдання на проектовану систему, коли її структура не визначена, проводиться попередня оцінка надійності, виходячи з апріорної інфор-

мації про надійність близьких за характером систем і надійності комплектуючих елементів.

2. Складається структурна схема надійності з показниками надійності елементів, заданими за нормальних (номінальних) умов експлуатації.

3. Остаточний (коефіцієнтний) розрахунок надійності проводиться на стадії завершення технічного проекту, коли проведена експлуатація дослідних зразків і відомі всі можливі умови експлуатації. При цьому коригуються показники надійності елементів, часто у бік їх зменшення, вносяться зміни у структуру - вибирається резервування.

Мета та порядок розрахунку надійності, методи ідентифікації об’єкта, розрахунку надійності регламентовані державним стандартом [13].

6.2 Системи із резервуванням

Працездатність систем без резервування вимагає працездатності всіх елементів системи. У складних технічних пристроях без резервування ніколи не вдається досягти високої надійності, навіть якщо використовувати елементи з високими показниками безвідмовності.

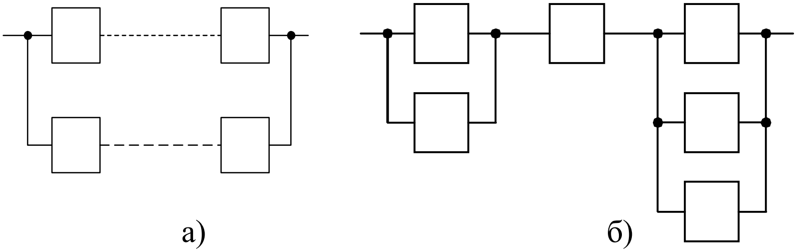
Система з резервуванням - це система з надлишковістю елементів, тобто з резервними складовими, що є надлишковими стосовно мінімально необхідної (основної) структури і виконують ті самі функції, що і основні елементи. У системах із резервуванням працездатність забезпечується до того часу, поки для заміни основних елементів, що відмовили, є в наявності резервні.

Структурне резервування може бути загальним, коли резервується система у цілому (рис. 6.1 а), або поелементним, коли резервуються окремі елементи або групи елементів (рис. 6.1 б).

Види резервування:

– *пасивне (навантажене)* - резервні елементи функціонують нарівні з основними (постійно в роботі);

– *активне (ненавантажене)* - резервні елементи вводяться в роботу тільки після відмови основних елементів (резервування заміщенням).



а) б)

Рисунок 6.1

При навантаженому резервуванні резервні елементи витрачають свій ресурс, мають однаковий розподіл напрацювань до відмови і інтенсивність відмов основних λ_O і резервних λ_H елементів однакова ($\lambda_O = \lambda_H$).

При навантаженому резервуванні відмінність між основними і резервними елементами часто умовна. Для забезпечення нормальної роботи (збереження працездатності) необхідно, щоб кількість працездатних елементів не ставала меншою мінімально необхідної.

Різновидом навантаженого резервування є *резервування з полегшеним резервом*, тобто резервні елементи також знаходяться під навантаженням, але меншим, ніж основні. Інтенсивність відмов резервних елементів ($\lambda_{НП}$) нижча, ніж у основних (λ_O), тобто $\lambda_O > \lambda_{НП}$.

При *ненавантаженому резервуванні* резервні елементи (рис.6.2) не задіяні в роботі, показники їх надійності не змінюються, і вони не можуть відмовити за час знаходження в резерві, тобто інтенсивність відмов резервних елементів $\lambda_X = 0$.

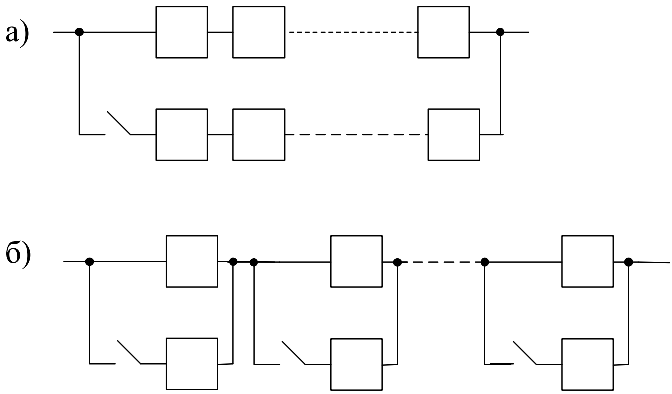


Рисунок 6.2

Резервні елементи включаються в роботу тільки після відмови основних елементів. Переключення проводиться вручну або автоматично (автоматично - включення резервних машин і елементів в енергетиці, у бортових мережах суден і літаків і т. д.; вручну - заміна інструменту або оснащення при виробництві, включення ескалаторів у метро в години «пік» і т. д.).

Різновидом ненавантаженого резервування є *ковзне резервування*, коли один і той самий резервний елемент може бути використаний для заміни будь-якого з елементів основної системи (рис. 6.3).

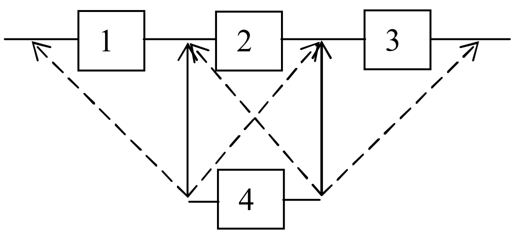


Рисунок 6.3

Якщо розглянути два характерні види резервування (рис.6.1 а, б; 6.2 а, б), то очевидно, що при рівній кількості основних і резервних елементів ненавантажений резерв забезпечує більшу надійність. Але це справедливо лише тоді, коли переведення резервного елемента в роботу відбувається абсолютно надійно (тобто ймовірність безвідмовної роботи перемикача повинна дорівнювати 1,0). Виконання цієї умови пов'язане зі значними технічними труднощами або є іноді недоцільним з економічних або технічних причин.

Введемо такі позначення: n – загальна кількість однотипних елементів у системі (основних і резервних); r - кількість елементів, необхідних для функціонування системи (основних, які резервуються).

Кратність резервування - це співвідношення між загальною кількістю резервних елементів і елементів, необхідних для роботи системи (основних елементів):

$$k = (n - r)/r.$$

Кратність резервування може бути цілою, якщо $r = 1$, або дробовою, якщо $r > 1$. Наприклад: $r=1,\ k = (3 - 1)/1 = 2$ (рис. 6.4).

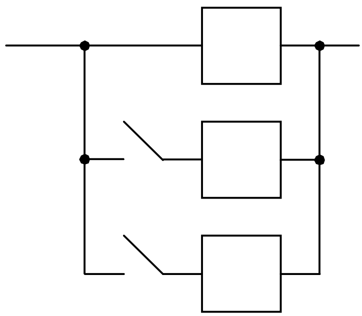


Рисунок 6.4

6.3 Нормування надійності елементів системи

Розглянуті моделі дозволяють визначити показники безвідмовності системи за відомими показниками надійності елементів. Так розв'язується задача при завершенні технічного проекту, після випробувань дослідних зразків системи та складових елементів. Інакше: значення $P_i(t)$ i-х елементів добре відомі, значення $P_C(t)$ лише уточнюється і порівнюється із заданим у технічному завданні (ТЗ) на проект. При цьому, якщо $P_C(t)$ виходить меншою, ніж в ТЗ, то вживаються заходи щодо її підвищення (резервування, використання надійніших елементів і т. п.).

На початковій стадії проектування в ТЗ зазначається лише ймовірність безвідмовної роботи проектованої системи. При проектуванні використовуються як елементи з відомою надійністю, так і елементи, про надійність яких можна судити лише за їх аналогами (прототипами). При цьому необхідна попередня оцінка надійності елементів, яка надалі уточнюється в ході випробування дослідних зразків системи і елементів.

Існують різні *способи нормування надійності елементів системи*:

– за принципом рівнонадійності елементів;
– з урахуванням даних про аналоги елементів;
– з урахуванням перспектив удосконалення елементів.

Вибір того або іншого способу залежить від наявної інформації про проектовану систему. Розглянемо процедуру нормування за названими способами.

1. *Нормування надійності за принципом рівнонадійності елементів*.

За ТЗ задано $P_c(t)$ та кількість n елементів системи. Розподіл напрацювання до відмови елементів – експоненціальний (п. 5.5).

При ідентичних (рівнонадійних) елементах (λ_1 = ... =

$= \lambda_i = ... = \lambda_n$) маємо:

$$\lambda_C = n\,\lambda; \qquad T_{0C} = \frac{T_0}{n};$$

інтенсивність λ відмов i-го елемента визначається з виразу

$$\ln P_C(t) = -\,n \cdot \lambda \cdot t,$$

звідки

$$\lambda = \frac{1}{n}(-\ln P_C(t)/t), \ \forall \ i \in \{1,...n\}.$$

2. *Нормування надійності з урахуванням даних про надійність аналогів.*

За ТЗ задано $P_c(t)$ та кількість n елементів системи; інтенсивності відмов аналогів λ_{ai}, $i = \overline{1,n}$

Визначається частка відмов системи внаслідок відмов i-го елемента:

$$k_i = \lambda_{ai} / \lambda_{ac},$$

де $\lambda_{ac} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ai}$ - *ІВ* системи за даними про аналоги.

З виразу $P_c(t) = exp(-\,\lambda_c \cdot t)$ визначається *ІВ* проектованої системи:

$$\lambda_c = -\ln P_c(t)/t;$$

та *ІВ* елементів, що становлять:

$$\lambda_i = k_i \cdot \lambda_c\,.$$

3. *Нормування надійності з урахуванням перспектив удосконалення елементів.*

За технічним завданням задано $Pc(t)$ та кількість n елементів системи; зміна *ІВ* аналогів за часовий період з *19XY* по *200Z* роки апроксимовано виразом $\lambda_{ai}=\varphi(\hat{\lambda}_{ai}, 19XY)$, де λ_{ai} - *ІВ* *i*-го аналога в *19XY* році.

За виразом $\lambda_{ai} = \varphi(\hat{\lambda}_{ai}, 19XY)$ екстраполюється *ІВ* елементів - аналогів до року проектування системи (1994 рік), тобто $\lambda_{a1(94)}, \ldots, \lambda_{ai(94)}, \ldots$.

Визначається частка відмов системи внаслідок відмов *i*-го елемента

$$k_i=\lambda_{ai(94)}/\lambda_{ac(94)}, \quad \text{де} \quad \lambda_{ac(94)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ai(94)}$$

і *ІВ* елементів системи

$$\lambda_i = k_i \cdot \lambda_c = k_i \cdot (-\ln P_c(t)/t).$$

Принципи нормування показників надійності за другим та третім способами відрізняються лише екстраполяцією значень на рік проектування.

Приклади [12]

Приклад 1. Проектується система, яка складається з трьох рівнонадійних послідовних каскадів. Задана ймовірність безвідмовної роботи системи $P_c(t)=0,98$ протягом часу $t=2000$ годин. Визначити значення $\lambda_{каск}$ для кожного каскаду.

Розв'язання. Приймаємо експоненціальну модель напрацювання до відмови системи (п.5.5):

$$P_C(t)=[P_{каск}(t)]^3; \quad \lambda_C=3\lambda_{каск}; \quad T_C=T_{каск}/3;$$

$$P_C(t) = e^{-\lambda_C t_C} \approx 1-\lambda_C t_C = 0,98 .$$

Звідси $\lambda_C = \dfrac{1-0{,}98}{2000} = 10^{-5}$ 1/год.

Тому для одного каскаду $\lambda_{каск} \le \dfrac{10^{-5}}{3} = 3{,}3 \cdot 10^{-6}$ 1/год.

Приклад 2. Проектується система, що складається із трьох блоків А1, В1,С1. Задана ймовірність безвідмовної роботи системи $P_c(t)=0{,}97$ протягом часу $t=100$ годин. Маємо прототип, що складається із блоків А0, В0, С0, кожний з яких характеризується інтенсивністю відмов відповідно:

$\lambda_{A0}=10^{-4}$ *1/год*; $\lambda_{B0}=8\cdot10^{-4}$ *1/год*; $\lambda_{C0}=3\cdot10^{-4}$ *1/год*.

Визначити норми надійності у вигляді інтенсивності відмов λ для проектованих блоків А1, В1, С1.

Розв'язання. Враховуючи прототип, визначаємо коефіцієнт, який враховує частку відмов проектованої системи внаслідок відмови j–го блоку (j= А1, В1,С1):

$$K_j = \frac{\lambda_j}{\lambda},$$

де λ_j і λ – відповідно інтенсивність відмов j–го блоку і всієї системи.

Усі коефіцієнти K_j знаходяться за співвідношенням інтенсивностей відмов прототипу

$$K_j = \frac{\lambda_{j0}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_{ji0}},$$

де n-кількість елементів. Для нашого випадку

$$K_{A1} = \frac{\lambda_{A0}}{\lambda_{A0}+\lambda_{B0}+\lambda_{C0}} = \frac{10^{-4}}{(1+8+3)\cdot 10^{-4}} = \frac{1}{12};$$

$$K_{B1} = \frac{\lambda_{B0}}{\lambda_{A0} + \lambda_{B0} + \lambda_{C0}} = \frac{8 \cdot 10^{-4}}{(1+8+3) \cdot 10^{-4}} = \frac{2}{3};$$

$$K_{C1} = \frac{\lambda_{C0}}{\lambda_{A0} + \lambda_{B0} + \lambda_{C0}} = \frac{3 \cdot 10^{-4}}{(1+8+3) \cdot 10^{-4}} = \frac{1}{4}.$$

Знаходимо значення λ_c для проектованої системи:

$$P_c(t)=1- \lambda_c t; \qquad \lambda_c=(1-0,97)/100=3 \cdot 10^{-4} \ 1/год.$$

Визначаємо норми надійності для блоків проектованої системи:

$$\lambda_{A1} = K_{A1} \cdot \lambda_c = \frac{1}{12} \cdot 3 \cdot 10^{-4} = 2,5 \cdot 10^{-5} \ \text{1/год};$$

$$\lambda_{B1} = K_{B1} \cdot \lambda_c = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 10^{-4} = 2 \cdot 10^{-4} \ \text{1/год};$$

$$\lambda_{C1} = K_{C1} \cdot \lambda_c = \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot 10^{-4} = 7,5 \cdot 10^{-5} \ \text{1/год}.$$

Приклад 3. Проектована система складається з двох послідовних блоків A1 і B1. Задана ймовірність безвідмовної роботи системи $P_c(t)=0,97$ протягом часу $t=100$ годин. Рік випуску проектованої системи – 2007. Зміна інтенсивностей відмов за аналізами даних за 1992 – 2002 роки для блоків A0, B0 аналогічних блокам A1 і B1, може бути за роками випуску апроксимована виразом

$$\lambda = \lambda_{92} exp[-v(L-1992)],$$

де λ_{92} - інтенсивність відмови виробу, випущеного в 1992 році; L – рік випуску блоку.

Для блоку A0: $\lambda_{A92}=1,4 \cdot 10^{-4}$ *1/год,* $v_A=0,034$ *1/год;*

для блоку B0: $\lambda_{B92}=28 \cdot 10^{-4}$ *1/год,* $v_A=0,14$ *1/год.*

Визначити норми надійності для показників надійності блоків А1 і В1 у вигляді інтенсивності відмов λ_{A1} і λ_{B1}.

Розв'язання. Екстраполюємо значення λ блоків А0, В0 прототипу до 2007 року:

$$\lambda_{A07} = 1{,}4\cdot 10^{-4}\, exp[-0{,}034\,(2007-1992)] = 8{,}4\cdot 10^{-5}\ 1/год;$$

$$\lambda_{B07} = 28\cdot 10^{-4}\, exp[-0{,}14\,(2007-1992)] = 34\cdot 10^{-5}\ 1/год.$$

Аналогічно до прикладу 2 визначаємо коефіцієнти K_j і норми надійності:

$$K_{A1} = \frac{\lambda_{A07}}{\lambda_{A07} + \lambda_{B07}} = \frac{8{,}4\cdot 10^{-5}}{(8{,}4+35)\cdot 10^{-5}} = 0{,}2\,;$$

$$K_{B1} = \frac{\lambda_{B07}}{\lambda_{A07} + \lambda_{B07}} = \frac{34\cdot 10^{-5}}{(8{,}4+35)\cdot 10^{-5}} = 0{,}8\,;$$

$$\lambda_{A1} = K_{A1}\cdot\lambda = 0{,}4\cdot 10^{-4}\ \ 1/\text{год};$$

$$\lambda_{B1} = K_{B1}\cdot\lambda = 1{,}6\cdot 10^{-4}\ \ 1/\text{год}.$$

Контрольні питання

1. Які основні цілі і завдання розрахунку показників надійності систем?
2. Визначте склад показників безвідмовності системи, що розраховуються.
3. Перелічіть і поясніть основні етапи розрахунку надійності систем.
4. Що таке структурна схема надійності?
5. Які види резервування існують? У чому відмінність на-

вантаженого і ненавантаженого резервування?
6. Що таке кратність резервування і в чому відмінність цілої і дробової кратності?
7. У чому полягає необхідність нормування надійності між елементами основної системи?
8. Які існують способи розподілу норм надійності між елементами системи і чим вони відрізняються?

Розділ 7

РОЗРАХУНОК СТРУКТУРНОЇ НАДІЙНОСТІ СИСТЕМ

Стан системи (працездатний або непрацездатний) визначається станом елементів та їх з’єднанням. Тому теоретично можливо розрахунок безвідмовності будь-якої системи звести до перебору всіх можливих комбінацій станів елементів, визначення ймовірності кожного з них і ймовірності працездатних станів системи.

Такий метод (метод прямого перебору) практично універсальний і може використовуватися при розрахунку будь-яких систем. Проте при великій кількості n елементів системи такий шлях стає нереальним унаслідок великого обсягу обчислень. Тому на практиці використовують більш ефективні й економічні методи розрахунку, не пов’язані з великим обсягом обчислень. Можливість застосування таких методів пов’язана зі структурою систем.

7.1 Системи із послідовним з’єднанням елементів

Системою із послідовним з’єднанням елементів (основною системою) називається система, в якій відмова будь-якого елемента призводить до відмови всієї системи (рис 1.1). Таке з’єднання елементів у техніці трапляється найчастіше, тому його називають основним з’єднанням.

У системі з послідовним з’єднанням для заданого напрацювання до відмови необхідно і достатньо, щоб кожен з n її елементів працював безвідмовно впродовж цього напрацювання. Вважаючи відмови елементів незалежними, ймовірність одночасної безвідмовної роботи n елементів визначається за теоремою множення ймовірностей (п. 2.3), згідно з якою

$$P_C(t) = p_1(t)p_2(t)\ldots p_n(t) = \prod_{i=1}^{n} p_i(t) = \prod_{i=1}^{n}(1 - q_i(t)). \quad (7.1)$$

Далі аргументом t у дужках, що показує залежність показників надійності від часу (у загальному випадку - одиниці напрацювання), нехтуємо для скорочення записів формул. Відповідно ймовірність відмови такої системи

$$Q_C = 1 - P_C = 1 - \prod_{i=1}^{n} p_i = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - q_i). \quad (7.2)$$

Якщо система складається з рівнонадійних елементів ($p_i = p$), то

$$P_C = p_i^n, \quad Q_C = 1 - (1 - q)^n. \quad (7.3)$$

Оскільки всі співмножники у правій частині виразу (7.1) не перевищують одиниці, ймовірність безвідмовної роботи системи при послідовному з'єднанні не може бути вищою за ймовірність безвідмовної роботи найбільш ненадійного з її елементів (принцип "гірше гіршого") і з малонадійних елементів не можна створити високонадійної системи з послідовним з'єднанням.

Якщо всі елементи системи працюють у періоді нормальної експлуатації і має місце взаємна незалежність відмов елементів (простий потік відмов), то напрацювання елементів і системи підпорядковується експоненціальному розподілу, на підставі (7.1) можна записати:

$$P_C = \prod_{i=1}^{n} \exp(-\lambda_i t) = \exp\left[-(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)t\right] = \exp(-\lambda_C t)\,, \quad (7.4)$$

де
$$\lambda_C = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = const\,. \quad (7.5)$$

Таким чином, інтенсивність відмов системи при послідовному з'єднанні елементів і простому потоці відмов дорівнює сумі інтенсивностей відмов елементів.

З (7.4, 7.5) випливає, що для системи з n рівнонадійних елементів ($\lambda_i = \lambda$)

$$\lambda_C = n\lambda\ , \quad T_{0C} = T_{0i}/n\ , \quad (7.6)$$

тобто інтенсивність відмов у n разів більша, а середнє напрацювання у n разів менше, ніж для окремого елемента.

При експоненціальному розподілі напрацювання до відмови кожного з n елементів системи $P_i(t) = exp(-\lambda_i\, t)$, де $\lambda_i = const.$ Залежності для визначення показників безвідмовності системи наведені в табл. 7.1.

Таблиця 7.1

Неідентичні елементи $\lambda_1 \neq \ldots . \neq \lambda_n \neq \lambda$	***Ідентичні елементи*** $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \lambda$
Ймовірність безвідмовної роботи	
$P_c(t) = \prod_{i=1}^{n} P_i(t) = \exp(-t\sum_{i=1}^{n} \lambda_i) =$ $= \exp(-t \cdot \lambda_C)$	$P_c(t) = \exp(-n \cdot t \cdot \lambda)$
Ймовірність відмов	
$Q_c(t) = 1 - P_C(t) = 1 - \exp(-t\lambda_C)$	$Q_c(t) = 1 - \exp(-n \cdot t \cdot \lambda)$

Продовження таблиці 7.1

Інтенсивність відмов	
$\lambda_c = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$	$\lambda_c = n \cdot \lambda$
Неідентичні елементи $\lambda_1 \neq \ldots \neq \lambda_n \neq \lambda$	***Ідентичні елементи*** $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \lambda$
Щільність розподілу відмов	
$f_c(t) = -dP_c(t)/dt = \lambda_c \exp(-t\lambda_c)$	$f_c(t) = n \cdot \lambda \cdot \exp(-n \cdot t \cdot \lambda)$
МО напрацювання до відмови	
$T_{0C} = \dfrac{1}{\lambda_C} = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i} = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} 1/T_{0i}}$	$T_{0C} = \dfrac{1}{\lambda_C} = \dfrac{1}{n \cdot \lambda} = = \dfrac{1}{n \cdot 1/T_{0i}} = \dfrac{T_0}{n}$

7.2 Системи із паралельним з’єднанням елементів

Системою з паралельним з’єднанням елементів (навантаженим резервуванням) називається система, відмова якої відбувається лише в разі відмови усіх її елементів (рис. 1.2). Такі схеми надійності характерні для систем, у яких елементи дублюються або резервуються, тобто паралельне з’єднання використовується як метод підвищення надійності. Для відмови системи із паралельним з’єднанням елементів впродовж напрацювання необхідно і достатньо, щоб усі її елементи відмовили протягом цього напрацювання. Отже, відмова системи полягає у спільній відмові усіх елементів, ймовірність чого (при допущенні незалежності відмов) може бути визначена за теоремою множення ймовірностей як добуток ймовірностей відмови елементів:

$$Q_C = q_1 q_2 \dots q_n = \prod_{i=1}^{n} q_i = \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i)\,. \qquad (7.7)$$

Відповідно ймовірність безвідмовної роботи

$$P_C = 1 - Q_C = 1 - \prod_{i=1}^{n} q_i = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i)\,. \qquad (7.8)$$

Для систем з рівнонадійних елементів ($p_i = p$)

$$Q_C = q^n \quad , \quad P_C = 1 - (1 - p)^n, \qquad (7.9)$$

тобто надійність системи з паралельним з'єднанням підвищується при збільшенні кількості елементів.

Оскільки $q_i < 1$, а добуток у правій частині (7.7) завжди менший від будь-якого із множників, то ймовірність відмови системи не може бути вищою за ймовірність набільш надійного її елемента («краще кращого»), і навіть з порівняно ненадійних елементів можлива побудова досить надійної системи.

При експоненціальному розподілі напрацювання вираз (7.9) набирає вигляду

$$P_C = 1 - [1 - exp(- \lambda\, t)]^n \quad , \qquad (7.10)$$

звідки середнє напрацювання системи

$$T_{0C} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = T_{0i} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\,, \qquad (7.11)$$

де $T_0 = 1/\lambda_i$ - середнє напрацювання елемента.

При ідентичних n елементах системи МО напрацювання до відмови

$$T_{0C} = M\{T_0\} = \int_0^\infty P_C(t)dt = \int_0^\infty \{1-(1-\exp(-t\lambda))^n\}dt =$$

$$= |x = 1-\exp(-\lambda t)),\ t = 1/\lambda \cdot \ln(1/(1-x)),\ \mathrm{dt} = \mathrm{dx}/\lambda(1\text{-}\mathrm{x})| =$$

$$= 1/\lambda \cdot \int_0^1 (1+\mathrm{x}+\ldots+\mathrm{x}^{\mathrm{n\text{-}1}})dx = 1/\lambda \cdot \sum_{i=1}^{n}(1/i) = 1/\lambda(1+1/2+\ldots+1/n).$$

При великому n ($n \to \infty$)

$$T_{0c} \approx 1/\lambda \cdot (\ln n + c), \tag{7.12}$$

де $c \approx 0.577$.

При неідентичних елементах

$$T_{0C} = (1/\lambda_1 + 1/\lambda_2 + \ldots + 1/\lambda_n) - [1/(\lambda_1+\lambda_2) + \ldots + 1/(\lambda_{n-1}+\lambda_n)] +$$

$$+ [1/(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) + \ldots + 1/(\lambda_{\mathrm{n\text{-}2}}+\lambda_{n-1}+\lambda_n)] + (-1)^{n+1}[1/\sum_{i=1}^{n}\lambda_i].$$

Таким чином, при навантаженому резервуванні експоненціальний розподіл напрацювання до відмови не зберігається.

Для системи з n ідентичними елементами $P_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ розв'язуються *задачі оптимізації* (у різних постановках).

1. Визначення кількості n елементів системи, при якій ймовірність відмови системи $Q_c(t)$ не перевищуватиме заданої Q_c.

Оскільки $Q_c(t) = Q_i^n(t)$, то умова задачі $Q_i^n(t) \le Q_c(t)$.

З наведеної нерівності визначається мінімально необхідна кількість елементів:

$$n \ge \frac{\ln(1/Q_C)}{\ln(1/Q_i(t))}.$$

2. Визначення надійності n елементів системи з умови, щоб ймовірність відмов не перевищувала заданої Q_c.

З умови $Q_i^n(t) \le Q_c(t)$, знаходимо ймовірність відмов і ймовірність безвідмовної роботи $P_i(t)=1-Q_i(t)$.

Для системи з експоненціальним напрацюванням до відмови кожного з n елементів $P_i(t)= exp(-\lambda_i t)$, де $\lambda_i = const$, залежності для визначення показників безвідмовності наведені в табл. 7.2.

Таблиця 7.2

Неідентичні елементи $\lambda_1 \ne .... \ne \lambda_n \ne \lambda$	***Ідентичні елементи*** $\lambda_1 = ... = \lambda_n = \lambda$
Ймовірність безвідмовної роботи	
$P_c(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - \exp(-t \cdot \lambda_i))$	$P_c(t) = 1 - (1 - \exp(-t \cdot \lambda))^n$
Ймовірність відмов	
$Q_c(t) = \prod_{i=1}^{n}(1 - \exp(-t \cdot \lambda_i))$	$Q_c(t) = (1 - \exp(-t \cdot \lambda))^n$

7.3 Системи типу «m із n»

Систему типу «m із n» можна розглядати як варіант системи із паралельним з'єднанням елементів, відмова якої відбудеться, якщо з n елементів, з'єднаних паралельно, працездатними виявляться менш ніж m елементів ($m < n$).

На рис. 7.1 наведена система «2 із 5», яка працездатна, якщо із п'яти її елементів працюють будь-які два, три, чотири або всі п'ять (на схемі пунктиром обведено функціонально необхідні два елементи, причому виділення елементів 1 і 2 проведено умовно, насправді усі п'ять елементів рівнозначні).

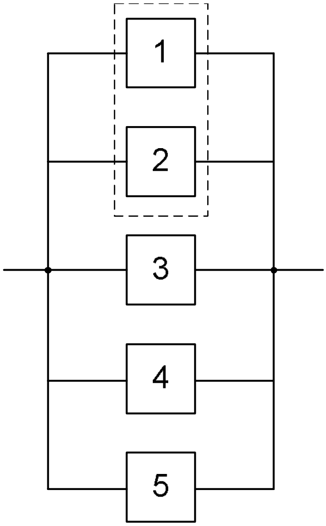


Рисунок 7.1

Системи типу «*m із n*» найчастіше зустрічаються в електричних і зв'язаних системах (при цьому елементами є з'єднувальні канали технологічних ліній), а також при структурному резервуванні .

Для розрахунку надійності систем типу «*m із n*» при порівняно невеликій кількості елементів можна скористатися методом прямого перебору. Він полягає у визначенні працездатності кожного з можливих станів системи, які визначаються різними поєднаннями працездатних і непрацездатних станів елементів.

Усі стани системи «2 із 5» занесені в таблицю 7.3 (у таблиці працездатні стани елементів і системи відмічені знаком «+», непрацездатні – знаком «-»). Для даної системи працездатність визначається лише кількістю працездатних елементів.

Таблиця 7.3

<table>
<tr><th rowspan="2">Номер стану</th><th colspan="5">Стан елементів</th><th rowspan="2">Стан системи</th><th rowspan="2">Ймовірність стану системи</th></tr>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th></tr>
<tr><td>1</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>p^5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td><td rowspan="5">$p^4q^1 = p^4(1-p)$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>4</td><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>5</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>6</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>7</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td><td rowspan="10">$p^3q^2 = p^3(1-p)^2$</td></tr>
<tr><td>8</td><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td></tr>
<tr><td>9</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td></tr>
<tr><td>10</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td></tr>
<tr><td>11</td><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>12</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>13</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>14</td><td>+</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>15</td><td>-</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>16</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>17</td><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td><td rowspan="10">$p^2q^3 = p^2(1-p)^3$</td></tr>
<tr><td>18</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td></tr>
<tr><td>19</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td></tr>
<tr><td>20</td><td>+</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>21</td><td>-</td><td>+</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>22</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>23</td><td>+</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td></tr>
<tr><td>24</td><td>-</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td></tr>
<tr><td>25</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>26</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td></tr>
<tr><td>27</td><td>+</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td rowspan="5">$p^1q^4 = p^1(1-p)^4$</td></tr>
<tr><td>28</td><td>-</td><td>+</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>29</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>30</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>31</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td><td>-</td></tr>
<tr><td>32</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>$q^5 = (1-p)^5$</td></tr>
</table>

Розрахунок надійності системи «*m із n*» може проводитися комбінаторним методом, в основі якого лежить формула біноміального розподілу. Біноміальному розподілу підпорядковується дискретна випадкова величина *k* - кількість появ деякої події у серії з *n* дослідів, якщо в окремому досліді ймовірність появи події становить *p*. При цьому ймовірність появи події рівно *k* разів визначається так:

$$P_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \tag{7.15}$$

де C_n^k - біноміальний коефіцієнт, який називається «кількістю поєднань за *k* із *n*» (тобто скількома різними способами можна реалізувати ситуацію *«k із n»*):

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad . \tag{7.16}$$

Значення біноміальних коефіцієнтів наведені в додатку Б.

Оскільки для відмови системи «*m із n*» достатньо, щоб кількість справних елементів була меншою за *m*, ймовірність відмови може бути знайдена за теоремою складання ймовірностей (п. 2.3) для $k = 0, 1, \ldots, (m-1)$:

$$Q_C = \sum_{k=0}^{m-1} P_k = \sum_{k=0}^{m-1} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}. \tag{7.17}$$

Аналогічним чином можна знайти ймовірність безвідмовної роботи як суму (7.15) для $k = m, m+1, \ldots, n$:

$$P_C = \sum_{k=m}^{n} P_k = \sum_{k=m}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}. \tag{7.18}$$

Очевидно, що $Q+P=1$, тому в розрахунках необхідно вибирати ту з формул (7.17), (7.18), яка в даному конкретному випадку містить меншу кількість доданків. Для системи «*2 із 5*» (рис. 7.1) за формулою (7.18) отримаємо

$$\begin{aligned} P_C &= C_5^2 p^2 (1-p)^3 + C_5^3 p^3 (1-p)^2 + C_5^4 p^4 (1-p) + C_5^5 p^5 = \\ &= 10p^2(1-p)^3 + +10p^3(1-p)^2 + 5p^4(1-p) + p^5 = \\ &= 10p^2 - 20p^3 + 15p^4 - 4p^5. \end{aligned} \qquad (7.19)$$

Ймовірність відмови тієї самої системи за (7.17)

$$\begin{aligned} Q_C &= C_5^0 (1-p)^5 + C_5^1 p(1-p)^4 = (1-p)^5 + 5p(1-p)^4 = \\ &= 1 - 10p^2 + 20p^3 - 15p^4 + 4p^5, \end{aligned} \qquad (7.20)$$

що, як видно, дає той самий результат для ймовірності безвідмовної роботи. У таблиці 7.4 наведені формули для розрахунку ймовірності безвідмовної роботи систем типу «*m із n*» при $m \le n \le 5$.

Таблиця 7.4

m	Загальна кількість елементів n				
	1	2	3	4	5
1	p	$2p-p^2$	$3p-3p^2+p^3$	$4p-6p^2+4p^3-$ $-p^4$	$5p-10p^2+10p^3-$ $-5p^4+p^5$
2	-	p^2	$3p^2-2p^3$	$6p^2-8p^3+3p^4$	$10p^2-20p^3+15p^4-$ $-4p^5$
3	-	-	p^3	$4p^3-3p^4$	$10p^3-15p^4+6p^5$
4	-	-	-	$p4$	$5p^4-4p^5$
5	-	-	-	-	p^5

Вочевидь, при $m=1$ система перетворюється на звичайну систему із паралельним з’єднанням елементів, а при $m=n$ – із послідовним з’єднанням.

7.4 Залежність надійності системи від кратності резервування

При цілій кратності k ($r = 1$, $n = k + 1$) для системи з ідентичними елементами та експоненціальним розподілом напрацюванням до відмови маємо:

– ймовірність безвідмовної роботи системи

$$P_c(t)= 1-(1-exp(-\lambda\, t))^{k+1};$$

– щільність розподілу ймовірностей системи

$$f_c(t)= - dP_c(t)/ dt = (k + 1)\, \lambda\, (1 - exp(- \lambda\, t))^{k}\, exp(- \lambda\, t);$$

– інтенсивність відмов системи

$$\lambda_C(t) = f_C(t)/P_C(t) = \frac{(k+1)\lambda(1-\exp(-\lambda\cdot t))^k \exp(-\lambda t)}{1-(1-\exp(-\lambda\cdot t))^{k+1}}.$$

Вважаючи елементи системи високонадійними, тобто $\lambda t << 1$, $P(t)\approx 1 - \lambda t$, отримаємо спрощені вирази:

– ймовірність безвідмовної роботи системи

$$P_c(t) \approx 1 - (\lambda t))^{k+1};$$

– щільність розподілу ймовірностей системи

$$f_c(t) \approx (k + 1)\, \lambda^{k+1}\, t^{\,k};$$

– інтенсивність відмов системи

$$\lambda_C(t) \approx \frac{(k+1)\lambda^{k+1} t^k}{1-(\lambda \cdot t)^{k+1}}.$$

Але оскільки $\lambda t << 1$, то $(\lambda t)^{k+1} \to 0$, тому *ІВ* системи

$$\lambda_c(t) \approx (k+1)\,\lambda^{k+1}\,t^k = n \cdot \lambda^n \cdot t^{n-1},$$

де $n = k + 1$.

Отриманий вираз $\lambda_c(t)$ свідчить про те, що при $\lambda = const$ елементів *ІВ* системи залежить від напрацювання, тобто розподіл напрацювання до відмови системи не підпорядковується експоненціальному розподілу.

На рис. 7.2 наведені залежності $P_c(\lambda t)$ і $\lambda_c/\lambda\ (\lambda t)$.

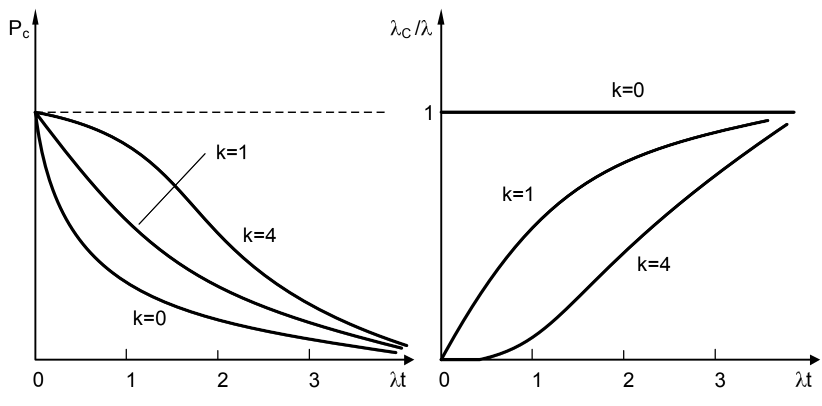


Рисунок 7.2

З аналізу отриманих графіків (рис. 7.2) можна зробити такі висновки:

– збільшення кратності резервування k підвищує надійність системи (P_c зростає, $\lambda_c / \lambda \to 0$);

– резервування найефективніше на початковій ділянці роботи системи (при $t \le T_0$), тобто

$$\lim_{t \to 0} \lambda_c(t) = 0; \quad \lim_{t \to \infty} \lambda_c(t) = \lambda = 1/T_0 .$$

Із графіка залежності λ_c / λ від λt (рис.7.2) видно, що λ_c наближається до λ при $t = (3\text{-}4)T_0 = (3\text{-}4)/\lambda$.

Оскільки середнє напрацювання до відмови системи при ідентичних елементах ($\lambda = const$)

$$T_{0c} = 1/\lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} (1/i) = 1/\lambda \cdot \sum_{i=1}^{k+1} (1/i) = 1/\lambda(1 + 1/2 + \ldots + 1/(k+1)),$$

то виграш у середньому напрацюванні T_{0c} знижується у міру збільшення кратності резервування. Наприклад:

при $k = 1$

$$T_{0c} = T_0 \cdot (1 + 1/2) = 3/2T_0$$

(збільшення T_{0c} на 50%);

при $k = 2$

$$T_{0c} = T_0 \cdot (1 + 1/2 + 1/3) = 11/6T_0$$

(збільшення T_{0c} на 83%);

при $k = 3$

$$T_{0c} = 25/12T_0$$

(збільшення T_{0c} на 108%).

Таким чином, динаміка зростання T_{0c} становить: 50, 33 і 25%, тобто зменшується.

7.5 Місткові схеми

Місткова структура (рис. 1.3 а,б) не зводиться до паралельного або послідовного типу з'єднань елементів, а є паралельним з'єднанням послідовних ланцюжків елементів із діагональними елементами, встановленими між вузлами різних паралельних гілок (елемент 3 на рис. 1.3 а; елементи 3 і 6 на рис. 1.3 б). Працездатність такої системи визначається не лише кількістю елементів, що відмовили, але і їхнім положенням у структурній схемі. Наприклад, працездатність системи, схема якої наведена на рис. 1.3 а, буде втрачена при одночасній відмові елементів (1 і 2), або (4 і 5), або (2, 3 і 4) і так далі. У той самий час відмова елементів (1 і 5) або (2 і 4), або (1, 3 і 4), або (2, 3 і 5) до відмови системи не призведе.

Для розрахунку надійності місткових систем можна скористатися методом прямого перебору, як це було зроблено для систем "*m із n*", але при аналізі працездатності кожного стану системи необхідно враховувати не лише кількість елементів, що відмовили, але і їх положення у схемі (табл. 7.5). Ймовірність безвідмовної роботи системи визначається як сума ймовірностей усіх працездатних станів:

$$\begin{aligned}P_C &= p_1p_2p_3p_4p_5 + p_1p_2p_3p_4q_5 + p_1p_2p_3q_4p_5 + p_1p_2q_3p_4p_5 +\\ &+ p_1q_2p_3p_4p_5 + q_1p_2p_3p_4p_5 + p_1p_2q_3p_4q_5 + p_1q_2p_3p_4q_5 +\\ &+ q_1p_2p_3p_4q_5 + p_1p_2q_3q_4p_5 + p_1q_2p_3q_4p_5 + q_1p_2p_3q_4p_5 +\\ &+ p_1q_2q_3p_4p_5 + q_1p_2q_3p_4p_5 + q_1q_2q_3p_4p_5 + p_1q_2q_3p_4q_5.\end{aligned} \quad (7.21)$$

У разі рівнонадійних елементів

$$P_C = p^5 + 5p^4q + 8p^3q^2 + 2p^2q^3 = 2p^5 - 5p^4 + 2p^3 + 2p^2. \quad (7.22)$$

Таблиця 7.5

Номер стану	Стан елементів					Стан сис-теми	Ймовірність стану (1 - у загальному випадку; 2- при рівнонадійних елементах)	
	1	2	3	4	5		1	2
1	+	+	+	+	+	+	*p1 p2 p3 p4 p5*	p^5
2	+	+	+	+	-	+	*p1 p2 p3 p4 q5*	$p^4q^1 = p^4(1-p)$
3	+	+	+	-	+	+	*p1 p2 p3 q4 p5*	
4	+	+	-	+	+	+	*p1 p2 q3 p4 p*	
5	+	-	+	+	+	+	*p1 q2 p3 p4 p5*	
6	-	+	+	+	+	+	*q1 p2 p3 p4 p5*	
7	+	+	+	-	-	-	*p1 p2 p3 q4 q5*	$p^3q^2 = p^3(1-p)^2$
8	+	+	-	+	-	+	*p1 p2 q3 p4 q5*	
9	+	-	+	+	-	+	*p1 q2 p3 p4 q5*	
10	-	+	+	+	-	+	*q1 p2 p3 p4 q5*	
11	+	+	-	-	+	+	*p1 p2 q3 q4 p5*	
12	+	-	+	-	+	+	*p1 q2 p3 q4 p5*	
13	-	+	+	-	+	+	*q1 p2 p3 q4 p5*	
14	+	-	-	+	+	+	*p1 q2 q3 p4 p5*	
15	-	+	-	+	+	+	*q1 p2 q3 p4 p5*	
16	-	-	+	+	+	-	*q1 q2 p3 p4 p5*	
17	+	+	-	-	-	-	*p1 p2 q3 q4 q5*	$p^2q^3 = p^3(1-p)^2$
18	+	-	+	-	-	-	*p1 q2 p3 q4 q5*	
19	-	+	+	-	-	-	*q1 p2 p3 q4 q5*	
20	+	-	-	-	+	-	*p1 q2 q3 q4 p5*	
21	-	+	-	-	+	+	*q1 p2 q3 q4 p5*	
22	-	-	-	+	+	-	*q1 q2 q3 p4 p5*	
23	+	-	-	+	-	+	*p1 q2 q3 p4 q5*	

Продовження таблиці 7.5

Номер стану	Стан елементів					Стан системи	Ймовірність стану (1 - у загальному випадку; 2- при рівнонадійних елементах)	
	1	2	3	4	5		1	2
24	-	+	-	+	-	-	*q1 p2 q3 p4 q5*	$p^2q^3 = p^2(1-p)^2$
25	-	-	+	-	+	-	*q1 q2 p3 q4 p5*	
26	-	-	+	+	-	-	*q1 q2 p3 p4 q5*	
27	+	-	-	-	-	-	*p1 q2 q3 q4 q5*	$p^1q^4 = p^1(1-p)^4$
28	-	+	-	-	-	-	*q1 p2 q3 q4 q5*	
29	-	-	+	-	-	-	*q1 q2 p3 q4 q5*	
30	-	-	-	+	-	-	*q1 q2 q3 p4 q5*	
31	-	-	-	-	+	-	*q1 q2 q3 q4 p5*	
32	-	-	-	-	-	-	*q1 q2 q3 q4 q5*	$q^5 = (1-p)^5$

Метод прямого перебору ефективний лише при малій кількості елементів n, оскільки кількість станів системи становить 2^n. Наприклад, для схеми на рис. 1.3 б їх кількість складе вже 256. Деяке спрощення досягається, якщо в таблицю станів вносити лише з’єднання, що відповідають працездатному (або лише непрацездатному) стану системи в цілому.

Для аналізу надійності систем, структурні схеми яких не зводяться до паралельного або послідовного типу, можна скористатися також методом логічних схем із застосуванням алгебри логіки. Застосування цього методу зводиться до складання для систем формули алгебри логіки, що визначає умову працездатності системи. При цьому для кожного елемента і системи в цілому розглядаються дві протилежні події - відмова і збереження працездатності.

Для складання логічної схеми можна скористатися двома методами – мінімальних шляхів і мінімальних перерізів.

Розглянемо метод мінімальних шляхів для розрахунку ймовірності безвідмовної роботи на прикладі місткової схеми (рис. 1.3 а).

Мінімальним шляхом називається послідовний набір працездатних елементів системи, який забезпечує її працездатність, а відмова будь-якого з них призводить до її відмови.

Мінімальних шляхів у системі може бути один або декілька. Вочевидь, система із послідовним з'єднанням елементів (рис.1.1) має лише один мінімальний шлях, що включає всі елементи. У системі із паралельним з'єднанням елементів (рис. 1.2) кількість мінімальних шляхів збігається з кількістю елементів, і кожний шлях включає один з них.

Для місткової системи із п'яти елементів (рис. 1.3 а) мінімальних шляхів чотири: (елементи 1 і 4), (2 і 5), (1, 3 і 5), (2, 3 і 5). Логічна схема такої системи (рис. 7.3) складається так, щоб усі елементи кожного мінімального шляху були сполучені один з одним послідовно, а всі мінімальні шляхи - паралельно.

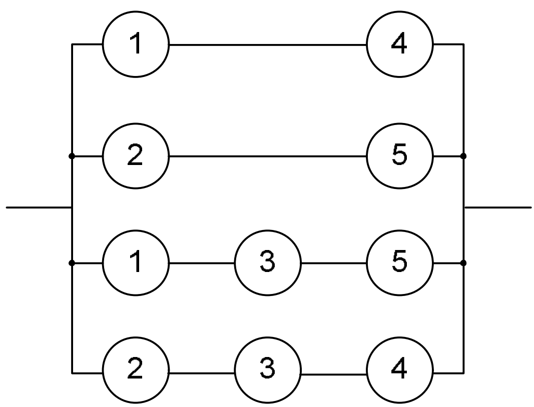


Рисунок 7.3

Потім для логічної схеми складається функція алгебри логіки A за загальними правилами розрахунку ймовірності безвідмовної роботи, але замість символів ймовірності безвідмовної роботи елементів p_i і системи P_C використовуються символи a_i подій (збереження працездатності i-го елемента системи).

Так, «відмова» логічної схеми рис. 7.3 полягає в одночасній відмові усіх чотирьох паралельних гілок, а «безвідмовна робота» кожної гілки - в одночасній безвідмовній роботі її елементів. Послідовне з’єднання елементів логічної схеми відповідає логічному множенню («І»), паралельне - логічному складанню («АБО»). Отже, схема рис. 7.3 відповідає твердженню: система працездатна, якщо працездатні елементи (1 і 4) або (2 і 5), або (1,3 і 5), або (2,3 і 4). Функція алгебри логіки запишеться

$$A = 1-(1-a_1a_4)(1-a_2a_5)(1-a_1a_3a_5)(1-a_2a_3a_4)\,. \quad (7.23)$$

У виразі (7.23) змінні a_i розглядаються як булеві, тобто можуть набувати лише два значення: 0 або 1. Тоді при піднесенні до будь-якого ступеня k будь-яка змінна a зберігає своє значення: $(a_i)^k=a_i$. На основі цієї властивості функція алгебри логіки (7.23) може бути перетворена до вигляду

$$A = a_1a_4 + a_2a_5 + a_1a_3a_5 + a_2a_3a_4 - a_1a_2a_3a_4 - \\ - a_1a_2a_3a_5 - 2a_1a_2a_4a_5 - a_2a_3a_4a_5 + 2a_1a_2a_3a_5. \quad (7.24)$$

Замінивши у виразі (7.24) символи подій a_i на їх ймовірність p_i, отримаємо рівняння для визначення ймовірності безвідмовної роботи системи:

$$P_C = p_1p_4 + p_2p_5 + p_1p_3p_5 + p_2p_3p_4 - p_1p_2p_3p_4 - \\ - p_1p_2p_3p_5 - 2p_1p_2p_4p_5 - p_2p_3p_4p_5 + 2p_1p_2p_3p_4p_5. \quad (7.25)$$

Для системи рівнонадійних елементів ($p_i = p$) вираз (7.25) легко перетвориться у формулу (7.22).

Метод мінімальних шляхів дає точне значення лише для порівняно простих систем із невеликою кількістю елементів. Для більш складних систем результат розрахунку є нижньою границею ймовірності безвідмовної роботи.

Для розрахунку верхньої границі ймовірності безвідмовної роботи системи служить метод мінімальних перерізів.

Мінімальним перерізом називається набір непрацездатних елементів, відмова яких призводить до відмови системи, а відновлення працездатності будь-якого з них - до відновлення працездатності системи. Як і мінімальних шляхів, мінімальних перерізів може бути декілька. Очевидь, система з паралельним з'єднанням елементів має лише один мінімальний переріз, що включає всі її елементи (відновлення будь-якого відновить працездатність системи). У системі з послідовним з'єднанням елементів кількість мінімальних шляхів збігається з кількістю елементів, і кожен переріз включає один з них.

У містковій системі (рис.1.3 а) мінімальних перерізів чотири (елементи 1 і 2), (4 і 5), (1, 3 і 5), (2, 3 і 4). Логічна схема системи (рис.7.3) складається так, щоб усі елементи кожного мінімального перерізу були сполучені один з одним паралельно, а всі мінімальні перерізи - послідовно. Аналогічно до методу мінімальних шляхів складається функція алгебри логіки. «Безвідмовна робота» логічної системи (рис. 7.4) полягає у «безвідмовній роботі» всіх послідовних ділянок, а кожної з них - в одночасній «відмові» всіх паралельно включених елементів.

Як видно, оскільки схема методу мінімальних перерізів формулює умови відмови системи, в ній послідовне з'єднання відповідає логічному «АБО», а паралельне – логічному «І».

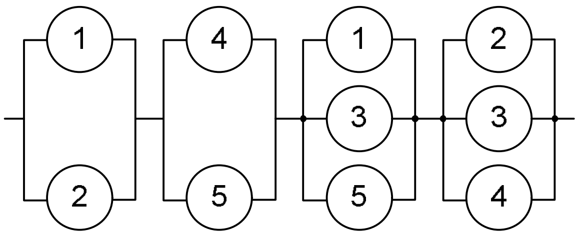


Рисунок 7.4

Схема рис. 7.4 відповідає формулюванню: система відмовить, якщо відмовлять елементи (1 і 2) або (4 і 5), або (1, 3 і 5), або (2, 3 і 4). Функція алгебри логіки запишеться

$$A = \left[1 - (1 - a_1)(1 - a_2)\right]\left[1 - (1 - a_4)(1 - a_5)\right] \times$$
$$\times \left[1 - (1 - a_1)(1 - a_3)(1 - a_5)\right] \times$$
$$\times \left[1 - (1 - a_2)(1 - a_3)(1 - a_4)\right] . \qquad (7.26)$$

Після перетворень з використанням властивостей булевих змінних вираз (7.26) набирає форми (7.24), після заміни подій їх ймовірність переходить у вираз (7.25).

Таким чином, для місткової системи з п'яти елементів верхня і нижня границі ймовірності безвідмовної роботи, отримані методами мінімальних перерізів і мінімальних шляхів, збіглися з точними значеннями (7.22), отриманими методом прямого перебору. Для складних систем цього може не статися, тому методи мінімальних шляхів і мінімальних перерізів необхідно застосовувати сумісно.

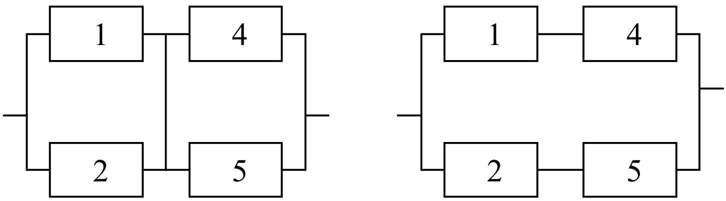
У ряді випадків аналізу надійності систем вдається скористатися методом розкладання відносно *особливого елемента* на основі теореми про суму ймовірності незалежних подій [15], згідно з якою

$$P_C = p_i\big|_{p_i=1}\big| + q_i\big|_{p_i=0}\big|, \qquad (7.27)$$

де p_i і $q_i = 1 - p_i$ - ймовірності безвідмовної роботи і відмови i - го елемента; $p_i\big|_{p_i=1}\big|$ і $q_i\big|_{p_i=0}\big|$ - ймовірності працездатного стану системи за умов відповідно, що i -й елемент абсолютно надійний і що i - й елемент відмовив.

Для випадку місткового з'єднання елементів, як показано на рис. 1.3, розглядаються два варіанти роботи системи:

- коли елемент 3 працездатний (p_3=1) і замінюється перемичкою (рис.7.5 а);
- коли елемент 3 відмовив (p_3=0) і відповідна гілка на схемі розривається (рис.7.5 б).



а) б)

Рисунок 7.5

Для перетворених схем можна записати:

$$P_C(p_3 = 1) = [1 - (1 - p_1)(1 - p_2)] \cdot [1 - (1 - p_4)(1 - p_5)], \quad (7.28)$$

$$P_C(p_3 = 0) = 1 - (1 - p_1 p_4)(1 - p_2 p_5). \qquad (7.29)$$

Тоді на підставі формули (7.27) отримаємо

$$P_C = p_3[1 - (1 - p_1)(1 - p_2)] \cdot [1 - (1 - p_4)(1 - p_5)] +$$

$$+(1-p_3)\left[1-(1-p_1p_4)(1-p_2p_5)\right]. \qquad (7.30)$$

Легко переконатися, що для рівнонадійних елементів формула (7.30) перетворюється в (7.22).

Цим методом можна скористатися і при розкладанні відносно декількох «особливих» елементів. Наприклад, для двох елементів (*i, j*) вираз (7.27) набере вигляду

$$P_C = p_i p_j\Big|_{p_i=1,\ p_j=1}\Big| + p_i q_j\Big|_{p_i=1,\ p_j=0}\Big| +$$

$$+q_i p_j\Big|_{p_i=0,\ p_j=1}\Big| + q_i q_j\Big|_{p_i=0,\ p_j=0}\Big|. \qquad (7.31)$$

Ймовірність безвідмовної роботи місткової схеми (рис. 8.5 б) при розкладанні відносно діагональних елементів 3 і 6 за (7.31) визначиться як

$$P_C = p_3 p_6\Big|_{p_3=1,\ p_6=1}\Big| + p_3 q_6\Big|_{p_3=1,\ p_6=0}\Big| +$$

$$+q_3 p_6\Big|_{p_3=0,\ p_6=1}\Big| + q_3 q_6\Big|_{p_3=0,\ p_6=0}\Big|. \qquad (7.32)$$

Ймовірність P_C легко визначити, виконавши попередньо перетворення схеми, подібно до рис. 7.5.

7.6 Комбіновані системи

Більшість реальних систем мають складну комбіновану структуру, частина елементів якої утворює послідовне з’єднання, інша частина – паралельне, окремі гілки структури утворюють місткові схеми, або схеми типу «*m із n*».

Метод прямого перебору для таких систем, виявляється, реалізувати практично неможливо. Доцільніше в цих випадках заздалегідь провести декомпозицію системи, розбивши її на прості підсистеми – групи елементів, методика розрахунку надійності яких відома. Далі ці підсистеми в структурній схемі надійності замінюються квазіелементами з імовірністю безвідмовної роботи, що дорівнює обчисленій ймовірності безвідмовної роботи цих підсистем. За необхідності таку процедуру можна виконати декілька разів, до того часу, поки квазіелементи, що залишилися, не утворять структуру, методика розрахунку надійності якої також відома.

Як приклад, розглянемо комбіновану структурну схему системи, наведену на рис. 7.6.

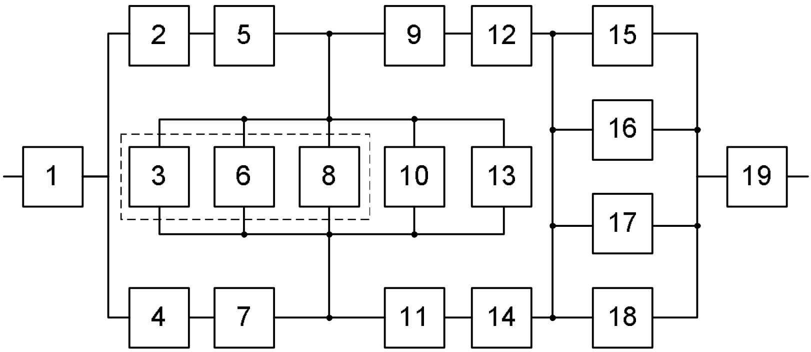


Рисунок 7.6

Тут елементи (2 і 5), (4 і 7), (9 і 12), (11 і 14) попарно утворюють один з одним послідовні з’єднання. Замінимо їх відповідно квазіелементами A, B, C, D, для яких розрахунок надійності елементарно виконується за отриманими формулами. Елементи 15, 16, 17 і 18 утворюють паралельне з’єднання, а елементи 3, 6, 8, 10 і 13 - систему «3 із 5» . Відповідні квазіелементи позначимо E і F. У результаті перетворена схема набере вигляду, наведеного на рис.7.7 а. У ній, у свою чергу, елементи A, B, C, D, F утворюють місткову схему, яку замінюємо квазіелементом G. Схема, отримана після таких перетворень (рис.7.7 б), утворює послідовне з'єднання елементів 1, G, E,19, для яких справедливі співвідношення, отримані раніше. Відзначимо, що для методу прямого перебору для вихідної системи необхідно було б розглянути 2^{19} =524288 можливих станів.

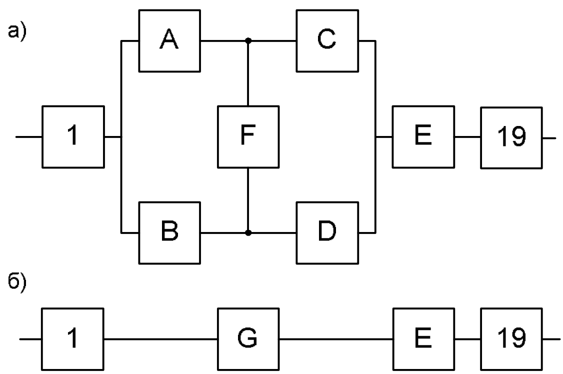


Рисунок 7.7

7.7 Системи зі з'єднанням елементів типу «зірка» і «трикутник»

Логіко-ймовірнісний метод дає можливість розрахувати ймовірність безвідмовної роботи практично для будь-якої логічної схеми з'єднань елементів. Необхідно тільки відзначити, що при цьому може бути отриманий дуже громіздкий вираз логічної функції працездатності, з яким не дуже зручно працювати. Основною перешкодою до зведення будь-якої логічної схеми до логічного послідовного і паралельного з’єднання є логічні з’єднання «зірка» і «трикутник» («дельта»). Через наявність таких з’єднань і доводиться користуватися логіко-ймовірнісним методом.

Розглянемо можливість еквівалентної заміни «зірки» на «трикутник» і навпаки [16] (рис. 7.8). Завдяки такій заміні з’являється можливість зведення структурних схем систем до логічного послідовного і паралельного з’єднання.

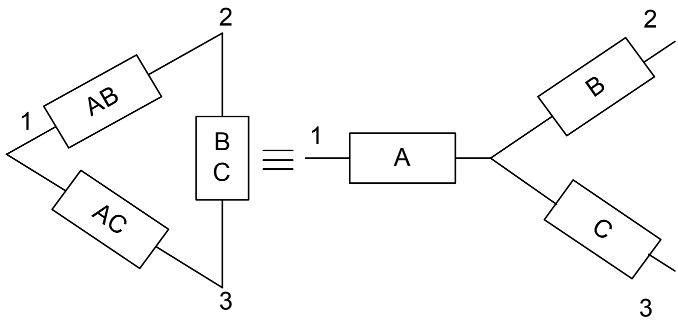


Рисунок 7.8.

Позначимо елементи «трикутника» AB, BC, AC, а елементи «зірки» - A, B, C, причому вершини «трикутника» і «зірки» 1, 2, 3 залишаються без змін. Еквівалентність заміни означає, що ймовірність безвідмовної роботи системи з логічним з’єднанням «трикутник» є такою самою, як і системи з логічним з’єднанням «зірка». Розглянемо три випадки:

а) входом системи є вершина 1, а виходом - 3 ;

б) входом системи є вершина 2 а виходом - 3;

в) входом системи є вершина 1, а виходом - 2.

Ймовірність безвідмовної роботи для випадку (а) при з’єднанні «зіркою» згідно з (7.1) дорівнює

$$P_{Y13} = P_A(t)P_C(t).$$

Для з’єднання «трикутником» ймовірність безвідмовної роботи для випадку (а) розраховується згідно з (7.8) як

$$P_{\Delta 13} = P_{AC}(t)+P_{AB}(t)P_{BC}(t)-P_{AC}(t)P_{AB}(t)P_{BC}(t).$$

Оскільки ймовірність безвідмовної роботи в обох випадках повинна бути однаковою, тобто $P_{Y13} = P_{\Delta 13}$, то

$$P_A(t)P_C(t)=P_{AC}(t)+P_{AB}(t)P_{BC}(t)-P_{AB}(t)P_{BC}(t)P_{CA}(t). \qquad (7.33)$$

Аналогічним чином запишемо рівняння для випадків (б) і (в).

$$P_B(t)\, P_C(t)= P_{BC}(t)+ P_{AB}(t)\, P_{AC}(t)- P_{AB}(t)P_{BC}(t)\, P_{CA}(t)\,, \quad (7.34)$$

$$P_A(t)\, P_B(t)= P_{AB}(t)+ P_{CA}(t)\, P_{BC}(t)- P_{AB}(t)\, P_{BC}(t)\, P_{CA}(t). \quad (7.35)$$

Введемо такі позначення:

$P_{BC}(t)=x_1;\ P_{AC}(t)= x_2;\ P_{AB}(t)=x_3;\ P_A(t)=a;\ P_B(t)=b;\ P_C(t)=c.$

Тоді рівняння (7.33)-(7.35) перепишемо так:

$$bc = E_1 = x_1 + x_2{\cdot}x_3 - x_1{\cdot}\, x_2{\cdot}\, x_3\,; \qquad (7.36)$$

$$ac = E_2 = x_2 + x_1 \cdot x_3 - x_1{\cdot}\, x_2{\cdot}\, x_3\,; \qquad (7.37)$$

$$ab = E_3 = x_3 + x_2 \cdot x_2 - x_1{\cdot}\, x_2{\cdot}\, x_3\,. \qquad (7.38)$$

У результаті перемноження рівнянь (7.36) – (7.38) одержимо

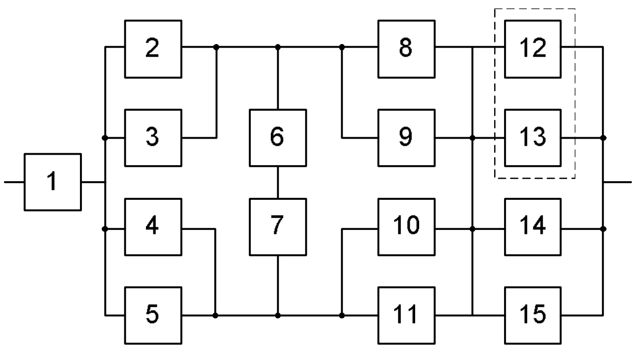
$$abc=\sqrt{E_1 \cdot E_2 \cdot E_3} = E_4\,. \qquad (7.39)$$

Розділивши ліві та праві частини рівняння (7.39) за чергою на ліві та праві частини кожного з рівнянь (7.36) - (7.38) відповідно, запишемо формули еквівалентних перетворень у вигляді:

$$a=E_4/E_1, \qquad b=E_4/E_2, \qquad c=E_4/E_3. \qquad (7.40)$$

Приклади

Приклад 1. Структурна схема надійності наведена на рис. 7.9. Значення інтенсивності відмов елементів наведені в розмірності 10^{-6} 1/год.



$\lambda_1=0{,}001$; $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=0{,}1$; $\lambda_6=\lambda_7=0{,}01$;
$\lambda_8=\lambda_9=\lambda_{10}=\lambda_{11}=0{,}2$; $\lambda_{12}=\lambda_{13}=\lambda_{14}=\lambda_{15}=0{,}5$

Рисунок 7.9

Здійснити структурну декомпозицію схеми, замінюючи ділянки схеми відповідними квазіелементами. Обчислити значення ймовірностей безвідмовної роботи елементів, квазіелементів і всієї системи для ряду значень напрацювання t за умови, що потік відмов підпорядкований експоненціальному закону розподілу. Всі елементи системи працюють у періоді нормальної експлуатації. Результати розрахунків оформити у вигляді таблиці.

Розв'язання.

1.У вихідній схемі елементи 2 і 3 утворюють паралельне з'єднання. Замінюємо їх квазіелементом А. Враховуючи,що $p_2=p_3$, отримаємо

$$p_A = 1 - q_2 q_3 = 1 - q_2^2 = 1 - (1 - p_2)^2 \cdot$$

2. Елементи 4 і 5 також утворюють паралельне з'єднання, замінивши яке елементом В і враховуючи, що $p_4=p_5$, отримаємо

$$p_B = 1 - q_4 q_5 = 1 - q_2^2 = p_{A.} \cdot$$

3. Елементи 6 і 7 у вихідній схемі з'єднані послідовно. Замінюємо їх на елемент С, для якого при $p_6=p_7$ отримаємо

$$p_C = p_6 p_7 = p_6^2 \cdot$$

4. Елементи 8 і 9 утворюють паралельне з'єднання. Замінюємо їх на елемент D, для якого при $p_8=p_9$ отримаємо

$$p_D = 1 - q_8 q_9 = 1 - q_8^2 = 1 - (1 - p_8)^2 \cdot$$

5. Елементи 10 і 11 із паралельним з'єднанням замінюємо на елемент Е, причому оскільки $p_8=p_9=p_{10}=p_{11}$, то

$$p_A = 1 - q_{10} q_{11} = 1 - q_{10}^2 = 1 - (1 - p_{10})^2 = p_D \cdot$$

6. Елементи 12, 13, 14 і 15 утворюють з'єднання «2 з 4», яке замінюємо на елемент F. Оскільки $p_{12}=p_{13}=p_{14}=p_{15}$, то для визначення ймовірності безвідмовної роботи елемента F

можна скористатися комбінаторним методом:

$$p_E = \sum_{k-2}^{4} p_8 - \sum_{k-2}^{4} C_4^k \, p_{12}^k (1 - p_{12})^{4-k} =$$

$$= \frac{4!}{2!2!} p_{12}^2 (1 - p_{12})^2 + \frac{4!}{3!1!} p_{12}^3 (1 - p_{12}) + \frac{4!}{4!0!} p_{12}^4 =$$

$$= 6\, p_{12}^2 (1 - p_{12})^2 + 4\, p_{12}^3 (1 - p_{12}) + p^4 = 6\, p_{12}^2 - 8\, p_{12}^3 + 3\, p_{12}^4$$

Перетворена схема наведена на рис.7.10.

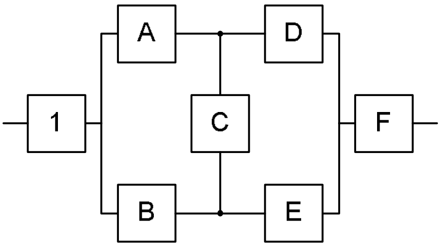
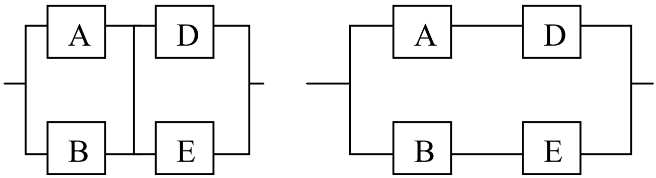


Рисунок 7.10

7. Елементи A, B, C, D, і E утворюють (рис. 7.10) місткову схему, яку можна замінити на квазіелемент G. Для розрахунку ймовірності безвідмовної роботи скористаємося методом розкладання відносно особливого елемента, за який виберемо елемент C. Тоді

$$p_G = p_C \, p_{G|p_C=1|} + q_C \, p_{G|p_C=0|} ,$$

де $p_{G|p_C=1|}$ і $p_{G|p_C=0|}$ - ймовірності безвідмовної роботи місткової схеми при абсолютно надійному елементі C (рис. 7.11 а) та при елементі C, що відмовив (рис. 7.11 б).



а) $p_c = 1$ б) $p_c = 0$

Рисунок 7.11

Враховуючи, що $p_B = p_A$, отримаємо

$$p_G = p_C[1-(1-p_A)(1-p_B)]\cdot[1-(1-p_D)(1-p_E)]+$$

$$+(1+p_C)[1-(1-p_A p_B)(1-p_D p_E)]=$$

$$= p_C[1-(1-p_A)^2]\cdot[1-(1-p_D)^2]+(1-p_C)[1-(1-p_A^2)(1-p_D^2)]=$$

$$= p_C(2p_A-p_A^2)(2p_D-p_D^2)+(1-p_C)(p_A^2-p_D^2-p_A^2 p_D^2)=$$

$$= p_A p_C p_D(2-p_A)(2-p_D)+(1-p_C)(p_A^2+p_D^2-p_A^2 p_D^2).$$

8. Після перетворень проміжна схема (рис 7.10) набирає вигляду схеми, наведеної на рис.7.12 .

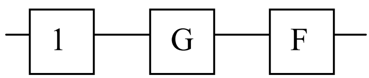


Рисунок 7.12

9. У перетвореній схемі (рис.7.12) елементи 1,G і F утворюють послідовне з'єднання. Тоді ймовірність безвідмовної роботи всієї системи

$$P = p_1 p_G p_F.$$

10. Оскільки за умовою всі елементи системи працюють у періоді нормальної експлуатації, то ймовірність безвідмовної роботи елементів з 1-го по 15-й (рис. 7.8) підпорядковується експоненціальному закону

$$p_{i=}exp(-\lambda t).$$

11. Результати розрахунків ймовірності безвідмовної роботи елементів 1-15 вихідної схеми (рис. 7.9), квазіелементів A, B, C, D, E, F і G та системи за вищенаведеною формулою для напрацювання до $2{,}5\cdot10^{-6}$ годин наведені в таблиці 7.6.

Таблиця 7.6

Елемент	$\lambda i\times10^{6}$, $год^{-1}$	Напрацювання t, ×10 годин				
		0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
1	0,001	0,9995	0,9990	0,9985	0,9980	0,9975
2-5	0,1	0,9512	0,9048	0,8607	0,8187	0,7788
6,7	0,001	0,9995	0,9900	0,9851	0,9802	0,9753
8-11	0,2	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065
12-15	0,5	0,7788	0,6065	0,4724	0,3679	0,2865
A,B	-	0,9976	0,9909	0,9806	0,9671	0,9511
C	-	0,9900	0,9801	0,9704	0,9608	0,9512
D,E	-	0,9909	0,9671	0,9328	0,8913	0,8452
F	-	0,9639	0,8282	0,6450	0,4687	0,3245
G	-	0,9924	0,9888	0,9863	0,9820	0,9732
P	-	0,9561	0,8181	0,6352	0,4593	0,3150

Приклад 2. Нехай ймовірності безвідмовної роботи елементів, з’єднаних у «трикутник» (рис.7.8), становлять: $P_{BC}(t)$=0,7; $P_{AC}(t)$=0,8; $P_{AB}(t)$=0,9**.** Визначити параметри надійності еквівалентної «зірки».

Розв'язання. Визначимо E_1, E_2, E_3, E_4 відповідно до виразів (7.36)-(7.39):

$$E_1 = x_1+x_2x_3 - x_1x_2x_3 = 0,7+0,8\cdot 0,9-0,7\cdot 0,8\cdot 0,9 = 0,916;$$

$$E_2 = x_2+ x_1x_3- x_1x_2x_3 = 0,8\ 0,7\cdot 0,9-0,7\cdot 0,8\cdot 0,9 = 0,926\ ,$$

$$E_3 = x_3 + x_1x_2- x_1x_2x_3 = 0,9+0,7\cdot 0,8-0,7\cdot 0,8\ 0,9 = 0,956\ .$$

$$E_4 = \sqrt{0,916\cdot 0,926\cdot 0,956} = 0,9005.$$

Використовуючи вирази (7.40), знайдемо ймовірність безвідмовної роботи еквівалентної зірки:

$$a = P_A(t) = E_4/E_1 = 0,900497 / 0,916 = 0,983075,$$

$$b = P_B(t) = E_4/E_2 = 0,900497 / 0,926 = 0,972458,$$

$$c = P_C\,(t) = E_4/E_3 = 0,900497 / 0,956 = 0,941942.$$

Контрольні питання

1.Що таке основна система і в чому полягає умова її безвідмовної роботи?
2. Наведіть залежності для визначення показників надійності основної системи.
3. Який закон розподілу напрацювання до відмови матиме основна система, якщо закони розподілу напрацювання до відмови елементів є експоненціальними ?
4. Наведіть залежності для визначення показників надійності резервованої системи.
5. Поясніть суть структури системи «*m із n*».
6. У чому полягає метод прямого перебору при розрахунку надійності системи?
7. У чому суть комбінаторного методу розрахунку надійності системи «*m із n*»?
8. Наведіть залежності для визначення показників надійності системи «*m із n*».
9. Як залежить надійність безвідмовної роботи системи від кратності резервування?
10. У чому відмінна особливість місткової структури ре-

зервованої системи?
11. У чому суть методу мінімальних шляхів і мінімальних перерізів при розрахунку надійності місткової структури резервованої системи?
12. Поясніть суть методу розрахунку місткової структури резервованої системи відносно особливого елемента.
13. Яким методом проводиться розрахунок систем зі складною комбінованою структурою?
14. Поясніть суть еквівалентності заміни системи із структурним з'єднанням елементів типу «трикутник» системою типу «зірка». Для чого здійснюється подібна заміна?

Розділ 8

НАДІЙНІСТЬ НЕВІДНОВЛЮВАНИХ СИСТЕМ ІЗ РІЗНИМИ СПОСОБАМИ РЕЗЕРВУВАННЯ

8.1 Ненавантажене резервування

Загальний аналіз надійності розглянутий для системи, що складається з одного основного (робочого) і *n-1* резервних елементів.

Приймемо наступні припущення:

1. Час заміни основного елемента (ОЕ), що відмовив, на резервний елемент (РЕ) дорівнює нулю.
2. Перемикальний пристрій (ПП) підключення резервного елемента замість основного, що відмовив, абсолютно надійний.

При ненавантаженому резервуванні резервний елемент не може відмовити, знаходячись у відключеному стані, і його показники надійності не змінюються.

Початкові дані для розрахунку надійності:

– ймовірність безвідмовної роботи *i*-го елемента $P_i(t)$;
– *ІВ* *i*-го елемента $\lambda_i(t)$;
– МО напрацювання до відмови *i*-го елемента T_{0i}.

Аналіз випадкового напрацювання до відмови системи з ненавантаженим резервом ілюструє рис. 8.1, де T_1 – випадкове напрацювання до відмови основного елемента; T_2 - випадкове напрацювання до відмови 1-го резервного елемента; T_n - випадкове напрацювання до відмови *n* - го резервного елемента. МО напрацювання до відмови системи

$$T_{0C} = M(T_C) = \sum_{i=1}^{n} T_{0i} = \sum_{i=1}^{n} M(T_i)\,,$$

де $T_{0i} = M(T_i)$ - МО напрацювання до відмови i-го елемента системи.

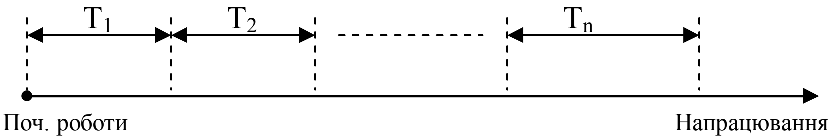


Рисунок 8.1

Розглянемо систему, що складається з ОЕ і одного РЕ (рис. 8.2). ОЕ і РЕ є невідновлюваними об’єктами.

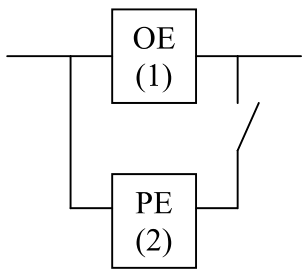


Рисунок 8.2

Події, що відповідають *працездатності системи* за інтервалом напрацювання $(0, t)$ (див. рис.8.3):

– A={безвідмовна робота системи при напрацюванні $(0, t)$};

– A_1={безвідмовна робота ОЕ при напрацюванні $(0, t)$};

– A_2={відмова ОЕ у момент $\tau < t$, включення РЕ і безвідмовна робота РЕ на інтервалі $(t - \tau)$}.

Подія $A = A_1 \cup A_2$, тому ймовірність безвідмовної роботи системи до напрацювання t (при напрацюванні $(0, t)$)

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2), \qquad (8.1)$$

де $P(A)= P_c(t)$ - ймовірність безвідмовної роботи системи до напрацювання t; $P(A_1) = P_1(t)$ - ймовірність безвідмовної роботи ОЕ до напрацювання t, $P(A_2) = P_p(t)$ - ймовірність відмови ОЕ і безвідмовної роботи РЕ після відмови ОЕ до напрацювання t.

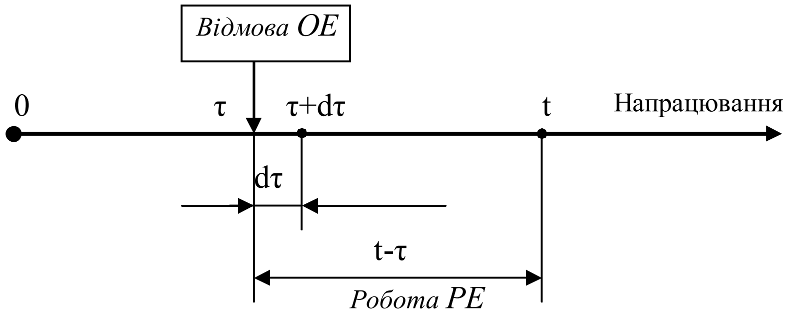


Рисунок 8.3

Подія A_2 є «складною» подією, що включає в себе прості:

– A_{21} = {відмова ОЕ при $\tau < t$ (поблизу розглядуваного моменту τ)};

– A_{22} = { безвідмовна робота РЕ з моменту τ до t, тобто в інтервалі $(t - \tau)$}.

Подія A_2 здійснюється при одночасному виконанні подій A_{21} і A_{22}:

$$A_2 = A_{21} \cap A_{22} .$$

Події A_{21} і A_{22} є залежними, тому ймовірність події A_2

$$P(A_2)= P(A_{21}) \cdot P(A_{22} | A_{21}),$$

де $P(A_{22}| A_{21})= P_2 (t - \tau)$ – ймовірність безвідмовної роботи РЕ в інтервалі $(t -\tau)$, де $P_2(t)$ - ймовірність безвідмовної роботи РЕ до напрацювання t.

Для визначення $P(A_{21})$ розглянемо малий інтервал $(\tau, \tau+ d\tau)$, для якого щільність ймовірності відмови ОЕ дорівнює $f_1(\tau)d\tau$. Для отримання ймовірності відмови ОЕ до моменту τ інтегруємо отриманий вираз щільності за τ від 0 до t.

Оскільки ймовірність відмови як функція розподілу випадкового напрацювання до відмови визначається за формулою

$$Q(t) = \int_0^t f(t)dt ,$$

то

$$P(A_{21}) = \int_0^t f_1(\tau)d\tau ,$$

де $f_1(\tau) = -dP_1(\tau)/d\tau$ - щільність розподілу відмов ОЕ до напрацювання τ; $P_1(\tau)$ - ймовірність безвідмовної роботи ОЕ до τ.

Ймовірність події A_2

$$P(A_2) = P_p(t) = P(A_{21}) \cdot P(A_{22} \mid A_{21}) = \int_0^t P_2(t-\tau)f_1(\tau)d\tau .$$

Тоді ймовірність безвідмовної роботи розглянутої системи з ненавантаженим резервом дорівнює:

$$P_C(t) = P_1(t) + \int_0^t P_2(t-\tau)f_1(\tau)d\tau . \qquad (8.2)$$

Аналогічно для системи з одним ОЕ і РЕ в кількості n -1 випливає рекурентний вираз

$$P_C(t) = P_{n-1}(t) + \int_0^t P_n(t-\tau) f_{n-1}(\tau) d\tau \,, \qquad (8.3)$$

де індекс $n - 1$ означає, що відповідні характеристики (ймовірності безвідмовної роботи і щільності розподілу відмов) відносяться до системи, в якій включається в роботу останній n - й елемент.

Вираз (8.3) приведений для стану, коли до моменту τ відмовив передостанній ($n - 1$) елемент системи і залишився лише один (останній) працездатний елемент.

Приймаючи для системи, яка розглядається, що напрацювання до відмови ОЕ і РЕ підпорядковуються експоненціальному розподілу з параметрами λ_1 і λ_2, тобто

$$P_1(t) = exp(-\lambda_1 t); \quad P_2(t) = exp(-\lambda_2 t),$$

вираз (8.2) після інтегрування набирає вигляду

$$P_C(t) = \exp(-\lambda_1 t) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\exp(-\lambda_1 t) - \exp(\lambda_2 t)) \,. \qquad (8.4)$$

Щільність розподілу напрацювання до відмови системи

$$f_C(t) = -\frac{dP_C(t)}{dt} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}(\exp(-\lambda_1 t) - \exp(\lambda_2 t)) \,. \qquad (8.5)$$

При кратностях резервування $k > 5$ розподіл напрацювання до відмови системи з ненавантаженим резервом стає близьким до нормального незалежно від законів розподілу напрацювання елементів, що складають систему.

При ідентичних ОЕ і РЕ і експоненціальному розподілі напрацювання елементів формула (8.4) для ймовірності безвідмовної роботи системи з ненавантаженим резервом і цілою кратністю резервування $k = (n - m)/m$, де $m = 1$, набирає вигляду

$$P_C(t) = \exp(-\lambda_1 t)\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^j}{j!} = \exp(-\lambda_1 t)\sum_{j=0}^{k}\frac{(\lambda t)^j}{j!}, \quad (8.6)$$

де n - кількість елементів системи; $k = (n - 1)/1 = (n - 1)$ - кратність резервування при $m = 1$.

Ймовірність відмови системи

$$Q_C(t) = 1 - P_C(t) = \exp(-\lambda\ t)\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^j}{j!}. \quad (8.7)$$

Щільність розподілу відмов системи

$$f_C(t) = \exp(-\lambda\ t)\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}. \quad (8.8)$$

Інтенсивність відмов системи

$$\lambda_C(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!\sum_{j=0}^{n-1}(\lambda t)^j / j!}\exp(-\lambda\ t) = \frac{f_C(t)}{P_C(t)}. \quad (8.9)$$

Таким чином, розподіл напрацювання до відмови таких систем підпорядковується розподілу Ерланга (гамма - розподіл при цілих n).

Згідно з виразом (8.6) проаналізуємо, як змінюється ймовірність безвідмовної роботи системи при різній кратності резервування:

$k = 0;\ n=1:\qquad P_C(t) = e^{-\lambda\, t}\sum_{j=0}^{0}\frac{(\lambda t)^0}{0!} = |\,0! = 1\,| = \exp(-\lambda t)\,;$

$k=1; n=2:$

$$P_C(t) = e^{-\lambda\, t}\sum_{j=0}^{1}\frac{(\lambda t)^j}{j!} = e^{-\lambda\, t}[1 + \lambda t / 1!] = \exp(-\lambda t)[1 + \lambda t];$$

$k = 2;\ n=3:\qquad P_C(t) = \exp(-\lambda t)[1 + \lambda t + \lambda^2 t^2 / 2!]\,.$

Порівняння ненавантаженого і навантаженого резервувань проведене за графіком $P_c(\lambda t)$ (рис. 8.4) для системи з ідентичними за показниками надійності елементами і кратністю резервування $k = 2$.

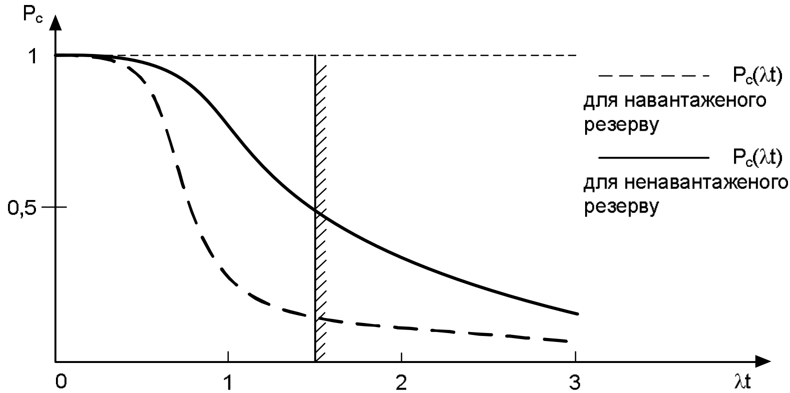


Рисунок 8.4

Найбільша ефективність від використання системи з ненавантаженим резервом буде при тривалості роботи

РЕ не більше 1.5 T_0 ($\lambda t \leq 1,5$).

Нижче розглянуті показники безвідмовності системи з ненавантаженим резервуванням, коли випадкове напрацювання до відмови елементів системи підпорядковується нормальному розподілу із щільністю розподілу відмов

$$f_i(t) = \frac{1}{S_i\sqrt{2\pi}} \exp[-(t - T_{0i})^2 / 2S_i^2], \qquad (8.10)$$

де $i = \overline{1,n}$ - кількість елементів системи.

Оскільки випадкове напрацювання до відмови системи

$$T_C = \sum_{i=1}^{n} T_i \,, \qquad (8.11)$$

а T_i є незалежними випадковими величинами напрацювання, то сума (композиція) незалежних випадкових величин, кожна з яких розподілена нормально, також має нормальний розподіл із параметрами:

- *математичне очікування напрацювання до відмови*

$$T_{0C} = \sum_{i=1}^{n} T_{0i} \,; \;\; T_{0i} = M\{T_i\}, i = \overline{1,n} \,; \qquad (8.12)$$

- *дисперсія напрацювання до відмови*

$$S_C^2 = \sum_{i=1}^{n} S_i^2 \,; \;\; S_i = S\{T_i\}, i = \overline{1,n} \,; \qquad (8.13)$$

- *середнє квадратичне відхилення напрацювання до відмови системи*

$$S_C = \sqrt{S_C^2} \ ;$$

- *щільність розподілу випадкового напрацювання до відмови системи при цілій кратності резервування*

$$f_C(t) = \frac{1}{S_i\sqrt{2\pi}} \exp[-(t - T_{0C})^2 / 2S_C^2]. \qquad (8.14)$$

Показники безвідмовності визначаються з використанням функцій $f(x)$ і $\Phi(x)$ для

$$x = \frac{t - T_{0C}}{S_C}$$

і мають вигляд:

$$P_c(t) = 0{,}5 - \Phi(x)\ ; \quad Q_c(t) = 0{,}5 + \Phi(x)\ . \qquad (8.15)$$

Для системи з елементами, напрацювання на відмову яких підпорядковується експоненціальному розподілу $P_i(t)=exp(-\lambda_i t)$, можна прийняти $P_i(t) \approx 1 - \lambda_i t$, тому вирази ймовірності відмов та ймовірності безвідмовної роботи

$$Q_C(t) \approx \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_i t}{n!} = \frac{t^n \prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_i}{n!}; \qquad P_C(t) \approx 1 - \frac{t^n \prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_i}{n!}. \qquad (8.16)$$

При ненавантаженому резерві ймовірність відмов системи в *n!* разів менша, ніж при навантаженому.

8.2 Полегшене резервування

Як наголошувалося у попередніх розділах, ненавантажений резерв більш ефективний, ніж навантажений, і кількісно показники ефективності залежать від законів розподілу напрацювання до відмови окремих елементів резервованої системи.

Основним моментом, який може позначитися на оцінці надійності, є те, що припущення $\lambda = const$ є досить умовним, оскільки особливо за відсутності технічного обслуговування черговий працюючий елемент експлуатується до повного спрацювання (фізично λ повинна зростати). Тому прийнятий експоненціальний розподіл напрацювання елементів, що переходять з резервних у робочі, використовувався тільки з метою спрощення розрахунків.

Ненавантажений резерв у рамках прийнятих припущень не завжди можливо здійснити. Наприклад, в авіа- і суднових системах як основні, так і резервні елементи підлягають вібрації, ударам, повторно-статичним навантаженням, перепадам температур і т.п. Тому не включені в роботу резервні елементи матимуть деяку $\lambda \neq 0$, тобто вони також спрацьовуються, але менш інтенсивно.

Тому в ряді практичних випадків доречно застосовувати полегшений резерв, а саме коли:

- зовнішні навантаження і впливи призводять до зміни властивостей матеріалів, робочих параметрів і т.п;
- підключення резервних елементів (РЕ) до кіл живлення потрібно для прогріву і утримання необхідних значень параметрів.

При цьому РЕ матимуть деяку інтенсивність відмов $\lambda_p \neq 0$.

Розглянемо систему, що складається з рівнонадійних основного (ОЕ) і резервного (РЕ) елементів (рис. 8.5). Елементи невідновлювані.

Події A, A_1, A_2, що забезпечують безвідмовну роботу системи з полегшеним резервом за інтервалом напрацювання ($0,t$) (рис.8.3), а також ймовірності цих подій є аналогічними до подій, розглянутих у п. 8.1. Адже при прийнятих у п. 8.1 припущеннях щодо абсолютно надійного перемикального пристрою системи, структурні схеми яких наведені на рис. 8.2 і 8. 5, є аналогічними.

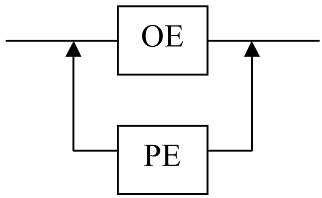


Рис. 8.5

Проте в системі, що розглядається, на відміну від системи з ненавантаженим резервуванням РЕ знаходиться під деяким навантаженням із самого початку роботи, тобто протягом усього інтервалу напрацювання ($0,t$), тому визначення $P_p(t)$ в даному випадку буде відрізнятися від попереднього.

Подія A_2 розкладається на такі складові:

– A_{21} = { відмова ОЕ при напрацюванні $\tau < t$};

– A_{22} = { безвідмовна робота РЕ до напрацювання τ - момент включення його в роботу};

– A_{23} = { безвідмовна робота РЕ від τ до t, тобто за інтервал (t - τ)}.

Очевидно, подія A_2 виконується при одночасному виконанні всіх подій

$$A_2 = A_{21} \cap A_{22} \cap A_{23} .$$

Події A_{21}, A_{22}, A_{23} є залежними, але оскільки вони являють собою ймовірність безвідмовної роботи або ймовірність відмов елементів, напрацювання до відмови яких описуються своїми законами розподілу, то ймовірність події A_2 дорівнює добутку ймовірності подій

$$P(A_2)= P(A_{21})\cdot P(A_{22})\cdot P(A_{23}).$$

Щільність розподілу відмов ОЕ на нескінченно малому інтервалі [τ, $\tau+d\tau$] (рис. 8.3) визначається як

$$f_1(\tau) = -\, dP_1(\tau) / d\tau .$$

Ймовірність безвідмовної роботи РЕ до моменту τ відмови ОЕ

$$P(A_{22}) = P_p(\tau) .$$

Ймовірність безвідмовної роботи РЕ від моменту τ включення в роботу до часу t

$$P(A_{23}) = P_p(t - \tau).$$

Тоді ймовірність безвідмовної роботи РЕ протягом напрацювання [τ, $\tau+d\tau$] $P'(A_2)$ за умови, що ОЕ відмовив, визначається як

$$P'(A_2)= P_p(\tau) \cdot P_p(t - \tau) \cdot f_1(\tau)\, d\tau.$$

Отриманий вираз не дорівнює $P(A_2)$, оскільки виражає ймовірність безвідмовної роботи за виділений нескінченно малий інтервал напрацювання поблизу τ.

Оскільки $\tau < t$, то з отриманого виразу ймовірність $P_p(t) = P(A_2)$ отримана інтегруванням виразу по всіх τ від 0 до t.

Остаточно

$$P(A_2) = P_p(t) = \int_0^t P_p(\tau) P_p(t-\tau) f_1(\tau) d\tau \, .$$

Тоді ймовірність безвідмовної роботи резервованої системи з полегшеним резервом

$$P_c(t) = P_1(t) + \int_0^t P_p(\tau) P_p(t-\tau) f_1(\tau) d\tau \, .$$

Аналогічно, ймовірність безвідмовної роботи системи, що складається з n рівнонадійних елементів,

$$P_c(t) = P_{(n-1)c}(t) + \int_0^t P_p(\tau) P_p(t-\tau) f_{(n-1)c}(\tau) d\tau \, ,$$

де індекс $(n\text{-}1)c$ означає, що ймовірність безвідмовної роботи і щільність розподілу відмов відносяться до системи, при відмові якої включається даний n -й елемент.

При експоненціальному розподілі напрацювання до відмови елементів складові розрахункового виразу набирають вигляду:

$$P_p\,(\tau\,) = exp(-\,\lambda_p\,\tau\,); \tag{8.17}$$

$$P_p\,(t - \tau\,) = exp\,\{\,-\,\lambda_{роб}\,(t - \tau\,)\}; \tag{8.18}$$

$$f_1\,(\tau) = \lambda_{роб}\,exp\,(\,-\,\lambda_{роб} \cdot \tau); \tag{8.19}$$

$$P_1(\,t\,) = exp\,(\,-\,\lambda_{роб} \cdot t\,), \tag{8.20}$$

де $\lambda_{\,роб}$ – інтенсивність відмов елементів у робочому режимі; λ_p - інтенсивність відмов елементів у режимі резерву.

За наявності одного ОЕ і одного РЕ ($n = 2$) ймовірність безвідмовної роботи

$$P_c(t) = P_0(t) + \int_0^t P_p(\tau) P_p(t-\tau) f_0(\tau) d\tau =$$

$$= \exp(-\lambda_p \tau) + \int_0^t \exp\{-\lambda_{роб}(t - \tau)\} \cdot \exp(-\lambda_p \tau) \cdot \lambda_{роб} \exp(-\lambda_{роб} \tau) d\tau.$$

Остаточно отримаємо

$$P_c(t) = exp(- \lambda_{роб} \cdot t)[1 + \lambda_{роб} \{1 - exp (- \lambda_p t)\} / \lambda_p] . \quad (8.21)$$

Для системи з n елементів з експоненціальним напрацюванням до відмови

$$P_c(t) = P_{(n-1)C}(t) + \frac{C_{n-1}(t)}{(n-1)!} \exp(-\lambda_{роб} \cdot t) +$$
$$+ [1 - \exp(-\lambda_p t)]^{n-1}, \quad (8.22)$$

де $C_{n-1}(t) = \prod_{j=0}^{n-2} (j + \lambda_{роб}/\lambda_p)$.

Розрахунки для систем із полегшеним резервом мають об’єктивні труднощі, оскільки дуже важко врахувати, як впливають навантаження, зовнішні події на характеристики надійності.

Середнє напрацювання до відмови системи з n елементів

$$T_{0C} = \frac{1}{\lambda_{роб}} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{1 + j \cdot \lambda_p / \lambda_{роб}}. \qquad (8.23)$$

Для практичних розрахунків систем із полегшеним резервуванням у випадку, якщо ОЕ має розподіл напрацювання $P_0(t)=exp(-\lambda_{роб}\, t)$ та ідентичні РЕ в кількості $(n\ -\ 1)$ мають розподіл напрацювання $P_p(\ t\ ) = exp\ (-\ \lambda_p\ t\ )$, ймовірність безвідмовної роботи системи може бути приблизно визначена за виразом

$$P_C(t) \approx 1 - \frac{t \cdot \prod_{i=1}^{n} [\lambda_{роб} + (i-1)\lambda_p]}{n!}. \qquad (8.24)$$

Наприклад, при $n = 2$ $(k = 1,\ m = 1)$

$$P_C(t) \approx 1 - \frac{t \cdot \lambda_{роб}(\lambda_{роб} + \lambda_p)}{2!},$$

при $n = 3$ $(k = 2,\ m = 1)$

$$P_C(t) \approx 1 - \frac{t \cdot \lambda_{роб}(\lambda_{роб} + \lambda_p)(\lambda_{роб} + 2\lambda_p)}{3!}.$$

8.3 Ковзне резервування

При ковзному резервуванні (структурна схема надійності проілюстрована рис. 6.3, 8.6) *резервний елемент* може бути включений замість будь-якого з елементів основної системи, що відмовив . Основна система - n елементів. Резервна група - m елементів. Як правило $m < n$, тобто кількість РЕ менша за кількість ОЕ, тому ковзне резервування вважається *активним із дробовою кратністю*. Відмова системи відбувається у разі, коли кількість основних елементів, що відмовили, перевищить кількість резервних.

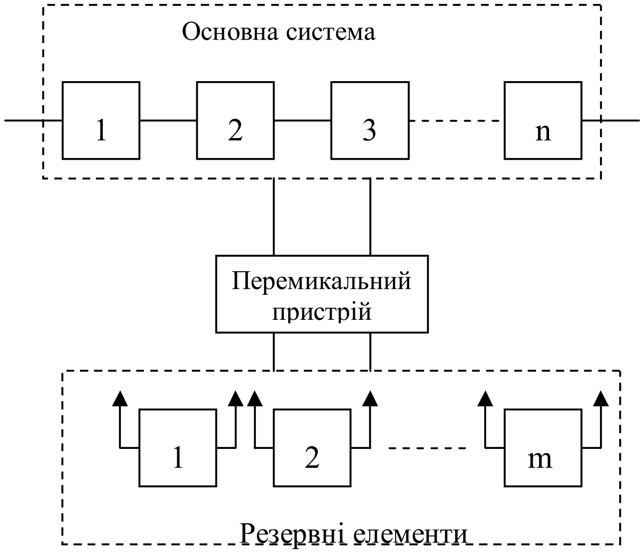


Рисунок 8.6

Прикладом може служити організація ліній зв'язку, коли є одна резервна лінія на декілька основних (у практиці - три).

Розглянемо випадок визначення ймовірності безвідмовної роботи системи з одним резервним елементом m=1 на n елементів основної системи (рис.8.7, 8.8).

Припущення. РЕ та $i=\overline{1,n}$ елементів основної системи рівнонадійні і РЕ не може відмовити до моменту його включення в роботу. Відомі: $P_i\ (\ t\ ),\ i=\overline{1,n}$ – ймовірність безвідмовної роботи основної системи; $P_П(t)$ - ймовірність безвідмовної роботи перемикального пристрою; $P_р(t)$ - ймовірність безвідмовної роботи резервного елемента.

Отримання розрахункового виразу для ймовірності безвідмовної роботи системи аналогічне до того, що було наведене для полегшеного резерву (п. 8.2):
– виділення можливих станів системи, при яких вона продовжує безвідмовно працювати;
– обчислення ймовірності цих станів.

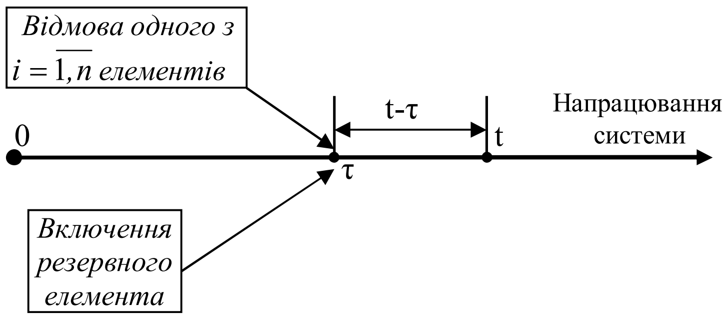


Рисунок 8.7

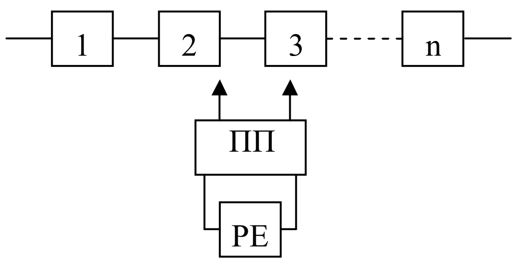


Рисунок 8.8

Події A, A_1, що забезпечують безвідмовну роботу системи з ковзним резервом в інтервалі напрацювання $(0,t)$ (рис.8.7), а також ймовірності цих подій є аналогічними до подій, розглянутих у пп. 8.1,8.2. Подія A_2 для системи, що розглядається, складається з таких подій: A_2 = {безвідмовна робота системи за умов, що відмовив один з n елементів основної системи при $\tau < t$, перемикальний пристрій працездатний, включення РЕ і безвідмовна робота його на інтервалі $(t - \tau)$}.

Ймовірність безвідмовної роботи системи при напрацюванні $(0,t)$ визначається за формулою (8.1), в яку входять такі складові:

$P(A) = P_c(t)$ - ймовірність безвідмовної роботи системи до напрацювання t;

$P(A_1) = P_1(t) \cdot P_2(t) \cdot \ldots \cdot P_n(t)$ – ймовірність безвідмовної роботи ОС до моменту t, де $P_1(t) = \ldots = P_n(t) = = P(t)$ - ймовірність безвідмовної роботи кожного з $i = \overline{1,n}$ рівнонадійних елементів;

$P(A_2) = P_2(t)$ – ймовірність безвідмовної роботи для події A_2.

Для визначення ймовірності $P(A_2)$ розглянемо подію A_2. Введемо при цьому таке позначення: верхній індекс i події означає, стосовно якого елемента ОС розглядається дана подія. Отже:

– $A^1{}_{21}$ = {відмова одного (першого) з $i = \overline{1,n}$ елементів ОС при $\tau < t$};

– $A^1{}_{22}$ = {безвідмовна робота перемикального пристрою (ПП) до напрацювання τ - моменту включення РЕ};

– $A^1{}_{23}$ = { безвідмовна робота РЕ після включення його в роботу, тобто на інтервалі (t -τ)}.

Очевидно, що

$$A^1{}_2 = A^1{}_{21} \cap A^1{}_{22} \cap A^1{}_{23},$$

тому $$P(A^1{}_2) = P(A^1{}_{21}) \cdot P(A^1{}_{22}) \cdot P(A^1{}_{23}).$$

де $P(A^1{}_{22}) = P_П(\tau)$ - ймовірність безвідмовної роботи ПП до моменту відмови одного з елементів ОС;

$P(A^1{}_{23}) = P_p(t - \tau)$ - ймовірність безвідмовної роботи РЕ з моменту його включення, тобто за інтервал $(t - \tau)$.

Тоді ймовірність безвідмовної роботи впродовж напрацювання [τ, $\tau+d\tau$] при відмові першого елемента ОС

$$P'(A^1{}_2) = f(\tau)\, d\tau \cdot P_{\Pi}(\tau) \cdot P_p(t - \tau).$$

Інтегруючи $P'(A^1{}_2)$ по всіх τ від 0 до t, визначаємо ймовірність безвідмовної роботи системи за умови, що один з елементів ОС відмовив:

$$P(A^1{}_2) = \int_0^t f(\tau) \cdot P_{\Pi}(\tau) P_p(t-\tau) d\tau .$$

Аналогічні міркування можна провести для кожного з n елементів ОС. Після того, як відмовить один з елементів ОС, n -1 елементів повинні залишитися працездатними.

Оскільки подія A_2 передбачає безвідмовну роботу системи при відмові будь-якого з n елементів ОС, то її можна розглядати як

$$A_2 = \sum_{i=1}^{n} \left(A^{n-1} \cap A_2^i \right), \quad i = \overline{1,n} ,$$

де A^{n-1} - подія, що полягає в безвідмовній роботі $n - 1$ елементів ОС, що залишилися;
$A^i{}_2$ – безвідмовна робота системи при відмові i-го елемента ОС.

Таким чином,

$$P(A_2) = P\{\sum_{i=1}^{n} \left(A^{n-1} \cap A_2^i \right)\} = \sum_{i=1}^{n} \left(P(A^{n-1}) \cdot P(A_2^i) \right),$$

де $P(A^{n-1}) = P_{n-1}(t)$- ймовірність безвідмовної роботи (n - 1) елементів ОС, що залишилися.

Тому ймовірність безвідмовної роботи системи при відмові i –го ($i=\overline{1,n}$) елемента ОС

$$P(A_2)=P_2(A)=\sum_{i=1}^{n}P_{n-1}(t)\cdot\int_0^t f(\tau)\cdot P_П(\tau)P_p(t-\tau)d\tau=$$

$$=n\cdot P_{n-1}(t)\cdot\int_0^t f(\tau)\cdot P_П(\tau)P_p(t-\tau)d\tau.$$

Тоді ймовірність безвідмовної роботи системи з ковзним резервом

$$P_c(t)=P_1(t)+P_2(t)=P(t)+n\cdot P_{n-1}(t)\int_0^t f(\tau)\cdot P_П(\tau)P_p(t-\tau)d\tau\,.$$

При експоненціальному розподілі напрацювання до відмови основних і резервних елементів $P_i(t)=exp(-\lambda_i t)$, а також перемикального пристрою ймовірність безвідмовної роботи системи визначається як

$$P_c(t)=[1+n\cdot\lambda_0/\lambda_П(1-exp(-\lambda_П t))]\,exp(-n\lambda_0 t),\quad (8.25)$$

де λ_0 – інтенсивність відмов основного і резервного елементів; $\lambda_П$ - інтенсивність відмов перемикального пристрою.

Показник ефективності резервування

$$B_p=P_c(t)/P_{0c}(t)=1+n\cdot\lambda_0/\lambda_П(1-exp(-\lambda_П t)),\quad (8.26)$$

де $P_{0c}(t)=exp(-n\lambda_0 t)$ - ймовірність безвідмовної роботи основної системи.

При більшій кількості резервних елементів, наприклад $m=2$, при визначенні $P_c(t)$ розглядаються чотири несумісні події, при яких можлива безвідмовна робота системи і т.п.

У загальному випадку ковзне резервування являє собою резервування заміщенням із кратністю $k = m/(n\text{-}m)$, де n – загальна кількість елементів; m – кількість резервних елементів, для яких справедливі такі залежності [17]:

$$P_c(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{((n - m)\lambda t)^k}{k!} \exp - ((n - m)\lambda t)\,; \qquad (8.27)$$

$$\lambda_c(t) = (n - m)\lambda \frac{\dfrac{((n - m)\lambda t)^m}{m!}}{\sum\limits_{k=0}^{m} \dfrac{((n - m)\lambda t)^k}{k!}}\,; \qquad (8.28)$$

$$T_{0c} = \frac{m + 1}{n - m} T_0\,. \qquad (8.29)$$

Приклади

Приклад 1 [17]. Резервована система кратністю m=2 наведена на рис. 8.9.

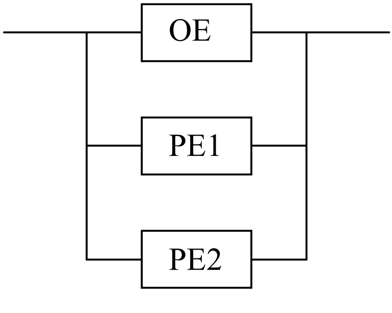


Рисунок 8.9

Визначити ймовірність безвідмовної роботи і середній час безвідмовної роботи системи за умови, що елементи мають постійну інтенсивність відмови λ = 0,05 год$^{-1}$ для:

1) постійно включеного резерву;
2) ненавантаженого резерву.

Результати розрахунків оформити у вигляді таблиці. Порівняти отримані значення для різних способів резервування. Побудувати графіки залежностей ймовірності безвідмовної роботи від часу напрацювання в інтервалі від 0 до 150 год. із кроком 10 годин для кожного з способів резервування.

Розв'язання.

1) Для постійно включеного резерву ймовірність безвідмовної роботи системи при $t = 10$ визначаємо за формулою (7.10):

$$P_C(10) = 1 - [1 - exp(-0,05 \cdot 10)]^3 = 0,939.$$

Значення ймовірностей безвідмовної роботи для значень напрацювання t від 20 до 150 годин із кроком 10 годин обчислюються аналогічно. Результати розрахунків заносимо в таблицю 8.1.

Середнє напрацювання до відмови системи визначаємо за формулою (7.11):

$$T_{0C} = \frac{1}{0,05}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \approx 36,7 \text{ год.}$$

2) Для ненавантаженого резерву ймовірність безвідмовної роботи системи при $t = 10$ визначаємо за формулою (8.6):

$$P_C(10) = \exp(-0,05 \cdot 10)\left(1 + 0,05 \cdot 10 + \frac{(0,05 \cdot 10)^2}{2}\right) = 0,9856\,.$$

Значення ймовірностей безвідмовної роботи для значень напрацювання t від 20 до 150 годин із кроком 10 годин обчислюються аналогічно. Результати розрахунків заносимо в таблицю 8.1.

Таблиця 8.1

	Значення ймовірності безвідмовної роботи	
t, годин	Постійно включений резерв	Ненавантажений резерв
0	1	1
10	0,939	0,986
20	0,747	0,919
30	0,531	0,809
40	0,353	0,677
50	0,226	0,544
60	0,142	0,423
70	0,088	0,321
80	0,054	0,238
90	0,033	0, 174
100	0,02	0,124
110	0,012	0,088
120	0,007	0,062
130	0,0045	0,0433
140	0,0027	0,029
150	0,0016	0,02

Середнє напрацювання до відмови системи визначаємо за формулою (8.12):

$$T_{0C} = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\lambda_i} = \frac{3}{0{,}05} = 60 \text{ год.}$$

На основі отриманих результатів розрахунків (табл. 8.1) будуємо графіки залежностей ймовірності безвідмовної роботи системи від часу напрацювання (рис. 8.10) для постійно включеного резерву (графік 1) і для ненавантаженого резерву (графік 2).

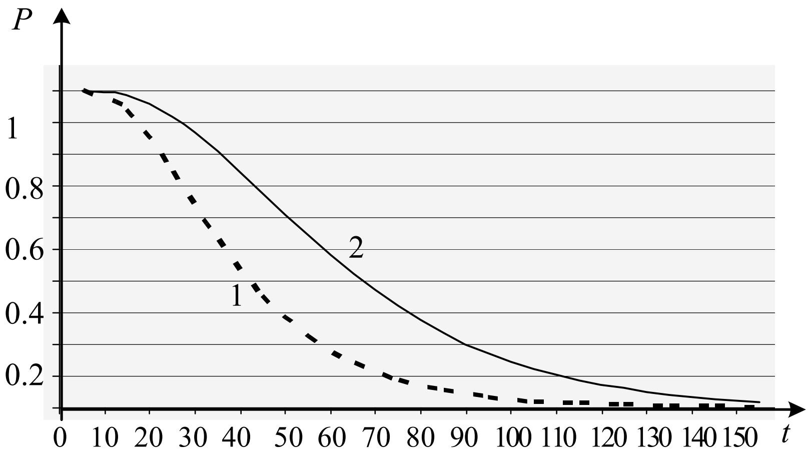


Рисунок 8.10

Контрольні питання

1. Який спосіб резервування має назву ненавантаженого? Як випадкове напрацювання до відмови системи пов'язане з випадковими напрацюваннями складових елементів системи?
2. Які основні припущення прийняті в п. 8.1 при розрахунку системи з ненавантаженим резервуванням?
3. До якого закону розподілу прямує напрацювання до відмови системи при великих значеннях кратності резервування?
4. Проаналізуйте, як змінюється ймовірність безвідмовної роботи системи зі збільшенням кратності резервування.

5. За яких умов ненавантажене резервування стає значно ефективніше навантаженого?
6. Який закон розподілу напрацювання до відмови буде у системи з ненавантаженим резервуванням, якщо закони розподілу напрацювання до відмови елементів є нормальними?
7. Поясніть сутність полегшеного резерву. Сформулюйте умову працездатності системи з полегшеним резервом.
8. Наведіть логічний хід отримання виразу ймовірності безвідмовної роботи системи з полегшеним резервом.
9. Поясніть сутність ковзного резервування. Сформулюйте умови працездатності системи з ковзним резервуванням і наведіть логічний хід отримання виразу ймовірності безвідмовної роботи системи.

Розділ 9

НАДІЙНІСТЬ ВІДНОВЛЮВАНИХ ОБ'ЄКТІВ І СИСТЕМ

9.1 Постановка задачі. Загальна розрахункова модель

При розрахунку показників надійності відновлюваних об'єктів і систем найбільш поширені такі припущення:

– експоненціальний розподіл напрацювання між відмовами;
– експоненціальний розподіл часу відновлення.

Припущення багато в чому справедливі, оскільки, по-перше, експоненціальний розподіл напрацювання описує функціонування системи на ділянці нормальної експлуатації, по-друге, експоненціальний розподіл описує процес без «передісторії».

Застосування експоненціального розподілу для опису процесу відновлення дозволяє при ординарних незалежних відмовах представити аналізовані системи у вигляді *марківських систем*.

При експоненціальному розподілі напрацювання між відмовами і часу відновлення для розрахунку надійності використовують *метод диференціальних рівнянь для ймовірності станів (рівнянь Колмогорова-Чепмена)*.

Випадковий процес у будь-якій фізичній системі S називається *марківським*, якщо він має таку *властивість* (рис. 9.1): для будь-якого моменту t_0 ймовірність стану системи у майбутньому ($t > t_0$) залежить тільки від теперішнього стану ($t=t_0$) і не залежить від того, коли і яким чином система прийшла в цей стан (інакше: при фіксованому теперішньому майбутнє не залежить від передісторії процесу).

Для марківського процесу «майбутнє» залежить від «минулого» тільки через «теперішнє», тобто майбутній перебіг процесу залежить тільки від тих минулих подій, які вплинули на стан процесу зараз.

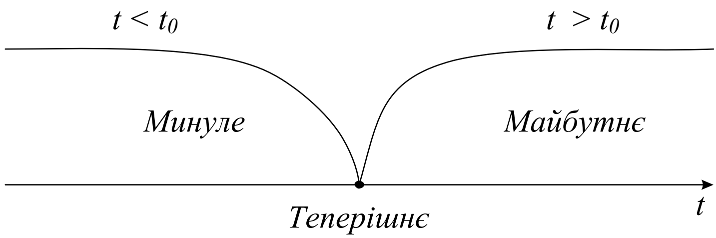


Рисунок 9.1

Марківський процес як процес без післядії не означає повної незалежності від минулого, оскільки воно виявляється в теперішньому.

При використанні методу в загальному випадку для системи S необхідно мати математичну модель у вигляді множини станів системи $S_1, S_2,..., S_n$, в яких вона може знаходитися при відмовах і відновленнях елементів.

Для розгляду принципу складання моделі введені такі припущення:

- елементи системи, що відмовили (або сам об’єкт, який розглядається), негайно відновлюються (початок відновлення збігається з моментом відмови);
- відсутні обмеження на кількість відновлень;
- якщо всі потоки подій, що переводять систему (об’єкт) із стану в стан, є пуассонівськими (простими), то випадковий процес переходів буде марківським процесом з безперервним часом і дискретними станами $S_1, S_2,..., S_n$.

При складанні моделі необхідно керуватися такими правилами [15].

1. Математичну модель зображують у вигляді графу станів (рис.9.2). Елементи графу:
а) вершини графу $S_1, S_2,..., S_n$ - можливі стани системи S, що виникають при відмовах елементів (S_0 - працездатний стан; S_1 - стан відмови);
б) стрілки - можливі напрями переходів з одного стану S_i в інший S_j .

Над стрілками або під ними зазначаються інтенсивності переходів [λ – інтенсивність переходу у непрацездатний стан (інтенсивність відмови); μ - інтенсивність переходу у працездатний стан (інтенсивність відновлення)].

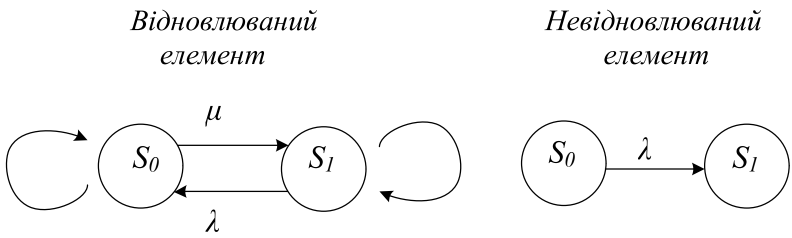


Рисунок 9.2

«Петлею» позначаються затримки в тому або іншому стані S_0 і S_1 , що відповідають подіям:
- справний стан продовжується;
- стан відмови продовжується (надалі петлі на графах не зображуємо).

Граф станів відображає кінцеву (дискретну) кількість можливих станів системи $S_1, S_2,..., S_n$. Кожна з вершин графу відповідає одному зі станів.

2. Для опису випадкового процесу переходу станів (відмова/ відновлення) застосовують імовірності станів

$$P_1(t), P_2(t),..., P_i(t),..., P_n(t),$$

де $P_i(t)$ - ймовірність знаходження системи в момент t в i-му стані, тобто

$$P_i(t) = P\{S(t) = S_i\}.$$

Очевидно, що для будь-якого t

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(t) = 1, \qquad (9.1)$$

(умова нормування, оскільки інших станів, окрім $S_1, S_2, \ldots, S_n$, немає).

3. За графом станів (рис. 9.3) складається система звичайних диференціальних рівнянь першого порядку (рівнянь Колмогорова-Чепмена), що мають вигляд

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \sum_{l=1}^{\theta} \lambda_{li} P_l(t) - P_i(t) \sum_{j=1}^{q} \lambda_{ij}, \quad j = \overline{1,q}; \;\; l = \overline{1,\theta}. \qquad (9.2)$$

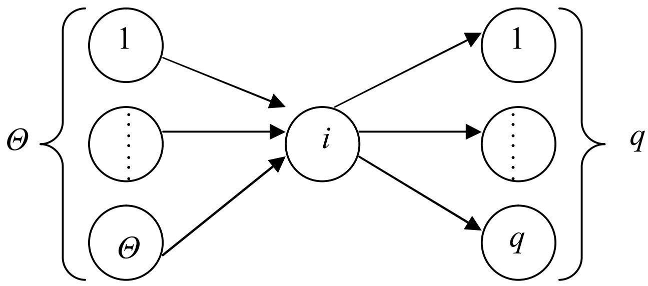


Рисунок 9.3

У загальному випадку інтенсивності потоків λ_{ij} і μ_{ij} можуть залежати від часу t.

При складанні диференціальних рівнянь користуються простим мнемонічним правилом:

а) у лівій частині - похідна за часом t від $P_i(t)$;

б) кількість членів у правій частині дорівнює кількості

стрілок, що сполучають стан, який розглядається, з іншими станами;
в) кожен член правої частини дорівнює добутку інтенсивності переходу на ймовірність того стану, з якого виходить стрілка;
г) знак добутку додатний, якщо стрілка входить (направлена вістрям) у даний стан, і від'ємний, якщо стрілка виходить із нього.

Перевіркою правильності складання рівнянь є те, що сума правих частин рівнянь дорівнює нулю.

4. Щоб розв'язати систему диференціальних рівнянь для ймовірності станів $P_1(t), \dots, P_i(t), \dots, P_n(t)$, необхідно задати початкові значення ймовірностей $P_1(0), \dots, P_i(0), \dots, P_n(0)$, сума яких дорівнює одиниці.

Якщо в початковий момент ($t = 0$) стан системи відомий, наприклад, $S(0) = S_1$, то $P_1(0) = 1$, а інші ($i = 2, \dots, n$) дорівнюють нулю.

9.2 Показники надійності відновлюваних систем

Усі стани S системи можна розділити на підмножини:
- $S^k \subset S$ - підмножина станів $j = \overline{1,k}$, у яких система працездатна;
- $S^m \subset S$ - підмножина станів $z = \overline{k+1,m}$, у яких система непрацездатна.

$$S = S^k \vee S^m, \quad S^k \wedge S^m = 0.$$

1. ***Функція готовності Г(t) системи*** визначає ймовірність знаходження системи у працездатному стані у момент t :

$$Г(\mathrm{t}) = \sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{k}} \mathrm{P_j}(t) = 1 - \sum_{\mathrm{z=k+1}}^{\mathrm{m}} \mathrm{P_z}(t),$$

де $P_j(t)$ - ймовірність знаходження системи у працездатному j-му стані;

$P_z(t)$ - ймовірність знаходження системи у непрацездатному z-му стані.

2*. **Функція простою П(t) системи***

$$П\,(t) = 1 - Г(\mathrm{t}) = \sum_{\mathrm{z=k+1}}^{\mathrm{m}} \mathrm{P_z}(t).$$

3. ***Коефіцієнт $k_{гс}$ готовності системи*** визначається при усталеному режимі експлуатації (при $t \to \infty$). При $t \to \infty$ встановлюється *граничний стаціонарний режим*, у ході якого система переходить зі стану в стан, але ймовірності станів вже не змінюються:

$$\lim_{t \to \infty} P_i(t) = P_i;\ \ i = \overline{1,n}\,.$$

Коефіцієнт $k_{гс}$ готовності можна розрахувати за системою (9.2) диференціальних рівнянь, прирівнюючи до нуля їхні ліві частини $dP_i(t)\ /dt\ =\ 0$, оскільки $P_i = const$ при $t \to \infty$. Тоді система рівнянь (9.2) перетворюється на систему алгебраїчних рівнянь вигляду

$$0 = \sum_{l=1}^{\theta} \lambda_{li} P_l - P_i \sum_{j=1}^{q} \lambda_{ji}\,, \tag{9.3}$$

і коефіцієнт готовності являє собою граничне значення функції готовності при усталеному режимі t:

$$k_{г.с.} = \lim_{t\to\infty} \varGamma(\mathrm{t}).$$

4. ***Параметр потоку відмов системи***

$$\omega\ (t) = \sum_{j=1}^{K}\sum_{z=1}^{M}\lambda_{jz}P_j(t), \qquad (9.4)$$

де λ_{jz} - інтенсивності (узагальнене позначення) переходів із працездатного стану в непрацездатний.

5. ***Функція потоку відмов***

$$W\ (t) = \int_0^t \omega\,(t)dt\ . \qquad (9.5)$$

6. ***Середнє напрацювання між відмовами*** на інтервалі (0,t)

$$T_0\,(t) = \frac{\int_0^t \varGamma\,(\mathrm{t})\mathrm{dt}}{\mathrm{W(t)}}\ . \qquad (9.6)$$

Примітка. При $t\to\infty$, коли $P_j(\infty)= P_j$, середнє напрацювання між відмовами

$$T_0 = \lim_{t\to\infty} T_0\,(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t \varGamma\,(\mathrm{t})\mathrm{dt}}{\int_0^t \omega(\mathrm{t})\mathrm{dt}} = k_{г.с}/\omega,$$

де $\omega = \lim_{t\to\infty}\omega(t) = \omega\ (\infty)$.

Як приклад обчислення показників надійності розглянемо відновлюваний об’єкт (рис. 9.4), у якого потік відмов простий (пуасонівський) з параметром потоку

$$\omega = \lambda = 1/\,T_0,$$

а розподіл часу відновлення підпорядковується експоненціальному розподілу з інтенсивністю відновлення

$$\mu = 1/\,T_B\,,$$

де T_0 - середнє напрацювання між відмовами; T_B - середній час відновлення.

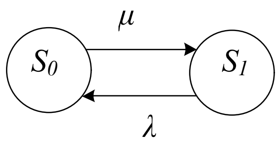


Рисунок 9.4

Стани елемента: S_0 –працездатний; S_1-непрацездатний.

$P_0(t)$ - ймовірність працездатного стану для напрацювання t;

$P_1(t)$ - ймовірність непрацездатного стану для напрацювання t.

Система диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} dP_0(t)/dt = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t); \\ dP_1(t)/dt = \lambda P_0(t) - \mu P_1(t). \end{cases} \qquad (9.7)$$

Початкові умови. При $t=0$: $P_0(0)=1$; $P_1(0)=0$.
Оскільки стани S_0 і S_1 становлять повну групу подій, то

$$P_0(t) + P_1(t) = 1. \qquad (9.8)$$

Виражаючи $P_0(t)=1-P_1(t)$ і підставляючи в (9.7), отримуємо одне диференціальне рівняння відносно $P_1(t)$:

$$dP_1(t)/dt = \lambda (1 - P_1(t)) - \mu P_1(t). \qquad (9.9)$$

Розв'язання рівняння (9.9) проводиться з використанням перетворення Лапласа.

Перетворення Лапласа для ймовірності стану $P_i(t)$

$$P_i(S) = \int_0^\infty P_i(t) e^{-S\,t} dt,$$

тобто $P_i(S)= L\{P_i(t)\}$ - зображення ймовірності $P_i(t)$.

Перетворення Лапласа для похідної $dP_i(t)/dt$

$$L\{dP_i(t)/dt\} = \int_0^\infty dP_i(t)/dt \cdot e^{-S\,t} dt = -P_i(0) + SP_i(S).$$

Після застосування перетворення Лапласа до лівої і правої частин рівняння отримаємо рівняння зображень:

$$dP_1(t)/dt = \lambda - P_1(t)(\lambda + \mu);$$
$$L\{dP_1(t)/dt\} = L\{\lambda\} - L\{P_1(t)(\lambda + \mu)\};$$
$$-P_1(0) + SP_1(S) = \lambda / S - P_1(S)(\lambda + \mu), \qquad (9.10)$$

де $L\{\lambda\} = \lambda\, L\{1\} = \lambda/S$.

При $P_1(0)= 0$:

$$SP_1(S)+ P_1(S)(\lambda+\mu)= \lambda/S;$$

$$P_1(S)(S + \lambda + \mu)= \lambda/S,$$

звідки зображення ймовірності знаходження об’єкта в непрацездатному стані

$$P_1(S) = \frac{\lambda}{S(S+\lambda+\mu)}. \qquad (9.11)$$

Розкладаємо дроби на елементарні складові

$$\frac{\lambda}{S(S+\lambda+\mu)} = \frac{a-\mu}{S(S+a)} = \frac{a-\mu}{a} \cdot \frac{a}{S(S+a)} =$$

$$= \frac{a-\mu}{a}\left[1/S - 1/(S+a)\right],$$

де $\alpha = \lambda + \mu$.

Застосовуючи зворотне перетворення Лапласа, із врахуванням умов:

- якщо $L\{f(t)\} = 1/S$, то $f(t) = 1$;

- якщо $L\{f(t)\} = 1/(S + a)$, то $f(t) = e^{-at}$,

визначимо ймовірність знаходження об’єкта в непрацездатному стані:

$$P_1(t) = \frac{a-\mu}{a}[1-e^{-at}] = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}[1-e^{-(\lambda+\mu)t}]. \qquad (9.12)$$

Тоді ймовірність знаходження об’єкта в працездатному стані ($P_0(t)=1-P_1(t)$) дорівнює

$$P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}[1+\frac{\lambda}{\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}]. \qquad (9.13)$$

За допомогою отриманих виразів можна розрахувати ймовірність працездатного стану і відмови відновлюваного об’єкта у будь-який момент часу t.

Коефіцієнт готовності системи $k_{гс}$ визначається при сталому режимі, при цьому $P_i(t)= P_i = const$, тому складається система алгебраїчних рівнянь з нульовими лівими частинами, оскільки $dP_i(t) / dt = 0.$

Оскільки $k_{гс}$ є ймовірністю того, що система виявиться працездатною у момент t при $t\to\infty$, то з отриманої системи рівнянь визначається $P_0 = k_{гс}$.

При $t \to\infty$ алгебраїчні рівняння мають вигляд

$$\begin{cases} 0 = -\lambda P_0 + \mu P_1; \\ 0 = \lambda P_0 - \mu P. \end{cases} \tag{9.14}$$

Додаткове рівняння $P_0 + P_1 = 1$.

Виражаючи $P_1=1 - P_0$, отримуємо $0= \lambda P_0 - \mu \ (\ 1 - P_0 \ )$ або $\mu = P_0 (\lambda+\mu)$, звідки

$$P_0= k_{гс} =\mu/(\lambda+\mu). \tag{9.15}$$

Решта показників надійності відновлюваного елемента:
- *функція готовності* $\boldsymbol{\Gamma(t)}$, *функція простою* $\boldsymbol{\Pi(t)}$:

$$\Gamma(t)= P_0(t); \qquad \Pi(t)= 1 - \Gamma(t)= P_1(t);$$

- *параметр потоку відмов* $\boldsymbol{\omega(t)}$ за (9.4):

$$\omega(t) = \lambda P_0(t)= \lambda \Gamma(t).$$

При $t\to\infty$ (стаціонарний усталений режим відновлення)

$$\omega(t) =\omega (\infty) = \omega = \lambda P_0 = \lambda k_{гс} ;$$

- *середнє напрацювання між відмовами* ($t \to \infty$):

$$t_0 = k_{гс}/\omega = k_{гс}/\lambda\, k_{гс} = 1/\lambda \ .$$

На рис. 9.5 наведено характер зміни в часі ймовірності знаходження об'єкта у працездатному стані ($\mu = \infty$ - автоматичне відновлення; $\mu = 0$ - без відновлення).

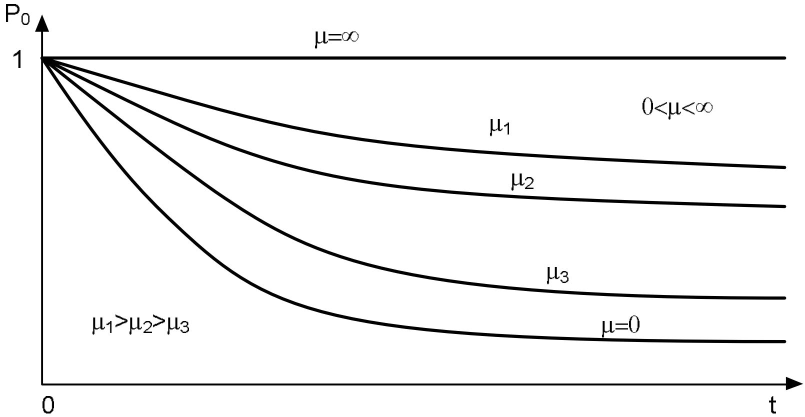


Рисунок 9.5

Аналіз зміни $P_0(t)$ дозволяє зробити висновки:
1) при миттєвому (автоматичному) відновленні працездатності ($\mu = \infty$)

$$\lambda/\mu = 0 \ \text{ і } \ P_0(t) = 1;$$

2) за відсутності відновлення ($\mu = 0$)

$$\lambda/\mu = \infty \ \text{ і } \ P_0(t) = e^{-\lambda t},$$

а ймовірність працездатного стану об'єкта дорівнює ймовірності безвідмовної роботи невідновлюваного елемента.

Метод диференціальних рівнянь може бути використаний для розрахунку показників надійності і невідновлюваних об'єктів (систем). У цьому випадку непрацездатні стани системи є «поглинаючими», і інтенсивності μ виходу з цих станів виключаються.

Для невідновлюваного об'єкта граф станів показано на рис. 9.6.

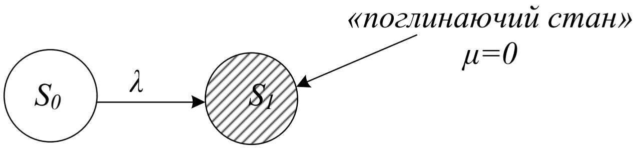


Рисунок 9.6

Система диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} dP_0(t)/dt = -\lambda P_0(t); \\ dP_1(t)/dt = \lambda P_0(t). \end{cases}$$

Початкові умови $P_0(0) = 1;\ P_1(0) = 0.$

Зображення за Лапласом першого рівняння системи:

$$L\{dP_0(t)/dt\} = -\lambda L\{P_0(t)\};$$

$$-P_0(0) + SP_0(S) = -\lambda P_0(S).$$

Після групування отримуємо:

$$SP_0(S) + \lambda P_0(S) = 1;$$

$$P_0(S)(S+\lambda) = 1.$$

Звідси

$$P_0(S) = 1/(\lambda + S).$$

Використовуючи зворотне перетворення Лапласа, оригінал ймовірності знаходження об'єкта у працездатному стані, тобто ймовірність безвідмовної роботи до напрацювання t:

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Контрольні питання

1. У чому полягають особливості марківського випадкового процесу, на основі якого будується розрахункова модель для відновлюваних об'єктів і систем?
2. Які основні етапи складання розрахункової моделі?
3. Що являє собою система диференціальних рівнянь Колмогорова-Чепмена? Поясніть зміст кожної зі складових цих рівнянь.
4. Поясніть мнемонічне правило складання диференціального рівняння ймовірності стану (рівняння Колмогорова - Чепмена).
5. Дайте визначення і поясніть зміст показників надійності відновлюваних об'єктів і систем.
6. Поясніть, як змінюються показники надійності відновлюваного об'єкта при зміні інтенсивності відновлення.
7. У чому полягають особливості застосування методу диференціальних рівнянь для розрахунку надійності невідновлюваних об'єктів?

Розділ 10

ПРАКТИЧНИЙ АНАЛІЗ НАДІЙНОСТІ СИСТЕМ

10.1 Вибір показників надійності

Забезпечення потрібного рівня надійності системи пов'язане з необхідністю порівняння різних варіантів її підвищення [18]. При цьому може виявитися, що частина показників надійності в одному варіанті краща, ніж у другому, а інша частина - гірша. Нехай, наприклад, функції надійності для першого і другого варіантів будуть відповідно $P_1(t)=2e^{-2\lambda t} - e^{-4\lambda t}$ та $P_2(1) = e^{-\lambda t}$. Тоді ймовірності безвідмовної роботи за 500 годин при $\lambda=10^{-4}$ (год$^{-1}$) становитимуть $P_1(500)=0{,}99$ та $P_2(500)=0{,}95$, тобто $P_1(500)>P_2(500)$.

Однак напрацювання на відмову $T_2 = \dfrac{1}{\lambda}$ буде більшим, ніж $T_1 = 0{,}75\dfrac{1}{\lambda}$. Отже, якщо як основний показник надійності взяти $P(500)$, то вищу надійність забезпечує варіант 1. Якщо ж за основний показник надійності прийняти напрацювання на відмову, то вищу надійність забезпечує варіант 2.

Очевидно, що вибирати той або інший варіант підвищення надійності необхідно із урахуванням умов експлуатації і втрат, викликаних відмовою. Математично це можна обґрунтувати шляхом введення функції прибутку $C(t)$. Для невідновлюваних систем $C(t)$ дорівнює прибутку від експлуатації системи, яка відмовила у момент часу t, тобто

$$C(t)=-\beta+\gamma\varphi(t),\ \ \varphi(0)=0,$$

де $\beta = \beta_1 + \beta_2$ - втрати, пов'язані з відмовою системи; β_1- вартість системи; β_2 - додаткові втрати від відмови системи; γ - прибуток за одиницю часу роботи системи; $\varphi(t)$ - функція, що характеризує зростання прибутку. Найкращою ж слід вважати систему, яка забезпечує найбільший середній прибуток, тобто величина

$$C^* = M[C(t)] = -\beta + \gamma M[\varphi(t)] \quad (10.1)$$

є загальною оцінкою ефективності системи. Величини β і γ не залежать від надійності системи і визначаються її вартістю і корисністю. Єдиною величиною, що залежить від надійності, є $M[\varphi(t)]$. Отже, її слід вважати основним показником надійності. Враховуючи, що $\varphi(0)=0$ і $P(\infty)=0$, маємо

$$M[\varphi(t)] = \int_0^\infty \varphi(t) f(t)\,dt . \quad (10.2)$$

Приклади вибору та визначення показників надійності наведені нижче.

Загальною оцінкою якості роботи конкретної відновлюваної системи доцільно вважати середнє значення прибутку за одиницю часу на інтервалі $(0,T_P)$:

$$C_P = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_P} c(t)\,dt ,$$

де T_P- технічний ресурс системи; $c(t)$ - прибуток від використання системи за одиницю часу. Для системи даного типу варто розрахувати математичне очікування середнього прибутку за одиницю часу

$$C_P^* = M\left[\frac{1}{T_p}\int_0^{T_P} c(t)dt\right] = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_P} M[c(t)]dt\,. \qquad (10.3)$$

Введемо функцію $x(t)$, що дорівнює 1, коли система працює, і 0, коли система відновлюється. Під час роботи за одиницю часу система приносить прибуток γ. Відмова системи призводить до втрат C_i першого роду, які зумовлені вартістю елементів, що відмовили, і до втрат εt другого роду, які викликані простоєм системи і пропорційні тривалості відновлення. Отже, прибуток від системи за одиницю часу можна записати у вигляді

$$c(t) = (\gamma+\varepsilon)x(t) - \varepsilon - \sum_{i=1}^{n} C_i \delta(t - t_i)\,, \qquad (10.4)$$

де $\delta(t)$-дельта-функція; C_i -втрати першого роду, викликані i-ю відмовою ($i=1,2,\ldots,n$); n - кількість відмов за час Tp; t_i - моменти появи відмов.

Розглянемо випадок, коли $C_i<<\varepsilon$, тобто втрати від відмови системи визначаються тільки її простоєм. Так буває, наприклад, у системах, побудованих на ІС малого ступеня інтеграції, коли відмова однієї ІС малої вартості призводить до відмови всієї системи. У цьому випадку

$$c(t)=(\gamma+\varepsilon)x(t)-\varepsilon. \qquad (10.5)$$

Підставляючи (10.5) у (10.3), отримаємо

$$C_P^* = \frac{\gamma+\varepsilon}{T_p}\int_0^{T_P} M[x(t)]dt - \varepsilon\,.$$

У цьому виразі від надійності залежить тільки множник $\frac{1}{T_p}\int_0^{T_P} M[x(t)]dt = H$, який і слід вважати основним показником надійності. Оскільки функція $x(t)$ набуває тільки два значення, то для кожного t легко обчислити її математичне очікування як

$$M[x(t)]=1\cdot G(t)+0\cdot[1-G(t)]=G(t).$$

Отже,

$$H = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_P} G(t)dt = K_Г,$$

тобто основним показником H надійності в даному випадку є коефіцієнт готовності.

Розглянемо тепер випадок, коли $C_i >> \varepsilon$, тобто втрати визначаються вартістю елементів, що відмовили. Так буває, наприклад, у системах, побудованих із ВІС, коли вартість блоку, що відмовив, досить велика, однак його заміна може бути виконана швидко і втрати від простою малі. У цьому випадку

$$c(t) = \gamma - \sum_{i=1}^{n} c_i \delta(t - t_i). \qquad (10.6)$$

Підставляючи (10.6) у (10.3), отримуємо

$$C_P^* = \gamma - \frac{1}{T_P} M\left[\sum_{i=1}^{n} C_i\right] = \gamma - \frac{C_0 N}{T_P}, \qquad (10.7)$$

де N - середня кількість відмов за час T_P; C_0 - середні витрати на усунення однієї відмови. У формулі (10.7) від надійності системи залежить тільки множник

$$\frac{N}{T_P}=H, \tag{10.8}$$

який і є основним показником надійності у випадку, коли $C_i >> \varepsilon$. Величина N може бути визначена, наприклад, за щільністю $f(t)$ розподілу часу безвідмовної роботи.

Взагалі процес функціонування відновлюваної системи, де час відновлення t_B такий, що можна вважати $t_B=0$, одержав назву процесу поновлення. Найбільш повно процес поновлення характеризують функція поновлення $N(t)$ - середня кількість поновлень (відмов), що відбулись до моменту часу t, або інтенсивність поновлень $\psi(t)$. Очевидно, що

$$N(t)=\int_0^t \psi(t)dt\ . \tag{10.9}$$

Якщо вважати, що поновлення повністю відновлює якості системи, то процес поновлення можна подати як заміну системи, що відмовила, новою. Для виявлення зв’язку між $\psi(t)$ і $f(t)$ визначимо кількість замін (поновлень), що відбулись в інтервалі $(t,\ t+\Delta t)$. Виходячи з визначення $\psi(t)$, можна вважати, що ця кількість буде дорівнювати $\psi(t)\Delta t$. У той самий час система, що починала роботу в момент $t=0$ на інтервалі $(t,\ t+\Delta t)$, у середньому відмовить $f(t)\Delta t$ разів. Однак, крім даної системи, на інтервалі $(t,\ t+\Delta t)$ можуть відмовити і системи, що почали працювати в деякий момент $\tau<t$. Кількість таких систем буде $\psi(t)\Delta x$, з них на інтервалі $(t,\ t+\Delta t)$ відмовлять у середньому $\psi(\tau)\Delta\tau f(t-\tau)\Delta t$ систем.

Отже, $\psi(t)\Delta t = f(t)\Delta t + \Delta t\sum_{0}^{t}\psi(\tau) f(t-\tau)\Delta\tau$,

де додавання проводиться для всіх інтервалів $\Delta\tau$ від 0 до t. Звідси одержимо рівняння

$$\psi(t) = f(t) + \int_{0}^{t}\psi(\tau) f(t-\tau) d\tau ,$$

яке має назву рівняння поновлення. Розв'язок його за допомогою перетворення Лапласа дає $\psi^{\bullet}(S) = \dfrac{f^{\bullet}(S)}{1 - f^{\bullet}(S)}$, $\psi^{\bullet}(S)$ i $f^{\bullet}(S)$ - відображення за Лапласом функцій $\psi(S)$ i $f(S)$. Коли, наприклад, $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$, то

$$\psi(t)=\lambda , \qquad (10.10)$$

тобто для експоненціального закону розподілу надійності значення λ чисельно дорівнює інтенсивності поновлень. В загальному ж випадку це не так, але при будь-якій безперервній щільності розподілу $f(t)$, що прямує до нуля при $t \to \infty$, маємо

$$\lim_{t\to\infty} \psi(t) = \frac{1}{T_0} . \qquad (10.11)$$

При постійній інтенсивності відмов λ з (10.9) і (10.10) отримуємо $N(t)=\lambda t$. Звідси з урахуванням (10.8) випливає, що

$$H = \frac{\lambda T_P}{T_P} = \lambda .$$

Це означає, що для такого типу відновлюваних систем основним показником надійності є інтенсивність відмов.

Таким чином, знаючи призначення й умови експлуатації системи, для кожного конкретного випадку можна побудувати функцію прибутку, а вже за нею визначити основний показник надійності даної системи.

Процес функціонування системи з $t_B \neq 0$ може бути зведений до процесу поновлення шляхом введення до розгляду випадкової величини $T+t_B$, де T - час безвідмовної роботи; t_B - час відновлення системи. З теорії ймовірностей відомо, що сума двох незалежних випадкових величин T і t_B має розподіл

$$\varphi(t) = \int_0^t f(t) r(t-\tau) d\tau \ .$$

Рівняння поновлення у цьому випадку буде мати вигляд

$$\psi(t) = \varphi(t) + \int_0^t \psi(\tau)\varphi(t-\tau) d\tau \ .$$

Таким чином, за аналогією до (10.11) отримаємо

$$\lim_{t \to \infty} \psi(t) = \frac{1}{T_C} ,$$

де $Tc = T_0 + T_B$, T_0 - напрацювання на відмову; T_B - середня тривалість відновлення.

Незважаючи на велику різноманітність систем, більшість із них можна класифікувати за режимом застосування [19] (безперервний тривалий, багатократний циклічний, однократний); можливістю відновлення (відновлювані, невідновлювані); можливістю проведення технічного обслуговування (обслуговувані, необслуговувані); залежністю прибутку від працездатності (пропорційний тривалості працездатного стану; прибуток з’являється, якщо система безвідмовно пропрацює заданий час); втратами від відмов (втрати від простою, втрати від витрат на ремонт, втрати від того й іншого); подіями, що призводять до припинення експлуатації (відмова, закінчення виконання функцій, вироблення технічного ресурсу); можливістю контролю перед застосуванням (контрольовані, неконтрольовані) тощо.

10.2 Розрахунок показників надійності

10.2.1 Інтегральні схеми [2]. Інтенсивність відмов ІС при експлуатації λ_e визначають за формулою

$$\lambda_e = \lambda_0 \cdot K_1 \cdot K_П , \qquad (11.12)$$

де λ_0 – інтенсивність відмов ІС для нормальних умов експлуатації (визначають за табличними даними спеціальної довідкової літератури); K_1 – коефіцієнт, що враховує умови експлуатації (табл. 10.1); $K_П$ – коефіцієнт, що враховує проведення заходів для підвищення надійності, а саме: $K_П$ = 0,4 - 0,7 при проведенні спеціальних заходів щодо підвищення надійності (вхідний контроль, відбраковочні випробування плат, вузлів), $K_П$ = 0,2 - 0,4 при експлуатації ІС в полегшених режимах (вимушене охолодження, усунення вібрацій, зниження рівня електромагнітного та іншого випромінювання тощо), $K_П$ = 0,1 - 0,3 при сумісному проведенні зазначених заходів.

Таблиця 10.1

Умови експлуатації	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7
Стаціонарні лабораторні	1,0	1,0	1,0	1,0	0,4	1,0	0,5
Стаціонарні промислові (керування технологічним обладнанням)	1,1	1,5	2,0	2,0	0,6	1,5	--
Наземні рухомі (автомобілі, трактори, електро- і тепловози)	1,5	2,5	2,5	2,5	1,0	2,0	1,2
Наземні переносні	1,7	2,0	2,0	1,5	0,8	1,5	1,0
Корабельні	2,0	2,0	2,0	2,0	0,8	1,5	1,0

Величину λ_0 визначають за табличними даними спеціальної довідкової літератури або за формулою

$$\lambda_0=\lambda_c \cdot K_c, \tag{10.13}$$

де λ_c – середня інтенсивність відмов ІС відповідної серії; K_c – коефіцієнт складності ІС, вибирається за табл. 10.2, в якій N - кількість елементів в ІС.

Таблиця 10.2

Цифрові ІС		**Аналогові та гібридні ІС**	
N	$\boldsymbol{K_c}$	**N**	$\boldsymbol{K_c}$
1-100	1,0	1-50	1,0
101-1000	1,27	51-100	1,25
1001-2500	1,60	101-150	1,4
2501-5000	1,95	151-200	1,55
5001-7500	2,15	201-300	1,75
7501-10000	2,25	301-500	2,05
10001-25000	3,0	501-1000	2,5
25001-50000	3,7	>1000	3,0
50001-75000	4,15		
>75000	4,5		

10.2.2 З'єднання [2]. Реальні умови експлуатації з'єднань враховують коефіцієнтом K_2 (табл. 10.1) і використовують більші значення λ_0 (найгірший випадок). Значення λ_0 наведені в табл.10.3.

Наприклад, якщо блок призначений для роботи в лабораторних умовах ($K_2 = 1$) і містить 200 з'єднань, виконаних паянням хвилею припою (λ_0=3·10^{-8} годин$^{-1}$), і 100 з'єднань, виконаних ручним паянням для друкованого монтажу (λ_0=15·10^{-8} год$^{-1}$), то для всіх з'єднань

$$\lambda_e = K_2 \cdot \sum_{i=1}^{2} \lambda_{0i} \cdot N_i = (200 \cdot 3 \cdot 10^{-8} + 100 \cdot 15 \cdot 10^{-8}) = 21 \cdot 10^{-6} .$$

Дана методика розрахунку надійності поширюється на з'єднання, які використовуються в усіх платах і вузлах, крім з'єднання у платах з металізованими отворами.

Таблиця 10.3

Тип з'єднання	λ_0	Джерело отримання даних
Ручне паяння з друкованим монтажем	0,06-15	Отримані шляхом аналізу результатів експлуатації
Ручне паяння з об'ємним монтажем	0,02-4	
Паяння хвилею припою	0,01-3	
Клемне з'єднання	0,03-5	
Точкове контактне зварювання	0,2-3	Отримані шляхом аналізу закордонних документів
Затискання (опресування)	0,005-0,15	
Безпаяне з'єднання скручуванням	0,006-0,02	
Скручування з паянням	0,03-5	

10.2.3 Плати з металізованими отворами [2]. Для таких плат

$$\lambda_e = \lambda_0 \cdot K_2 \cdot (N_1 \cdot (K_c + K_{s)} + N_2 (K_c + 13)),$$

де $\lambda_0 = 0{,}04 \cdot 10^{-8}$ год$^{-1}$ для друкованого монтажу і $\lambda_0 = 0{,}26 \cdot 10^{-8}$ год$^{-1}$ для навішеного монтажу; N_1 і N_2 – кількість наскрізних отворів, пропаяних відповідно хвилею і ручним паянням; K_c – коефіцієнт, який залежить від кількості шарів у платі (табл. 10.4); K_s – коефіцієнт, що залежить від відношення кількості вторинних паянь B до загальної кількості паянь P (табл. 10.5).

Таблиця 10.4

Кількість шарів	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K_c	1	1,3	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,6	2,7

Таблиця 10.5

B/P	0,006	0,07	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	>0,4
K_s	0	0,1	0,5	1,2	1,9	2,6	3,3	4	4,7	6

Приклади

Приклад 1. Для системи керування, що встановлена на борту автоматичної космічної станції, прибуток прямо пропорційний часу роботи, тобто $C(t)=-\beta+\gamma t$. Отже, $\varphi(t)=t$, а з (10.2) отримуємо

$$M[\varphi(t)] = \int_0^\infty P(t)dt = T_0,$$

тобто основним показником надійності в даному випадку є середній час безвідмовної роботи.

Приклад 2. Для системи керування, встановленої на борту ракети одноразового використання, прибуток буде дорівнювати

$$C(t)=\begin{cases} -\beta, & якщо\ t<t_n \\ \gamma-\beta, & якщо\ t\ge t_n \end{cases},$$

де t_n - час польоту ракети. У цьому випадку

$$\varphi(t)=\begin{cases} 0, & при\ t<t_n \\ 1, & при\ t\ge t_n \end{cases},$$

$$\varphi^{/}(t)=\delta(t-t_n),$$

де $\delta(t)$ - функція, що має такі властивості: $\delta(t)=0$ при $t\neq 0$, $\delta(0)=\infty$ та $\int\limits_0^\infty \delta(t)dt=1$.

Отже,

$$M[\varphi(t)]=\int\limits_0^\infty P(t)\delta(t-t_n)dt=P(t_n).$$

Основним показником надійності в даному випадку є ймовірність безвідмовної роботи протягом часу t_n.

Контрольні питання

1. Поясніть зміст функції прибутку при виборі варіанта підвищення надійності.
2. Які параметри входять в аналітичний вираз для визна-

чення прибутку від часу експлуатації системи?
3. Якою величиною оцінюється якість роботи відновлюваної системи?
4. Поясніть зміст терміна «процес поновлення» відновлюваної системи.
5. Наведіть аналітичний вираз для визначення інтенсивності відновлень системи. Яким методом розв’язується рівняння поновлення?
6. За якими ознаками стосовно надійності класифікують системи?
7. Наведіть аналітичний вираз для визначення інтенсивності відмов при експлуатації ІС, поясніть зміст її складових.
8. Як враховуються умови експлуатації при розрахунку інтенсивності відмов з’єднань?
9. Яким аналітичним виразом слід користуватися при визначенні інтенсивності відмов при експлуатації плат з металізованими отворами?

Розділ 11

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

1. На випробування поставлено N_0 виробів. За час t годин вийшло з ладу $n(t)$ одиниць виробів. За наступний інтервал часу Δt вийшло з ладу $n(\Delta t)$ виробів. Необхідно обчислити ймовірність безвідмовної роботи $[P(t), P(t+\Delta t)]$ за час t і $t+\Delta t$, частоту відмов $f(t+\Delta t/2)$, інтенсивність відмов $\lambda(t+\Delta t/2)$ на інтервалі Δt . Вихідні дані для розв'язання задачі наведені в таблиці В.1 (додаток В).

2. Система складається з N елементів, середня інтенсивність відмов яких $\lambda_{сер}$. Потрібно обчислити ймовірність безвідмовної роботи протягом часу t і середнє напрацювання до першої відмови. Вихідні дані для розв'язання задачі наведені в таблиці В.2.

3. Час безвідмовної роботи елемента повністю підпорядкований експоненціальному закону розподілу з параметром λ. Необхідно обчислити кількісні характеристики надійності елемента $P(t)$, $f(t)$, для заданих значень t, а також $T_{сер}$. Побудувати графіки залежності $P(t)$, $f(t)$. Вихідні дані для розв'язання задачі наведені в таблиці В.3.

4.1 Для варіантів 1-10.
Час роботи повністю підпорядкований зрізаному нормальному закону розподілу з параметрами T_0 годин і S годин. Потрібно обчислити кількісні характеристики надійності $P(t)$, $f(t)$, $\lambda(t)$,$T_{сер}$ для t годин. Вихідні дані для розв'язання задачі наведені в таблиці В.4.

4.2 Для варіантів 11-20.

Час роботи виробу повністю підпорядкований закону розподілу Релея. Потрібно обчислити кількісні характеристики $P(t)$, $f(t)$, $\lambda(t)$,$T_{сер}$ для t годин, якщо параметр розподілу σ годин. Вихідні дані для розв'язання задачі наведені в таблиці В.5.

4.3 Для варіантів 21-30.

Час роботи виробу підпорядкований закону Вейбулла з параметрами δ, λ_0 , що мають розмірність (1/годин) , а час його роботи t годин. Потрібно обчислити кількісні характеристики $P(t)$, $f(t)$, $\lambda(t)$, $T_{сер}$ такого виробу. Вихідні дані для розв'язку задачі наведені в таблиці В.6.

5. Структурна схема надійності наведена в таблиці В.7. Значення інтенсивності відмов елементів наведені в таблиці В.8.

Здійснити структурну декомпозицію схеми, замінюючи ділянки схеми відповідними квазіелементами. Обчислити значення ймовірностей безвідмовної роботи елементів, квазіелементів і всієї системи для ряду значень напрацювання t за умови, що потік відмов підпорядкований експоненціальному закону розподілу. Всі елементи системи працюють в періоді нормальної експлуатації. Результати розрахунків оформити у вигляді таблиці.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

М

Н

О

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Емельянов, А. И. Проектирование систем автоматизации технологических процессов: справочное пособие по содержанию и оформлению проектов / А.И. Емельянов, О.В. Капник. - М.: Энергоатомиздат, 1983. - 400 с.
2. Пацюра, И.В. Надежность электронных систем / И.В. Пацюра, В.И. Корнейчук, Л.В. Довбыш. – К.: Світ, 1997. – 128 с.
3. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей: учеб. для вузов / Е.С. Вентцель. - 5-е изд. стер. – М.: Высш. шк., 1998. – 576 с.
4. Гнеденко, Б.В. Математические методы в теории надежности / Б.В. Гнеденко, Ю.К. Беляев, А.Д. Соловьев. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
5. Азарсков, В.Н. Надежность систем управления и автоматики: учеб. пособие/ В.Н. Азарсков, В.П. Стрельников. МОН Украины.- К.:НАУ,2004.-164 с.– ISBN 966-598-173-0.
6. Заміховський, Л.М. Основи теорії надійності і технічної діагностики систем: навчальний посібник/ Л.М. Заміховський, В.П. Калявін. – Івано-Франківськ: Вид-во «Полум'я», 2004. – 360 с. – ISBN 966-7327-26-4.
7. Расчет надежности компьютерных систем/ Е.П. Власов, В.В. Жаднов, И.В. Жаднов. – К.: Корнійчук, 2003.-187с. - ISBN 966-7599-31-0.
8. Бердичевский, Б.Е. Надежность персональных компьютеров/ Б.Е. Бердичевский// Надежность и контроль качества.-1991.-№9.-С.22-26.
9. Надежность технических систем: справочник / Ю.К.Беляев, В.А.Богатырев, В.В.Болотин и др.; под. ред. И.А.Ушакова. – М.: Радио и связь, 1985. – 608 с.
10. Коган Б.М. Основы эксплуатации ЭВМ/ Б.М. Коган,

И.Б. Мкртумян. – М.: Энергоиздат, 1988.-314 с.
11. Дружинин, Г.В. Надежность автоматизированных производственных систем/ Г.В. Дружинин. – М.: Энергоатомиздат, 1986.–480 с.
12. Луцкий, В.А. Расчет надежности и эффективности радиоэлектронной аппаратуры: справочник/ В.А. Луцкий. – К.: Наукова думка, 1966. – 208 с.
13. ГОСТ 27.301-95. Надежность в технике. Расчет надежности. Основные положения. – Введ. 1997-01-01. – М.: Изд-во стандартов, 1995. – 12 с.
14. Матвеевский, В.Р. Надежность технических систем: учеб. пособие/ В.Р. Матвеевский. – М.: МГИЭМ, 2002. – 113 с. - ISBN 5-230-22198-4.
15. ОСНОВИ НАДІЙНОСТІ ЦИФРОВИХ СИСТЕМ: підручник / В.С.Харченко, В.Я.Жихарев, В.М.Ілюшко та ін.; за редакцією В.С.Харченка, В.Я. Жихарева. - Харків: Нац. аерокосм. ун-т «Харк. авіац. ін-т», 2004. – 573 с. - ISBN 966-662-094-4.
16. Рыжкин, А. А. Основы теории надежности : учеб. пособие / А. А. Рыжкин, Б. Н. Слюсарь, К. Г. Шучев : Донской гос. техн. ун-т (Ростов н/Д). - Ростов н/Д : Изд. центр ДГТУ, 2002. - 182 с. - ISBN 5-7890-0209-9.
17. Половко, А.М. Основы теории надежности. Практикум / А.М. Половко, С.В. Гуров.– СПб.: БХВ – Петербург, 2006. – 560 с.- ISBN 5-94157-542-4.
18. Надійність комп’ютерних систем: навч. посібник / В.П. Тарасенко, А.Ю. Маламан, Ю.П. Черниченко, В.І. Корнійчук: МОН України – К.: Корнійчук, 2007.-256 с. - ISBN 966-7599-37-X.
19. Буртаев, Ю. Ф. Статистический анализ надежности объектов по ограниченной информации: монография / Ю.Ф.Буртаев, В.А.Острейковский. - М. : Энергоатомиздат, 1995. - 239 с.

Додаток А
(довідковий)

ПЕРЕЛІК ДЕРЖАВНИХ СТАНДАРТІВ З ПИТАНЬ НАДІЙНОСТІ

Державні стандарти України

ДСТУ 2860-94. Надійність техніки. Терміни та визначення.

ДСТУ 2861-94. Надійність техніки. Аналіз надійності. Основні положення.

ДСТУ 2862-94. Надійність техніки. Методи розрахунку показників надійності. Загальні вимоги.

ДСТУ 2863-94. Надійність техніки. Програма забезпечення надійності. Загальні вимоги.

ДСТУ 2864-94. Надійність техніки. Експериментальне оцінювання та контроль надійності. Основні положення.

ДСТУ 3004-95. Надійність техніки. Методи оцінки показників надійності за експериментальними даними.

ДСТУ 2389-94. Технічне діагностування та контроль технічного стану. Терміни та визначення.

ДСТУ 2992-95. Вироби електронної техніки. Методи розрахунку надійності.

ДСТУ 2504-94. Засоби обчислювальної техніки. Відмовостійкість та живучість. Методи випробувань.

Державні стандарти СРСР

ГОСТ 27.003-90. Надежность в технике. Выбор и нормирование показателей надежности. Основные положения.

ГОСТ 27.301-83. Прогнозирование надежности изделий при проектировании. Общие требования.

Продовження додатка А

ГОСТ 27.503-81 (СТ СЭВ 2836-81). Надежность в технике. Системы сбора и обработки информации. Методы оценки показателей надежности.

ГОСТ 27.401-84 (СТ СЭВ 4492-84). Надежность в технике. Порядок и методы контроля показателей надежности, установленных в нормативно-технической документации.

ГОСТ 27.410-87. Надежность в технике. Методы и планы статистического контроля показателей надежности по альтернативным признакам.

Додаток Б
(обов'язковий)

Таблиця Б.1- Біноміальні коефіцієнти $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

n	m										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286
14	1	14	91	364	1001	2002	3432	3432	3003	2002	1001
15	1	15	105	455	1365	3003	6435	6435	6435	5005	3003
16	1	16	120	560	1820	4368	11440	11440	12870	11440	8008
17	1	17	136	680	2380	6188	19448	19448	24310	24310	19448
18	1	18	153	816	3060	8568	31824	31824	48620	48620	43758
19	1	19	171	969	3876	11628	50388	50388	92378	92378	92378
20	1	20	190	1140	4845	15504	77520	77520	167960	167960	184756

Примітка. Для m>10 можна скористатися властивістю симетрії $C_n^m = C_n^{n-m}$

Додаток В
(обов'язковий)

Таблиця В.1 - Вихідні дані до завдання 1

Варіант	N_0	t	Δt	$n(t)$	$n(\Delta t)$
1	400	3000	100	200	100
2	1000	3000	1000	80	50
3	100	8000	100	50	10
4	10	1000	100	3	2
5	10	1000	100	3	1
6	1000	0	1000	0	20
7	1000	1000	1000	20	25
8	1000	2000	1000	45	35
9	1000	0	100	0	50
10	45	75	5	44	1
11	45	0	10	0	19
12	1000	5000	1000	160	50
13	1000	4000	1000	130	30
14	1000	100	100	50	40
15	1000	200	100	90	32
16	45	10	10	19	13
17	45	60	10	44	1
18	45	5	5	1	5
19	1000	300	100	122	25
20	1000	2900	100	535	40
21	1000	2000	100	380	12
22	1000	1500	100	315	13
23	1000	25000	1000	980	20
24	1000	9000	1000	340	30
25	1000	12000	1000	450	50
26	1000	6000	1000	210	40
27	1000	23000	1000	925	25
28	1000	16000	1000	630	50
29	1000	2800	100	505	30
30	1000	400	100	147	20

Таблиця В.2 - Вихідні дані до завдання 2

Варіант	N	$\lambda_{сер}$	t
1	5200	$0{,}16\cdot10^{-5}$	200
2	3600	$0{,}2\cdot10^{-5}$	50
3	2500	$0{,}35\cdot10^{-5}$	100
4	2500	$0{,}5\cdot10^{-5}$	100
5	1000	$0{,}5\cdot10^{-5}$	100
6	750	$0{,}5\cdot10^{-5}$	100
7	500	$0{,}5\cdot10^{-5}$	100
8	250	$0{,}5\cdot10^{-5}$	100
9	20500	$2\cdot10^{-5}$	2
10	1000	$0{,}5\cdot10^{-3}$	0,5
11	2000	$5\cdot10^{-6}$	10
12	95000	$0{,}5\cdot10^{-6}$	2
13	150	$0{,}25\cdot10^{-6}$	4
14	45000	$0{,}5\cdot10^{-5}$	2
15	300000	$0{,}2\cdot10^{-7}$	8
16	50000	$0{,}2\cdot10^{-6}$	5
17	170000	$0{,}7\cdot10^{-6}$	3
18	189000	$1{,}4\cdot10^{-6}$	2
19	547000	$0{,}4\cdot10^{-6}$	2
20	35	$1\cdot10^{-5}$	1000
21	175	$0{,}5\cdot10^{-5}$	480
22	1750	$0{,}1\cdot10^{-5}$	40
23	21000	$0{,}1\cdot10^{-6}$	100
24	88000	$0{,}1\cdot10^{-7}$	50
25	600000	$0{,}6\cdot10^{-8}$	20
26	600000	$0{,}5\cdot10^{-7}$	10
27	890	$0{,}7\cdot10^{-5}$	25
28	$15\cdot10^{6}$	$1\cdot10^{-9}$	24
29	$15\cdot10^{5}$	$1\cdot10^{-8}$	2
30	$15\cdot10^{4}$	$1\cdot10^{-7}$	20

Таблиця В.3 - Вихідні дані до завдання 3

Варіант	λ	t_1	t_2	t_3
1	$0,16\cdot10^{-5}$	100	1000	1500
2	$0,12\cdot10^{-5}$	200	400	600
3	$0,35\cdot10^{-6}$	1000	1500	2000
4	$0,35\cdot10^{-5}$	2000	4000	6000
5	$0,15\cdot10^{-5}$	4000	5000	6000
6	$0,25\cdot10^{-5}$	500	1000	1500
7	$0,55\cdot10^{-5}$	400	500	700
8	$1,5\cdot10^{-5}$	600	650	700
9	$1,8\cdot10^{-5}$	150	300	400
10	$0,05\cdot10^{-3}$	230	460	690
11	$2,25\cdot10^{-6}$	280	300	380
12	$0,75\cdot10^{-6}$	100	200	300
13	$1,35\cdot10^{-6}$	1000	2500	3500
14	$0,5\cdot10^{-5}$	2000	3000	4000
15	$0,2\cdot10^{-7}$	700	800	900
16	$0,12\cdot10^{-6}$	600	650	700
17	$0,7\cdot10^{-6}$	3000	3500	4500
18	$1,4\cdot10^{-6}$	400	500	600
19	$0,4\cdot10^{-6}$	200	400	600
20	$1\cdot10^{-5}$	50	100	150
21	$0,5\cdot10^{-5}$	50	500	1000
22	$0,1\cdot10^{-5}$	150	300	450
23	$0,1\cdot10^{-6}$	250	500	600
24	$0,1\cdot10^{-7}$	350	400	450
25	$0,6\cdot10^{-8}$	750	850	950
26	$0,5\cdot10^{-7}$	60	160	260
27	$0,7\cdot10^{-5}$	350	450	550
28	$1,3\cdot10^{-9}$	100	200	300
29	$2,1\cdot10^{-8}$	220	440	660
30	$1,21\cdot10^{-7}$	130	260	390

Таблиця В.4 - Вихідні дані до завдання 4 (варіант 1-10)

Варіант	T_0	S	t_1	t_2	t_3
1	1000	1000; 2000	100	1000	1500
2	800	1000; 2000	200	400	600
3	400	1000; 2000	1000	1500	2000
4	600	2000; 3000	2000	4000	6000
5	500	1000; 2000	4000	5000	6000
6	700	2000; 4000	500	1000	1500
7	300	1000;1500	400	500	700
8	700	1000; 2000	600	650	700
9	400	1000; 2000	150	300	400
10	900	1000; 2000	230	460	690

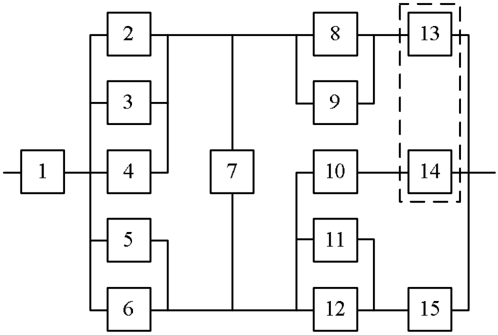
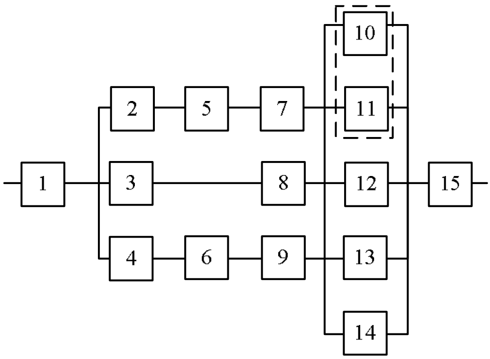
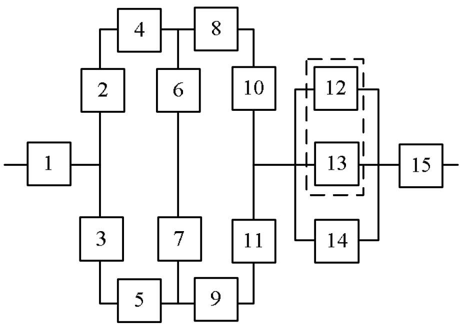
Таблиця В.5 - Вихідні дані до завдання 4 (варіант 11-20)

Варіант	σ	t_1	t_2	t_3
11	1000	100	1000	1500
12	2000	200	400	600
13	3000	1000	1500	2000
14	4000	2000	4000	6000
15	1000	4000	5000	6000
16	1500	500	1000	1500
17	1300	400	500	700
18	1000	600	650	700
19	400	150	300	400
20	200	230	460	690

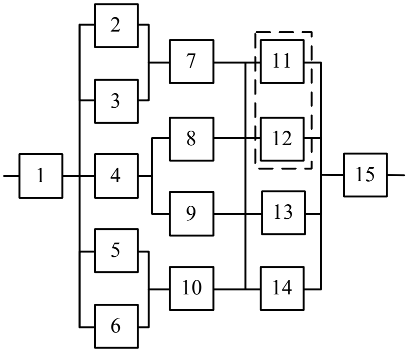
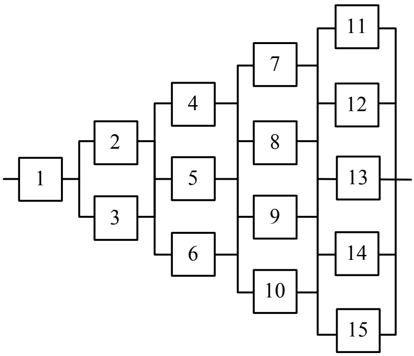
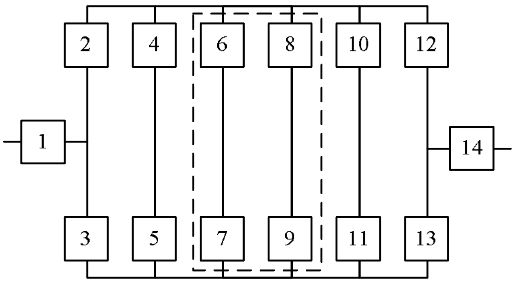
Таблиця В.6 - Вихідні дані до завдання 4 (варіант 21-30)

Варіант	λ_0	δ	t
21	$0,1\cdot10^{-5}$	1,5	100
22	$0,22\cdot10^{-5}$	2	200
23	$0,3\cdot10^{-6}$	3	150
24	$0,35\cdot10^{-5}$	2,5	400
25	$0,15\cdot10^{-3}$	1,8	500
26	$0,5\cdot10^{-2}$	1,5	100
27	$0,4\cdot10^{-5}$	2	200
28	$1,5\cdot10^{-3}$	1,3	650
29	$1\cdot10^{-5}$	2,5	300
30	$0,05\cdot10^{-2}$	1,5	460

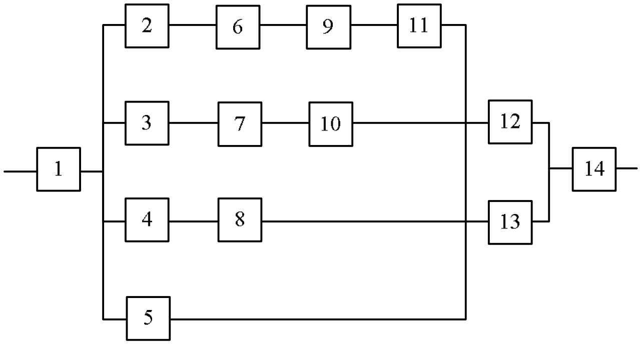
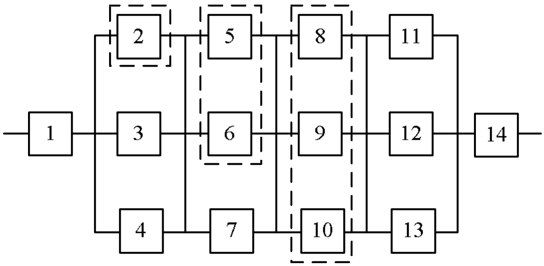
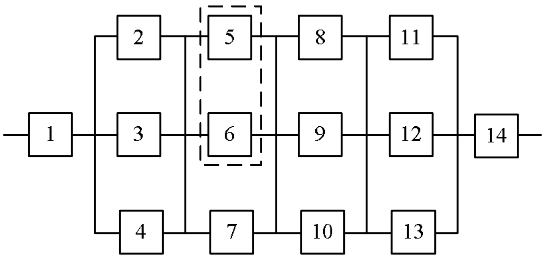
Таблиця В.6 – Структурні схеми надійності до завдання 5

Варіант	Схема
1	
2	
3	

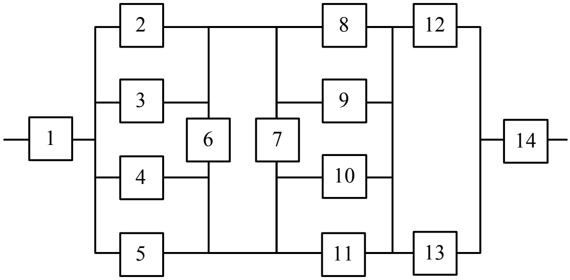
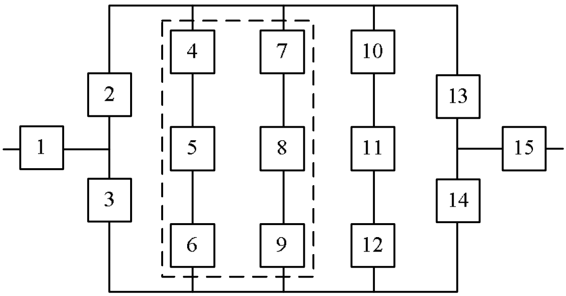
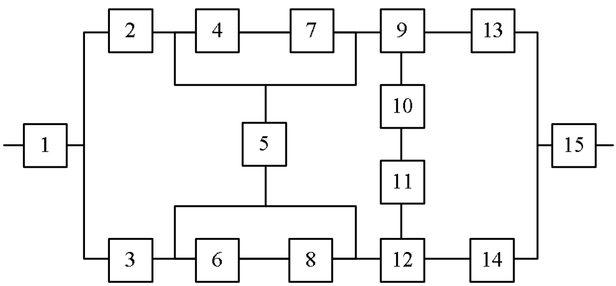
Продовження таблиці В.6

Варіант	Схема
4	
5	
6	

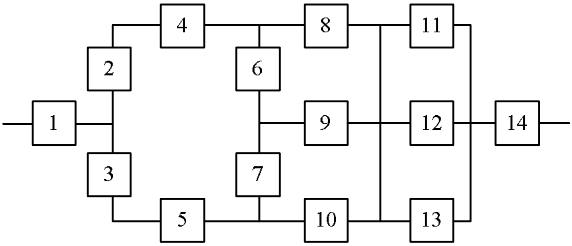
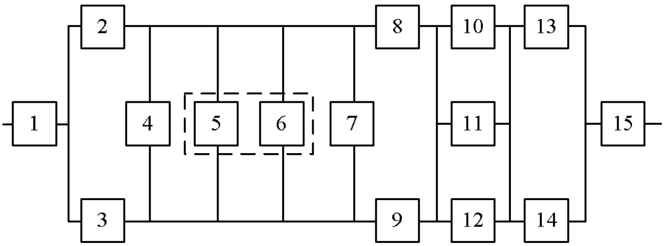
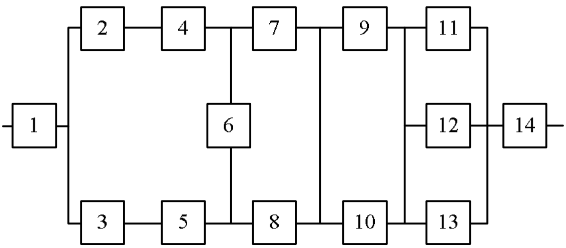
Продовження таблиці В.6

Варіант	Схема
7	
8	
9	

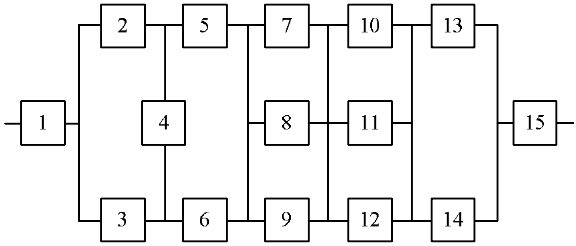
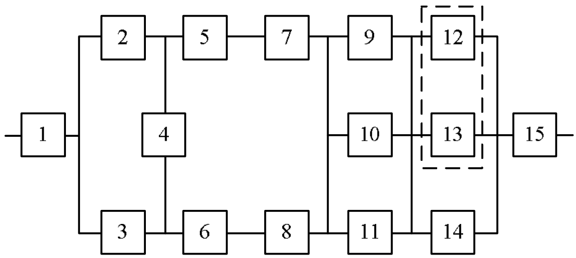
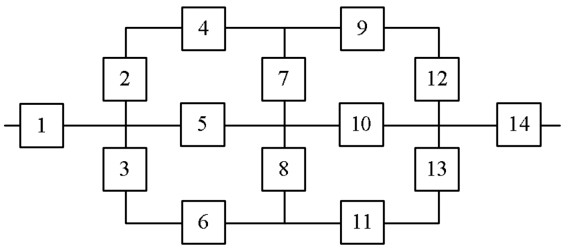
Продовження таблиці В.6

Варіант	Схема
10	
11	
12	

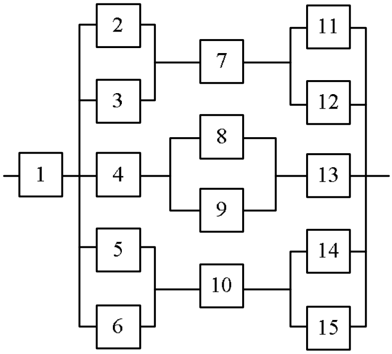
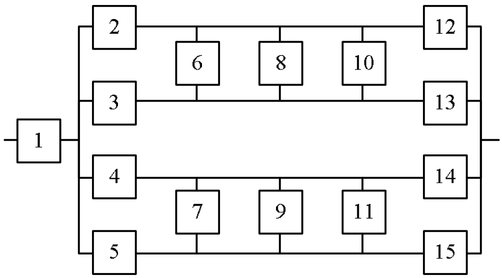
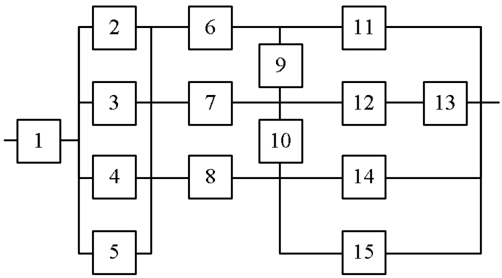
Продовження таблиці В.6

Варіант	Схема
13	
14	
15	

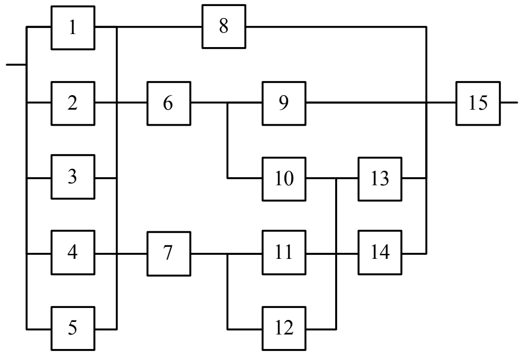
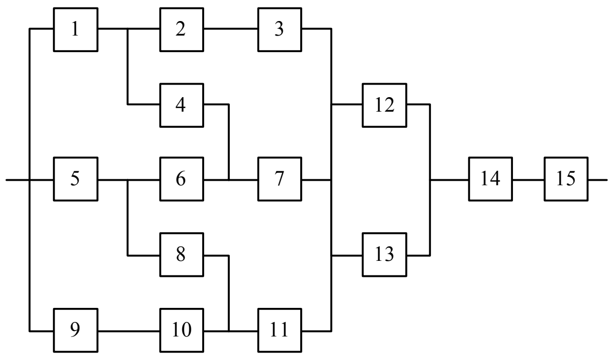
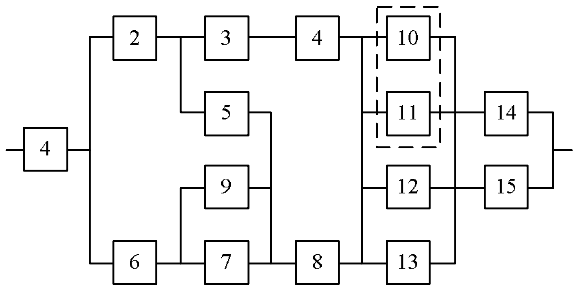
Продовження таблиці В.6

Варіант	Схема
16	
17	
18	

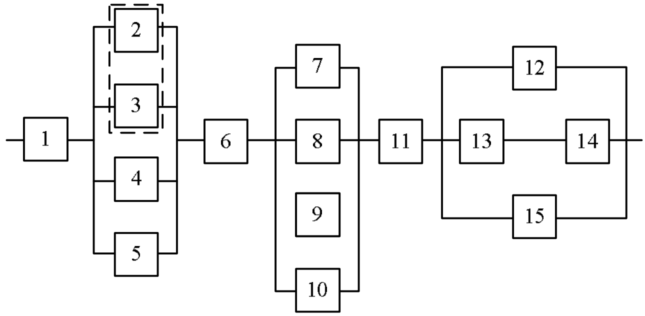
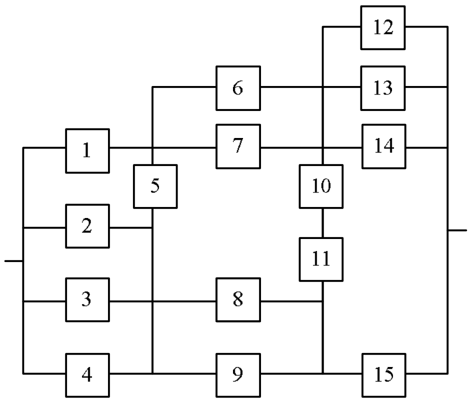
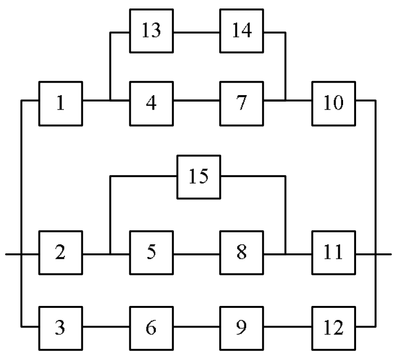
Продовження таблиці В.6

Варіант	Схема
19	
20	
21	

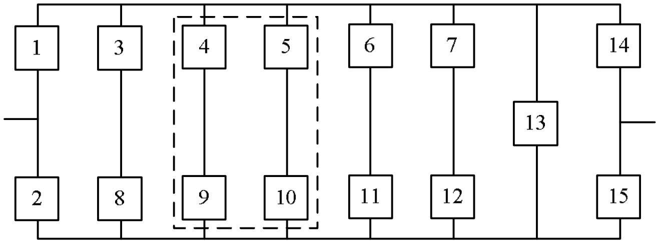
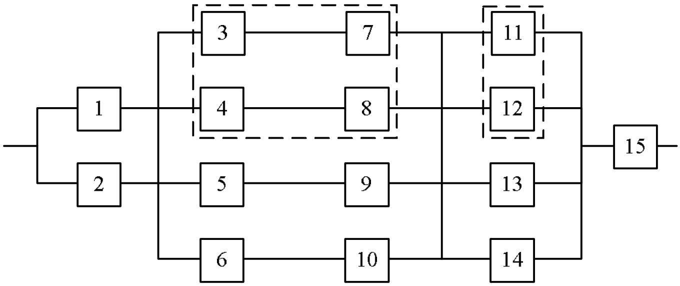
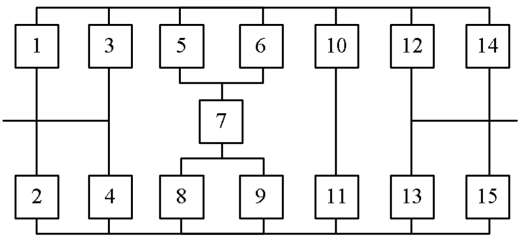
Продовження таблиці В.6

Варіант	Схема
22	
23	
24	

Продовження таблиці В.6

<table>
<tr><th>Варіант</th><th>Схема</th></tr>
<tr><td>25</td><td>
</td></tr>
<tr><td>26</td><td>
</td></tr>
<tr><td>27</td><td>
</td></tr>
</table>

Продовження таблиці В.6

Варіант	Схема
28	
29	
30	

Таблиця В.7 - Вихідні дані до завдання 5

<table>
<tr><td rowspan="2">Варі-ант</td><td colspan="15">Інтенсивність відмов елементів, $\lambda \cdot 10^{-6}$ 1/год</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0,1</td><td colspan="4">1,0</td><td>0,5</td><td colspan="6">1,0</td><td colspan="3">0,1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0,2</td><td colspan="8">0,5</td><td colspan="5">1,0</td><td>0,1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,1</td><td colspan="4">1,0</td><td colspan="2">2,0</td><td colspan="4">1,0</td><td colspan="3">5,0</td><td>0,2</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0,05</td><td colspan="5">1,0</td><td colspan="4">0,5</td><td colspan="4">0,2</td><td>0,02</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0,01</td><td colspan="2">1,0</td><td colspan="3">2,0</td><td colspan="4">0,5</td><td colspan="5">1,0</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0,01</td><td colspan="2">3,0</td><td colspan="8">4,0</td><td colspan="2">0,05</td><td>0,1</td><td>-</td></tr>
<tr><td>7</td><td>0,05</td><td colspan="4">0,5</td><td colspan="3">0,05</td><td colspan="2">0,005</td><td>0,1</td><td colspan="2">0,2</td><td>0,1</td><td>-</td></tr>
<tr><td>8</td><td>0,1</td><td colspan="3">0,5</td><td colspan="3">0,2</td><td colspan="3">0,01</td><td colspan="3">0,5</td><td>0,1</td><td>-</td></tr>
<tr><td>9</td><td>0,03</td><td colspan="3">0,5</td><td colspan="3">0,2</td><td colspan="3">1,0</td><td colspan="3">0,03</td><td>0,1</td><td>-</td></tr>
<tr><td>10</td><td>0,1</td><td colspan="4">0,5</td><td colspan="2">1,0</td><td colspan="4">0,5</td><td colspan="2">1,0</td><td>0,1</td><td>-</td></tr>
<tr><td>11</td><td>0,05</td><td colspan="2">0,2</td><td colspan="9">0,5</td><td colspan="2">0,2</td><td>0,1</td></tr>
<tr><td>12</td><td>0,02</td><td colspan="2">0,1</td><td colspan="5">1,0</td><td colspan="4">2,0</td><td colspan="2">0,1</td><td>0,05</td></tr>
<tr><td>13</td><td>0,01</td><td colspan="4">0,2</td><td colspan="2">0,1</td><td colspan="3">1,0</td><td colspan="3">0,5</td><td>0,1</td><td>-</td></tr>
<tr><td>14</td><td>0,01</td><td colspan="2">0,1</td><td colspan="4">10,0</td><td colspan="2">0,2</td><td colspan="3">10,0</td><td colspan="2">0,5</td><td>0,1</td></tr>
<tr><td>15</td><td>0,01</td><td colspan="2">1,0</td><td colspan="5">5,0</td><td colspan="2">0,2</td><td colspan="3">5,0</td><td>0,1</td><td>-</td></tr>
<tr><td>16</td><td>0,1</td><td colspan="2">1,0</td><td>2,0</td><td colspan="2">1,0</td><td colspan="3">5,0</td><td colspan="3">3,0</td><td colspan="2">1,0</td><td>0,05</td></tr>
<tr><td>17</td><td>0,1</td><td colspan="2">5,0</td><td>1,0</td><td colspan="2">5,0</td><td colspan="2">10,0</td><td colspan="3">5,0</td><td colspan="3">1,0</td><td>0,2</td></tr>
<tr><td>18</td><td>0,01</td><td colspan="12">1,0</td><td>0,1</td><td>-</td></tr>
<tr><td>19</td><td>0,1</td><td colspan="2">5,0</td><td>0,5</td><td colspan="2">5,0</td><td>1,0</td><td colspan="2">3,0</td><td>1,0</td><td colspan="2">5,0</td><td>0,5</td><td colspan="2">5,0</td></tr>
</table>

Продовження таблиці В.7

<table>
<tr><th rowspan="2">Варі-
ант</th><th colspan="15">Інтенсивність відмов елементів, $\lambda \cdot 10^{-6}$ 1/год</th></tr>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th><th>9</th><th>10</th><th>11</th><th>12</th><th>13</th><th>14</th><th>15</th></tr>
<tr><td>20</td><td>0,1</td><td colspan="4">10,0</td><td colspan="6">20,0</td><td colspan="4">10,0</td></tr>
<tr><td>21</td><td>0,1</td><td colspan="4">1,0</td><td colspan="3">0,5</td><td colspan="2">2,0</td><td>0,5</td><td colspan="2">0,2</td><td colspan="2">1,0</td></tr>
<tr><td>22</td><td colspan="5">1,0</td><td>0,2</td><td colspan="2">0,5</td><td>1,0</td><td>0,5</td><td colspan="2">1,0</td><td colspan="2">1,0</td><td>0,1</td></tr>
<tr><td>23</td><td>0,5</td><td colspan="2">0,2</td><td>1,0</td><td>0,5</td><td>1,0</td><td>0,5</td><td>1,0</td><td colspan="2">0,2</td><td>0,5</td><td colspan="2">1,0</td><td colspan="2">0,2</td></tr>
<tr><td>24</td><td>1,0</td><td colspan="3">2,0</td><td>4,0</td><td colspan="3">2,0</td><td>4,0</td><td colspan="4">5,0</td><td colspan="2">1,0</td></tr>
<tr><td>25</td><td>0,5</td><td colspan="4">10,0</td><td>0,5</td><td colspan="4">5,0</td><td>0,8</td><td>5,0</td><td colspan="2">1,0</td><td>5,0</td></tr>
<tr><td>26</td><td colspan="2">1,0</td><td colspan="2">2,0</td><td>3,0</td><td colspan="4">5,0</td><td colspan="2">2,0</td><td colspan="3">5,0</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td>27</td><td colspan="3">5,0</td><td colspan="3">10,0</td><td colspan="3">15,0</td><td colspan="3">10,0</td><td>10,0</td><td>15,0</td><td>10,0</td></tr>
<tr><td>28</td><td colspan="2">1,0</td><td colspan="5">2,0</td><td colspan="5">5,0</td><td>2,0</td><td colspan="2">1,0</td></tr>
<tr><td>29</td><td colspan="2">5,0</td><td colspan="4">20,0</td><td colspan="4">50,0</td><td colspan="4">30,0</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td>30</td><td>2,0</td><td>1,0</td><td>2,0</td><td>1,0</td><td colspan="2">5,0</td><td>2,0</td><td colspan="2">5,0</td><td>2,0</td><td>1,0</td><td>2,0</td><td>1,0</td><td>2,0</td><td>1,0</td></tr>
</table>

Навчальне видання

Черв'яков Володимир Дмитрович
Павлов Андрій Володимирович
Журавльов Олександр Юрійович

ОСНОВИ НАДІЙНОСТІ ОБ'ЄКТІВ СИСТЕМОТЕХНІКИ

Навчальний посібник

Художнє оформлення обкладинки А. В. Павлова
Редактор Н. В. Лисогуб
Комп'ютерне верстання О. Ю. Журавльова

Формат 60x84/16. Ум.друк.арк. 14,42. Обл.-вид.арк. 9,83. Тираж 300 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.