МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
СУМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Л.Ф.Чумак

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МЕТОДЫ ЭФФЕКТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ»

для студентов специальности «Экономика предприятия» дневной формы обучения

СУМЫ ИЗД-ВО СУМГУ 2005

ТЕМА 1 ВВЕДЕНИЕ. УПРАВЛЕНЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ, ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ КАК БАЗА ДЛЯ ВЫРАБОТКИ УПРАВЛЕНЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

Управление в человеческом обществе существовало испокон веков. Любое государственное устройство, любая организованная человеческая деятельность предполагает, что существуют объект управления (то, чем управляют) и субъект управления (тот, кто управляет).

Без эффективно организованной управленческой деятельности невозможно было ни строительство египетских пирамид, ни создание висячих садов Вавилона, ни ведение войн, ни возникновение и расцвет городов и государств.

Ответственным этапом управления является принятие управленческого решения.

Управленческое решение – это результат анализа, прогнозирования, оптимизации, экономического обоснования и выбора альтернативы из множества вариантов достижения конкретной цели системы менеджмента.

Импульсом управленческого решения является необходимость снижения остроты или полного снятия проблемы, т.е. приближение в будущем действительных параметров объекта к желаемым, прогнозным.

Для повышения качества решений рекомендуется осуществлять их анализ на основе классификации по следующим признакам:

– стадия жизненного цикла товара (стратегический маркетинг, НИОКР и др.);
– сфера действия (технические, экономические и др. решения);
– цели (коммерческие и некоммерческие);
– ранг управления (верхний, средний, низший);
– масштабность (комплексные и частные решения);
– организация выработки (коллективные и личные);
– продолжительность действия (стратегические, тактические и оперативные);
– объект воздействия (внешние и внутренние);
– повторяемость (разовые и повторяющиеся);

– методы формализации (текстовые, графические, математические);
– формы отражения (план, программа, приказ, распоряжение, указание, просьба);
– сложность (стандартные и нестандартные решения);
– способ передачи (вербальные, письменные, электронные).

В общем сущность управления рассматривается как совокупность следующих понятий: организация управления, процесс управления и информация (рис.1.1).

Что понимают под «эффективным управлением»? Чем отличается «эффективное управление» от «неэффективного управления»? Оценка управления, безусловно, заключается в сравнении результата (реализации поставленной цели) и затрат на эту реализацию. И, грубо говоря, если нас устраивает результат и затраты не могут быть снижены на данном этапе, то управление можно назвать или считать эффективным. Но это в очень обобщенном виде.

Если мы хотим выработать «качественное» решение, то обычно применяют ***системный подход***, который позволяет определить структуру проблемы, систему ее решения, взаимосвязи компонентов системы и очередность их совершенствования (рис.1.2).

Вход системы характеризуется параметрами проблемы, которую необходимо решить.

На **выходе системы** – решение, выраженное количественно или качественно, имеющее определенную степень адекватности и вероятность реализации, степень риска достижения запланированного результата.

К компонентам **внешней среды** системы относятся факторы макро- и микросреды фирмы, инфраструктуры региона, влияющие на качество управленческого решения.

Обратная связь характеризует различную информацию, поступающую от потребителей к лицу, принявшему решение. Поступление информации по обратной связи может быть обусловлено некачественным решением, дополнительным требованием потребителей по уточнению или доработке решения, появлением нововведений и т.д.

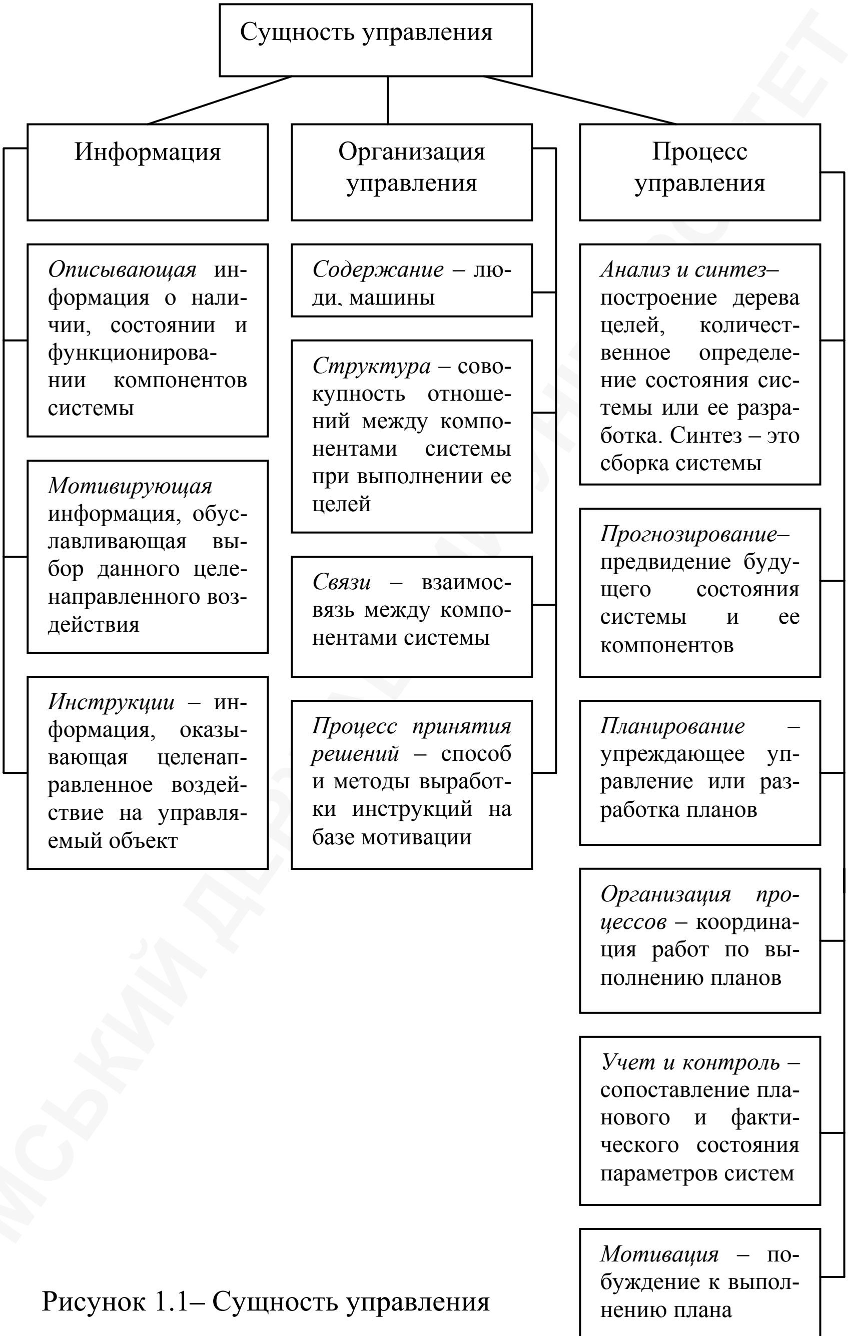


Рисунок 1.1– Сущность управления

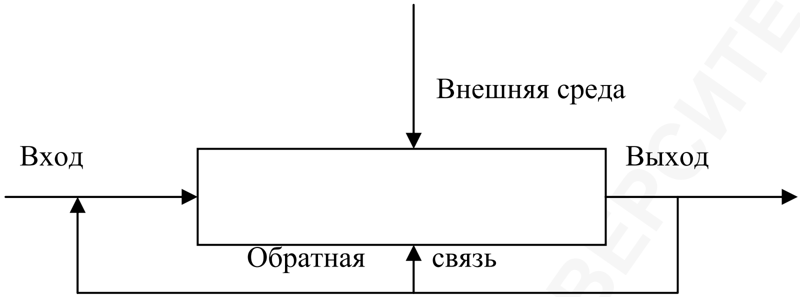


Рисунок 1.2 – Система принятия решения

Процесс принятия решения включает следующие операции: подготовка к работе, выявление проблемы и формирование целей, поиск информации, ее обработка, выявление возможностей ресурсного обеспечения, ранжирование целей, формулирование заданий, оформление необходимых документов, реализация заданий.

Существует несколько подходов к управлению.

Логический подход

Основой логического подхода являются принципы диалектической и формальной логики.

К методологическим принципам *диалектической логики* относят:

1) принцип объективного рассмотрения объекта (сам предмет, а не мнение о нем);
2) принцип всесторонности рассмотрения объекта (во всех его взаимосвязях и отношениях);
3) принцип историзма (в развитии, изменении, самодвижении).

К методологическим принципам *формальной логики* относят:

1) принцип тождества (одно и то же понимать под одним и тем же термином);
2) принцип непротиворечия (последовательное мышление);
3) принцип исключенного третьего (не опровергать одновременно высказывание и его отрицание);

4) принцип достаточного обоснования (всякое утверждение д.б. обосновано, а не приниматься на веру).

Воспроизводственно-эволюционный подход

Этот подход ориентирован на постоянное возобновление производства объекта для удовлетворения потребностей конкретного рынка с меньшими совокупными затратами на единицу полезного эффекта. Каждая новая модель д.б. лучше заменяемой.

Инновационный подход

Сущность инновационного подхода к управлению заключается в ориентации развития экономики страны на активизацию инновационной деятельности в области базовых наукоемких отраслей, являющихся двигателями развития экономики.

Комплексный подход

При применении комплексного междисциплинарного подхода должны учитываться технические, экономические, экологические, организационные, социальные, психологические, а при необходимости и другие (политич., демографич.) аспекты управления и их взаимосвязи.

Глобальный подход

Сущность глобального подхода заключается в том, что при формулировании и решении большинства проблем крупных объектов точка обзора мысленно д.б. над глобальной системой, а не на уровне, где находится анализируемый объект. По сути, обзор должен отвечать требованиям системности, логичности, комплексности в рамках мирового сообщества.

Глобальный подход в настоящее время применяется при решении вопросов международной стандартизации, метрологии и сертификации, информационного обеспечения управления различными объектами и т.д. (международные организации, а их около 100).

Интеграционный подход

Интеграционный подход к управлению нацелен на исследование и усиление взаимосвязей:

А) между отдельными подсистемами и компонентами;

Б) между стадиями жизненного цикла объекта управления;

В) между уровнями управления по вертикали (страна, регион, город, фирма);

Г) между субъектами управления по горизонтали.

Термин «интеграция» означает усиление сотрудничества субъектов управления, их объединения, углубление взаимодействия и взаимосвязей между компонентами системы управления.

Виртуальный подход

Сущность виртуального подхода заключается в применении сети Интернет, сотовой связи и других средств электронной связи с целью формирования виртуальных средств виртуальных организационных структур, получения, обработки, использования и передачи информации для удовлетворения соответствующих потребностей при возможности действовать на местном уровне, а конкурировать в глобальном масштабе без прямых контактов с клиентами и партнерами, виртуально преодолевая огромные расстояния.

Стандартизационный подход

Идея стандартизационного подхода к управлению реализуется, во-первых, путем выбора оптимального соотношения между стандартными и индивидуальными решениями при формировании объектов, во-вторых, путем разработки и внедрения системы стандартов соответствующей категории.

Маркетинговый подход

Маркетинговый подход предусматривает ориентацию управленческой подсистемы при решении любых задач на потребителя. При применении маркетингового подхода приоритетами выбора критериев управления являются следующие:

1) повышение качества объекта (выхода системы) в соответствии с нуждами потребителей;
2) экономия ресурсов у потребителей за счет повышения качества объекта, качества сервиса и др. факторов;
3) экономия ресурсов в производстве объекта за счет реализации фактора масштаба, научно-технического прогресса, совершенствования системы менеджмента.

Эксклюзивный подход

Сущность эксклюзивного подхода к управлению заключается в приобретении субъектом управления исключительного права на пользование по своему усмотрению новшеством в любой области деятельности или конкурентным преимуществом.

Функциональный подход

Сущность функционального подхода заключается в том, что потребность рассматривается как совокупность функций, которые нужно выполнить для ее удовлетворения, т.е. идея подхода – создание новых объектов и структур в соответствии с требованиями рынка.

Процессный подход

Процессный подход рассматривает общие функции управления как взаимосвязанные. Процесс управления является цепью непрерывных взаимосвязанных действий по стратегическому маркетингу, планированию, организации процессов, учету и контролю, мотивации, регулированию

Структурный подход

Структурный подход к проблемам управления – это определение значимости, приоритетов среди факторов, методов, принципов и др. инструментов в их совокупности с целью установления рациональности соотношения и повышения обоснованности распределения ресурсов.

Например, соотношение стратегических, тактических и оперативных задач в структуре рабочего дня менеджера высшего звена рекомендуется принимать равным 6:2:2, низшего звена – 1:2:7.

Ситуационный или вариантный подход

Ситуационный подход концентрируется на том, что пригодность различных параметров и методов управления определяется конкретной ситуацией в конкретном месте и в конкретное время. Самым эффективным методом в конкретной ситуации является метод, который более всего соответствует данной ситуации, максимально адаптирован к ней.

Нормативный подход

Сущность нормативного подхода заключается в установлении нормативов управления по всем подсистемам. Нормативы должны устанавливаться по важнейшим элементам подсистем: целевой, обеспечивающей, управляемой и управляющей. Эти нормативы должны отвечать требованиям комплексности, эффективности, обоснованности и перспективности применения по масштабу и во времени.

Директивный (административный) подход

Сущность директивного подхода заключается в регламентации функций, прав, обязанностей, нормативов качества, затрат, продолжительности, элементов системы менеджмента в нормативных актах.

Поведенческий подход

Целью поведенческого подхода является оказание помощи работнику в осознании его возможностей, творческих способностей на основе применения концепций поведенческих наук к построению и управлению фирмой. Основной задачей этого подхода является повышение эффективности фирмы за счет повышения эффективности ее человеческих ресурсов.

Деловой подход

Деловой подход является наиболее комплексным и сложным, так как у каждого свое понимание этого подхода, связанное с индивидуальным характером воспитания и образования.

Оптимизационный подход

Сущность оптимизационного подхода к управлению заключается в переходе от качественных оценок к количественным при помощи методов исследования операций, инженерных расчетов, статистических методов, экспертных оценок и др.

Существует несколько подходов к формированию эффективного управления, мы сосредоточимся в основном на количественном подходе.

Итак, если говорить об управлении, то следует определить объект управления. В нашем случае – это экономические системы.

В общем **система** – это некоторая целостность, состоящая из взаимозависимых частей, каждая из которых вносит свой вклад в характеристики целого. Их взаимосвязь определяет ее структуру, устойчивость, адаптивность.

Любое устройство, прибор, изделие – система, состоящая из взаимосвязанных частей. Живой организм – очень сложная система. На макроуровне – экономическая система тоже является сложной системой, на микроуровне – современная организация, фирма также пример сложной системы, которая включает и людей, и технику и, кроме того, имеет специфические особенности и такие составляющие части, как структура, задачи, технологии, люди, цели.

Важно отметить, что части системы взаимосвязаны и изменение одной из них может повлечь изменения, и достаточно значительные, других ее частей.

Например, выход из строя конвейера по производству продукции, выпускаемой предприятием, может повлечь за собой срыв поставок, возникновение задач по замене устаревшего оборудования, ввод в действие новых технологических линий и т.д. Снижение качества выпускаемой продукции может повлечь ухудшение позиций на рынке, уменьшение прибыли, возникновение проблем с кредиторами и т.д.

Как известно, системы бывают открытые и закрытые.

Закрытые системы существуют изолировано от внешней среды. Они имеют фиксированную границу и функционируют за счет собственных ресурсов, добиваясь осуществления целей независимо от изменений, происходящих во внешней среде.

Пример: часы.

Открытые системы, в отличие от закрытых, непосредственно связаны с внешней средой многочисленными каналами. Это и сырье, и энергия, и капитал, и трудовые ресурсы, и информация. Это и продукция или услуги, которые оказывает организация, и прибыль, которую она получает, и рынки сбыта, где реализуется выпускаемая продукция, социальные и экологические последствия ее деятельности.

Мы употребляли понятие **сложная система** – это система, которая состоит из подсистем, имеющих свои функции и назначение, которые, в свою очередь, являются системами.

Любая система имеет надсистему и подсистему.

Надсистема – окружающая систему среда, в которой функционирует система.

Подсистема – подмножество элементов, реализующих цели, согласованные с целями системы (например, подсистема может осуществлять часть целей системы).

Например, организация может включать: производственную подсистему, которая осуществляет выпуск продукции; плановую подсистему, которая разрабатывает стратегию и тактику развития организации; маркетинговую подсистему, которая определяет стратегию и тактику организации на рынке сбыта; кадровую подсистему, которая обеспечивает основные подсистемы организации профессиональными кадрами и т.д.

Очевидно, что проблема принятия какого-либо решения, касающегося развития, жизнедеятельности экономической системы, является очень сложным процессом, особенно если мы стремимся к эффективному или оптимальному (рациональному) решению.

В общем виде об экономической системе принято говорить как о сложной динамической системе.

Основная цель экономики (экономической системы) – обеспечение общества предметами потребления, в том числе такими, которые создают условия для безопасности общества. Экономика состоит из элементов – хозяйственных единиц (предприятий, фирм, банков и т.п.). Надсистема экономики – природа и общество; две ее главные подсистемы – производственная и финансово-кредитная.

Проблемы принятия решений при управлении сложными системами.

Любое управление опирается на такое понятие, как «принятие решения».

Одной из самых важных и трудных проблем человеческой деятельности является проблема принятия решений, связанных с управлением сложными системами.

Принятие решения представляет собой выбор одного из возможных способов действия, одной из возможных альтернатив. Такой выбор осуществляет всегда человек, наделенный соответствующими полномочиями; по распространенной аббревиатуре это ЛПР – лицо, принимающее решение. В простых случаях такой выбор опирается на опыт и здравый смысл ЛПР, на сравнительно небольшое количество информации, описывающей проблемную ситуацию. В более сложных случаях имеющаяся информация может оказаться труднообозримой, опыт и здравый смысл ЛПР – не слишком надежной опорой. В этих случаях нужно помочь ЛПР в подготовке решений, так как последствия неверных решений при управлении сложными системами могут оказаться крайне неблагоприятными, а порой и опасными. Можно сказать, что принятие решений является одновременно и наукой, и искусством.

Проблема принятия человеком наилучшего решения в сложной обстановке привлекала внимание с древних времен. Примером этому может служить история военного искусства, содержащая описание и анализ знаменитых сражений, некоторые из которых имели место более 2000 лет тому назад. Изучение опыта принятия решений другими полезно, но с распространенной сегодня естественнонаучной точки зрения анализ такого опыта не составляет науки. От науки требуют модельного описания изучаемого явления, что позволит абстрагироваться от ненужных подробностей и рассматривать то общее, что имеется, скажем, в различных ситуациях выбора. Всюду, где только возможно, предпочтение отдается математическим моделям.

Следует отметить, что в последнее время помимо традиционных областей приложения – точных и опытных наук – математика начинает заниматься такими вопросами, которые до этого изучались только на гуманитарном уровне: конфликтными ситуациями, иерархическими отношениями в коллективах, согласием, авторитетом, общественным мнением. Математика не только проникает в ранее чуждые для нее области, но и трансформируется при этом, становится менее «формальной», меняет свои методологические черты, гибко приближаясь к наукам гуманитарным. Ее методы в области гуманитарных и смежных с ними наук могут служить мощным вспомогательным средством, позволяющим исследователю глубже проникнуть в существо явления, проследить его закономерности, обнаружить скрытые связи, малодоступные наблюдению простым, невооруженным глазом.

К самым ранним работам (XVIII – XIX вв.) по исследованию операций (наука о предварительном обосновании разумных решений во всех областях целенаправленной человеческой деятельности, широко использующая математический аппарат и занимающая положение между науками точными, опытными и гуманитарными) обычно относят труды А.Смита, Ч.Бэббиджа, Ф.Тейлора, Г.Гэнта.

Начало XX в. отмечено первыми попытками смоделировать математически антагонистический конфликт исхода артиллерийской дуэли (Ф.Ланчестер), создать теорию управления инвестициями (Ф.Харрис), теорию массового обслуживания (теория очередей А.Эрланга) и др. Однако, несмотря на заметные продвижения в разработке математических подходов к решению количественных проблем управления, исследование операций как научное направление было признано лишь в 40-50-е годы XXв.

Существенный прорыв обозначился при попытках разрешения целого ряда проблем управления, возникших непосредственно перед и в ходе Второй мировой войны. Специфика полученных результатов определенное время была сдерживающим фактором на пути их применения вне военной сферы. Однако заметные теоретические продвижения в теории игр и теории полезности (Дж.Фон Нейман) и в линейном программировании (Дж.Данциг, Л.В.Канторович), а также создание новых мощных средств вычислений обеспечили существенный прорыв в расширении области приложения операционного анализа.

Таким образом, в первой половине XX в. начали разрабатывать элементы научного подхода к поиску решений задач управления, а схемы, хорошо показавшие себя при проведении естественнонаучных и инженерно-технических изысканий, стали пытаться приспосабливать к решению управленческих задач. Сравнительно быстро пришло понимание того, что для поиска перехода от фактически наблюдаемого состояния изучаемой системы к желаемому весьма существенно насколько хорошо формализована решаемая задача, и что уже имеющихся схем явно недостаточно.

Основная задача исследования операций состоит в том, чтобы помочь менеджеру или иному лицу, принимающему решение, научно определить свою политику и действия среди возможных путей достижения поставленных целей. Коротко исследование операций можно назвать научным подходом к проблеме принятия решений. Проблема – это разрыв между желаемым и фактически наблюдаемым состояниями (прежде всего целями) той или иной системы. Решение – это средство преодоления такого рода разрыва, выбор одного из многих объективно существующих курсов действий, который позволил бы перейти от наблюдаемого состояния к желаемому.

И все же полученные таким образом решения носят лишь рекомендательный характер и только способствуют разработке эффективного управленческого решения. Наибольший эффект при принятии важных управленческих решений дает сочетание опыта, знаний, интуиции ЛПР и современных технологий выработки и принятия управленческого решения.

Рассмотрим последовательность основных этапов процесса подготовки решения. Независимо от того, относится ли задача принятия решения к задачам стратегического типа (выбор направления развития системы, выбор профиля и места расположения нового предприятия и т.п.) либо к задачам оперативного типа, решение которых состоит в отыскании корректирующих воздействий на функционирование уже действующей системы, **первым** и особенно важным **этапом** процесса является этап анализа проблемной ситуации. Необходимость в управлении возникает только в том случае, когда текущее функционирование системы признается несовершенным. Причины неудовлетворительного функционирования сложной системы редко бывают очевидными. Установив, например, что некоторая производственная система работает неэффективно и, скажем, потребляет слишком много ресурсов или терпит убытки в связи с недостаточным спросом на свою продукцию, мы еще не определили конкретных причин ее неудовлетворительного функционирования.

В результате анализа проблемной ситуации должны быть определены как критерии качества функционирования системы при заданных внешних и внутренних условиях, так и все существенно влияющие на систему факторы.

Второй этап состоит в поиске способов решения проблемы, в определении множества возможных альтернатив. При этом стремятся построить адекватную модель, содержащую целевую функцию и ограничения в виде функций от управляемых переменных, а если это не удается, то на основе содержательного анализа деятельности системы составляется перечень возможных альтернатив.

Задача **третьего этапа** состоит в сборе и предварительной обработке необходимой для решения задачи исходной информации.

Содержание **четвертого этапа** составляет определение наилучшей альтернативы. Если на втором этапе была построена математическая модель, то теперь дело заключается в решении оптимизационной задачи. В противном случае разрабатывается некоторая формализованная процедура выбора наилучшей альтернативы из перечисленных на втором этапе.

Пятый этап состоит в оценке ЛПР полученного решения и, возможно, во внесении поправок в результаты предшествующих этапов.

Говоря проще, задача первых двух этапов состоит в том, чтобы понять проблему и представить это понимание в форме математической модели, а для очень сложных случаев в виде схемы или словесного описания. Последние три этапа имеют целью отыскание и анализ наилучшего решения проблемы, используя полученную ранее модель процесса.

ТЕМА 2 ЭКОНОМИКА КАК ОБЪЕКТ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Модель – это объект, который замещает оригинал и отражает наиболее важные для данного исследования черты и свойства оригинала. Модель, представляющая собой совокупность математических соотношений, называется математической.

Экономика как объект моделирования имеет две особенности:

1. В экономике невозможны модели подобия, которые широко применяются в технике. *Например*, в гидротехнике широко используется следующий прием: строится точная копия гидроузла (скажем, в масштабе 1:1000) и на этой копии отрабатываются с необходимой корректировкой проектных решений все режимы работы гидроузла. Однако нельзя построить точную копию экономики в масштабе 1:1000 и на этой копии отрабатывать различные варианты экономической политики.
2. В экономике крайне ограничены возможности локальных экономических экспериментов, поскольку все ее части жестко взаимосвязаны друг с другом и, следовательно, «чистый» эксперимент невозможен.

Что же остается? Свой прошлый опыт, опыт других стран, прямые эксперименты со всей экономикой и … математическое моделирование.

Опыт других стран и свой опыт трудно переоценить, но далеко не всегда он напрямую может быть перенесен в условия данной конкретной экономической ситуации.

Прямые эксперименты с экономикой имеют как положительную, так и отрицательную стороны. Положительная сторона состоит в том, что сразу видны краткосрочные результаты проводимой экономической политики.

Отрицательная же сторона заключается в том, что невозможно напрямую предвидеть среднесрочные и долгосрочные последствия принимаемых решений. Предвидеть такие последствия можно лишь на основе концептуальных моделей развития экономики, опирающихся на прошлый опыт. В свою очередь, концептуальные модели и составляют фундамент математических моделей. Для изучения различных экономических явлений экономисты используют их упрощенные формальные описания, называемые экономическими моделями. Примерами экономических моделей являются модели потребительского выбора, модели фирмы, модели экономического роста, модели равновесия на рынках. Строя модели, экономисты выявляют существенные факторы, определяющие исследуемое явление, и отбрасывают детали, несущественные для решения поставленной проблемы. Формализация основных особенностей функционирования экономических объектов позволяет оценить возможные последствия воздействия на них и использовать такие оценки в управлении.

Экономические модели позволяют выявить особенности функционирования экономического объекта и на основании этого предсказывать будущее поведение объекта при изменении каких-либо параметров. Предсказание будущих изменений, например, повышение обменного курса, ухудшение экономической конъюнктуры, падение прибыли может опираться лишь на интуиции. Однако при этом могут быть упущены, неправильно определены или неверно оценены важные взаимосвязи экономических показателей, влияющие на рассматриваемую ситуацию. В модели все взаимосвязи переменных могут быть оценены количественно, что позволяет получить более качественный и надежный прогноз.

Для любого экономического субъекта возможность прогнозирования ситуации означает, прежде всего, получение лучших результатов или избежание потерь, в том числе и в государственной политике.

По своему определению любая экономическая модель абстрактна и, следовательно, неполна, поскольку выделяя наиболее существенные факторы, определяющие закономерности функционирования рассматриваемого экономического объекта, она абстрагируется от других факторов, которые, несмотря на свою относительную малость, все же в совокупности могут определять не только отклонения в поведении объекта, но и само его поведение. Так, в простейшей модели спроса считается, что величина спроса на какой-либо товар определяется его ценой и доходом потребителя. На самом же деле на величину спроса оказывает также влияние ряд других факторов: вкусы и ожидания потребителей, цены на другие товары, воздействие рекламы, моды и т.д. Обычно предполагают, что все факторы, не учтенные явно в экономической модели, оказывают на объект относительно малое результирующее воздействие в интересующем нас аспекте.

Основные типы моделей

Выделяют следующие основные типы моделей:

– макроэкономические;
– микроэкономические;
– теоретические;
– прикладные;
– оптимизационные;
– равновесные;
– статические;
– динамические.

Макроэкономические модели описывают экономику как единое целое, связывая между собой укрупненные материальные и финансовые показатели: ВНП, потребление, инвестиции, занятость, процентную ставку, количество денег и др.

Микроэкономические модели описывают взаимодействие структурных и функциональных составляющих экономики либо поведение отдельной такой составляющей в рыночной среде.

Теоретические модели позволяют изучать общие свойства экономики и ее характерных элементов дедукцией выводов из формальных предпосылок.

Прикладные модели дают возможность оценить параметры функционирования конкретного экономического объекта и сформулировать рекомендации для принятия практических решений. К прикладным относятся прежде всего эконометрические модели, оперирующие числовыми значениями экономических переменных и позволяющие статистически значимо оценивать их на основе имеющихся наблюдений.

В моделировании рыночной экономики особое место занимают **равновесные** модели. Они описывают такие состояния экономики, когда результирующая всех сил, стремящихся вывести ее из данного состояния, равна нулю. В нерыночной экономике неравновесие по одним параметрам (например, дефицит) компенсируется другими факторами (черный рынок, очередь и т.п.). Равновесные модели описательны.

Оптимизация в теории рыночной экономики присутствует в основном на микроуровне.

В моделях **статических** описывается состояние экономического объекта в конкретный момент или период времени.

Динамические модели включают взаимосвязи переменных во времени.

Детерминированные модели предполагают жесткие функциональные связи между переменными модели.

Стохастические модели допускают наличие случайных воздействий на исследуемые показатели и используют инструментарий теории вероятностей математической статистики для их описания.

Рассмотрев виды моделей, следует отметить, что существуют различные классы экономических задач, решение которых получается с использованием специально разработанных математических методов.

Например, методы линейного программирования используются при решении *задач распределения ресурсов*, которые возникают при определенном наборе операций (работ), которые необходимо выполнять при ограниченных ресурсах, и требуется найти оптимальные распределения ресурсов между операциями или состав операций.

По своей содержательной постановке задачи, возникающие в экономике, можно разбить на следующие классы.

Задачи сетевого планирования и управления рассматривают соотношения между сроками окончания крупного комплекса операций (работ) и моментами начала всех операций комплекса. Эти задачи состоят в нахождении минимальных продолжительностей комплекса операций, оптимального соотношения величин стоимости и сроков их выполнения.

Задачи массового обслуживания посвящены изучению и анализу систем обслуживания с очередями заявок или требований и состоят в определении показателей эффективности работы систем, их оптимальных характеристик, например, в определении числа каналов обслуживания, времени обслуживания и т.п.

Задачи управления запасами состоят в отыскании оптимальных значений уровня запасов (точки заказа) и размера заказа. Особенность таких задач заключается в том, что с увеличением уровня запасов, с одной стороны, увеличиваются затраты на их хранение, но, с другой стороны, уменьшаются потери вследствие возможного дефицита запасаемого продукта.

Задачи ремонта и замены оборудования актуальны в связи с износом и старением оборудования и необходимостью его замены с течением времени. Задачи сводятся к определению оптимальных сроков, числа профилактических ремонтов и проверок, а также моментов замены оборудования модернизированным.

Задачи составления расписания (календарного планирования) состоят в определении оптимальной очередности выполнения операций (например, обработки деталей) на различных видах оборудования.

Задачи планировки и размещения состоят в определении оптимального числа и места размещения новых объектов с учетом их взаимодействия с существующими объектами и между собой.

Задачи выбора маршрута, или *сетевые* задачи, чаще всего встречаются при исследовании разнообразных задач на транспорте и в системе связи и состоят в определении наиболее экономичных маршрутов.

Среди моделей особо выделяются модели принятия оптимальных решений в конфликтных ситуациях, изучаемые *теорией игр*. К конфликтным ситуациям, в которых сталкиваются интересы двух (или более) сторон, преследующих разные цели, можно отнести ряд ситуаций в области экономики, права, военного дела и т.п. В задачах теории игр необходимо выработать рекомендации по разумному поведению участников конфликта, определить их оптимальные стратегии.

Итак, рассмотрим структуру экономики как объекта математического моделирования.

При выполнении своей главной функции экономическая система осуществляет следующие действия: размещает ресурсы, производит продукцию, распределяет предметы потребления и осуществляет накопление (рис.2.1).

Будучи подсистемой человеческого общества, экономика, в свою очередь, – сложная система, состоящая из производственных (товаропроизводящих) и непроизводственных (товаропроводящих, финансовых и т.п.) ячеек или хозяйственных единиц, находящихся в производственно-технологических и (или) организационно-хозяйственных связях друг с другом.

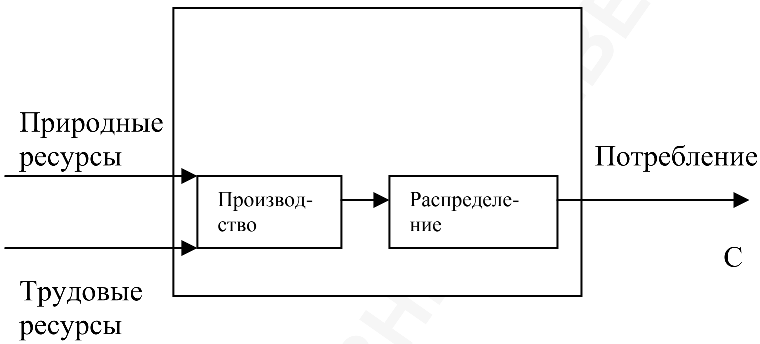


Рисунок 2.1– Экономика как подсистема природы и общества

По отношению к экономической системе каждый член общества выступает в двоякой роли: с одной стороны, как потребитель, а с другой – как работник. Кроме рабочей силы, материальными ресурсами являются природные ресурсы и средства производства.

Средства производства разделяются на *средства* (орудия) *труда*, которые участвуют в нескольких производственных циклах вплоть до их замены вследствие морального или физического износа (основные производственные фонды), и *предметы труда* (оборотные средства), которые участвуют в одном производственном цикле.

Особое место среди средств производства занимает земля. Здесь речь идет об освоенных землях, а земли, не вовлеченные в хозяйственный оборот, являются природным ресурсом. Основная функция земли – участвовать в производстве сельскохозяйственной продукции. Поскольку она многократно участвует в производственных циклах, то в этом смысле является средством труда, но поскольку ее обрабатывают с помощью орудий труда, то ее можно было бы отнести к предметам труда.

Накопленные средства производства производственной сферы составляют производственные фонды, которые состоят из основных производственных фондов (т.е. накопленных средств труда) и основных оборотных фондов (т.е. накопленных предметов труда).

В результате функционирования экономики за один год все отрасли материального производства (промышленность, с/х, строительство, транспорт и т.д.) создают **валовой внутренний продукт** (ВВП). В натурально-вещественной форме ВВП распадается на средства труда и предметы потребления, а в стоимостной форме – на фонд возмещения выбытия основных фондов (амортизационный фонд) и вновь созданную стоимость (национальный доход).

В процессе создания ВВП производственная подсистема экономики производит и вновь потребляет промежуточный продукт. По материально-вещественному составу промежуточный продукт – предметы труда, использованные для текущего производственного потребления, при этом их стоимость целиком переходит в стоимость средств труда или предметов потребления, входящих в ВВП.

В условиях специализации каждый первичный природный ресурс или вторичный ресурс претерпевает несколько преобразований (переделов) в промежуточную продукцию, перед тем как стать составной частью предмета потребления или средства труда. Каждый такой передел осуществляется в рамках специфических производственных ячеек. Промежуточная продукция – это топливо, энергия, сырье, материалы, комплектующие и т.п.

Следует обратить внимание на отсутствие абсолютно четкой грани между промежуточным продуктом и предметом потребления. *Например*, цемент, проданный населению, является предметом потребления, в то время как цемент, закупленный строительным предприятием, является промежуточным продуктом.

Кроме производства, подсистему экономической системы образуют финансово-кредитные учреждения вместе с бухгалтерскими службами хозяйственных единиц – это называют финансово-кредитной подсистемой экономической системы.

Основная функция финансово-кредитной подсистемы – так регулировать финансовые потоки (идущие в противоположную сторону по отношению к материальным потокам), чтобы обеспечить стабильный и справедливый обмен товарами и услугами как между хозяйственными единицами и их объединениями, так и между отдельными членами общества, а также обеспечить финансовые условия для развития производства. В этих условиях деньги и другие ценные бумаги становятся важным финансовым ресурсом.

Нематериальным ресурсом, наряду с финансовыми, является профессионально-интеллектуальный потенциал общества.

Основу экономической системы составляют **производственные ячейки**. Это заводы, фабрики, рудники, шахты, электростанции, сельскохозяйственные и другие производственные предприятия и фирмы, обладающие хозяйственной самостоятельностью. Каждая производственная ячейка обладает средствами труда, которые позволяют вести один или несколько производственных процессов. Поступающие на вход производственного процесса предметы труда перерабатываются в продукты труда, которые, в свою очередь, могут быть либо предметами труда для другого производственного процесса или другой производственной ячейки, либо средствами труда, либо предметами потребления.

С организационно-хозяйственной точки зрения производственная ячейка – это самостоятельная хозяйственная единица, которая обладает правом юридического лица, функционирует за счет своих средств, относительно самостоятельно распоряжается своими ресурсами (средствами производства, рабочей силой и финансовыми средствами) и производственной продукцией. Как самоуправляемая система производственная ячейка состоит из управляемого объекта (рабочая сила и производственный аппарат) и управляющей системы (например, дирекция и заводоуправление, содержащее необходимые функциональные службы).

История развития общественного производства – это история совершенствования техники и технологии и углубления разделения труда, т.е. все большей дифференциации функций хозяйственных единиц. Как только отдельные производители в рамках замкнутого человеческого общества стали производить разные предметы потребления и начали обмениваться ими между собой, возник рынок. Таким образом, рынок – следствие, результат разделения труда. Следовательно, рыночная экономика присуща как феодальному строю и развитому капитализму, так и централизованной системе. Различие заключается в степени свободы и развитости рыночных отношений. В современных условиях не существует ни одной страны, в которой государство не регулировало бы (мягким или жестким образом, прямо или косвенно) деятельность хозяйственных единиц. Важно, чтобы соотношение между их свободой и государственным регулированием обеспечивало наилучшие условия для развития производительных сил и повышения благосостояния общества. Когда говорят, что данная страна имеет рыночную экономику, то под этим подразумевают мягкое, косвенное регулирование экономики с помощью экономических рычагов.

Производственные ячейки и производственно-технологические связи между ними образуют **производственно-технологическую структуру** экономической системы. Эта структура является отражением процесса совершенствования технологии и углубления специализации, поэтому эволюционно меняется под воздействием НТП. Особенно серьезные изменения в ней происходят в период структурной перестройки экономики.

В производственно-технологической структуре производственные ячейки могут быть соединены как последовательно, так и параллельно. Последовательное соединение двух производственных единиц состоит в том, что выход одной из них служит входом для другой. При таком соединении ячейки функционально дополняют друг друга, хотя могут и конкурировать за общие ресурсы. При параллельном соединении производственные ячейки производят одну и ту же продукцию, поэтому находятся в состоянии конкурентной борьбы за рынки сбыта и за общие ресурсы. По отношению к одному продукту ячейки могут быть соединены параллельно, а по отношению к другому – последовательно.

НТП и развитие общественных потребностей приводили и неизбежно будут приводить к дальнейшему углублению специализации, все большей дифференциации функций хозяйственных единиц. Вместе с углублением специализации происходит расчленение единых по своему конечному назначению процессов производства конкретных продуктов потребления на все большее число отдельных относительно самостоятельных процессов, реализуемых в разных хозяйственных единицах. При этом усиливается зависимость отдельных хозяйственных звеньев друг от друга, увеличивается зависимость достижения конечной цели от надежности функционирования и взаимодействия звеньев между собой.

Для обеспечения взаимодействия хозяйственных звеньев всегда осуществлялась и будет осуществляться их кооперация и интеграция. Кооперация заключается в установлении длительных связей по поставкам продукции или оказанию услуг при сохранении хозяйственной самостоятельности участниками кооперации. Высшая форма кооперации – интеграция, которая заключается в объединении в той или иной форме самостоятельных хозяйственных единиц для достижения единого конечного результата.

Итак, ненадежность в производственно-технологическом взаимодействии производственных единиц, конкуренция на рынках товаров, денег и рабочей силы – объективная основа для образования **объединений хозяйственных единиц** (ассоциаций, концернов, корпораций).

В объединение могут входить как последовательно, так и параллельно соединенные производственные единицы, а также непроизводственные единицы. Объединение последовательно соединенных производственных ячеек позволяет установить контроль над наиболее ненадежными элементами технологической цепочки. Объединение параллельно соединенных звеньев позволяет контролировать рынок сбыта продукции. Как видим, при образовании объединений настоятельно необходима регулирующая роль государства, которое в интересах потребителей не должно допускать чрезмерного монополизма на рынках товаров и услуг, а также на рынках рабочей силы и денег.

Организационно-хозяйственная структура экономической системы – это совокупность хозяйственных единиц и организационно-хозяйственных связей между ними. Если производственно-технологические связи горизонтальны, то организационно-хозяйственные – вертикальны.

Организационно-хозяйственную структуру можно представить как многоэтажную надстройку над производственно-технологической структурой.

Первый этаж – органы управления хозяйственных единиц и прямые вертикальные связи каждого органа управления со своей единицей.

Второй этаж – органы управления объединений и вертикальные связи с органами управления соответствующих единиц.

Третий этаж – центральные органы управления экономической системой и их вертикальные связи с органами управления первого и второго этажей.

В случае централизованного управления экономикой вертикальные связи имели жесткий, директивный характер, при децентрализованном управлении экономикой с возрастанием уровня жесткость связи ослабевает.

При системном исследовании экономики с помощью математических моделей выделяют **макро-** и **микромодели**. Первые отражают функционирование и развитие всей экономической системы или ее достаточно крупных подсистем, в то время как вторые – хозяйственных единиц и их объединений.

Если речь идет о макромоделях, то хозяйственные ячейки считаются неделимыми, если исследуются микромодели, то хозяйственная единица, в свою очередь, может рассматриваться как сложная система (например, может иметь отраслевую структуру).

К крупным подсистемам можно отнести: первое и второе подразделения народного хозяйства, отрасли народного хозяйства, межотраслевые народнохозяйственные комплексы.

Под первым подразделением обычно понимают совокупность хозяйственных единиц, производящих средства производства, а под вторым – предметы потребления.

Мы в дальнейшем первое подразделение будем, в свою очередь, разделять на два сектора: нулевой, производящий топливо, энергию, сырье, материалы (т.е. предметы труда), и первый, который производит средства (орудия) труда. Это разделение методологически оправдано, поскольку предметы труда участвуют в одном производственном цикле, а средства труда – во многих. Вообще под сектором далее будем понимать производственную подсистему экономики, производящую один агрегированный продукт.

В отрасль выделяются производственные единицы, однородные по используемому сырью, выпускаемой продукции, по применяемой технологии, по профессиям производственного персонала. В настоящее время насчитывается свыше 400 отраслей, подотраслей и производств. При моделировании под отраслью обычно подразумевается «чистая» отрасль, производящая только один продукт. Например, отрасль сельского хозяйства – зерноводство – производит один продукт – зерно (хотя зерно понятие собирательное – пшеница, рис, ячмень и т.д.), отрасль электроэнергетики производит один продукт – электроэнергию (хотя есть гидроэлектроэнергия, теплоэлектроэнергия, атомная и т.п.).

Кроме обычных отраслей, будем рассматривать крупные отрасли народного хозяйства: промышленность, с/х, строительство, транспорт и связь, торговля, заготовки и материально-техническое снабжение.

Под межотраслевым народнохозяйственным комплексом понимается совокупность отраслей, подотраслей и производств, находящихся в тесных производственно-технологических связях и реализующих крупную национальную цель (например, топливно-энергетический комплекс обеспечивает общество и экономику топливом и энергией, АПК – продовольствием и с/х сырьем).

ТЕМА 3 СУММАРНЫЕ, СРЕДНИЕ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ В ЭКОНОМИКЕ

Абсолютные и относительные величины в экономическом анализе

Все экономические показатели можно, с известной долей условности, разделить на абсолютные и относительные. Первые выражаются в каких-либо объемных или денежных единицах и могут быть либо потоковыми (то есть величина за определенный период), либо запасовыми (то есть величина на определенную дату). Вторые, относительные, показатели представляют собой отношения абсолютных (или других относительных) показателей, то есть количество единиц одного показателя на одну единицу другого. Относительными показателями являются не только соотношения разных показателей в один и тот же момент времени, но и одного и того же - в разные моменты; это темпы роста данного показателя. В экономическом анализе и принятии решений в одних случаях важны абсолютные показатели (например, общий объем прибыли), в других - относительные (например, доход на душу населения).

Как правило, для комплексного анализа экономической ситуации, для выбора наилучшего решения важны как абсолютные, так и относительные показатели. Пусть, например, фирма решает вопрос о необходимом масштабе расширения (или сокращения) объема производства. Ее, естественно, интересует (абсолютный) показатель прибыли, являющийся разностью двух других таких показателей - выручки и издержек. Но при решении поставленной задачи максимизации прибыли фирма широко использует два типа относительных показателей: это *средние* и *предельные* величины (прибыли, выручки, издержек). Средняя величина в данном случае показывает величину соответствующего показателя в расчете на единицу выпуска, предельная - прирост соответствующего показателя в расчете на единицу прироста выпуска. Так, если средняя выручка превышает средние издержки, то фирма получает прибыль и производить продукцию выгодно. Если при этом предельная выручка превышает предельные издержки, то фирме выгодно расширять производство, увеличивая объем прибыли. Соответственно, если средние издержки превышают среднюю выручку, то фирма терпит убытки, а если предельные издержки превышают предельную выручку, то объем производства нужно сократить.

Далее мы рассмотрим формально роль абсолютных (суммарных) и относительных (средних и предельных величин) в экономическом анализе, а также свойства и соотношения этих величин.

Определение и геометрическая интерпретация суммарных, средних и предельных величин

Суммарная величина ***(F(x))***. Под суммарной величиной мы будем понимать любую функцию независимой переменной ***F(x)***. Как правило, в экономике под суммарными понимаются абсолютные величины, но, вообще говоря, формальное понятие суммарной величины является относительным (то есть любая величина может рассматриваться как суммарная по отношению к другим своим предельным и средним величинам). В экономике в роли суммарных величин выступают: доход (выручка) или издержки как функции объема выпуска ***(R(Q)*** или ***C(Q)),*** объем выпуска как функция от количества переменного ресурса, например труда, - ***Q(L),*** полезность как функция количества потребляемого блага ***U(x)*** и другие экономические показатели. Любая из перечисленных функций может быть задана в виде формулы, например, $f\{x)=ax^2 - bx$; графика, например, показанного на рис. 3.1.

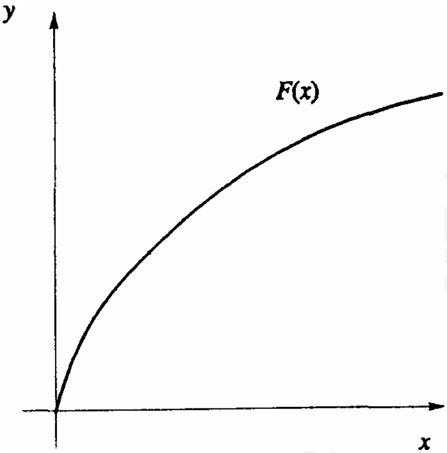


Рисунок 3.1– График суммарной величины

Средняя величина ***(AF(x))*** определяется как отношение суммарной величины к независимой переменной:

$AF(x) = \dfrac{F(x)}{x}$. Буква ***A*** -сокращение от Average (средняя). Средняя величина может обозначаться также $\overline{F} \equiv AF(x)$. Примеры средних величин в экономике: среднедушевой объем потребления, средняя фондоотдача, средняя выручка (доход) $AR = \dfrac{R(Q)}{Q}$, средние издержки АС = $\dfrac{C(Q)}{Q}$, средний продукт труда $AQ_L = \dfrac{Q(L)}{L}$ и т.д.

Средняя величина как функция независимой переменной также может задаваться в формульном или графическом виде.

Маржинальная (предельная) величина ***(MF(x))*** определяется как производная суммарной величины *F(x)* по независимой переменной *x*:

$MF(x)=F'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta F(x)}{\Delta x}$ в случае, когда независимая переменная меняется непрерывно. Примеры предельных величин в экономике: предельная выручка (доход) $MR = R'(Q)$ или $\dfrac{\Delta R}{\Delta Q}$, предельные издержки $MC= C(Q)$ или $\dfrac{\Delta C}{\Delta Q}$, предельный продукт труда $MQ_L=Q^{'}(L))$или $\dfrac{\Delta Q}{\Delta L}$ и т.д.

Предельная величина, как и все предыдущие, может задаваться формулой или в графическом виде.

Если суммарная величина задается выпуклой кривой *F(x)* в виде графика, то необходимо через т. *A* графика суммарной величины, имеющую координаты (*x, F(x))*, провести касательную к графику. Тангенс угла наклона касательной к графику суммарной величины (рис.3.2) численно равняется производной суммарной величины и, следовательно, является предельной величиной $MF(x)=F`(x)=tg\ \alpha$.

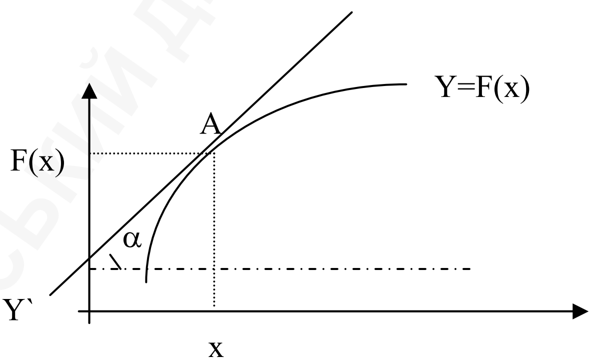


Рисунок 3.2 – График производной

Рассмотрим следующий пример (табл.3.1).
Таблица 3.1 – Пример расчета предельных издержек

Число изделий в месяц, шт.	Общие издержки в месяц, тыс.грн.	Издержки на одно изделие	
		средние	предельные
0	0	…	…
1	30	30	30
2	38	19	8
3	48	16	10
4	60	15	12
5	80	16	20

Допустим, что некоторая фирма может производить большее или меньшее количество изделий в единицу времени. Соответственно этому различными будут и издержки фирмы в единицу времени. В качестве примера мы можем рассмотреть данные, представленные в первых двух столбцах таблицы (3.1).

Общие издержки фирмы связаны с изготовлением всех изделий. А какова величина издержек, приходящихся на одно изделие?

Однозначный ответ на этот вопрос можно дать только тогда, когда издержки строго пропорциональны количеству изделий. Но это совершенно исключительный частный случай. Во всех остальных случаях необходимы уточнения.

Во-первых, можно говорить о средних издержках на одно изделие, как бы распределив издержки между всеми изделиями поровну. Чтобы найти величину средних издержек, достаточно разделить общую сумму издержек на число изделий. Так построен третий столбец таблицы.

Но средние издержки ничего не говорят о том, как изменятся издержки при изменении количества производимых изделий. Величина изменения издержек при изменении числа изделий на единицу называется предельными издержками на одно изделие. Предельные издержки приведены в 4-м столбце таблицы: здесь каждое число получено вычитанием из соответствующей величины общих издержек предыдущего значения этой же величины.

Соотношения между средними AF, суммарными F и маржинальными (предельными) MF величинами независимой непрерывной переменной x находятся следующим образом: например, если задана средняя величина $AF(x)$, то суммарная величина $F(x)=x\cdot AF(x)$, а предельная величина $MF(x)=F`(x)=(x\cdot AF(x))`=$
$=AF(x)+x\cdot AF`(x)$.

Аналогичным образом можно выразить среднюю величину через суммарную величину:

$$AF(x)=\frac{1}{x}\cdot\int MF(x)dx.$$

Приведем еще примеры использования этих величин в экономической теории.

Один из базовых законов теории производства звучит так: *оптимальный для производителя уровень выпуска товара определяется равенством предельных издержек и предельного дохода*.

То есть уровень выпуска $\mathbf{x_0}$ является оптимальным для производителя, если $\mathbf{MS(x_0)=MD(x_0)}$, где **MS** – предельные издержки, а **MD** – предельный доход.

Обозначим функцию прибыли через $\mathbf{C(x)}$. Тогда $\mathbf{C(x)=D(x)-}$
$\mathbf{-S(x)}$.

Очевидно, что оптимальным уровнем производства является тот, при котором прибыль максимальна, т.е. такое значение выпуска $\mathbf{x_0}$, при котором функция $\mathbf{C(x)}$ достигает экстремума (максимума). По теореме Ферма в этой точке $\mathbf{C'(x)=0}$. Но $\mathbf{C'(x)=D'(x)-S'(x)}$, поэтому $\mathbf{D'(x_0)=S'(x_0)}$, т.е.
$\mathbf{MD(x_0)=MS(x_0)}$.

Другое важное понятие теории производства – это уровень наиболее экономичного производства, при котором средние издержки по производству товара минимальны. Соответствующий экономический закон гласит: *уровень наиболее экономичного производства определяется равенством средних и предельных издержек*.

Получим это условие как следствие теоремы Ферма. Средние издержки $\mathbf{AS(x)}$ определяются как $\frac{S(x)}{x}$, т.е. издержки по производству товара, деленные на произведенное его количество.

Минимум этой величины достигается в критической точке функции **y=AS(x)**. Т.е. при условии $AS'(x)=\frac{S'x-S}{x^2}=0$, откуда **S'x–S=0** или

$S'=\frac{S}{x}$, т.е. **MS(x)=AS(x)**.

ТЕМА 4 ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ЭКОНОМИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ

Экономические задачи, решаемые методами дифференциального исчисления

Базовой задачей экономического анализа является изучение связей экономических величин, записываемых в виде функций.
Например, в каком направлении изменится доход государства при увеличении налогов или при введении импортных пошлин; увеличится или уменьшится выручка фирмы при повышении цены на ее продукцию; в какой пропорции дополнительное оборудование может заменить выбывающих работников. Для решения таких задач должны быть построены функции связи входящих в них переменных, которые затем изучаются с помощью методов дифференциального исчисления.

В экономике часто требуется найти наилучшее или оптимальное значение того или иного показателя: наивысшую производительность труда, максимальную прибыль, максимальный выпуск, минимальные издержки и т.д. Каждый показатель представляет собой функцию одного или нескольких аргументов. Например, выпуск можно рассматривать как функцию затрат труда и капитала. Таким образом, нахождение оптимального значения показателя сводится к нахождению экстремума функции одной или нескольких переменных. Подобные задачи порождают класс экстремальных задач в экономике, решение которых требует использования методов дифференциального исчисления. Если экономический показатель Y нужно максимизировать или минимизировать как функцию другого показателя X (например, задача на максимум прибыли как функции объема выпуска), то в оптимальной точке приращение функции Y на приращение аргумента X должно стремиться к нулю, когда приращение аргумента стремится к нулю. Иначе, если такое приращение стремится к некоторой положительной или отрицательной величине, рассматриваемая точка не является оптимальной, поскольку увеличив или уменьшив аргумент X можно изменить величину Y в нужном направлении. В терминах диф.исчисления это означает, что необходимым условием экстремума функции Y=f(x) является равенство нулю ее производной.

В экономике часто приходится решать задачи на экстремум функций нескольких переменных, поскольку экономические показатели обычно зависят от многих факторов. Такие задачи хорошо изучены теорией функций нескольких переменных, использующей методы диф.исчисления. Многие задачи включают не только максимизируемую (минимизируемую) функцию, но и ограничения (например, бюджетное ограничение в задаче потребительского выбора). Это задачи математического программирования, для решения которых разработаны специальные методы, также опирающиеся на диф.исчисление.

Важный раздел методов диф.исчисления, используемых в экономике, называется методами предельного анализа. Предельный показатель функции Y=f(x) – это ее производная (в случае одной переменной) или частные производные (в случае нескольких переменных).

В экономике широко используются средние величины: средняя производительность труда, средние издержки, средний доход, средняя прибыль и т.д. Но часто требуется узнать, на какую величину вырастет результат, если будут увеличены затраты или, наоборот, насколько уменьшится результат, если затраты сократятся. С помощью средних величин ответ на этот вопрос получить невозможно. В подобных случаях требуется определить предел отношения приростов результата и затрат, т.е. найти предельный эффект.

Показатель предельного эффекта в оптимизационных моделях применяется для нахождения оптимального объема производства при заданных ресурсах, а также для определения оптимального распределения ограниченных ресурсов по различным направлениям их использования. Если максимизируемый

показатель (например, прибыль) есть разность результата и издержек (в данном случае результат представлен выручкой), то в оптимальной точке предельная выручка должна равняться предельным издержкам. Такое равенство должно выполняться по каждому из факторов, определяющих выручку и издержки, что вытекает из необходимости равенства нулю частных производных прибыли по всем факторам.
Предельные величины характеризуют не состояние (как суммарная или средняя величины), а *процесс*, изменение экономического объекта. Таким образом, производная выступает как скорость изменения некоторого экономического объекта (процесса) по времени или относительно другого исследуемого фактора.

Анализ взаимосвязей экономических показателей

При анализе взаимосвязи экономических показателей, как правило, следует ответить на такие вопросы: какие факторы определяют интересующий нас экономический показатель? Каков знак этой зависимости? Какова степень этой зависимости? Каково числовое (функциональное) выражение соответствующей зависимости? Рассмотрим возможные ответы на эти вопросы на примере функции спроса.

1) **От каких факторов зависит?** При ответе на этот вопрос следует перечислить все факторы, определяющие исследуемый экономический показатель. В частности, величина спроса q^D на какой-либо товар определяется ценой этого товара p, доходом потребителей I, ценами на другие товары (дополняющие (C) или заменяющие (S) данный товар), ожидаемыми ценами и ожидаемым доходом. Сокращенно это можно записать так:

$q^D = f(p, I, p^c, p^s, p^e, I^e, \ldots)$.

2) **Как зависит** (положительно или отрицательно)? При ответе на этот вопрос надо определить характер взаимосвязи. Исследуемый показатель связан с каким-либо фактором положительно, если его значение возрастает при увеличении фактора и отрицательно, если его значение уменьшается при увеличении фактора. В частности, величина спроса q^D на какой-либо товар уменьшается при увеличении его цены p, увеличивается (для нормальных товаров) или уменьшается (для некачественных товаров)

при увеличении дохода потребителей I, уменьшается при увеличении цен на дополняющие товары и увеличивается при увеличении цен на заменяющие данный товар, товары, увеличивается при ожидании повышения цен или доходов. Сокращенно это можно записать так:

$$q^D = f(\overset{-}{p}, \overset{\pm}{I}, \overset{-}{p^c}, \overset{+}{p^s}, \overset{+}{p^e}, \overset{\pm}{I^e}, \ldots).$$

3) **Какова степень зависимости?** Для ответа на этот вопрос надо определить, насколько чувствителен исследуемый экономический показатель к изменению определяющих его факторов? Другими словами, какова степень его изменения при заданном абсолютном или относительном изменении факторов.

Имеются два подхода к анализу чувствительности зависимости $Y=f(x)$.

Приростной подход – прирост фактора влечет прирост исследуемого показателя.

Темповый подход – темп прироста фактора влечет прирост темпа исследуемого показателя.

4) Каково функциональное выражение зависимости? Для ответа на этот вопрос надо указать конкретное функциональное выражение исследуемой зависимости. Эту зависимость можно получить либо из теоретической модели, или из эконометрического исследования. Например, функция спроса на какой-либо товар может определяться следующим выражением:

$$q^D = q_0 - \alpha \cdot p - \beta \cdot p^c + \gamma \cdot p^s .$$

Принятие оптимальных решений

Пусть, например, монополист, зная (из маркетинговых исследований) функцию спроса на свой товар, решает, сколько ему производить и по какой цене продавать свой товар.

Если он установит достаточно высокую цену, то потребители за определенный период купят у него не слишком много товара. Если он будет производить больше, то ему придется понизить цену, чтобы распродать все выпускаемое им количество за определенный период времени. При этом выручка увеличится за счет увеличения объема продаж (выигрыш) и одновременно уменьшится за счет уменьшения цены (потери). Результат будет зависеть от того, что окажется большим: выигрыш или потери. Как же определить максимальный объем выпуска? Для этого нужно определить зависимость выручки (или прибыли, если учитывать издержки выпуска) от объема выпуска и определить, при каком объеме выпуска прибыль будет максимальна.

Если нет ограничивающих условий, то максимум функции находится с помощью производной.

Основные правила дифференцирования.

1 Производная суммы (разности) функций равна сумме (разности производных этих функций: $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm \pm v'(x)$.
2 Постоянный множитель выносится за знак производной $(cu(x))' = cu'(x)$.
3 Правило дифференцирования произведения функций $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.
4 Правило дифференцирования частного функций
5 $(u(x)/v(x)) = (u'(x)v(x) – u(x)v'(x))/(v(x))^2$.

Дифференцирование основных элементарных функций.

1 $c' = 0$.
2 $(a + bx)' = b$.
3 $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$ $(x>0)$.
4 $(a^x)' = a^x \ln a$ $(0< a \neq 1)$. В частности: $(e^x)' = e^x$.
5 $(\log_a x)' = (1/x)\log_a e$ $(0< a\neq 1, x>0)$/ В частности: $(\ln x)' = 1/x$.

ТЕМА 5 ЭЛАСТИЧНОСТЬ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В ЭКОНОМИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ

Коэффициент эластичности показывает относительное изменение исследуемого экономического показателя под действием единичного относительного изменения экономического фактора, от которого он зависит при неизменных остальных, влияющих на него факторах.

Например, эластичность предложения – это прирост объема предложения товара в результате роста его цены на 1 % при условии, что все остальные факторы, влияющие на уровень предложения, остаются неизменными. Эластичность спроса – это прирост объема спроса, возникающий в результате сокращения цены на 1 %, при условии, что все остальные факторы, влияющие на величину спроса, остаются неизменными.

Эластичность функции и ее геометрический смысл

Пусть величина *y* зависит от ***x***, и эта зависимость описывается функцией ***y = f(x)***. Изменение независимой переменной ***x* (Δx)** приводит в силу функциональной зависимости к изменению переменной ***y*(Δy)**. Встает вопрос, как измерить чувствительность зависимой переменной ***y*** *к* изменению ***x***. Одним из показателей реагирования одной переменной на изменение другой служит производная

$$\boldsymbol{y}_{x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

характеризующая скорость изменения функции с изменением аргумента ***x***. Однако в экономике этот показатель неудобен тем, что он зависит от выбора единиц измерения.

Например, если мы рассмотрим функцию спроса на сахар ***(Q)*** от его цены ***(P)***, то увидим, что значение производной при каждой цене ***P*** (измеряемой в грн.)

$$Q_p = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta P}$$

зависит от того, измеряется ли спрос на сахар в килограммах или в центнерах. В первом случае производная измеряется в кг/грн., во втором - в ц/грн., соответственно ее значение при одном и том же значении цены будет различным в зависимости от единиц измерения величины спроса. Поэтому для измерения чувствительности изменения функции к изменению аргумента в экономике изучают связь не абсолютных изменений переменных ***x*** и ***y*** **(Δx** и **Δ*y*)**, а их относительных или процентных изменений.

Эластичностью функции **y=f(x)** называется предел отношения относительных изменений переменных ***y*** и ***x.***

Если эластичность изменения переменной **У** при изменении переменной **x** обозначить $E_x(y)$, то, используя определение производной, получаем:

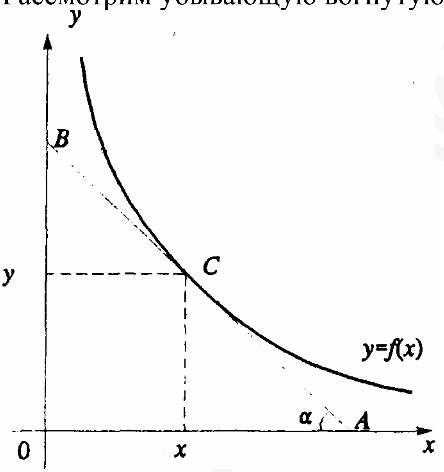
$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\Delta y}{y}\right] \Big/ \left[\frac{\Delta x}{x}\right] = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y}\right] = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y},$$

$$E_x(y)=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{x}{y}=f'(x)\cdot\frac{x}{y}=\frac{f'(x)}{\frac{y}{x}}=\frac{f'(x)}{\frac{f(x)}{x}}=\frac{Mf}{Af},$$

где **Mf** – маржинальное значение функции **f** в точке **x**;
Af – среднее значение функции в точке **x**. Эту эластичность называют также предельной или точечной эластичностью. Т.е. эластичность может быть выражена в виде отношения предельной **(Mf)** и средней **(Af)** величин.

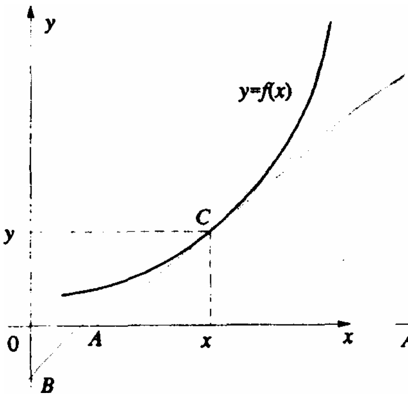
Геометрическая интерпретация эластичности

Подобно производной эластичность имеет простую геометрическую интерпретацию.
Рассмотрим убывающую вогнутую функцию *y* =f(x) (рис.5.1).



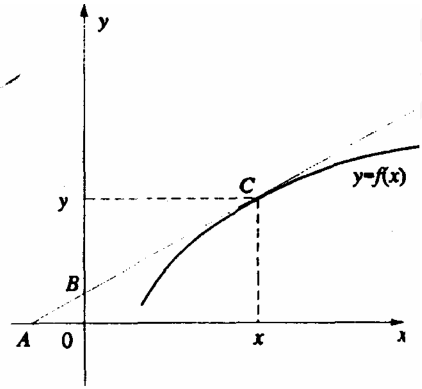
“ _“

Рисунок 5.1– Пример геометрической интерпретации эластичности



“+” $E_x(y) > 1$

Рисунок 5.2 – Пример геометрической интерпретации эластичности



“+” $E_x(y) < 1$

Рисунок 5.3 – Пример геометрической интерпретации эластичности

Найдем эластичность этой функции в произвольной точке С с координатами *(x, y)*. Для этого проведем касательную *АВ* к функции $У = f(x)$ в точке С.

Из ΔАСХ следует АХ=СХ/tgα.
То есть производная функции $y = f(x)$ в точке С равна tg (180 - α), то tgα = $-f(x)$.

Следовательно, $AX = \dfrac{f(x)}{-f'(x)} = -\dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

Из подобия треугольников CBY и *CAX* следует, что

$$\frac{CB}{CA} = \frac{CY}{AX} = \frac{OX}{AX} = -\frac{f'(x)x}{f(x)} = -E_x(y).$$

Таким образом, $E_x(y) = -\dfrac{CB}{CA}$.

То есть геометрически эластичность убывающей функции равна отношению расстояний по касательной от точки ***С*** *с* координатами

(x, f (x)) до ее пересечения с осями **У** и ***X***, взятому соответственно со знаком "–".

В случае выпуклой и вогнутой возрастающих функций (рис.5.2 и рис.5.3) эластичность по абсолютной величине также будет равна отношению $\frac{CB}{CA}$, а знак эластичности будет определяться направлением отрезков ***CB*** и ***CA***. Если точки ***A*** и ***B*** лежат по одну сторону от точки **C** на касательной, как на рисунках 2, 3, то в формуле надо выбрать знак "+". Если ***A*** и ***B*** лежат по разные стороны от т. **C**, как на первом рисунке, то в формуле надо выбрать знак "-".

Отметим также, что эластичность функции, изображенной на рис. 5.2, больше единицы (так как ***CB > CA)***, а на рис. 5.3 – меньше единицы (так как ***CB < CA)***.

Свойства эластичности и эластичность элементарных функций

Свойства эластичности

1 Эластичность - безразмерная величина, значение которой не зависит от того, в каких единицах измерены величины ***y*** и ***x***. $E_{ax}(by)=E_x(y)$.

2 Эластичности взаимно обратных функций - взаимно обратные величины:

$$E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}.$$

Например, эластичность величины спроса по цене обратна эластичности цены по величине спроса

$$E_p(Q) = \frac{1}{E_Q(p)}.$$

3 Эластичность произведения двух функций ***u (x)*** и ***v (x)***, зависящих от одного и того же аргумента ***x***, равна сумме эластичностей:

$$\mathbf{E_x(uv) = E_x(u)+ E_x(v).}$$

4 Эластичность частного двух функций *u (x)* и *v (x),* зависящих от одного и того же аргумента *x,* равна разности эластичностей

$$E_x\left[\frac{u}{v}\right]=E_x(u)-E_x(v).$$

5 Эластичность суммы двух функций *u (x)* и v (x) может быть найдена по формуле:

$$E_x(u+v)=\frac{uE_x(u)+vE_x(v)}{u+v}.$$

Эластичности элементарных функций:

1 Эластичность степенной функции $\boldsymbol{y=x^{\alpha}}$ постоянна и равна показателю степени α: $\mathbf{E_x(x^{\alpha}) = \alpha}$.

2 Эластичность показательной функции $y = a^x$ пропорциональна *x:* $E_x(a^x) = x\ 1n\ (a)$.

3 Эластичность линейной функции $y = ax + b$

$$E_x\ (ax+b) = \frac{ax}{ax+b}.$$

Виды эластичностей в экономике

Эластичность спроса по цене (прямая)

$$E_p(q)=\left[\frac{dq}{q}\right]/\left[\frac{dp}{p}\right]=\frac{dq}{dp}\cdot\frac{p}{q},$$

показывающая относительное изменение (выраженное в процентах) величины спроса на какое-либо благо при изменении цены этого блага на один процент и характеризующая чувствительность потребителей к изменению цен на продукцию. Если ценовая эластичность спроса по абсолютной величине больше единицы, то спрос называют эластичным (совершенно эластичным при бесконечно большой величине эластичности спроса). Если ценовая эластичность спроса по абсолютной величине меньше единицы, то спрос называют неэластичным (совершенно неэластичным при нулевой эластичности спроса).

И, наконец, если ценовая эластичность спроса по абсолютной величине равна единице, то говорят о спросе с единичной эластичностью.

Эластичность спроса по доходу

$$E_I(q)=\left[\frac{dq}{q}\right]\Big/\left[\frac{dI}{I}\right]=\frac{dq}{dI}\cdot\frac{I}{q}\ ,$$

характеризующая относительное изменение (в процентах) величины спроса на какое-либо благо при изменении дохода потребителей этого блага на один процент. Положительная эластичность спроса по доходу характеризует нормальные (качественные) товары, а отрицательная величина - малоценные (некачественные) товары.

Так, высокий положительный коэффициент спроса по доходу в отрасли указывает, что ее вклад в экономический рост больше, чем доля в структуре экономики, и она имеет шансы на расширение и процветание в будущем. Наоборот, если коэффициент эластичности спроса на продукцию отрасли по доходу имеет небольшое положительное или отрицательное значение, то ее может ожидать застой и перспектива сокращения производства.

Связь цены и предельных издержек монополиста

Мы знаем, что совершенно конкурентная фирма (т.е. фирма, функционирующая в условиях совершенной (чистой) конкуренции, устанавливает цену на свою продукцию, равную предельным издержкам: $\boldsymbol{p_c = MC}$. Монополист же назначает цену на свою продукцию выше предельных издержек: $\boldsymbol{p_m == MC(1 + s)}$, где $\boldsymbol{s}$ - надбавка к издержкам, которая может составлять **10%, 20%, 30%,...** Возникает вопрос, как выбрать величину этой надбавки. При более детальном рассмотрении этого вопроса оказывается, что величина надбавки тесно связана с эластичностью.

Действительно, записывая условие максимизации прибыли как разницы между выручкой и издержками, ($\pi = R - C$):

$$\boldsymbol{\pi' = R' - C' = MR - MC = 0.}$$

Вычислим предельную выручку

$MR = R'(q) = (p(q)\cdot q)' = p(q) + qp'(q) =$

$$= p \cdot \left[1 + \frac{q \cdot p'(q)}{p} \right] = p \cdot \left[1 + \frac{1}{E^D} \right] = p \cdot \left[1 - \frac{1}{\left| E^D \right|} \right].$$

Приравняем ее к предельным издержкам *(MR = MC)*. Получим соотношение $p = \dfrac{MC}{1 - \dfrac{1}{\left| E^D \right|}}$,

из которого следует, что надбавка к предельным издержкам в цене должна быть тем меньше, чем выше эластичность спроса.

Эта же формула позволяет объяснить, как происходит сегментация рынка монопольным производителем с целью дискриминации потребителей и получения от этого дополнительной прибыли. Обычно мы рассматриваем однородный рынок какой-либо продукции, на котором все покупатели платят за единицу товара одну и ту же цену. Однако если монополист может устойчиво разделить покупателей по какому-либо признаку на две или большее число групп, например, выделяя в отдельную группу студентов при покупке железнодорожных или авиабилетов, то ему выгоднее установить для различных групп различные цены и, таким образом, сегментировать рынок. При этом суммарная выручка от продаж на двух рынках одного товара (или услуги) будет максимальна при равенстве предельных доходов от каждого из рынков (в противном случае было бы выгодно перераспределить объем продаж в пользу рынка с большим предельным доходом). Таким образом,

$$MR_1 = p_1 \cdot \left[1 - \frac{1}{\left| E_1^D \right|} \right] = p_2 \left[1 - \frac{1}{\left| E_2^D \right|} \right] = MR_2 .$$

Отсюда

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{1 - \dfrac{1}{\left|E_2^{\,D}\right|}}{1 - \dfrac{1}{\left|E_1^{\,D}\right|}}.$$

Следовательно, те покупатели, спрос которых на товар менее эластичен, будут платить за него большую цену.

Факторы, определяющие эластичность спроса

1 Замещаем ость блага в потреблении

Эластичность спроса по цене тем выше, чем выше замещаем ость блага.

Замещаемость блага обычно характеризуется наличием и количеством заместителей, а также степенью агрегированности блага. Чем больше у потребителей возможностей заместить потребление данного блага потреблением других благ, тем выше эластичность спроса на это благо. Степень агрегированности блага определяется широтой определения данного блага, тем, какое количество разнообразных благ входит в понятие данного блага. Например, благо «молочные продукты» включает в себя молоко, кефир, ряженку, простоквашу и другие продукты. Чем выше степень агрегированности блага, тем меньше у него субститутов (и тем меньше у потребителей возможностей заместить потребление данного блага потреблением других благ), и тем ниже эластичность спроса на это благо. Например, эластичность спроса на моющие средства ниже, чем на стиральный порошок, а эластичность спроса на мыло вообще ниже, чем эластичность спроса на мыло конкретной марки.

Правильное определение степени агрегированности блага (с целью определения его эластичности) особенно важно при определении ценовой и налоговой политики. Так, например, эластичность водки относительно низкая и казалось бы, что увеличение акцизов на нее должно привести к увеличению поступлений в бюджет (поскольку при неэластичном спросе выручка растет с увеличением цены). Однако происшедшее в декабре 1993 года (Россия) повышение ставки акцизов до 90 процентов привело к существенному снижению спроса на отечественные ликеро-водочные изделия, потере конкурентоспособности отрасли по цене и резкому сокращению доходов в бюджет. Причина – неправильное определение степени агрегированности водки, которая должна включать в себя не только отечественную водку, но и импортную (в том числе и из стран ближнего зарубежья). Именно продажа импортной водки и заняла в это время преимущественное место в торговой сети. Спустя несколько месяцев было подписано новое постановление, которым снижалась ставка акцизов на отечественную водку до 85 процентов и, одновременно, повышалась ставка акцизов до 250 процентов на импортную водку.

Подобные провалы правительственной политики происходили не только в России, но и в странах с развитой рыночной экономикой. Так, например, введение в 80-е годы шестипроцентного налога на бензин в Вашингтоне (округ Колумбия), эластичность спроса на который, по оценкам экономистов, составляла 0.2, привело к 33 процентному падению спроса (что соответствует эластичности 5.5) и через 2 месяца налог был отменен. Причина этого – «узкое» определение бензина в штате Washington, не включившее в себя бензин из соседних штатов Meriland и Virginia, которым потребители и стали заменять подорожавший в Вашингтоне бензин.

2 Удельный вес в доходе

Эластичность спроса по цене тем выше, чем выше удельный вес расходов на данное благо в доходе потребителя. Например, спрос потребителя на спички практически не изменится, даже если их цена возрастет в несколько раз, что свидетельствует о его низкой эластичности.

3 Субъективная необходимость

Эластичность спроса по цене тем выше, чем ниже субъективная необходимость в данном благе. Обычно считают, что спрос на предметы роскоши более эластичен, чем спрос на предметы первой необходимости. Это не совсем правильно, поскольку решающим фактором здесь является именно субъективная необходимость в данном благе, которая на отдельные предметы роскоши может в силу моды, традиций или других причин быть достаточно высокой и приводить к низкой эластичности спроса на него. Примером этому служит спрос на цветы 8 Марта или 1 сентября.

4 Фактор времени

Эластичность спроса по цене обычно выше, чем больше промежуток времени. Другими словами, долгосрочная эластичность спроса предполагается выше, чем краткосрочная эластичность. Это обычно обосновывается тем, что за долгосрочный промежуток времени потребители могут изменить привычки и найти больше заменителей данному благу.

Однако при этом не учитывается формирование запаса и время износа блага, оказывающие существенное влияние на решения потребителей и действующие иногда в сторону понижения эластичности с течением времени, особенного для товаров длительного пользования, а также товаров первой необходимости в периоды резкого повышения цен. Например, запасы круп, макаронных изделий, консервов и других товаров, сделанные домашними хозяйствами до резкого повышения цен в конце года, приводят к резкому сокращению спроса на эти товары в начале следующего года и, следовательно, большой краткосрочной эластичности спроса. С течением времени запасы стали истощаться и эластичность спроса на эти товары уменьшилась.

ТЕМА 6 СТАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МАКРОЭКОНОМИКИ. ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ

Производственная функция одной переменной $y=f(x)$ – функция, независимая переменная которой принимает значения объемов затрачиваемого ресурса (фактора производства), а зависимая переменная – значения объемов выпускаемой продукции. Такая ПФ называется **одноресурсной** или **однофакторной**, ее область определения – множество неотрицательных действительных чисел. Запись $y=f(x)$ означает, что если ресурс затрачивается или используется в количестве x единиц, то продукция выпускается в количестве $y=f(x)$ единиц. Символ f (знак функции) является характеристикой производственной системы, преобразующей ресурс в выпуск. В микроэкономике считают, что y – это максимально возможный выпуск продукции, если ресурс затрачивается или используется в количестве x единиц.

В макроэкономике такое понимание не совсем корректно, так как при ином распределении ресурсов между структурными единицами экономики выпуск может быть иным, поэтому ПФ – это статически устойчивая связь между затратами ресурса и выпуском. Более правильной считается запись $y=f(x, a)$, где a – вектор параметров ПФ.

ПФ имеют различные области использования с реализацией принципа «затраты – выпуск» как на микро-, так и на макроуровне.

Микроэкономические ПФ используются для описания взаимосвязи между величиной затрачиваемого или используемого ресурса x в течение определенного времени и выпуском продукции y, осуществляемым конкретным субъектом хозяйствования.

Макроэкономические ПФ можно использовать для описания взаимосвязей между годовыми затратами труда в масштабе региона или страны и годовым конечным выпуском продукции (дохода) этого региона или страны в целом, а также для решения задач анализа, планирования и прогнозирования.

Итак, макроэкономические ПФ.

В данном случае экономика рассматривается как целостная, неструктурированная единица, на вход которой поступают ресурсы, а на выходе получается результат функционирования экономики в форме валового выпуска или валового внутреннего продукта.

Ресурсы рассматриваются как аргументы, а валовой выпуск или валовой внутренний продукт (ВВП) – как функции.

Макроэкономические ПФ – это функции нескольких переменных вида $y=f(x)=f(x_1, x_2, \ldots, x_n, a)$, где

x_i – объемы затрачиваемых или используемых ресурсов (n – число ресурсов);

y – величина объема выпуска;

a – вектор параметров.

Такие ПФ называются **многоресурсными** или **многофакторными**.

Обычно макроэкономические ПФ обозначают заглавными буквами $Y=F(X;A)$.

Если параметры производственной функции не меняются во времени, то такая модель – **статична**.

Производственная функция (**ПФ**) выражает зависимость результата производства от затрат ресурсов. При рассмотрении производственной подсистемы экономики с помощью производственной функции эта подсистема рассматривается как «черный ящик», на вход которого поступают ресурсы $\mathbf{R_1,...,R_n}$, а на выходе получается результат в виде готовых объемов производства различных видов продукции $\mathbf{Y_1,...,Y_m}$.

В качестве ресурсов (факторов производства) на макроуровне наиболее часто рассматриваются накопленный труд в форме производственных фондов (капитал) $\mathbf{K}$ и настоящий (живой) труд $\mathbf{L}$, а в качестве результата – валовой выпуск $\mathbf{Y}$ (либо валовой внутренний продукт , либо национальный доход). Во всех случаях результат будем называть **выпуском** и обозначать **Y**, хотя это может быть и валовой выпуск, и ВВП, и национальный доход.

На макроэкономическом уровне затраты и выпуск измеряются обычно в стоимостных показателях, представляя собой стоимостные (ценностные) агрегаты, т.е. суммарные величины произведений объемов затрачиваемых (или используемых) ресурсов и выпускаемых продуктов на их цены.

Рассмотрим более подробно состав фактора $\mathbf{K}$ (накопленный труд в форме производственных фондов – капитал). Накопленный прошлый труд проявляется в основных и оборотных, производственных и непроизводственных фондах. Выбор того или иного состава $\mathbf{K}$ определяется целью исследования, а также характером развития производственной и непроизводственной сфер в изучаемый период. Если в этот период в непроизводственную сферу вкладывается примерно постоянная доля вновь созданной стоимости и непроизводственная сфера оказывает на производство примерно одинаковое влияние, это может служить основанием напрямую учитывать в производственной функции (ПФ) только производственные фонды.

Как известно, производственные фонды состоят из основных и оборотных производственных фондов. Если соотношение между этими составными частями производственных фондов примерно постоянное в течение всего изучаемого периода, то достаточно напрямую учитывать в ПФ только основные производственные фонды.

В принципе, если изучаемый период достаточно продолжителен и однороден по влиянию на производство указанных выше составных частей, то следует испробовать все варианты включения их в модель (от всех вместе до какого-то одного из них) В дальнейшем будем $\mathbf{K}$ называть фондами.

Таким образом, экономика замещается своей моделью в форме нелинейной ПФ:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{K}, \mathbf{L}), \tag{6.1}$$

т.е. выпуск (продукции) есть функция от затрат ресурсов (фондов и труда).

Дадим экономическую интерпретацию основных характеристик ПФ на примере мультипликативной функции.

Производственная функция $\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{K}, \mathbf{L})$ называется **неоклассической**, если она является гладкой и удовлетворяет следующим условиям, поддающимся естественной экономической интерпретации:

1) $$\mathbf{F(0,L) = F(K,0) = 0} \tag{6.2}$$

при отсутствии одного из ресурсов производство невозможно;

2) $$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{K}} > \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{L}} > \mathbf{0} \tag{6.3}$$

с ростом ресурсов выпуск растет;

3) $$\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial \mathbf{K}^2} < \mathbf{0}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial \mathbf{L}^2} < \mathbf{0} \tag{6.4}$$

с увеличением ресурсов скорость роста выпуска замедляется (закон убывающей эффективности);

4) $$\mathbf{F(+\infty; L) = F(K; +\infty) = +\infty} \tag{6.5}$$

при неограниченном увеличении одного из ресурсов выпуск неограниченно растет.

<u>Мультипликативная</u> ПФ задается выражением

$$\boldsymbol{Y = A \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2}, \quad A > 0, \quad \alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0}, \tag{6.6}$$

где $\mathbf{A}$ – коэффициент нейтрального технического прогресса;

α_1, α_2 – коэффициенты эластичности по труду и фондам.

Покажем, что функция (6.6) является неоклассической.

Свойство 1: очевидно, при отсутствии одного из ресурсов производство невозможно.

Частным случаем этой функции служит функция Кобба-Дугласа (Cobb-Douglas, названная по имени двух американских экономистов, предложивших ее использовать в 1929 г. Производственная функция Кобба-Дугласа активно применяется для решения разнообразных теоретических и прикладных задач благодаря своей структурной простоте): $Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}$, где $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = 1-\alpha$ (α_1, α_2 приблизительно показывают, на сколько процентов изменится выпуск продукции при изменении только затрат труда $\mathbf{L}$ или только объема производственных фондов $\mathbf{K}$ на 1 %).

Мультипликативная ПФ определяется по временному ряду выпусков и затрат ресурсов $(Y_t, K_t, L_t),\quad t = 1,...,T$, где $\mathbf{T}$ – длина временного ряда, при этом предполагается, что имеет место $\mathbf{T}$ соотношений вида

$$Y_t = \delta_t \cdot A \cdot K_t^{\alpha_1} \cdot L_t^{\alpha_2},$$

где δ_t – корректировочный случайный коэффициент, который приводит в соответствие фактический и расчетный выпуск и отражает флюктуацию результата под воздействием других факторов, $\mathbf{M}\delta_t = 1$. (Матожидание – средневзвешенное значение случайной величины с весами-вероятностями: $MY = \sum_{i=1}^{k} y_i \cdot p_i$).

Поскольку в логарифмах эта функция линейна $\ln Y_t = \ln A + \alpha_1 \ln K_t + \alpha_2 \ln L_t + \varepsilon_t$, где $\varepsilon_t = \ln \delta_t (M\varepsilon_t = 0)$, получаем модель линейной множественной регрессии. Параметры функции A, α_1, α_2, могут быть определены по методу наименьших квадратов с помощью стандартных пакетов прикладных программ, содержащих метод множественной регрессии.

В качестве примера можно привести мультипликативную функцию валового выпуска России (млрд. руб.) в зависимости от стоимости основных производственных фонов (млрд. руб.) и числа занятых в народном хозяйстве (млн. чел.), по данным за 1960-1994гг. (все стоимостные показатели даны в сопоставимых ценах этого периода):

$$\boldsymbol{Y = 0.931 \cdot K^{0.539} \cdot L^{0.594}}\,. \qquad (*)$$

Свойство 2: с ростом затрат ресурсов выпуск увеличиться, т.е.

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha_1 A K^{\alpha_1 - 1} L^{\alpha_2} = \frac{\alpha_1 Y}{K} \succ 0\text{, т.к. } \alpha_1 > 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \alpha_2 A K^{\alpha_1} L^{\alpha_2 - 1} = \frac{\alpha_2 Y}{L} \succ 0\text{, т.к. } \alpha_2 > 0. \qquad (6.7)$$

Частные производные выпуска по факторам называются **предельными продуктами** или **предельными (маржинальными) эффективностями** факторов и представляют собой прирост выпуска на малую единицу прироста фактора:

$\frac{\partial F}{\partial K}$ – предельный продукт фондов, предельная фондоотдача (предельная эффективность фондов);

$\frac{\partial F}{\partial L}$ – предельный продукт труда, предельная производительность (предельная эффективность труда).

Для нашей мультипликативной функции из (6.7) вытекает, что предельная фондоотдача пропорциональна средней фондоотдаче $\frac{Y}{K}$ с коэффициентом α_1, а предельная производительность труда – средней производительности труда $\frac{Y}{L}$ с коэффициентом α_2:

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha_1 \frac{Y}{K}; \qquad \frac{\partial F}{\partial L} = \alpha_2 \frac{Y}{L}\,. \qquad (6.8)$$

Отсюда вытекает, что при $\alpha_1 < 1$, $\alpha_2 < 1$ предельная отдача факторов меньше средних.

Свойство 3: при этих же условиях (α_1**<1**, α_2**<1**) мультипликативная функция обладает свойством 3, которое очень часто наблюдается в реальной экономике: с ростом затрат ресурса его предельная отдача падает, т.е.:

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{K}^2} = \alpha_1(\alpha_1 - 1)\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}^{\alpha_1 - 2}\boldsymbol{L}^{\alpha_2} = \alpha_1(\alpha_1 - 1)\frac{\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{K}^2} \prec 0 \text{, т.к. } \alpha_1<1;$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{L}^2} = \alpha_2(\alpha_2 - 1)\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}^{\alpha_1}\boldsymbol{L}^{\alpha_2 - 2} = \alpha_2(\alpha_2 - 1)\frac{\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{L}^2} \prec 0 \text{, т.к. } \alpha_2<1. \tag{6.9}$$

Например, если число работников и их квалификация остаются неизменными, а число обслуживаемых ими станков, которое уже достаточно велико, увеличивается, скажем, в 2 раза, то это не ведет к двойному росту объема выпуска.

Свойство 4: мультипликативная функция обладает и свойством 4, т.е. при неограниченном увеличении одного из ресурсов выпуск неограниченно растет.

Вывод: мультипликативная функция при

$$0 \prec \alpha_1 \prec 1,$$
$$0 \prec \alpha_2 \prec 1$$

является неоклассической.

Экономическая интерпретация параметров *A*, α_1, α_2 мультипликативной ПФ

Параметр ***A*** обычно интерпретируется как параметр нейтрального технического прогресса: при тех же α_1, α_2 выпуск в точке (***K, L***) тем больше, чем больше ***A***.

Для интерпретации α_1, α_2 необходимо ввести понятие **эластичностей** как логарифмических производных факторов:

$$\alpha_K = \frac{\partial \ln Y}{\partial \ln K} = \lim_{\Delta K \to 0} \frac{\Delta Y / Y}{\Delta K / K},$$
$$\alpha_L = \frac{\partial \ln Y}{\partial \ln L} = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta Y / Y}{\Delta L / L}. \tag{6.10}$$

В нашем случае

$\boldsymbol{\ln Y} = \boldsymbol{\ln}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}^{\alpha_1}\boldsymbol{L}^{\alpha_2}\right) = \boldsymbol{\ln A} + \alpha_1 \boldsymbol{\ln K} + \alpha_2 \boldsymbol{\ln L}$, следовательно

$$\alpha_K = \frac{\partial \ln Y}{\partial \ln K} = \alpha_1 \quad \alpha_L = \frac{\partial \ln Y}{\partial \ln L} = \alpha_2$$, т.е.

α_1 – эластичность выпуска по основным фондам;

α_2 – эластичность выпуска по труду.

Из (6.10) видно, что:

коэффициент эластичности фактора показывает, на сколько процентов увеличится выпуск, если фактор возрастет на 1 %.

Например, в нашем примере (*) при увеличении основных фондов (ОФ) на 1 % валовой выпуск повысится на 0,539 %, а при увеличении занятости на 1 % – на 0,594.

Если $\alpha_1 > \alpha_2$, имеет место ***трудосберегающий*** (интенсивный) рост, в противном случае – ***фондосберегающий*** (экстенсивный) рост.

Рассмотрим темп роста выпуска

$$\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{\alpha_2}. \qquad (6.11)$$

Если возвести обе части этого равенства в степень $\dfrac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}$, то получим соотношение

$$\left(\frac{Y_{t+1}}{Y_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{1-\alpha}, \qquad (6.12)$$

в котором справа взвешенное среднее геометрическое темпов роста затрат ресурсов $(\overline{Y}_g = \sqrt[\sum f]{X_1^{f_1} \cdot X_2^{f_2} \cdot \ldots})$, при этом в качестве весов выступают относительные эластичности факторов $\alpha = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad 1 - \alpha = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$.

При $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$ выпуск растет быстрее, чем в среднем растут факторы (функция имеет возрастающую отдачу от масштаба), а при $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$ – медленнее (функция имеет убывающую отдачу от масштаба), $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ (функция имеет постоянную отдачу от масштаба). Действительно, если факторы растут (т.е.

$\mathbf{K_{t+1} > K_t}$, $\mathbf{L_{t+1} > L_t}$), то согласно формуле (6.11) растет и выпуск (т.е. $Y_{t+1} > Y_t$), следовательно, при $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$:

$$\frac{Y_{t+1}}{Y_t} > \left(\frac{Y_{t+1}}{Y_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{1-\alpha},$$

т.е. темп роста выпуска больше среднего темпа роста факторов.

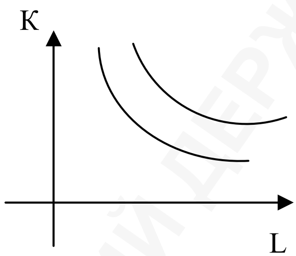
Таким образом, при $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$ производственная функция описывает растущую экономику.

Линией уровня на плоскости K, L, или **изоквантой**, называется множество тех точек плоскости, для которых $F(K,L) = Y_0 = const$.

Для мультипликативной ПФ изокванта имеет вид

$$A \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2} = Y_0 = const, \text{ или } K^{\alpha_1} = \frac{Y_0}{A} \cdot L^{-\alpha_2}, \qquad (6.13)$$

т.е. является степенной гиперболой, асимптотами которой служат оси координат (рис.6.1).



Для разных $\mathbf{K, L}$, лежащих на конкретной изокванте, выпуск равен одному и тому же значению Y_0, что эквивалентно утверждению о взаимозаменяемости ресурсов.

Рисунок 6.1 – Пример изокванты

Поскольку на изокванте $F(K,L) = Y_0 = const$, то

$$\mathbf{dF} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{K}} \mathbf{dK} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{L}} \mathbf{dL} = \mathbf{0}. \qquad (6.14)$$

В этом соотношении $-\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{K}} > \mathbf{0}$, $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{L}} > \mathbf{0}$, поэтому $\mathbf{dK}$ и $\mathbf{dL}$ имеют разные знаки: если $\mathbf{dL} < \mathbf{0}$, что означает сокращение объема труда, то $\mathbf{dK} > \mathbf{0}$, т.е. выбывший в объеме ($\mathbf{dL}$) труд замещается фондами в объеме $\mathbf{dK}$.

Поэтому естественно следующее определение, вытекающее из (6.14).

Предельной нормой замены $\mathbf{S_K}$ труда фондами называется отношение модулей дифференциалов ОФ и труда

$$\mathbf{S_K} = \frac{\mathbf{dK}}{|\mathbf{dL}|} = -\frac{\mathbf{dK}}{\mathbf{dL}} = \frac{\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{K}}, \tag{6.15}$$

соответственно предельная норма замены $\mathbf{S_L}$ фондов трудом

$$\mathbf{S_L} = \frac{\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{L}}, \text{ при этом } \mathbf{S_K} \cdot \mathbf{S_L} = \mathbf{1}.$$

Для мультипликативной функции норма замещения труда фондами пропорциональна фондовооруженности

$$\mathbf{S_K} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{\mathbf{K}}{\mathbf{L}} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{k}, \text{ где } \mathbf{k} = \frac{\mathbf{K}}{\mathbf{L}},$$ что совершенно естественно: недостаток труда можно компенсировать его лучшей фондовооруженностью.

При изучении факторов роста экономики выделяют **экстенсивные** факторы роста (за счет увеличения затрат ресурсов, т.е. увеличения масштабов производства) и **интенсивные** факторы роста (за счет повышения эффективности использования ресурсов).

Как с помощью ПФ выразить **масштаб** и **эффективность** производства?

Если выпуск и затраты выражены в соизмеримых единицах, например представлены в соизмеримой стоимостной форме, то выразить масштаб и эффективность производства достаточно легко. Однако проблема соизмерения настоящего и прошлого труда до сих пор не решена удовлетворительным образом. Поэтому воспользуемся переходом к относительным (безразмерным) показателям.

В относительных показателях мультипликативная ПФ записывается следующим образом:

$$\frac{Y}{Y_0} = \left(\frac{K}{K_0}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{L}{L_0}\right)^{\alpha_2}, \text{ где} \qquad (6.16)$$

Y_0, K_0, L_0 – значения выпуска и затрат фондов и труда в базовый год.

Безразмерная форма (6.16) легко приводится к первоначальному виду

$$Y = \frac{Y_0}{K_0^{\alpha_1} \cdot L_0^{\alpha_2}} \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2} = A \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2}.$$

Таким образом, коэффициент $A = \dfrac{Y_0}{K_0^{\alpha_1} \cdot L_0^{\alpha_2}}$ получает естественную интерпретацию – это коэффициент, который соизмеряет ресурсы с выпуском.

Если обозначить выпуск и ресурсы в относительных (безразмерных) единицах измерения через $\tilde{Y}, \tilde{K}, \tilde{L}$, то ПФ в форме (6.16) запишется так:

$$\tilde{Y} = \tilde{K}^{\alpha_1} \cdot \tilde{L}^{\alpha_2} \quad . \qquad (6.17)$$

Найдем эффективность экономики, представленной такой ПФ. Напомним, что эффективность – это отношение результата к затратам. В нашем случае два вида затрат: затраты прошлого труда в виде фондов $\tilde{\mathbf{K}}$ и настоящего труда $\tilde{\mathbf{L}}$.

Поэтому имеются два частных показателя эффективности: $\dfrac{\tilde{Y}}{\tilde{K}}$ – фондоотдача; $\dfrac{\tilde{Y}}{\tilde{L}}$ – производительность труда.

Поскольку частные показатели эффективности имеют одинаковую размерность (точнее одинаково безразмерны), то можно находить любые средние из них. Так как ПФ выражена в мультипликативной форме, то и среднее естественно взять в такой же форме, т.е. среднегеометрическое значение.

Итак, обобщенный показатель экономической эффективности есть взвешенное среднее геометрическое частных показателей экономической эффективности:

$$\boldsymbol{E} = \left(\frac{\tilde{\boldsymbol{Y}}}{\tilde{\boldsymbol{K}}}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{\tilde{\boldsymbol{Y}}}{\tilde{\boldsymbol{L}}}\right)^{1-\alpha}, \tag{6.18}$$

в котором роль весов выполняют относительные эластичности

$\alpha = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$, $\mathbf{1} - \alpha = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$, т.е. частные эффективности участвуют в образовании обобщенной эффективности с такими же приоритетами, с какими входят в ПФ соответствующие ресурсы.

Из (6.18) вытекает, что с помощью коэффициента экономической эффективности ПФ преобразуется в форму, внешне совпадающую с функцией Кобба-Дугласа:

$$\tilde{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{E} \cdot \tilde{\boldsymbol{K}}^{\alpha} \cdot \tilde{\boldsymbol{L}}^{1-\alpha}, \tag{6.19}$$

но в этом соотношении $\mathbf{E}$ – не постоянный коэффициент, а функция от ($\mathbf{K}, \mathbf{L}$).

Поскольку масштаб производства $\mathbf{M}$ проявляется в объеме затраченных ресурсов по тем же соображениям, которые были приведены при расчете обобщенного показателя экономической эффективности, средний размер использованных ресурсов (т.е. масштаб производства)

$$\mathbf{M} = \widetilde{\mathbf{K}}^{\alpha} \cdot \widetilde{\mathbf{L}}^{1-\alpha}. \tag{6.20}$$

Из (6.19) и (6.20) вытекает, что выпуск $\widetilde{Y}$ есть произведение экономической эффективности и масштаба производства

$$\widetilde{Y} = EM. \tag{6.21}$$

ТЕМА 7 МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЕВА

Рассмотрим еще одну наиболее известную статическую макромодель в форме межотраслевого баланса. В данном случае экономика структурирована и состоит из конечного числа «чистых» отраслей. Предполагается, что вся производящая сфера народного хозяйства разбита на некоторое число n отраслей, каждая из которых производит свой однородный продукт, причем разные отрасли производят разные продукты. Для производства единицы каждого продукта необходимо затратить определенные объемы других продуктов (в том числе и данного продукта). Эти коэффициенты прямых затрат не зависят ни от времени, ни от масштаба производства.

Разумеется, такое представление об отрасли является в значительной мере абстракцией, так как в реальной экономике отрасль определяется не только названием выпускаемого продукта, но и ведомственной принадлежностью своих предприятий (например, данному министерству, тресту и т.п.). Однако представление об отрасли в указанном выше смысле (как «чистой» отрасли) все же полезно, так как оно позволяет провести анализ сложившейся технологической структуры народного хозяйства, изучить функционирование народного хозяйства «в первом приближении».

Цель такого балансового анализа – ответить на вопрос, возникающий в макроэкономике и связанный с эффективностью ведения многоотраслевого хозяйства: *каким должен быть объем производства каждой из* ***n*** *отраслей, чтобы удовлетворить все потребности в продукции этой отрасли*? При этом каждая отрасль выступает, с одной стороны, как производитель некоторой продукции, а с другой – как потребитель продукции и своей, и произведенной другими отраслями.

Связь между отраслями, как правило, отражается в таблицах межотраслевого баланса, а математическая модель, позволяющая их анализировать, разработана в 1936 г. американским экономистом В.Леонтьевым (В.Леонтьев – родился в С-Петегбурге в 1906 г., 1925 – окончил Ленинградский университет, учился в Берлинском университете, получил степень доктора философии, стал сотрудником Института мировой экономики, работает экономическим советником в Китае, в 1931г. переезжает в США, работает в Гарвардском университете, является директором (1948г.) Службы экономических исследований, с 1975 г. проф. Ньюйоркского университета, основывает институт экономического анализа, с 1989 г. консультант при ООН. В 1973 г. ему была присуждена Нобелевская премия за работы в области экономики). Метод экономического анализа «затраты-выпуск» использован Леонтьевым при построении межотраслевых балансов экономики США. Произведенные по этим балансам расчеты позволяют оценивать прямые и косвенные последствия изменений в масштабах, технологии и структуре производства, в потребительском спросе, внешней торговле, инвестиционной сфере, соотношениях цен и доходов. Этот метод является важным инструментом, применяемым правительством для изменения влияний на народное хозяйство различных вариантов инвестиционной и налоговой политики, внешней торговли, военных расходов и т.п.

В основе создания этих моделей лежит балансовый метод, т.е. метод взаимного сопоставления имеющихся материальных, трудовых и финансовых ресурсов и потребностей в них. Если описывать экономическую систему в целом, то под балансовой моделью понимается система уравнений, каждое из которых выражает требование баланса между производимым отдельными экономическими объектами количеством продукции и совокупной потребностью в этой продукции. При таком подходе рассматриваемая система состоит из экономических объектов, каждый из которых выпускает некоторый продукт, часть которого потребляется другими объектами системы, а другая часть выводится за пределы системы в качестве ее конечного продукта. Если вместо понятия продукт ввести более общее понятие ресурс, то под балансовой моделью следует понимать систему уравнений, которые удовлетворяют требованию соответствия наличия ресурса и его использования. Кроме приведенного ранее требования соответствия производства каждого продукта и потребности в нем, можно указать такие примеры балансового соответствия, как соответствие наличия рабочей силы и количества рабочих мест, платежеспособного спроса населения и предложения товаров и услуг и т.д. При этом соответствие понимается либо как равенство, либо менее жестко – как достаточность ресурсов для покрытия потребностей и, следовательно, наличия некоторого резерва.

Особенностью балансовых моделей является то, что они не содержат какого-либо механизма сравнения отдельных вариантов экономических решений и не предусматривают взаимозаменяемости разных ресурсов, что не позволяет сделать выбор оптимального варианта развития экономической системы.

Основу информационного обеспечения балансовых моделей в экономике составляет матрица коэффициентов затрат ресурсов по конкретным направлениям их использования. *Например*, в модели межотраслевого баланса такую роль играет так называемая **технологическая матрица**, т.е. таблица межотраслевого баланса, составленная из коэффициентов (нормативов) прямых затрат на производство единицы продукции в натуральном выражении. По многим причинам исходные данные реальных хозяйственных объектов не могут быть использованы в балансовых моделях непосредственно, поэтому подготовка информации для ввода в модель является весьма серьезной проблемой. Так, при построении модели межотраслевого баланса используется специфическое понятие чистой (или технологической) отрасли, т.е. условной отрасли. Переход от хозяйственных отраслей к чистым отраслям требует специального преобразования реальных данных хозяйственных объектов, например, агрегирования отраслей, исключения внутриотраслевого оборота и др.

Схема межотраслевого баланса производства и распределения продукции

Приведем принципиальную схему межотраслевого баланса производства и распределения совокупного общественного продукта в стоимостном выражении (табл. 7.1).

Таблица 7.1 – Принципиальная схема межотраслевого баланса

Потребляющая отрасль / Производящая отрасль	1	2	3	…	n	Конечный продукт	Валовой продукт
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	…	x_{1n}	y_1	x_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	…	x_{2n}	y_2	x_2
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	…	x_{3n}	y_3	x_3
…	…	…	…	**I**…	…	**II**…	…
N	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	…	x_{nn}	y_n	x_n
Амортизация	c_1	c_2	c_3	…	c_n		
Оплата труда	v_1	v_2	v_3	…	v_n		
Чистый доход	m_1	m_2	m_3	**III** …	m_n	***IV***	
Валовой продукт	X_1	X_2	X_3	…	X_n		$\sum_{i=1}^{n} X_i$

В основу этой схемы положено разделение совокупного продукта на 2 части: **промежуточный** и **конечный** продукт; все народное хозяйство представлено в виде совокупности ***n*** отраслей (имеются в виду чистые отрасли), при этом каждая отрасль фигурирует в балансе как производящая и как потребляющая.

Рассмотрим схему МОБ в разрезе его крупных составных частей. Выделяются четыре части, имеющие различное экономическое содержание; они называются квадрантами баланса и на схеме обозначены римскими цифрами.

Первый квадрант МОБ – это шахматная таблица межотраслевых материальных связей. Показатели, помещенные на пересечениях строк и столбцов, представляют собой величины межотраслевых потоков продукции и в общем виде обозначаются $\boldsymbol{x_{ij}}$, где i и j – соответственно номера отраслей, производящих и потребляющих. Так, величина x_{32} понимается как стоимость средств производства, произведенных в отрасли с номером 3 и потребленных в качестве материальных затрат в отрасли с номером 2. Таким образом, первый квадрант по форме представляет собой квадратную матрицу порядка $\boldsymbol{n}$, сумма всех элементов которой равняется годовому фонду возмещения затрат средств производства в материальной сфере.

Во втором квадранте представлена конечная продукция всех отраслей материального производства, при этом под конечной понимается продукция, выходящая из сферы производства в область конечного использования (на потребление и накопление). В таблице 7.1 этот раздел дан укрупненно в виде одного столбца величин $\mathbf{y_i}$; в развернутой схеме баланса конечный продукт каждой отрасли показан дифференцировано по направлениям использования: на личное потребление населения, общественное потребление, на накопление, возмещение потерь, экспорт и др. Итак, второй квадрант характеризует отраслевую материальную структуру национального дохода, а в развернутом виде характеризует также распределение национального дохода на фонд накопления и фонд потребления, структуру потребления и накопления по отрасли производства и потребителям.

Третий квадрант МОБ также характеризует национальный доход, но со стороны его стоимостного состава как сумму чистой продукции и амортизации; чистая продукция понимается при этом как сумма оплаты труда и чистого дохода отраслей. Сумму амортизации ($\mathbf{c_j}$) и чистой продукции ($\mathbf{v_j} + \mathbf{m_j}$) некоторой j-й отрасли будем называть условно-чистой продукцией этой отрасли и обозначать в дальнейшем $\mathbf{z_j}$.

Четвертый квадрант баланса находится на пересечении столбцов второго квадранта (конечной продукции) и строк третьего квадранта (условно-чистой продукции). Этим определяется содержание квадранта: он отражает конечное распределение и использование национального дохода. В результате перераспределения первоначально созданного национального дохода образуются конечные доходы населения, предприятий, государства. Более детально мы не будем рассматривать элементы этого квадранта, однако очень важным является тот факт, что общий итог четвертого квадранта так же, как и второго и третьего квадрантов, должен быть равен созданному за год национальному доходу.

Таким образом, в целом межотраслевой баланс в рамках единой модели объединяет балансы отраслей материального производства, баланс совокупного общественного продукта, балансы национального дохода, финансовый, доходов и расходов населения. Следует особо отметить, что валовая продукция отраслей, хотя она и не входит в рассмотренные четыре квадранта, представлена на принципиальной схеме МОБ в двух местах: в виде столбца, расположенного справа от второго квадранта, и в виде строки ниже третьего квадранта. Эти столбец и строка валовой продукции замыкают схему МОБ и играют важную роль как для проверки правильности заполнения квадрантов (то есть проверки самого баланса), так и для разработки экономико-математической модели межотраслевого баланса. Если, как показано на схеме, обозначить валовой продукт некоторой отрасли буквой $\mathbf{X_j}$ с нижним индексом, равным номеру данной отрасли, то можно записать два важнейших соотношения, отражающих сущность МОБ и являющихся основой его экономико-математической модели.

Во-первых, рассматривая схему баланса по столбцам, можно сделать очевидный вывод, что итог материальных затрат любой потребляющей отрасли и ее условно-чистой продукции равен валовой продукции этой отрасли. Данный вывод можно записать в виде следующего соотношения:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + z_j , \quad j = 1,...,n . \qquad (7.1)$$

Напомним, что величина условно-чистой продукции $\mathbf{z_j}$ равна сумме амортизации, оплаты труда и чистого дохода j-й отрасли. Соотношение (7.1) охватывает систему из n уравнений, отражающих стоимостной состав продукции всех отраслей материальной сферы.

Во-вторых, рассматриваемая схему МОБ по строкам для каждой производящей отрасли, можно видеть, что валовая продукция той или иной отрасли равна сумме материальных затрат потребляющих ее продукцию отраслей и конечной продукции данной отрасли:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \,, \quad i = 1,\ldots,n \ . \tag{7.2}$$

Формула (7.2) описывает систему из n уравнений, которые называются уравнениями распределения продукции отраслей материального производства по направлениям использования.

Просуммируем по всем отраслям уравнения (7.1), в результате получим

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} z_j \ .$$

Аналогичное суммирование уравнений (7.2) дает

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} y_i \ .$$

Левые части обоих равенств равны, т.к. представляют собой весь валовой общественный продукт. Первые слагаемые правых частей этих равенств также равны, их величина равна итогу первого квадранта. Следовательно, должно соблюдаться соотношение

$$\sum_{j=1}^{n} z_j = \sum_{i=1}^{n} y_i \ . \tag{7.3}$$

Левая часть уравнения (7.3) есть сумма третьего квадранта, а правая часть – итог второго квадранта. В целом же это уравнение показывает, что в межотраслевом балансе соблюдается важнейший принцип единства материального и стоимостного состава национального дохода.

Экономико-математическая модель МОБ

Мы уже отмечали, что основу информационного обеспечения модели МОБ составляет технологическая матрица, содержащая коэффициенты прямых материальных затрат на производство единицы продукции. Эта матрица является также основой экономико-математической модели МОБ. Предполагается, что для производства единицы продукции в j-й отрасли требуется определенное количество затрат промежуточной продукции i-й отрасли, равное $\mathbf{a_{ij}}$. Оно не зависит от объема производства в j-й отрасли и является довольно стабильной величиной во времени. Величины $\mathbf{a_{ij}}$ называются **коэффициентами прямых материальных затрат** (коэффициенты материалоемкости) и рассчитываются следующим образом:

$$\mathbf{a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j} \quad i, j = 1,\ldots,n} \ . \qquad (7.4)$$

Таким образом, имеет место ***определение 1***.

Коэффициент прямых материальных затрат $\mathbf{a_{ij}}$ показывает, какое количество продукции ***i***-й отрасли необходимо, учитывая только прямые затраты, для производства единицы продукции j-й отрасли.

То есть, $\mathbf{a_{ij}}$ есть стоимость продукции отрасли ***i***, вложенной в 1 грн. продукции отрасли **j.** Отсюда видно, что стоимостной подход по сравнению с натуральным обладает более широкими возможностями. При таком подходе уже необязательно рассматривать «чистые», т.е. однопродуктовые отрасли. Ведь в случае многопродуктовых отраслей тоже можно говорить о стоимостном вкладе одной отрасли в выпуск 1 грн. продукции другой отрасли; скажем, о вкладе промышленной сферы в выпуск 1 грн. сельскохозяйственной продукции или о вкладе промышленной группы А (производство средств производства) в выпуск 1 грн. продукции группы В (производство предметов потребления). Вместе с тем надо понимать, что планирование исключительно в стоимостных величинах может легко привести к дисбалансу потоков материально-технического снабжения.

С учетом формулы (7.4) систему уравнений баланса (7.2) можно переписать в виде

$$\mathbf{X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + y_i \quad i = 1,...,n}\,. \tag{7.5}$$

Если ввести в рассмотрение матрицу коэффициентов прямых материальных затрат $\mathbf{A = (a_{ij})}$, вектор-столбец валовой продукции $\boldsymbol{X}$ и вектор-столбец конечной продукции $\boldsymbol{Y}$:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \\ \vdots \\ \mathbf{x_n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y_1} \\ \mathbf{y_2} \\ \vdots \\ \mathbf{y_n} \end{pmatrix}$$, то система уравнений (7.5) в матричной форме имеет вид

$$\mathbf{X = AX + Y}\,. \tag{7.6}$$

Система уравнений (7.5) или в матричной форме (7.6) называется экономико-математической моделью МОБ (моделью Леонтьева), или моделью «затраты-выпуск», или моделью «input-output».

С помощью этой модели можно выполнять три варианта расчета:

– задав в модели величины валовой продукции каждой отрасли ($\mathbf{X_i}$), можно определить объемы конечной продукции каждой отрасли ($\mathbf{Y_i}$):

$$\mathbf{Y = (E - A)X}\,; \tag{7.7}$$

– задав величины конечной продукции всех отраслей ($\mathbf{Y_i}$), можно определить величины валовой продукции каждой отрасли ($\mathbf{X_i}$):

$$\mathbf{X = (E - A)^{-1} Y}\,; \tag{7.8}$$

– для ряда отраслей, задав величины валовой продукции, а для всех остальных отраслей – объемы конечной продукции, можно найти величины конечной продукции первых отраслей и объемы валовой продукции вторых; в этом варианте расчета удобнее пользоваться не матричной формой модели (7.6), а системой линейных уравнений (7.5).

Если определитель матрицы (E-A) не равен нулю: $\mathbf{det(E-A) \neq 0}$, т.е. эта матрица невырожденная, то обратная к ней матрица $\mathbf{(E-A)^{-1}}$ существует.

Обозначим эту обратную матрицу через $\mathbf{B=(E-A)^{-1}}$, тогда систему уравнений в матричной форме (7.8) можно записать в виде

$$\mathbf{X = BY}. \qquad (7.8^1)$$

Элементы матрицы $\mathbf{B}$ будем обозначать через $\mathbf{b_{ij}}$, тогда из матричного уравнения (7.8^1) для любой I-й отрасли можно получить следующее соотношение:

$$\mathbf{X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \cdot Y_j; \quad i = 1,2,...,n.} \qquad (7.9)$$

Из соотношений (7.9) следует, что валовая продукция выступает как взвешенная сумма величин конечной продукции, причем весами являются коэффициенты $\mathbf{b_{ij}}$, которые показывают, сколько всего нужно произвести продукции I-й отрасли для выпуска в сферу конечного использования единицы продукции j-й отрасли.

В отличие от коэффициентов прямых затрат $\mathbf{a_{ij}}$ коэффициенты $\mathbf{b_{ij}}$ называются **коэффициентами полных материальных затрат** и включают в себя как прямые, так и косвенные затраты всех порядков. Если прямые затраты отражают количество средств производства, израсходованных непосредственно при изготовлении данного продукта, то косвенные относятся к предшествующим стадиям производства и входят в производство продукта не прямо, через другие (промежуточные) средства производства.

Дадим определение коэффициента полных затрат:

коэффициент полных материальных затрат $\mathbf{b}_{ij}$ *показывает, какое количество продукции i-й отрасли нужно произвести, чтобы с учетом прямых и косвенных затрат этой продукции получить единицу конечной продукции j-й отрасли*.

Коэффициентами полных материальных затрат можно пользоваться, когда необходимо определить, как скажется на валовом выпуске некоторой отрасли предлагаемое изменение объемов конечной продукции всех отраслей:

$$\Delta \mathbf{X}_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{b}_{ij} \cdot \Delta \mathbf{y}_j \quad , \qquad (7.10)$$

где $\Delta \mathbf{X}_i$ и $\Delta \mathbf{y}_j$ – изменение (приросты) величин соответственно валовой и конечной продукции.

Математический и содержательный анализ матриц коэффициентов прямых и полных материальных затрат

Прежде чем перейти к анализу модели МОБ, рассмотрим основные свойства матрицы коэффициентов прямых материальных затрат $\mathbf{A}$. Коэффициенты прямых затрат по определению являются неотрицательными, следовательно, матрица $\mathbf{A}$ в целом может быть названа **неотрицательной**: $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$. Так как процесс воспроизводства нельзя было бы осуществлять, если бы для собственного воспроизводства в отрасли затрачивалось большее количество продукта, чем создавалось, то очевидно что диагональные элементы матрицы $\mathbf{A}$ меньше единицы: $\mathbf{a}_{ii} < \mathbf{1}$.

Система уравнений МОБ является отражением реальных экономических процессов, в которых содержательный смысл могут иметь лишь неотрицательные значения валовых выпусков, таким образом, вектор валовой продукции состоит из неотрицательных компонент и называется неотрицательным: $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$.

Возникает вопрос: при каких условиях экономическая система способна обеспечить положительный конечный выпуск по всем отраслям? Ответ на этот вопрос связан с понятием продуктивности матрицы коэффициентов прямых материальных затрат.

Будем называть неотрицательную матрицу $\mathbf{A}$ **продуктивной**, если существует такой неотрицательный вектор $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$, что

$$\mathbf{X} > \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}. \qquad (7.11)$$

Очевидно, что условие (7.11) означает существование положительного вектора конечной продукции $\mathbf{Y} > \mathbf{0}$ для модели МОБ (7.6).

Для того чтобы матрица коэффициентов прямых материальных затрат $\mathbf{A}$ была продуктивной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из перечисленных ниже условий:

1. Матрица $(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ неотрицательно обратима, т.е. существует обратная матрица $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \geq \mathbf{0}$.

Пример. Исследуем на продуктивность матрицу

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0{,}2} & \boldsymbol{0{,}6} \\ \boldsymbol{0{,}9} & \boldsymbol{0{,}3} \end{pmatrix}.$$

В данном случае $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0{,}8} & \boldsymbol{-0{,}6} \\ \boldsymbol{-0{,}9} & \boldsymbol{0{,}7} \end{pmatrix}$.

Находим обратную матрицу $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{35} & \boldsymbol{30} \\ \boldsymbol{45} & \boldsymbol{40} \end{pmatrix}$.

Полученная матрица неотрицательна, следовательно, матрица ***A*** продуктивна.

2. Если сумма элементов любого столбца неотрицательной матрицы ***A*** меньше 1, то ***A*** продуктивна (в стоимостной модели баланса это означает, что при любом ***j=1,…,n*** суммарный вклад всех отраслей в выпуск 1 грн. продукции отрасли ***j*** меньше 1, т.е. отрасль ***j*** рентабельна).

Пример. Для матрицы

$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}$ сумма элементов каждого столбца меньше единицы. Следовательно, матрица ***A*** продуктивна.

3 Матричный ряд $\mathbf{E}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^3+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{A}^k$ сходится, причем его сумма равна обратной матрице $(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$.

4 Все главные миноры матрицы $(\mathbf{E}-\mathbf{A})$, т.е. определители матриц, образованных элементами первых строк и первых столбцов этой матрицы порядка от **1** до **n** положительны.

Перейдем теперь к вычислительным аспектам решения задач на основе модели МОБ. Основной объем расчетов по этой модели связан с вычислением матрицы коэффициентов полных материальных затрат $\mathbf{B}$. Если матрица коэффициентов прямых материальных затрат $\mathbf{A}$ задана и является продуктивной, то матрицу $\mathbf{B}$ можно находить по формулам обращения матриц, рассматриваемым в курсе матричной алгебры.

Рассмотрим основной способ нахождения матрицы $\mathbf{B}$. При этом способе предварительно находят матрицу $(\mathbf{E}-\mathbf{A})$, а затем, применяя один из прямых методов обращения невырожденных матриц, вычисляют матрицу $(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$. Одним из наиболее употребительных методов обращения матриц является метод Жордана. Часто используется также метод, основанный на применении формулы матричной алгебры:

$$\mathbf{B}=(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}=\frac{\overline{(\mathbf{E}-\mathbf{A})}}{|\mathbf{E}-\mathbf{A}|}, \qquad (7.16)$$

где в числителе стоит матрица, присоединенная к матрице $(\mathbf{E}-\mathbf{A})$, элементы которой представляют собой алгебраические дополнения для элементов транспонированной матрицы $(\mathbf{E}-\mathbf{A})$, а в знаменателе стоит определитель матрицы $(\mathbf{E}-\mathbf{A})$. Алгебраические дополнения, в свою очередь, для элемента с индексами i и j получаются путем умножения множителя $(-1)^{i+j}$ на минор, получаемый после вычеркивания из матрицы i-й строки и j-го столбца.

Модель равновесных цен

Рассмотрим теперь балансовую модель, двойственную к модели Леонтьева, — так называемую модель равновесных цен. Пусть как и прежде *A* — матрица прямых затрат,

$\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – вектор валового выпуска. Обозначим через $\bar{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$ вектор цен, i-я координата которого равна цене единицы продукции i-й отрасли; тогда, например, первая отрасль получит доход, равный $\mathbf{p_1 x_1}$. Часть своего дохода эта отрасль потратит на закупку продукции у других отраслей. Так, для выпуска единицы продукции ей необходима продукция первой отрасли в объеме a_{11}, второй отрасли в объеме $\mathbf{a_{21}}$, n-й отрасли в объеме a_{n1} и т. д. На покупку этой продукции ею будет затрачена сумма, равная

$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{n1}p_n$. Следовательно, для выпуска продукции в объеме -х:, первой отрасли необходимо потратить на закупку продукции других отраслей сумму, равную $x_1(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{n1}p_n)$. Оставшуюся часть дохода, называемую добавленной стоимостью, мы обозначим через $\mathbf{V_1}$, (эта часть дохода идет на выплату зарплаты и налогов, предпринимательскую прибыль и инвестиции).

Таким образом, имеет место следующее равенство:

$$x_1 p_1 = x_1(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{n1}p_n) + V_1.$$

Разделив это равенство на x_1, получаем

$$p_1 = (a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{n1}p_n) + v_1,$$

где $v_1 = V_1 / x_1$ – норма добавленной стоимости (величина добавленной стоимости на единицу выпускаемой продукции).

Подобным же образом получаем для остальных отраслей:

$$p_2 = (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + ... + a_{n2}p_n) + v_2,$$

………………………………………

$$p_n = (a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + ... + a_{nn}p_n) + v_n.$$

Найденные равенства могут быть записаны в матричной форме следующим образом:

$$\overline{p} = A^T \overline{p} + \overline{v} ,$$

где $\overline{v} = (v_1 , v_2 ,..., v_n)$ — вектор норм добавленной стоимости.

Как мы видим, полученные уравнения очень похожи на уравнения модели Леонтьева с той лишь разницей, что $\overline{x}$ заменен на $\overline{p}$, $\overline{y}$ – на $\overline{v}$, **A** на $\mathbf{A^T}$.

Модель равновесных цен позволяет, зная величины норм добавленной стоимости, прогнозировать цены на продукцию отраслей. Она также позволяет прогнозировать изменение цен и инфляцию, являющиеся следствием изменения цены в одной из отраслей.

Пример. Рассмотрим экономическую систему, состоящую из трех отраслей. Назовем их условно: топливно-энергетическая отрасль, промышленность и сельское хозяйство. Пусть

$$A^T = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix},$$

где, $\mathbf{A^T}$ – транспонированная матрица прямых затрат,

$\overline{v}$ = (4; 10; 4) – вектор норм добавленной стоимости.

Определим равновесные цены. Для этого, как и в модели Леонтьева, воспользуемся формулой

$$\overline{p} = C^T \overline{v} ,$$

где $C^T = (E - A^T)^{-1}$ – транспонированная матрица полных затрат. После необходимых вычислений имеем

$$C^T = \frac{1}{0,444} \begin{pmatrix} 0,58 & 0,14 & 0,18 \\ 0,28 & 0,68 & 0,24 \\ 0,25 & 0,29 & 0,69 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем, что $\overline{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{C}^T \overline{\boldsymbol{v}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Допустим теперь, что в топливно-энергетической отрасли произойдет увеличение нормы добавленной стоимости на 1,11. Определим равновесные цены в этом случае. Принимая во внимание, что $\overline{\boldsymbol{v}} = (5{,}11;\ 10;\ 4)$, находим, что $\overline{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{C}^T \overline{\boldsymbol{v}} = \begin{pmatrix} 11{,}45 \\ 20{,}7 \\ 15{,}625 \end{pmatrix}$.

Таким образом, продукция первой отрасли подорожала на 14,5%, второй — на 3,5%, третьей отрасли — на 4,17%. Нетрудно также, зная объемы выпуска, подсчитать вызванную этим повышением инфляцию.

ТЕМА 8 МИКРОЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ. ФУНКЦИЯ ПОЛЕЗНОСТИ ПОТРЕБИТЕЛЯ

Одним из основных понятий экономической теории является домашнее хозяйство – потребитель. Главная проблема при изучении поведения потребителя заключается в том, чтобы установить, в каких объемах он приобретет наличные товары и услуги при заданных ценах и доходе.

Пусть потребитель располагает доходом I, который полностью расходуется им на приобретение благ (продуктов), причем цены благ считаются заданными. Учитывая текущие структуру цен, объем дохода I и собственные предпочтения, потребитель приобретает определенное количество благ. Математическая модель его поведения в этой ситуации называется *моделью потребительского выбора* (ПВ).

Конкретное решение потребителя о покупке определенного набора товаров математически можно представить как выбор конкретной точки в пространстве товаров. Пусть n – конечное число рассматриваемых товаров, а $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)'$ – вектор-столбец товаров, приобретенных потребителем за определенный срок (например, за год) при заданных ценах и доходе за тот же срок. *Пространство товаров* – это множество всевозможных наборов товаров *x* с неотрицательными координатами

$$C = \{ x : x \geq 0 \} .$$

В теории потребительского выбора предполагается, что каждый потребитель изначально имеет свои предпочтения на некотором подмножестве пространства товаров $X \subset \{ x : x \geq 0 \}$. Это означает, что для каждой пары $x \in X, \quad y \in X$ имеет место одно из трех отношений:

$x \succ y$ – набор *x* предпочтительнее *y*;

$x \prec y$ – набор x менее предпочтителен, чем y;

$x \sim y$ – для потребителя оба набора обладают одинаковой степенью предпочтения.

Отношения предпочтения обладают некоторыми свойствами:

1) если $x \succ y, \quad y \succ z, \quad то \quad x \succ z$ (транзитивность);
2) если $x > y, \quad то \quad x \succ y$ (ненасыщаемость: больший набор всегда предпочтительнее меньшего).

Отношения предпочтения каждого потребителя при определенных предположениях, касающихся предпочтений, можно (и удобно) представить в форме индикатора (показателя) предпочтений, т.е. такой функции полезности $u(x)$, что из $x \succ y$ следует $u(x) > u(y)$ и из $x \sim y$ следует $u(x) = u(y)$. Для каждого потребителя такое представление многовариантно. Например, если $u(x)$ – функция полезности, $cu(x), \quad \ln u(x)$ – это также индикаторы предпочтений.

Таким образом, на множестве потребительских наборов x определяется функция полезности потребителя u(x), значение которой на потребительском наборе x соответствует его потребительской оценке по этому набору (потребительскую оценку u(x) называют еще *уровнем* (или *степенью*) удовлетворения потребностей индивида, если он приобретает или потребляет данный набор x.

В общем, *полезность* – величина очень субъективная для каждого отдельного потребителя, но достаточно объективная для общества в целом.

Введение функции полезности позволяет заменить отношения предпочтения привычными отношениями между числами: больше, меньше, равно.

В теории потребления предполагается, что функция полезности обладает следующими свойствами:

1) $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} > 0$ – с ростом потребления блага полезность растет.

Первые частные производные называют *предельными полезностями благ*, обозначаемых как u'_1 или $M_1u(x)$ – предельная полезность первого блага, и т.д., $M_nu(x)$ – n-го блага;

2) $\lim\limits_{x_i \to 0} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \infty$ – небольшой прирост блага при его первоначальном отсутствии резко увеличивает полезность;

3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} < 0$ – с ростом потребления блага скорость роста полезности замедляется;

То есть предельная полезность каждого блага уменьшается при росте объема его потребления. Данное свойство предельной полезности называется *законом убывания предельной полезности;*

4) $\lim\limits_{x_i \to \infty} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ – при очень большом объеме блага его дальнейшее увеличение не приводит к увеличению полезности.

Условие 3 обычно используется в несколько другой, более широкой трактовке: матрица вторых производных (матрица Гессе) $U(x) = \left\| \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|$ отрицательно определена.

Задача потребительского выбора (задача рационального поведения потребителя на рынке) заключается в выборе такого потребительского набора $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, который максимизирует его функцию полезности при заданном бюджетном ограничении.

Бюджетное ограничение означает, что денежные расходы на продукт не могут превышать денежного дохода:

$p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n \le I$,

где p_1, p_2 , …, p_n – рыночные цены одной единицы каждого из n благ;

I – доход индивида, предназначенный для приобретения блага (величины $p_1, p_2, \ldots, p_n$, I заданы).

Формально задача потребительского выбора может иметь вид

$$u(x) \to \max,$$
$$px \le I, \qquad (8.1)$$
$$x \ge 0,$$

где $\boldsymbol{x = (x_1, \ldots, x_n)'}$;

$p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$;

$px = (p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n)$.

Решение задач потребительского выбора и его свойства

Набор $(x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_n)$, являющийся решением задачи потребительского выбора, принято называть *оптимальным* для потребителя, или *локальным рыночным равновесием* потребителя. Так как значение $u(x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_n)$ является максимальным на всем допустимом множестве, то оно остается таким и после монотонного преобразования функции полезности при сохраняющемся неизменным бюджетном ограничении (монотонное преобразование возникает при умножении функции полезности на некоторое положительное число, возведение ее в положительную степень).

Как видно из (1), задача потребительского выбора является *задачей нелинейного программирования*.

Однако если на каком-либо потребительском наборе $\boldsymbol{x = (x_1, \ldots, x_n)'}$ бюджетное ограничение $p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n \le I$ выполняется как строгое неравенство, то мы можем увеличить потребление какого-либо из продуктов и тем самым увеличить функцию полезности. Следовательно, набор $(x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_n)$, максимизирующий функцию полезности, должен обращать бюджетное ограничение в равенство, т.е.

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = I.$$

Тогда решение задачи потребительского выбора можно заменить на решение задачи на условный экстремум, для решения которой применим метод Лагранжа.

Функция Лагранжа имеет вид

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n - I).$$

Найдем ее первые частные производные по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda$ и приравняем их к нулю:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial x_1} = u_1' + \lambda p_1 = 0, \\
&\frac{\partial L}{\partial x_2} = u_2' + \lambda p_2 = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\frac{\partial L}{\partial x_n} = u_n' + \lambda p_n = 0, \\
&\frac{\partial L}{\partial \lambda} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n - I = 0
\end{aligned}\right\}. \qquad (8.2)$$

Получили систему из n+1 уравнения с n+1 переменной. Решив эту систему уравнений, получим оптимальное решение $(x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_n)$.

Предельной нормой замены первого блага вторым называется отношение $\frac{u_1'}{u_2'}$ в точке локального рыночного равновесия, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \Big/ \frac{\partial u}{\partial x_2}. \qquad (8.3)$$

Норма замены показывает, сколько требуется единиц второго товара, чтобы заменить выбывшую малую единицу первого товара.

Из системы (8.2) следует, что для всех **i, j** в точке $\mathbf{x^0}$ локального рыночного равновесия выполняется равенство

$$\mathbf{u'_I / u'_j = p_i / p_j}.$$

В точке оптимума отношение предельных полезностей любых двух благ равно отношению их рыночных цен, поэтому

$$\mathbf{u'_I / p_i = u'_j / p_j}.$$

Таким образом, получаем, что дополнительная полезность, приходящаяся на дополнительную единицу денежных затрат, в точке оптимума одинакова по всем видам благ. Если все было бы не так, то по крайней мере одну денежную единицу можно было бы перераспределить так, чтобы выросло благосостояние или значение функции полезности, потребителя. Если для некоторых **i, j** благ достигнуто, что $\mathbf{u'_I} / \mathbf{p_i} > \mathbf{u'_j} / \mathbf{p_j}$, то можно попытаться перераспределить деньги от i к **j**, увеличив уровень благосостояния потребителя.

Модель Р.Стоуна

Рассмотрим функцию потребительского предпочтения, называемую функцией Р.Стоуна. Эта функция имеет вид

$$\boldsymbol{u(x)} = \prod_{i=1}^{n} (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{a}_i)^{\alpha_i} \rightarrow \mathbf{max}. \qquad (8.4)$$

Здесь $\boldsymbol{a}_i$ – минимально необходимое количество i –го блага, которое приобретается в любом случае и не является предметом выбора. Для того чтобы набор $\{\boldsymbol{a}_i\}$ мог быть полностью приобретен, необходимо, чтобы доход *I* был больше $\sum_i \boldsymbol{p}_i \boldsymbol{a}_i$ – количества денег, необходимого для покупки этого набора. Коэффициенты степени $\alpha_i > \mathbf{0}$ характеризуют относительную «ценность» благ для потребителя.

Добавив к целевой функции (8.4) бюджетные ограничения $\sum_i \boldsymbol{p}_i \boldsymbol{a}_i \le \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{x}_1 \ge \mathbf{0}, \ldots, \boldsymbol{x}_n \ge \mathbf{0}$, получим задачу, называемую моделью Р.Стоуна. Приравняв к нулю частные производные функции Лагранжа по переменным $\boldsymbol{x}_i$, получаем для всех i от *1* до *n*: $\dfrac{\alpha_i \boldsymbol{u(x)}}{\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{a}_i} + \lambda \boldsymbol{p}_i = \mathbf{0}$, откуда

$$\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{a}_i - \frac{\alpha_i \boldsymbol{u(x)}}{\lambda \boldsymbol{p}_i}. \qquad (8.5)$$

К этим условиям добавляется равенство $\sum_i \boldsymbol{p}_i \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{I} = \mathbf{0}$, выполнение которого эквивалентно равенству нулю частной производной функции Лагранжа по переменной λ. Умножив каждое i -е условие на λp_i и просуммировав их по i , имеем

$$\sum_i \alpha_i u(x)_i + \lambda \sum_i p_i x_i - \lambda \sum_i p_i a_i = 0 . \qquad (8.6)$$

Поскольку в точке оптимума бюджетное ограничение выполняется как равенство, заменим $\sum_i p_i x_i$ на I. Получим $\dfrac{u(x)}{\lambda} = -\dfrac{I - \sum_i p_i a_i}{\sum_i \alpha_i}$. Отсюда имеем функцию спроса

$$x_i = a_i + \frac{\alpha_i \left(I - \sum_j p_j a_j \right)}{p_i \sum_j \alpha_j} . \qquad (8.7)$$

Эту функцию легко проинтерпретировать и запомнить следующим образом. Вначале приобретается минимально необходимое количество каждого блага a_i. Затем рассчитывается сумма денег, остающаяся после этого, которая распределяется пропорционально «весам» важности α_i. Разделив количество денег на цену p_i, получаем дополнительно приобретаемое сверх минимума количество i –го блага и добавляем его к a_i .

ТЕМА 9 МИКРОЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ. МОДЕЛЬ ФИРМЫ

Будем рассматривать модели поведения производителей, основанные на максимизации прибыли. Однако такой критерий не является универсальным. Максимизация текущей прибыли должна соотноситься со стратегическим прогнозом развития предприятия. Например, если в сложившихся условиях важнейшая задача – сохранить предприятие как производственную ячейку, то критерий максимизации прибыли в лобовом исполнении не подходит. Поэтому мы будем считать, что предприятия (фирмы) работают не в экстремальных, а в стабильных условиях, поэтому их поведение определяется стремлением к максимизации прибыли.

Итак, пусть производственная фирма выпускает один вид продукции или много видов, но в постоянной структуре. Тогда годовой выпуск фирмы в натурально-вещественной форме $\boldsymbol{X}$ – это число единиц продукции одного вида или число многономенклатурных агрегатов.

Для производства продукции фирма использует настоящий труд $\boldsymbol{L}$ (среднее число занятых либо отработанные человеко-часы) и прошлый труд в виде средств труда $\boldsymbol{K}$ (основные производственные фонды) и предметов труда $\boldsymbol{M}$ (затраченные за один год топливо, энергия, сырье, материалы, комплектующие и т.п.).

Каждый из этих трех агрегированных ресурсов (труд, фонды и материалы) имеет определенное число разновидностей (труд разной квалификации, оборудование различного вида и т.п.). Обозначим вектор-столбец возможных объемов затрат различных видов ресурсов через $\boldsymbol{x = (x_1, \ldots, x_n)'}$. Тогда технология фирмы определяется ее производственной функцией, выражающей связь между затратами ресурсов и выпуском

$$\boldsymbol{X = F(x)}. \tag{9.1}$$

Предполагается, что $\boldsymbol{F(x)}$ является дважды непрерывно-дифференцируемой и неоклассической, кроме того, ее матрица вторых производных отрицательно определена.

Если цена единицы продукции равна $\boldsymbol{P}$, а цена единицы ресурса $\boldsymbol{j}$*–го* вида – $\boldsymbol{W_j}$, j = 1, …, n, то каждому вектору затрат $\boldsymbol{x}$ отвечает прибыль

$$\boldsymbol{\Pi(X) = pF(x) - wx}, \tag{9.2}$$

где $\boldsymbol{w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)}$ – вектор-строка цен ресурсов.

Цены ресурсов имеют естественный и понятный смысл: если $\boldsymbol{x_j}$ – среднегодовое число занятых определенной профессии, то $\boldsymbol{w_j}$ – годовая заработная плата одного работника данной профессии;

если x_j – покупные материалы (топливо, энергия и т.п.), то w_j – покупная цена единицы данного материала; если x_j – производственные фонды определенного вида, то w_j – годовая арендная плата за единицу фондов или стоимость поддержания единицы фондов в исправности, если фирма владеет этими средствами.

В формуле (9.2) $R = pX = pF(x)$ – стоимость годового выпуска фирмы или ее годовой доход, $C = wx$ – издержки производства или стоимость затрат ресурсов за один год.

Если нет других ограничений на размеры вовлекаемых в производство ресурсов, кроме естественного требования их неотрицательности, то задача на максимум прибыли приобретает вид

$$\max_{\{x \geq 0\}} \left[pF(x) - wx \right]. \tag{9.3}$$

Это задача нелинейного программирования с n условиями неотрицательности $x \geq 0$.

К задачам оптимизации в нелинейном программировании относятся задачи безусловной и условной оптимизации.

Задачами *безусловной оптимизации* называются такие, в которых задается лишь одна целевая функция $F = f(x_j) \rightarrow max(min)$ без указания ограничений и граничных условий (эти задачи носят теоретический характер, так как на практике граничные условия задаются всегда).

Следует заметить, что понятия максимума и минимума целевой функции объединяют в одно понятие *экстремум*.

Так как на практике всегда задаются граничные условия, то целевая функция приобретает наибольшее, наименьшее и экстремальное значение. В этом случае наибольшее или наименьшее значение целевой функции, представляя оптимум, отличается от экстремума и находится на границе. Таким образом, *оптимум* – более широкое понятие, чем экстремум. Если экстремум есть не у всех функций, то в практических задачах оптимум существует всегда.

В рассматриваемом нами классе задач безусловной оптимизации при отсутствии граничных условий понятия оптимума и экстремума совпадают, и для нахождения оптимума в них применяют методы нахождения экстремума.

Задачами *условной оптимизации* называют такие, в которых, кроме целевой функции, задаются некоторые дополнительные условия, которые должны быть выполнены. Ограничения могут быть заданы в виде как уравнений, так и неравенств, при этом введение ограничений либо не влияет на оптимум, либо ухудшает его, подтверждая тем самым вывод, сделанный для задач линейного программирования, что введение дополнительных условий не улучшает оптимального решения, а в ряде случаев приводит к несовместимости.

Итак, в нашей задаче (9.3) в оптимальной точке стоимость предельного продукта данного ресурса должна равняться его цене.

Точно такое же по форме решение имеет задача на максимум выпуска при заданном объеме издержек

$$\begin{gathered} \max F(x) \\ wx \le c,\ x \ge 0. \end{gathered} \tag{9.4}$$

Это задача нелинейного программирования с одним линейным ограничением и условием неотрицательности переменных.

Согласно теории в начале строим функцию Лагранжа

$$L(x,\lambda) = F(x) + \lambda(c - wx),$$

затем максимизируем ее при условии неотрицательности переменных.

Пример 1

Выпуск однопродуктовой фирмы задается следующей производственной функцией Кобба-Дугласа:

$$X = F(K,L) = 3 \cdot K^{2/3} \cdot L^{1/3}.$$

Определить максимальный выпуск, если на аренду фондов и оплату труда выделено 150 д.е., стоимость аренды единицы фондов ω_k =5д.е./е.ф., ставка заработной платы ω_L =10 д.е./чел.

Какова предельная норма замены одного занятого фондами в оптимальной точке?

РЕШЕНИЕ

Получаем задачу

$$X = F(K,L) = 3 \cdot K^{2/3} \cdot L^{1/3} \to max$$

$$5K + 10L = 150.$$

Поскольку $F(0,L)=F(K,0)=0$, то в оптимальном решении $K^*>0, \quad L^*>0$.

Строим функцию Лагранжа

$L(K,L,\lambda)=3K^{2/3}\cdot L^{1/3}+\lambda(150-5K-10L)$.

Находим частные производные функции Лагранжа по каждой переменной и приравниваем их к нулю:

$$\frac{\partial L}{\partial K}=2\cdot\frac{K^{2/3}\cdot L^{1/3}}{K}-5\lambda=0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial L}=\frac{K^{2/3}\cdot L^{1/3}}{L}-10\lambda=0,$$

$$150-5K-10L=0.$$

Решаем полученную систему уравнений:

$$2\cdot\frac{K^{2/3}\cdot L^{1/3}}{K}=5\lambda,$$

$$\frac{K^{2/3}\cdot L^{1/3}}{L}=10\lambda,$$

$$150-5K-10L=0.$$

Поделив первое уравнение на второе получаем:

$$2\frac{K^{2/3}\cdot L^{1/3}}{K}\cdot\frac{L}{K^{2/3}\cdot L^{1/3}}=\frac{5\lambda}{10\lambda}, \text{ т.е.}$$

$$2\frac{L}{K}=\frac{1}{2}.$$

Отсюда получаем $K = 4L$.

Подставим это выражение в третье уравнение

$150 – 20L – 10L = 0$

$150 – 30L = 0$

$L = 5$, следовательно, $K = 20$.

Найдем максимальный размер выпуска

$$X=3\cdot K^{2/3}\cdot L^{1/3}=3\cdot 20^{2/3}\cdot 5^{1/3}=37{,}8.$$

Норма замены труда фондами в оптимальной точке

$$S_k = \frac{\partial F / \partial L}{\partial F / \partial K} = \frac{1K^*}{2L^*} = \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{5} = 2,$$ т.е. один работающий может быть заменен двумя единицами фондов.

ТЕМА 10 МИКРОЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ. МОДЕЛЬ УСТАНОВЛЕНИЯ РАВНОВЕСНОЙ ЦЕНЫ

Модели установления равновесной цены основаны на предположении, что изменение цены зависит от разности спроса и предложения: если спрос выше предложения, то цена возрастает, в противном случае убывает.

Существует много моделей установления равновесной цены на рынке одного товара. Рассмотрим наиболее известную модель – «паутинообразную» модель с дискретным временем.

Паутинообразная модель

Известно, что функция спроса на товар, полученная на основе теории полезности, является убывающей функцией цены. Кроме этого, функция предложения однопродуктовой фирмы, полученная при максимизации прибыли, является возрастающей функцией цены.

Рассмотрим рынок с одним-единственным продуктом, спрос на который характеризуется убывающей функцией совокупного спроса $\phi(p)$, а предложение – возрастающей функцией совокупного предложения $\psi(p)$. Естественно предположить, что эти функции определены и непрерывны для всех $p > 0$. Кроме того, будем считать, что

$$\lim_{p \to 0} \phi(p) = \infty, \quad \lim_{p \to \infty} \phi(p) = 0,$$

$$\lim_{p \to 0} \psi(p) = 0, \quad \lim_{p \to \infty} \psi(p) = \infty.$$

Состояние равновесия характеризуется равенством спроса и предложения

$$\phi(p) = \psi(p), \tag{10.1}$$

причем в силу сделанных предположений уравнение (10.1) имеет единственное решение p^0, так что состояние равновесия $\phi(p^0) = \psi(p^0) = x^0$ единственно.

Представим это на графике (рис.10.1).

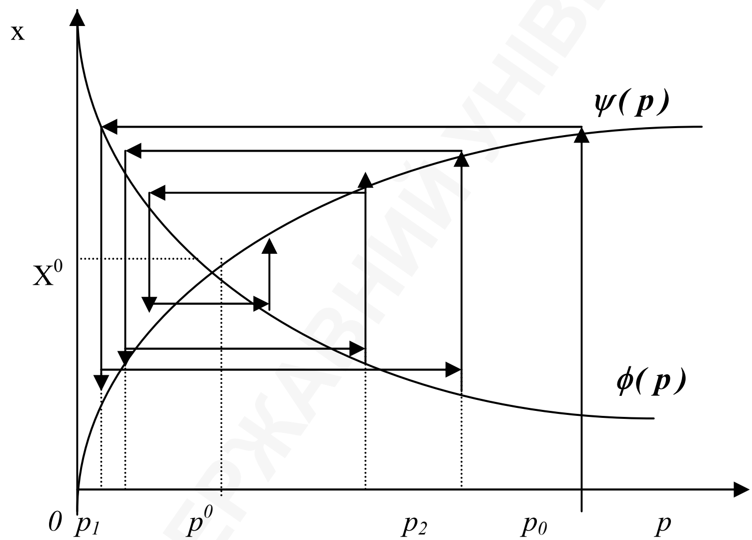


Рисунок 10.1 – График паутинообразной модели

Паутинообраная модель позволяет реализовать процесс «нащупывания» равновесной цены. Пусть в начальный момент времени установлена начальная цена p_0, при этом спрос оказался меньше предложения, т.е.

$$\phi(p_0) < \psi(p_0),$$

тогда понижаем цену до уровня, при котором спрос равен предложению при первоначальной цене

$$\phi(p_1) = \psi(p_0).$$

При новой цене p_1 спрос превышает предложение

$$\phi(p_1) > \psi(p_1),$$

поэтому повышаем цену до уровня p_2, при котором

$$\phi(p_2) = \psi(p_1),$$

и так далее. Таким образом, как видно из рисунка, процесс, описываемый рекуррентным соотношением $\phi(p_t) = \psi(p_{t-1}), \quad t = 1,2,...$, сходится.

МОДЕЛЬ ВАЛЬРАСА

Современная развитая экономика имеет в своем составе многочисленные атомарные хозяйственные единицы и много потребителей. Каждый из этих участников преследует свои цели, поэтому возможны конфликтные ситуации. Для того чтобы экономическая система функционировала нормально, индивидуальные действия различных участников должны быть согласованы между собой.

В модели Вальраса, включающей конечное число потребителей и производителей, такое разрешение конфликта достигается не прямым принудительным путем, а косвенно через конкурентный рыночный механизм, основанный на регулирующем действии системы цен. Если система цен определена, то любая рыночная сделка независимо от того, является ли рынок конкурентным или нет, осуществляется в соответствии с этой системой цен.

Если участники не могут влиять на цены, то рынок называется *конкурентным*. На конкурентном рынке цены для каждого участника неуправляемы, и ему остается только пассивно приспосабливаться к существующей системе цен.

Основная идея Вальраса состоит в том, что при некоторой системе цен индивидуальные планы (намерения) участников становятся совместимыми, т.е. такая система цен обеспечивает распределение ресурсов и продуктов на основе разрешения конфликта между участниками. Такая равновесная ситуация называется *конкурентным равновесием*.

В модели Вальраса рассматривается экономика с l потребителями $(i = 1,...,l), \quad m$ производителями $(k = 1,...,m)$ и n типами товаров $(j = 1,...,n)$. Через $p = (p_1,..., p_n)$ далее будем обозначать вектор-строку цен, а через $x = (x_1 ,..., x_n)'$ – вектор-столбец товаров.

В рассматриваемой модели понятие «товар» трактуется расширенно. Под *товаром* понимается и предмет потребления, и промежуточный продукт (продукт труда), и средство труда (оборудование, здания, сооружения и т.п.), и первичные ресурсы (труд и природные ресурсы).

Модель Вальраса можно рассматривать как формализацию годового цикла производства и распределения товаров в результате взаимодействия субъектов экономики (потребителей и производителей), каждый из которых преследует свои цели.

Каждый потребитель обладает доходом $K(p)$ и имеет свое поле предпочтений товаров, которое может быть задано в виде индикатора предпочтений (функции полезности) $u(x)$. Если обозначить через $X(p) = \{ x : \quad x \in X, \quad px \leq K(p)\}$ множество возможных наборов товаров, доступных потребителю при ценах p, X – область определения $u(x)$, то функция спроса потребителя задается следующим образом:

$$\phi(p) = \begin{cases} x^* : \quad x \in X(p), \quad u(x^*) = \max\limits_{x \in X(p)} u)p) \\ \phi, \quad \text{если максимум не достигается} \end{cases}, \qquad (10.2)$$

т.е. функция спроса – это такое множество доступных наборов товаров, каждый из которых (наборов) максимизирует полезность (потребителя) при заданных ценах p.

Итак, каждый потребитель характеризуется функцией спроса $\phi_i(p)$ и доходом $K_i(p)$. Предполагается, что доход каждого потребителя складывается из двух частей: из дохода pb_i от продажи первоначального запаса товаров b_i и из дохода $l_i(p)$ в результате участия потребителя в производстве, т.е. $K_i(p) = pb_i + l_i(p)$.

Каждый производитель (фирма) задается своими технологическими возможностями. Обозначим через $y_k = (y_{kl} ,..., y_{km})'$ вектор-столбец затрат-выпуска k-го производителя: положительные компоненты этого вектора задают выпуск фирмы, отрицательные компоненты – затраты. Поэтому скалярное произведение $\boldsymbol{py_k}$ представляет собой прибыль фирмы. Технологические возможности фирмы определяются как множество всех допустимых векторов затрат-выпуска $\boldsymbol{Y_k}$. Это множество называется *множеством производственных возможностей*.

Под функцией предложения фирмы понимается один или несколько векторов затрат-выпуска, которые при заданных ценах p максимизируют прибыль:

$$\psi_k(p) = \{ y_k : \quad y_k \in Y_k , \quad py_k^* = \max_{y_k \in Y_k} py_k \} . \qquad (10.3)$$

Предполагается, что $\boldsymbol{Y_k}$ для любого k замкнуто и $0 \in \boldsymbol{Y_k}$, т.е. фирма может не производить продукцию и не делать затрат.

Вектор затрат-выпуска для всей экономики определяется как сумма векторов затрат-выпуска для всех производителей

$$y = \sum_{k=1}^{m} y_k \ . \qquad (10.4)$$

При таком суммировании промежуточные продукты взаимно сокращаются, поскольку они положительны для их производителей и отрицательны для тех фирм, которые потребляют эти промежуточные продукты. В итоге в вектор y войдут с положительным знаком только конечные продукты (конечный выпуск) и с отрицательным знаком – первичные ресурсы.

Вектор y принимает значения из общеэкономического множества производственных возможностей

$$Y = \{ y : \quad y = \sum_{k=1}^{m} y_k , \quad y_k \in Y_k , \quad k = 1,...,m \} .$$

Основная функция экономики независимо от того, является ли она централизованной или децентрализованной, состоит в распределении совокупного производства между производителями и в распределении производственных продуктов среди потребителей.

Распределение производства осуществляется выбором вектора затрат-выпуска $\boldsymbol{y_k}$ из технологического множества производственных возможностей $\boldsymbol{Y_k}$ для каждого производителя

$k=1,...,m$. Сумма $\boldsymbol{y}=\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{y}_k$ представляет собой *совокупный производственный процесс*. Такие совокупные процессы образуют совокупное технологическое множество Y (общеэкономическое множество производственных возможностей).

Сумма по всем потребителям $\boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^{l}\boldsymbol{b}_i$ представляет собой *совокупную первоначальную собственность*. В понятие начальной собственности могут входить не только потребительские товары, но и промежуточные продукты (предметы труда), капитальное оборудование (средства труда), земля и другие природные ресурсы, труд. Множество $\{\boldsymbol{b}\}+\boldsymbol{Y}$ представляет собой *множество совокупного предложения*.

Распределение потребления осуществляется путем выбора каждым потребителем меню потребления $\boldsymbol{x}_i\in\boldsymbol{X}_i,\quad \boldsymbol{i=1,...,l}$. Сумма $\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{l}\boldsymbol{x}_i$ представляет собой *вектор совокупного спроса*, некоторые из компонент которого могут быть отрицательны, если они представляют собой предложение (например, труда).

Под совместным распределением производства и потребления понимается такой набор векторов потребления и векторов затрат-выпуска

$$(\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_i,...,\boldsymbol{x}_l,\boldsymbol{y}_1,...,\boldsymbol{y}_k,...,\boldsymbol{y}_m),\quad \boldsymbol{x}_i\in\boldsymbol{X}_i,\quad \boldsymbol{y}_k\in\boldsymbol{Y}_k,$$

для которого совокупный спрос совпадает с совокупным предложением

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{l}\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{b}+\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{y}_k=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{y}. \tag{10.5}$$

Набор $(\boldsymbol{x}_1^*,...,\boldsymbol{x}_l^*,\boldsymbol{y}_1^*,...,\boldsymbol{y}_m^*,\boldsymbol{p}^*)$ задает конкурентное равновесие в модели Вальраса, если

$$\boldsymbol{x}_i^*\in\phi_i(\boldsymbol{p}^*),\quad \boldsymbol{i=1,...,l},\quad \boldsymbol{y}_k^*\in\psi_k(\boldsymbol{p}^*),\quad \boldsymbol{k=1,...,m}, \tag{10.6}$$

$$\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{y}_k^*+\boldsymbol{b}\ge\sum_{i=1}^{l}\boldsymbol{x}_i^*, \tag{10.7}$$

$$p\left(\sum_{k=1}^{m} y_k^* + b\right) = p^* \sum_{i=1}^{l} x_i^* . \qquad (10.8)$$

При этом p^* называется *вектором конкурентных цен.* Соотношения (10.7), (10.8) называются *законом Вальраса в широком смысле*, если же в (10.7) имеет место равенство, – это *закон Вальраса в узком смысле*.

Таким образом, конкурентное равновесие представляет собой совместное распределение производства и потребления, при котором совокупный спрос не превосходит совокупного предложения (10.7), стоимость совокупного спроса в конкурентных ценах равна стоимости совокупного предложения в этих же ценах (10.8), при этом каждый потребитель максимизирует свою полезность в ценах p^*, а каждый производитель – свою прибыль в тех же ценах (10.6). Таким образом, существование конкурентного равновесия означает существование такой системы равновесных (конкурентных) цен p^*, при которой согласуются конфликтные интересы потребителей и производителей. Весь вопрос в том, при каких условиях существует конкурентное равновесие в модели Вальраса.

Следует отметить, что даже при существовании конкурентного равновесия нет гарантии того, что экономика перейдет в это состояние. Необходимо исследовать, для каких состояний экономики возможен переход в состояние конкурентного равновесия, а для каких невозможен. Если же переход возможен, необходимо указать управляющее правило, при котором этот переход существует.

ТЕМА 11 УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ

Фирмы часто делают различные запасы. Хранятся сырье, заготовки, готовая продукция, предназначенная для продажи.

Запасов не должно быть ни слишком много, ни слишком мало. В первом случае возникает необходимость неоправданных затрат на хранение, на амортизацию товара. Во втором случае может оказаться так, что на складе не будет нужного товара. Кроме того, малое количество запасов подразумевает их частое пополнение, что также требует затрат.

Задача управления запасами состоит в том, чтобы избежать обеих крайностей и сделать общие затраты по возможности меньше. Рассмотрим несколько простейших детерминированных моделей управления запасами.

11.1 Основная модель

Важнейшую роль в наших рассуждениях будет играть *функция изменения запаса*. Это связь между количеством единиц товара на складе (обозначим его через Q) и временем t. Будем считать, что имеется один вид товара.

Если на товар имеется спрос, то функция изменения запаса $Q = Q(t)$ убывает. Если товар, наоборот, завозят на склад, то эта функция возрастает. Будем считать возможным мгновенное пополнение запаса.

Затраты, связанные с запасами, можно разделить на три части.

А *Стоимость товара*.

Б *Организационные издержки*. Это расходы, связанные с оформлением товара, его доставкой, разгрузкой и т.д.

В *Издержки на хранение товара*. Это затраты на аренду склада, амортизацию в процессе хранения и т.д.

Рассмотрим основные величины и предположения относительно них, принятые в рамках основной модели. Мы будем в основном использовать в качестве единицы измерения денежных средств условные единицы (УЕ), это могут быть гривны, доллары и т.д.; в качестве единицы измерения времени – год, хотя можно было бы взять месяц, квартал и т.п.

1. *Цена единицы товара* – c УЕ. Цена постоянна, рассматривается один вид товара.
2. *Интенсивность спроса* – d единиц товара в год. Будем считать, что спрос постоянный и непрерывный.
3. *Организационные издержки* – s УЕ за одну партию товара. Будем считать, что организационные издержки не зависят от размера поставки, т.е. от количества единиц товара в одной партии.

4 *Издержки на хранение запаса* – ***h*** УЕ на единицу товара в год. Будем считать эти издержки постоянными.

5 *Размер одной партии товара* постоянен – ***q*** единиц. Партия поступает мгновенно в тот момент, когда возникает дефицит, т.е. когда запас на складе становится равным нулю.

При сделанных предположениях график функции изменения запаса будет таким, как показано на рис. 11.1: он состоит из повторяющихся циклов пополнения запаса между двумя соседними дефицитами. Вертикальные отрезки отвечают мгновенному пополнению запаса.

Параметры ***c, d, s, h*** считаются заданными. Задача управления запасами состоит в выборе параметра ***q*** таким образом, чтобы минимизировать годовые затраты.

Для решения сформулированной задачи надо прежде всего выразить эти затраты через параметры ***c, d, s, h, q***.

А Поскольку годовая интенсивность спроса равна ***d***, а цена единицы товара – ***c***, то общая стоимость товара в год равна ***c d***.

Б Поскольку в одной партии ***q*** единиц товара, а годовой спрос равен ***d***, то число поставок равно ***d/q***. В течение года организационные издержки равны $\frac{d}{q}s$.

В Средний уровень запаса равен отношению площади под графиком за один цикл к продолжительности цикла. Этот средний уровень равен ***q/2*** (на рис. 11.1 обозначен пунктиром). Поскольку годовые издержки на хранение единицы товара равны ***h***, то общие издержки на хранение составляют $\frac{q}{2}h$.

Таким образом, общие издержки ***C*** вычисляются по формуле $C = cd + \frac{sd}{q} + \frac{qh}{2}$.

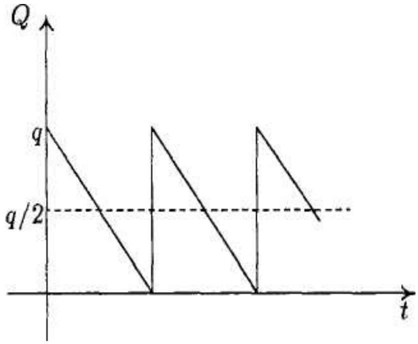


Рисунок 11.1– График функции изменения запаса

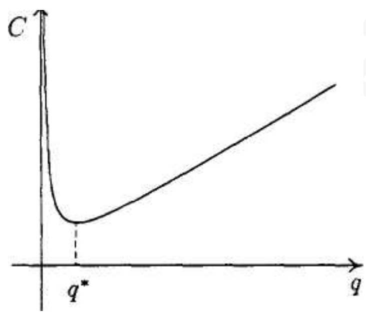


Рисунок 11.2 –График функции издержек

Еще раз напомним, что в рамках модели параметры ***c, d, s, h*** считаются заданными и требуется найти такое число ***q****, чтобы функция **C = C(q)** принимала наименьшее значение на множестве **q > 0** именно в точке ***q****.

График функции ***C = C(q)*** показан на рис. 11.2.

Для нахождения точки *q** минимума функции ***C = C(q)*** найдем ее производную (***c, d, s, h*** — фиксированные числа):

$$C'(q) = (cd)' + \left(\frac{sd}{q}\right)' + \left(\frac{qh}{2}\right)' = -\frac{sd}{q^2} + \frac{h}{2}.$$

Приравнивая $C'(q)$ к нулю, получаем

$$-\frac{sd}{q^2} + \frac{h}{2} = 0.$$

Отсюда можно найти q^*. Получаем:

$$q^* = \sqrt{\frac{2sd}{h}}.$$

Пример 1 Пусть интенсивность равномерного спроса составляет 1000 единиц товара в год. Организационные издержки равны 10 УЕ, издержки на хранение – 4 УЕ на единицу товара в год, цена товара – 5 УЕ.

Определить оптимальный размер партии в предположении, что система подчиняется основной модели.

Решение. Имеем:

$$\boldsymbol{d = 1000, \quad s = 10, \quad h = 4, \quad c = 5.}$$

Общие затраты равны

$$C(q) = cd + \frac{sd}{q} + \frac{qh}{2} = 5000 + \frac{10000}{q} + 2q.$$

Тогда

$$C'(q) = -\frac{10000}{q^2} + 2,$$

а оптимальный размер поставки q^* является решением уравнения $-\frac{10000}{q^2} + 2 = 0,$ т.е. $q^* = \sqrt{5000} \approx 71.$

Замечание. Найдя оптимальный размер заказа, можно определить оптимальное число поставок за один год n^* и соответствующую продолжительность цикла изменения запаса t^*:

$$n^* = \frac{d}{q^*} = \frac{1000}{71} \approx 14,$$

$$t^* = \frac{365}{n^*} = \frac{365}{14} \approx 26 \text{ дней.}$$

11.2 Модель производственных поставок

В основной модели предполагалось, что поступление товаров на склад происходит мгновенно. Это предположение достаточно хорошо отражает ситуацию, когда товар поставляется в течение одного дня (или ночи). Если товары поставляются с работающей производственной линии, необходимо модифицировать основную модель. В этом случае к параметрам c, d, s и h добавляется еще один — производительность производственной линии p (единиц товара в год). Будем считать ее заданной и постоянной.

Эта новая модель называется *моделью производственных поставок.* Величина q по-прежнему обозначает размер партии. В начале каждого цикла происходит "подключение" к производственной линии, которое продолжается до накопления q единиц товара. После этого пополнения запасов не происходит до тех пор, пока не возник дефицит.

График функции изменения запаса имеет вид, изображенный на рис. 11.3.

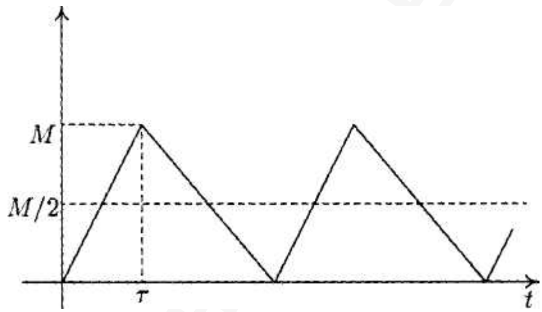


Рисунок 11.3 – График функции изменения запаса

Общие издержки $C(q)$, как и в основной модели, состоят из трех частей.

А Общая стоимость товара в год равна cd.

Б Годовые организационные издержки равны $\frac{sd}{q}$.

В Издержки на хранение вычисляются следующим образом. Пусть τ — время поставки (рис. 11.3). В течение этого времени происходит как пополнение (с интенсивностью p), так и расходование (с интенсивностью d) запаса. Увеличение запаса происходит со скоростью $p—d$. Поэтому достигнутый к концу периода пополнения запаса максимальный его уровень M вычисляется по формуле

$$M = (p - d)\tau$$

(заметим, что $M < q$). Однако

$$p\tau = q$$

(за время τ при интенсивности производства p произведено q единиц товара). Из последних двух равенств следует, что

$$M = (p - d)\frac{q}{p}.$$

Средний уровень запаса, как и в основной модели, равен половине максимального, т. е. $M/2$. Таким образом, издержки на хранение запаса равны

$$\frac{(p - d)qh}{2p}.$$

Общие издержки вычисляются по формуле

$$C = cd + \frac{sd}{q} + \frac{(p - d)qh}{2p}.$$

Оптимальный размер поставок q^* получаем из уравнения

$$C'(q) = -\frac{sd}{q^2} + \frac{(p - d)h}{2p} = 0.$$

Имеем

$$q^* = \sqrt{\frac{2psd}{(p - d)h}}.$$

Пример 2 Интенсивность равномерного спроса составляет 1 тыс. единиц товара в год. Товар поставляется с конвейера, производительность которого составляет 5 тыс. единиц в год. Организационные издержки равны 10 УЕ, издержки на хранение — 2 УЕ, цена единицы товара — 5 УЕ. Чему равен оптимальный размер партии?

Решение. Имеем:

$$d = 1000, \quad p = 5000, \quad s = 10, \quad h = 2, \quad c = 5.$$

Далее,

$$C(q) = cd + \frac{sd}{q} + \frac{(p-d)qh}{2p} = 5000 + \frac{10000}{q} + \frac{4}{5}q,$$

$$C'(q) = -\frac{10000}{q^2} + \frac{4}{5}.$$

В итоге получаем

$$q^* = \sqrt{10000 \cdot (5/4)} \approx 112.$$

Замечание. Найдя оптимальный размер заказа, можно определить оптимальное число поставок за год n^* и соответствующую продолжительность поставки τ^* и продолжительность цикла пополнения запаса t^*:

$$n^* = \frac{d}{q^*} = \frac{1000}{112} \approx 9,$$

$$\tau^* = \frac{q^*}{p} = \frac{112}{5000} \cdot 365 = 9 \text{ дней},$$

$$t^* = \frac{365}{n^*} = \frac{365}{9} \approx 41 \text{ день.}$$

11.3 Модель поставок со скидкой

Рассмотрим ситуацию, описываемую в целом основной моделью, но с одной особенностью, которая состоит в том, что товар можно поставлять по льготной цене (со скидкой), если размер партии достаточно велик. Иными словами, если размер партии q не менее заданного числа q_0, товар поставляется по цене c_0, где $c_0 < c$.

Функция общих издержек $C(q)$ задается в таком случае следующим образом:

$$C(q) = \begin{cases} cd + \dfrac{sd}{q} + \dfrac{qh}{2}, & \textit{если} \quad q < q_0, \\ c_0 d + \dfrac{sd}{q} + \dfrac{qh}{2}, & \textit{если} \quad q \geq q_0. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что функция ***C(q)*** в точке $q = q_0$ разрывна. Обе функции

$$f(q) = cd + \frac{sd}{q} + \frac{qh}{2}$$

и

$$f_0(q) = c_0 d + \frac{sd}{q} + \frac{qh}{2}$$

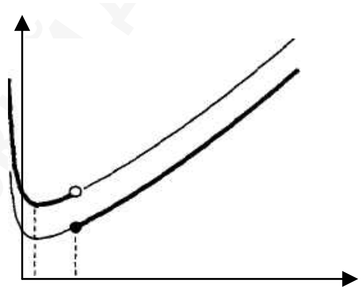
имеют минимум в точке, где

$$f'(q) = f_0'(q) = 0,$$

т.е. в точке

$$\bar{q} = \sqrt{\frac{2sd}{h}}\ .$$

Для выяснения вопроса о том, какой размер партии оптимален, следует сравнить значения функции *C(q)* в точках *q* и q_0 , и та точка, где функция *C(q)* принимает меньшее значение, будет оптимальным размером партии q^* в модели поставок со скидкой (см. рис. 11.4, 11.5).



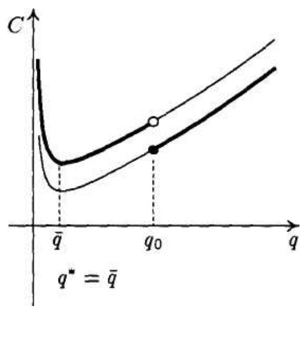


Рисунок 11.4 – Модель поставок   Рисунок 11.5 – Модель

со скидкой	поставок со скидкой

Замечание. Может случиться так, что $C(\bar{\boldsymbol{q}}) = C(q_0)$. Тогда, разумеется, $q^* = \bar{\boldsymbol{q}} = q_0$.

Пример 3 Предположим, что интенсивность равномерного спроса составляет 1000 единиц товара в год. Организационные издержки равны 10 УЕ, издержки на хранение — 4 УЕ. Цена единицы товара равна 5 УЕ, однако если размер партии не менее 500 единиц, цена снижается до 4 УЕ. Найти оптимальный размер партии.

Решение. Здесь

$$d = 1000, \quad s = 10, \quad h = 4, \quad c = 5, \quad q_0 = 500, \quad c_0 = 4.$$

Общие издержки определяются функцией $C(q)$:

$$C(q) = \begin{cases} f(q) = 5000 + \dfrac{10000}{q} + 2q, & \textit{при} \quad q < 500, \\ f_0(q) = 4000 + \dfrac{10000}{q} + 2q, & \textit{при} \quad q \geq 500. \end{cases}$$

Найдем точку локального минимума. Имеем:

$$f'(q) = f_0'(q) = -\frac{10000}{q^2} + 2 = 0,$$

откуда

$$\bar{q} = \sqrt{5000} \approx 71.$$

Поскольку $\bar{q} < 500,$ то

$$C(\bar{q}) = f(\bar{q}) = f(71) \approx 5000 + \frac{10000}{71} + 2 \cdot 71 \approx 5283.$$

В точке $q = q_0$ получаем

$$C(q_0) = f_0(q_0) = f_0(500) \approx 4000 + \frac{10000}{500} + 2 \cdot 500 \approx 5020.$$

Таким образом, $q^* = 500.$

ТЕМА 12 МЕТОДЫ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В ПРОЦЕССАХ ПЛАНИРОВАНИЯ, УПРАВЛЕНИЯ И ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ

Любой вид производства или сферу деятельности можно охарактеризовать двумя основными параметрами: *объемом выпуска продукции* ***Об****,* определяемым различными показателями (валовой, реализованной, чистой нормативной продукцией и др. или просто в гривнях) и *ее качеством* ***К***. При анализе производственно-хозяйственных ситуаций часто принимают, что объем выпуска продукции измеряется стоимостными показателями (грн.), а качество выпускаемой продукции —трудоемкостью (чел.-ч). На практике обычно стремятся к увеличению как выпуска продукции, так и к повышению ее качества, т.е. переходят к решению *многопараметрических (многокритериальных) задач.*

Для решения подобных задач обычно применяется *метод последовательных уступок,* суть которого заключается в том, что один из оптимизируемых параметров принимается в качестве целевой функции, а для других задаются некоторые предельные значения граничных условий. Задачи решаются обычно с привлечением ЭВМ в нескольких вариантах, отличающихся друг от друга предельно задаваемыми значениями. Результаты решения подобных задач при разных вариантах исходных условий, значениях объемов и уровня качества продукции позволяют сформулировать следующие выводы:

1 В задачах многопараметрической оптимизации, как и в задачах распределения ресурсов, возможны две постановки:

а) максимизация объемов при обеспечении качества не ниже заданного значения; **б)** максимизация качества при обеспечении объемов не меньше заданного значения. В общем виде эти постановки задач можно записать следующим образом:

– первая постановка:

$$Об = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{c_j x_j} \rightarrow \boldsymbol{max},$$

$$К = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{s_j x_j} \geq \boldsymbol{K_з},$$

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a_{ij} x_j} \leq \boldsymbol{b_i},$$

$$\boldsymbol{d_j \leq x_j \leq D_j; \quad j = 1,...,n; \quad i = 1,...,m.}$$

– вторая постановка:

$$К = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{s_j x_j} \rightarrow \boldsymbol{max},$$

$$Об = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{c_j x_j} \geq \boldsymbol{Об_з},$$

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a_{ij} x_j} \leq \boldsymbol{b_i},$$

$$\boldsymbol{d_j \leq x_j \leq D_j; \quad j = 1,...,n; \quad i = 1,...,m.}$$

Применяя метод последовательных уступок, можно удовлетворять желания ЛПР, устанавливая строгие зависимости объема выпуска продукции от ее качества, и наоборот, на их основе выбирать взаимосвязанные оптимальные значения параметров ***Об*** и ***К***. Обобщая вышеприведенные модели на любое число оптимизируемых параметров, можно решать задачу максимизации по **L** параметрам, при этом один из них следует принимать в качестве целевой функции, а остальные **(L–1**) параметров переводить в разряд ограничений.

2 В ряде ситуаций при использовании методов многопараметрической оптимизации исходят из относительной важности или значимости, каждого оптимизируемого параметра, при этом наиболее часто пользуются назначением *коэффициентов веса,* определяемых обычно с помощью методов экспертных оценок с

непосредственным назначением коэффициентов веса, оценкой важности параметров в баллах, парных соотношений, поиском компромиссного решения при многопараметрической оптимизации (между оптимизируемыми параметрами и формированием специальной целевой функции) с отысканием компромиссной целевой функции и применением многоцелевого программирования.

В реальных ситуациях принятие оптимального решения часто связывается с выбором наилучшего варианта из множества допустимых или имеющихся в наличии. Трудность такого выбора обуславливается не числом вариантов, а тем, что ЛПР часто не может сформулировать, в каком смысле вариант должен быть лучшим (по быстродействию, стоимости, надежности, качеству и т. п.). Обычно цель принятия оптимального решения состоит в определении совокупности значений параметров, обеспечивающих принятой целевой функции оптимальное в определенном смысле значение из всех возможных: при максимизации целевая функция приобретает максимально возможное значение (**max F**). Если же стоит задача выбора вариантов, то после принятия некоторого критерия $\mathbf{K_i}$ выбирается тот вариант, для которого значение **K** является максимальным лишь из всех сравниваемых вариантов, т. е. $\mathbf{max}\ \boldsymbol{K} = \mathbf{max}\ \boldsymbol{\{K_i\}}$, где i — номер варианта.

При этом нет оснований утверждать, что лучший из выбранных вариантов является действительно оптимальным, т. е. лучшим из всех возможных. Более того, обычно получается, что $\mathbf{max}\ \boldsymbol{K} < \mathbf{max\ F}$.

Пример 1 Пусть требуется из четырех вариантов системы, характеризуемой параметрами: *производительностью* **Q** (шт./мин) и *стоимостью* ***С*** (грн.), приведенными в табл. 12.1, выбрать наилучший вариант по интегральному критерию, характеризующему обобщенные свойства каждого варианта системы.

Таблица 12.1 – Исходные данные для выбора лучшего варианта системы

Параметр системы	Вариант системы			
	1	2	3	4
Q, шт./мин.	20	30	60	50
С, грн.	100	400	500	200

Таблица 12.2 – Решение примера при трех случаях

Ситуация	Весовой коэффициент		Вариант системы			
	a_1	a_2	1	2	3	4
1	1	0	0,33	0,5	1	0,83
2	0,5	0,5	0,067	-0,15	0	0,22
3	0	1	-0,2	-0,8	-1,0	-0,4

Решение. Выбранный интегральный критерий должен обеспечивать операции с параметрами различной размерности, включая нормирование по некоторому заданному значению и учет относительной важности каждого параметра с помощью коэффициентов веса. Улучшение желательных параметров должно увеличивать значение критерия, а рост нежелательных параметров — снижать его значение. В качестве критерия, удовлетворяющего приведенным требованиям, принимается зависимость, которая для данной рассматриваемой задачи может быть записана следующим образом:

$$\boldsymbol{K_i = a_1 \cdot Q_i / Q_н - a_2 \cdot C_i / C_н} \,, \qquad (12.1)$$

где $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ — коэффициенты веса; **Qн**, **Qн** — нормирующие значения производительности **Q** и стоимости **C** системы *(минус* перед вторым членом показывает, что рост стоимости снижает значение критерия).

Таким образом, зависимостью (12.1) обеспечивается увеличение критерия при повышении производительности и уменьшении стоимости сравниваемых вариантов. Следовательно, лучшим является вариант, для которого значение **К** будет наибольшим, т. е. **мах К = мах {$\mathbf{K_1, K_2, K_3, K_4}$}.**

Для определения критерия в качестве нормирующих значений принимаем: $\mathbf{Q_н}$ **= Qмах = 60; Сн = Смах = 500**. При этом зависимость приобретает вид $\boldsymbol{K_i = a_1 \cdot Q_i/60 - a_2 \cdot C_i/500}$ (относительную важность параметров оценим коэффициентами веса).

Определим значения критерия $\boldsymbol{K_i}$ для трех основных ситуаций, при которых:

а) важна лишь производительность (при этом $\mathbf{a_1 = 1,\ a_2} = \boldsymbol{0}$)*;*

б) производительность и стоимость одинаково важны (при этом $\mathbf{a_1 = 0{,}5,\ a_2} = \boldsymbol{0{,}5}$);

в) важна лишь стоимость (при этом $\mathbf{a_1 = 0,\ a_2} = \boldsymbol{1}$).

Значения критерия $\boldsymbol{K_i}$*,* применимые к выделенным ситуациям и четырем сравниваемым вариантам системы, приведены в табл.12.2, откуда следует, что *наибольшее значение критерия зависит не только от параметров вариантов, но и от принятых коэффициентов веса.* Для ситуации *1* лучшим оказывается вариант 3*,* для ситуации *2* — вариант 4, для ситуации *3* — вариант 1 (вариант 2 ни в какой из трех рассмотренных ситуаций не стал наилучшим худшим).

Таким образом, вариант, выбранный как лучший, является им лишь в смысле принятого критерия при заданных нормирующих значениях параметров и назначенных коэффициентах веса. При изменении критерия, значений нормирующих элементов или коэффициентов веса лучшими могут оказаться совершенно другие варианты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Высшая математика для экономистов: Учебн. пособие для вузов / Н.Ш.Кремер, Б.А.Путко, И.М.Тришин, М.Н.Фридман; Под ред. проф. Н.Ш.Кремера.–М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 439 с.
2. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике: Учебник.–2-е изд. – М.: МГУ им. М.В.Ломоносова, Издательство «Дело и Сервис», 1999. – 368 с.
3. Исследование операций в экономике: Учебн. пособие для вузов / Н.Ш.Кремер, Б.А.Путко, И.М.Тришин, М.Н.Фридман; Под ред. проф. Н.Ш.Кремера.–М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 407 с.
4. Колемаев В.А. Математическая экономика: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 240 с.
5. Литвак Б.Г. Разработка управленческого решения: Учебник. – М.: Дело, 2000. – 392 с.
6. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учеб. пособие для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 367 с.
7. Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г. Математические методы и модели в управлении: Учеб. пособие. – М.: Дело, 2000. – 440 с.