

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Сумський державний університет

В. І. Симоновський

ДИНАМІКА РОТОРНИХ МАШИН

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Суми
Сумський державний університет
2011

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Сумський державний університет

В. І. Симоновський

ДИНАМІКА РОТОРНИХ МАШИН

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

для студентів напрямку підготовки
6.040202 «Механіка»
денної форми навчання

Затверджено на засіданні кафедри загальної
механіки і динаміки машин як конспект
лекцій з дисципліни «Динаміка роторних
машин».
Протокол № 1 від 30.08.2011 р.

Суми
Сумський державний університет
2011

Динаміка роторних машин: конспект лекцій / укладач
В. І. Симоновський. – Суми: Сумський державний університет, 2011. –
119 с.

Кафедра загальної механіки та динаміки машин

ЗМІСТ

ЛЕКЦІЯ 1	6
1. Передмова	6
2. Проста консервативна одномасова модель ротора	6
3. Пряма синхронна прецесія	8
4. Явище самовирівнювання	10
ЛЕКЦІЯ 2	13
1. Урахування зовнішнього опору	13
2. Кінематика прецесій ротора, що обертається	16
ЛЕКЦІЯ 3	21
1. Рівняння динаміки	21
2. Умови стійкості	23
3. Вимушені коливання горизонтального урівноваженого ротора	25
4. Кінематика руху горизонтального ротора	26
ЛЕКЦІЯ 4	28
1. Одномасова модель ротора відцентрового насоса	28
ЛЕКЦІЯ 5	33
1. Основні співвідношення	33
2. Автоколивання ротора без торкання із статором	35
3. Автоколивальна прецесія ротора в умовах торкання із статором	36
ЛЕКЦІЯ 6	39
1. Автоколивання плаваючого кільця ущільнювача при сухому терті торця	39
2. Стійкість і автоколивання одномасової моделі при анізотропії пружних сил	40
3. Вплив в'язкого внутрішнього тертя на динаміку горизонтального ротора	42
ЛЕКЦІЯ 7	46
1. Дискретні багатомасові моделі	46
2. Вплив гіроскопічного моменту	49
ЛЕКЦІЯ 8	57
1. Метод початкових параметрів	57
ЛЕКЦІЯ 9	67
1. Метод початкових параметрів (продовження)	67
ЛЕКЦІЯ 10	70
2. Метод кінцевих елементів	70
ЛЕКЦІЯ 11	76

1. Умови динамічної рівноваги твердого тіла, що обертається	76
2. Види невірноваженості.....	77
3. Еквівалентні системи дисбалансів	80
4. Поняття жорсткого ротора	82
5. Критерії якості балансування.	82
ЛЕКЦІЯ 12	84
1. Статичне балансування	84
2. Динамічне балансування	85
ЛЕКЦІЯ 13	90
1. Явище розбалансування ротора, урівноваженого в двох площинах на низьких оборотах	90
2. Розкладання прогинання синхронної процесії неврівноваженого ротора за власними формами	91
3. Балансування за формами власних коливань	94
4. Спосіб Ден-Гартога.....	97
ЛЕКЦІЯ 14	100
1. Математичні моделі.....	100
2. Цільова функція методу найменших квадратів.....	102
3. Лінійне оцінювання	104
4. Оцінювання у разі комплексних коефіцієнтів впливу.....	107
ЛЕКЦІЯ 15	110
1. Балансування за допомогою розрахункової моделі ротора	110
2. Практичне балансування гнучкого ротора на робочій частоті. .	111
3. Використовування формули лінійної регресії при балансуванні гнучких роторів способом Ден-Гартога.	114
4. Використовування формули лінійної регресії при балансуванні за власними формами	115
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	119

ЛЕКЦІЯ 1

1. Передмова.
2. Проста консервативна одномасова модель ротора.
3. Пряма синхронна прецесія.
4. Явище самовирівнювання.

1. Передмова

Ротор є основним елементом в енергетичних машинах (турбінах, відцентрових насосах, турбокомпресорах), в електричних машинах (синхронних генераторах, синхронних і асинхронних двигунах), в транспортних машинах, машинах хімічної і текстильної промисловості, приладах (гіроскопах, відцентрових регуляторах). Ротор служить інструментом перетворення енергії, використовуваним у різних галузях техніки.

В той же час ротори є джерелами шкідливих вібрацій, які є визначальними причинами зниження надійності і довговічності машин і механізмів, промислових будівель і споруд.

Знання особливостей динаміки роторів, володіння методами її розрахунку в поєднанні із творчим застосуванням тих або інших математичних моделей багато в чому визначають професійний рівень фахівця в області динаміки і міцності машин.

2. Проста консервативна одномасова модель ротора

Розглянемо вертикальний вал із закріпленням на ньому диском (рис. 1а). Нехтуватимемо податливістю опор, розподіленою масою вала і можливими коливаннями диска щодо осей, перпендикулярних осі вала. Тоді рух центра мас диска C можна розглядати як плоский і описувати його як коливання матеріальної точки в площині xOy , перпендикулярній осі вала.

Одномасова модель, як показує практика, дає можливість досить точно (до 5%) оцінити першу критичну частоту ротора двохопornoї конструкції з приблизно симетричним розташуванням на валу насадних деталей. Такі конструкції характерні, наприклад, для турбокомпресорів і відцентрових насосів.

Рівняння руху центра мас C ротора можуть бути записані на підставі теореми про рух центра мас у вигляді

$$m\ddot{x}_c = F_{px}, \quad m\ddot{y}_c = F_{py}, \quad (1)$$

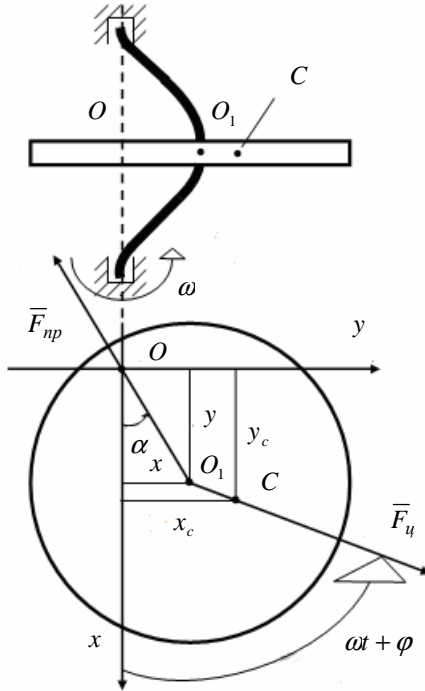


Рисунок 1

де x_c, y_c - координати центра мас диска C ; m - маса диска; F_{np_x}, F_{np_y} - проекції сили пружності вала на осі Ox, Oy .

Сила пружності (рис. 1б) $F_{np} = cr$, де $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, x, y - координати геометричного центра диска O_1 , що в рівноважному положенні збігається з початком координат O , що лежить на осі вала; c - згинальна жорсткість вала. Проекції пружної сили на нерухомі осі рівні:

$$F_{np_x} = -cr \cos \alpha = -cx, \quad F_{np_y} = -cr \sin \alpha = -cy, \quad (2)$$

де α - кут, який утворює лінія прогинання OO_1 з нерухомою віссю Ox .

Нехай лінія ексцентриситету $O_1C = e$, яка обертається з частотою обертання ротора ω , утворює з віссю x кут $\omega t + \varphi$. Тоді координати центра мас C , як це видно з рис. 1б, будуть рівні:

$$\begin{aligned} x_c &= x + e \cos(\omega t + \varphi), \\ y_c &= y + e \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (3)$$

Підставляючи співвідношення (3) і (2) в (1), одержимо рівняння:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + cx &= me\omega^2 \cos(\omega t + \varphi), \\ m\ddot{y} + cy &= me\omega^2 \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (4)$$

Математичну модель (4) можна інтерпретувати як рівняння плоского руху матеріальної точки масою m з координатами x, y у лінійному ізотропному пружному полі, на яку діє якась «відцентрова сила» $\vec{F}_ц$, що за модулем дорівнює $me\omega^2$, вектор якої обертається з частотою обертання ротора ω і направлений уздовж вектора $\vec{e} = \overline{O_1C}$ (рис. 1б).

Увівши комплексний радіус-вектор центра O_1 $z = x + jy$, систему (4) можна представити у «спресованому» вигляді

$$m\ddot{z} + cz = me\omega^2 e^{j(\omega t + \varphi)}. \quad (5)$$

3. Пряма синхронна прецесія

Вимушену складову розв'язання рівняння (5) шукаємо у вигляді

$$z = re^{j\omega t}. \quad (6)$$

Розв'язку (6) в декартових координатах відповідають залежності

$$x = r \cos \omega t, \quad y = r \sin \omega t. \quad (7)$$

Це розв'язання описує пряму синхронну прецесію, коли площина зігнутої осі вала і ламана лінія OO_1C обертаються з кутовою

швидкістю ω , а прогинання центра ротора O_1 дорівнює r . При цьому волокна вала не випробовують змінних напруг.

Підставляючи (6) в (5), одержимо після скорочення на $e^{j\alpha}$:

$$r(c - m\omega^2) = me\omega^2 \cos \varphi + jme\omega^2 \sin \varphi.$$

З цього комплексного співвідношення виходить, що

$$r = \frac{e\omega^2}{\omega_{кр}^2 - \omega^2}, \quad (8)$$

$$\varphi = 0 \text{ при } \omega_{кр} > \omega, \quad \varphi = \pi \text{ при } \omega_{кр} < \omega,$$

де критична частота обертання

$$\omega_{кр} = \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (9)$$

Графік залежності відносного прогинання $\varepsilon = \frac{r}{e}$ від відносної частоти обертання

$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_{кр}}; \quad \varepsilon = \frac{r}{e} = \frac{\bar{\omega}^2}{1 - \bar{\omega}^2}$$

показаний на рис. 2.

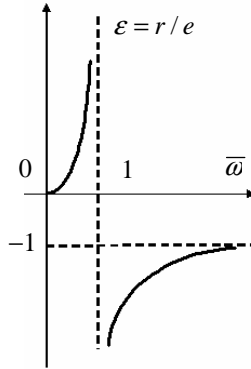


Рисунок 2

4. Явище самовирівнювання

У докритичній області ($\bar{\omega} < 1$) прогинання збільшується від нуля до ∞ (при $\bar{\omega} \rightarrow 1$). При цьому $r > 0$ і $\varphi = 0$, що відповідає збігу напрямку вектора \bar{r} прогинання з вектором \bar{e} ексцентриситету (рис. 3а).

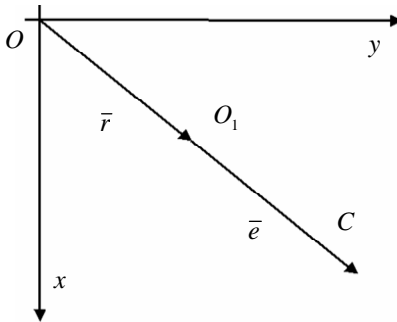


Рисунок 3а

У закритичній області ($1 < \bar{\omega} < \infty$) прогинання стає негативним і $\varphi = \pi$, що означає зрушення по фазі між векторами \bar{r} і \bar{e} на кут π (рис. 3б).

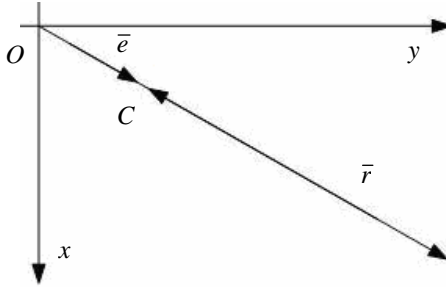


Рисунок 3б

При збільшенні $\bar{\omega} \rightarrow \infty \varepsilon \rightarrow -1$, що означає прагнення центра мас ротора C до збігу з центром обертання O . У цьому полягає ефект самовирівнювання гнучких роторів (тобто роторів, частота обертання яких перевищує критичну). При $\omega \gg \omega_{кр}$ прогинання ротора наближається до величини e ексцентриситету мас ротора, а амплітуда динамічної реакції R у підшипниках наближатиметься до значення

$$R = ce. \quad (10)$$

Ефект самовирівнювання використовується у швидкохідних роторах, де через умови експлуатації не може бути досягнуте точне балансування (центрифуги, пральні машини, веретена). У цьому випадку часто застосовують вельми податливі опори, щоб зменшити еквівалентну жорсткість і, отже, критичну частоту ротора.

Для пояснення останнього розглянемо схему одномасового симетричного ротора з податливими ізотропними опорами (рис. 4а).

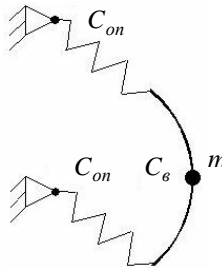


Рисунок 4а

Згинальна жорсткість двохопрного симетричного вала, як відомо, дорівнює

$$c_g = \frac{48EI}{l^3},$$

де l - довжина вала; E - модуль Юнга; I - момент інерції перетину

(для круглого вала $I = \frac{\pi d^4}{64}$, де d - діаметр вала). Очевидно, що

еквівалентна жорсткість одномасової моделі ротора, що відповідає послідовному з'єднанню пружин (рис. 4б), дорівнює

$$c = \frac{2c_{on}c_g}{(c_g + 2c_{on})} = \frac{c_g}{1 + \frac{c_g}{2c_{on}}}$$
 і буде менше жорсткості вала.

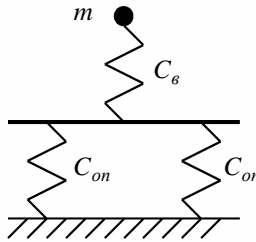


Рисунок 4б

Із збільшенням податливості опор ($c_{on} \rightarrow 0$) еквівалентна жорсткість ротора з зменшуватиметься, що приведе при відносно великих частотах обертання ($\omega \gg \omega_{кр}$) до достатньо малих динамічних навантажень (див. формулу (10)). Крім того, при цьому ці навантаження зменшуються під час переходу через резонанс, який відбувається на нижчій частоті обертання.

ЛЕКЦІЯ 2

1. Урахування зовнішнього опору.
2. Кінематика прецесії ротора, що обертається.

1. Урахування зовнішнього опору

Рівняння одномасової моделі невірноваженого ротора, що враховують зовнішнє в'язке тертя, записуються у вигляді

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + b\dot{x} + cx &= em\omega^2 \cos(\omega t + \varphi), \\ m\ddot{y} + b\dot{y} + cy &= em\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (11)$$

або в спресованій формі

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + cz = em\omega^2 e^{j(\omega t + \varphi)}, \quad (12)$$

де b - коефіцієнт зовнішнього опору.

Вимушену складову знову шукаємо у вигляді (6). Після підстановки розв'язку (6) в рівняння (12), скорочення на $e^{j\omega t}$ і прирівнювання речовинної і уявної частини до нуля одержимо систему двох рівнянь алгебри для визначення амплітуди r і фази φ :

$$r(c - m\omega^2) = me\omega^2 \cos \varphi, \quad (13)$$

$$rb\omega = me\omega^2 \sin \varphi. \quad (14)$$

Розв'язуючи систему (13), (14), знаходимо [7]:

$$r = \frac{me\omega^2}{\sqrt{(c - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}}, \quad (15)$$

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{b\omega}{c - m\omega^2}, & \omega < \sqrt{\frac{c}{m}}, \\ \operatorname{arctg} \frac{b\omega}{c - m\omega^2} + \pi, & \omega > \sqrt{\frac{c}{m}}. \end{cases} \quad (16)$$

Розв'язки (6) із значеннями прогинання r і фази φ відповідає прямій синхронній прецесії, при якій ламана OO_1C , проведена в поперечному перетині диска (рис. 1б), обертається як одне ціле з частотою обертання ротора ω . Вектор дисбалансу $\bar{e} = \overline{O_1C}$ випереджає на кут φ вектор прогинання $\bar{r} = \overline{OO_1}$.

У відносних величинах

$$\varepsilon = \frac{r}{e}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_{кр}} \left(\omega_{кр}^2 = \frac{c}{m} \right),$$

$$\bar{b} = \frac{b}{\sqrt{cm}}$$

співвідношення (15), (16) переписуться у вигляді

$$\varepsilon = \frac{\bar{\omega}^2}{\sqrt{(1 - \bar{\omega}^2)^2 + \bar{b}^2 \bar{\omega}^2}},$$

$$\varphi = \begin{cases} \text{arctg} \frac{\bar{b} \bar{\omega}}{1 - \bar{\omega}^2}, \bar{\omega} < 1, \\ \text{arctg} \frac{\bar{b} \bar{\omega}}{1 - \bar{\omega}^2} + \pi, \bar{\omega} > 1. \end{cases}$$

Графіки $\varepsilon(\bar{\omega})$ (амплітудна характеристика) і $\varphi(\bar{\omega})$ (частотна характеристика) наведені на рисунку 5. Резонансний пік для сталевих валів знаходиться поблизу значення $\bar{\omega} = 1$, тобто при $\omega = \omega_{кр} = \sqrt{\frac{c}{m}}$ - критичній частоті консервативної моделі ротора. На критичній частоті

$$\varepsilon = \frac{1}{\bar{b}} = \frac{\sqrt{cm}}{b},$$

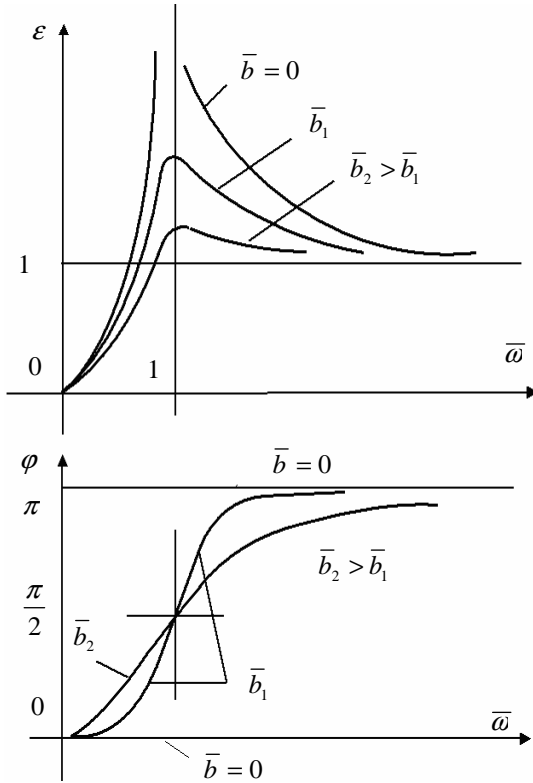


Рисунок 5

а динамічна реакція

$$R = rc = e\varepsilon c = \frac{e\sqrt{cm}}{b}c.$$

Або, позначивши дисбаланс $D = em$, можемо записати

$$R = \frac{D\omega_{кр}c}{b}.$$

З останньої формули випливає, що під час переходу через критичну частоту динамічне перевантаження обернено пропорційне коефіцієнту опору b .

2. Кінематика прецесій ротора, що обертається

Розглянута вище пряма синхронна прецесія є основним видом вимушених «коливань» невідновженого ротора, які, по суті, ніякими коливаннями не є. Проте у ряді випадків (коливання анізотропних валів, автоколивання роторів, що втратили стійкість, коливання консольних роторів з дисками щодо великих діаметрів) сталі рухи роторів мають складніший характер несинхронних прецесій.

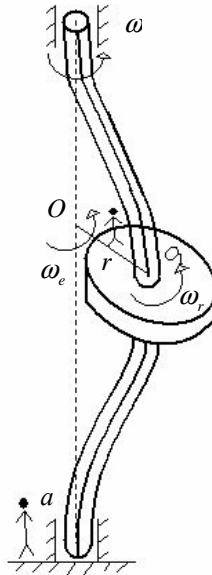


Рисунок 6

Несинхронну прецесію зручно розглядати як точку що складається з таких обертань (рис 6):

- 1) абсолютне обертання з частотою ротора ω . При цьому будь-яка пряма, проведена в будь-якому поперечному перетині вала і диска, повертається щодо нерухомого спостерігача на один і той самий кут з частотою ω ;

2) зігнута вісь ротора обертається з переносною частотою ω_e (прецесія);

3) диск обертається з відносною частотою ω_r щодо тієї, що обертається з частотою ω_e рухомої системи координат, жорстко пов'язаної з площиною прогнутої осі вала.

Згідно з теоремою про складання обертань у складному русі

$$\omega = \omega_e + \omega_r . \quad (17)$$

При $\omega_e = \omega$ і $\omega_r = 0$ маємо розглянутий вище випадок прямої синхронної прецесії. У цьому випадку волокна вала не випробовують знакозмінних напруг.

При $\omega_e \neq \omega$ і $\omega_r \neq 0$ матимуть місце несинхронні прецесії. Частота ω_r дорівнює частоті згинальних напруг вала, що гармонійно змінюються. При цьому треба мати на увазі, що немає крутильних деформацій: будь-яка пряма, проведена, наприклад, в торці вала, повертається на той самий кут, що і пряма, проведена в поперечному перетині диска.

Картину фізичної реалізації несинхронної прецесії можна представити, розглянувши, наприклад, випадок вала, що не обертається:

$$\omega = 0 , \quad \omega_e = -\omega_r .$$

Уявляємо собі зігнутий гумовий джгут, закріплений в опорах, площина прогинання якого обертається з частотою ω_e , причому диск щодо цієї площини обертається з такою ж частотою у зворотний бік. Для нерухомого спостерігача диск створюватиме кругову поступальну ходу. Будь-яка пряма, проведена на диску, залишатиметься паралельною деякою прямою, проведеною в нерухомій системі відліку.

Можна виділити шість видів несинхронної прецесії.

1. Пряма швидка прецесія: $\omega_e > \omega$ і $\omega_r = \omega - \omega_e < 0$ (рис. 7а). Диск щодо зігнутої осі обертається у бік, зворотній обертанню ротора, частота змінної напруги

$$|\omega_r| = \omega_e - \omega .$$

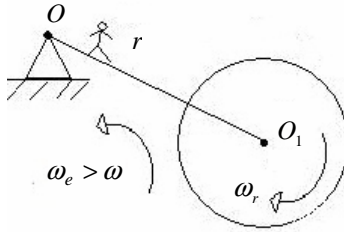


Рисунок 7а

2. Пряма повільна прецесія: $\omega_e < \omega$ і $\omega_r = \omega - \omega_e > 0$. Диск щодо зігнутої осі обертається у бік обертання вала (рис. 7б).

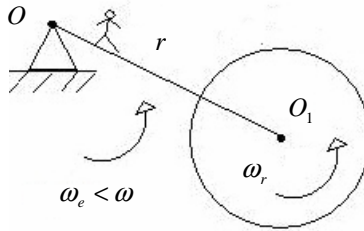


Рисунок 7б

3. Зворотна прецесія: $\omega_e < 0$ і $\omega_r = \omega + |\omega_e|$. Зігнута вісь обертається у зворотний бік, і частота змінної напруги ω_r перевищує частоту обертання вала (рис. 7в).

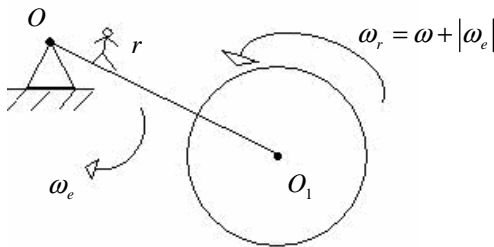


Рисунок 7в

Решта видів прецесії стосується руху горизонтального ротора, для якого має місце провисання вала, що характеризується статичним прогинанням $OO_{CT} = \Delta$ (рис. 7 г, д, е).

4. Нульова прецесія урівноваженого горизонтального ротора (рис. 7г). У цьому випадку $\omega_e = 0$, а частота знакозмінних напруг вала дорівнює частоті його обертання: $\omega_r = \omega$.

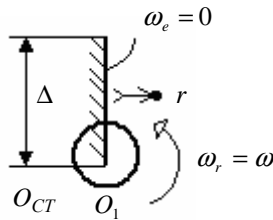


Рисунок 7г

5. Синхронне обертання з частотою ω лінії динамічного прогинання $O_{CT}O_1 = r < \Delta$ (рис. 7д). У цьому випадку результуюча лінія прогинання OO_1 гойдається з деякою знакозмінною частотою ω_e , а частота знакозмінних напруг $\omega_r = \omega - \omega_e$ коливається біля частоти обертання ротора ω .

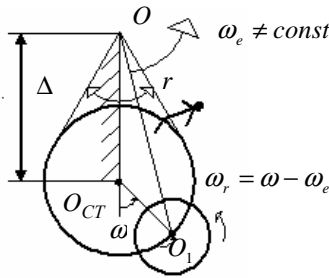


Рисунок 7д

6. Синхронне обертання з частотою ω лінії динамічного прогинання при $O_{CT}O_1 = r > \Delta$ (рис. 7е). При цьому лінія прогинання

OO_1 скоює повні провороти з деякою змінною частотою прецесії ω_e , направленої весь час у бік обертання.

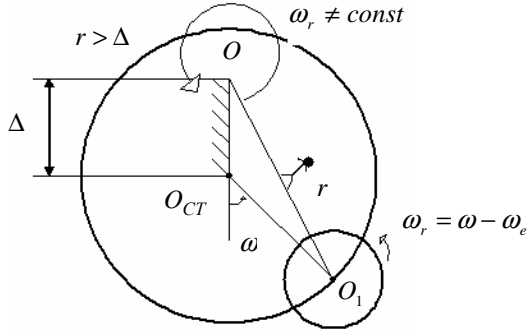


Рисунок 7е

З вищевикладеного очевидно, що в горизонтальному роторі унаслідок неминучого статичного провисання пряма синхронна прецесія неможлива.

ЛЕКЦІЯ 3

Динаміка ротора двоякої жорсткості.

1. Рівняння динаміки.
2. Умови стійкості.
3. Вимушені коливання урівноваженого горизонтального ротора.
4. Кінематика руху горизонтального ротора.

1. Рівняння динаміки

Розглянемо одномасову модель урівноваженого ротора, у якого жорсткість вала різна у напрямі головних осей поперечного перетину. Це можуть бути вали із знятими лисками, канавкою шпони або ротори двополюсних електричних машин (рис. 8).

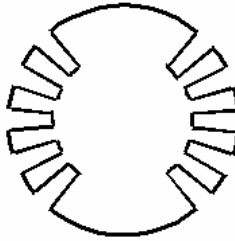


Рисунок 8

При обертанні вала жорсткості у напрямі нерухомих осей Ox , Oy будуть змінними. Тому доцільно розглядати динаміку центра мас ротора C у тій, що обертається з частотою обертання ротора ϖ , системі координат x_1Oy_1 (рис. 9). Осі Ox_1 , Oy_1 направимо паралельно головним осям інерції поперечного перетину вала.

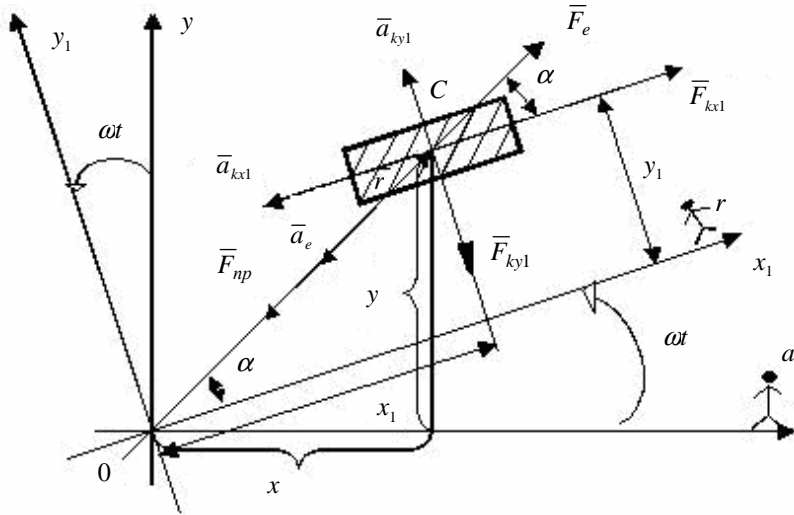


Рисунок 9

Використовуючи рівняння відносного руху, запишемо для спостерігача, що знаходиться на системі, що обертається, векторне диференціальне рівняння

$$m\bar{a}_1 = \bar{F}_{np} + \bar{F}_e + \bar{F}_k, \quad (18)$$

де \bar{F}_{np} - сила пружності вала;

\bar{F}_e - переносна сила інерції ($\bar{F}_e = m\omega^2\bar{r}$, $\bar{r} = \overline{OC}$ - радіус - вектор центра мас);

\bar{F}_k - коріолісова сила інерції;

a_1 - відносне прискорення.

Запишемо рівняння (18) у проекціях на осі системи координат, що обертається, x_1Oy_1 . Для пружної сили можна записати

$$F_{npx1} = -c_1x_1, \quad F_{nyy1} = -c_2y_1,$$

де c_1, c_2 - жорсткості вала в напрямках головних осей, паралельних осям Ox_1, Oy_1 . Проекції переносної сили інерції будуть рівні

$$F_{exl} = m\omega^2 x_1, \quad F_{eyl} = m\omega^2 y_1.$$

Вектор коріолісової сили інерції

$$\bar{F}_k = -m\bar{a}_k,$$

де $\bar{a}_k = 2\bar{\omega} \times \bar{V}_r = 2\omega \cdot (-\bar{i}_1 \dot{y}_1 + \bar{j}_1 \dot{x}_1)$, а i_1, j_1 - орти осей Ox_1, Oy_1 відповідно.

У проекціях на ці осі буде

$$F_{kx1} = 2m\omega \dot{y}_1, \quad F_{ky1} = -2m\omega \dot{x}_1.$$

У результаті рівняння динаміки (18) в системі, що обертається, можуть бути записані у вигляді:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + (p_1^2 - \omega^2)x_1 - 2\omega \dot{y}_1 &= 0; \\ \ddot{y}_1 + (p_2^2 - \omega^2)y_1 + 2\omega \dot{x}_1 &= 0, \end{aligned} \quad (19)$$

де позначено $p_1^2 = \frac{c_1}{m}$, $p_2^2 = \frac{c_2}{m}$ - квадрати власних частот ротора в напрямках головних осей Ox_1, Oy_1 . Ці частоти називаються критичними частотами першого роду. Далі для визначеності вважатимемо $c_1 < c_2$ і, отже, $p_1 < p_2$.

2. Умови стійкості

Для отримання характеристичного рівняння системи (19) припустимо, що

$$x_1 = Ae^{pt}, \quad y_1 = Be^{pt},$$

і підставимо ці розв'язки в (19). Після скорочення на e^{pt} одержимо систему двох однорідних рівнянь відносно A і B :

$$\begin{aligned}(p^2 + p_1^2 - \omega^2)A - 2\omega pB &= 0, \\ 2\omega pA + (p^2 + p_2^2 - \omega^2)B &= 0.\end{aligned}\tag{20}$$

Нетривіальне рішення системи (20) має місце при рівності нулю її визначника. Звідси одержуємо характеристичне рівняння

$$p^4 + p^2(p_1^2 + p_2^2 + 2\omega^2) + (p_1^2 - \omega^2)(p_2^2 - \omega^2) = 0.\tag{21}$$

Корінь рівняння (21) визначається за формулою

$$p_{1,2}^* = \sqrt{\frac{1}{2} \left[-(p_1^2 + p_2^2 + 2\omega^2) \pm \sqrt{(p_1^2 - p_2^2)^2 + 8\omega^2(p_1^2 + p_2^2)} \right]}.\tag{22}$$

За умови

$$\sqrt{(p_1^2 - p_2^2)^2 + 8\omega^2(p_1^2 + p_2^2)} < p_1^2 + p_2^2 + 2\omega^2\tag{23}$$

корені p_1^* , p_2^* будуть чисто уявними. Виконання умови (23) визначатиме стійкість ротора, оскільки урахування опору привело б у результаті до комплексно-зв'язаного кореня з негативною речовинною частиною. При невиконанні нерівності (23) один з коренів розв'язку (22) буде речовинним і позитивним, що відповідає умові нестійкості.

Ця умова перетвориться до вигляду

$$(p_1^2 - \omega^2)(p_2^2 - \omega^2) < 0.$$

Остання умова виконується при

$$p_1 < \omega < p_2.\tag{24}$$

Таким чином, ротор обертається нестійко при частотах обертання, що знаходяться в діапазоні між власними частотами першого роду.

3. Вимушені коливання горизонтального урівноваженого ротора

Розглянемо коливання урівноваженого ротора двоякої жорсткості у разі його горизонтального розташування. Тоді в проекціях на рухомі осі додається сила тяжіння і слід розглядати рівняння вимушених коливань з правою частиною вигляду

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + (p_1^2 - \omega^2)x_1 - 2\omega\dot{y}_1 &= -g \sin \omega t, \\ \ddot{y}_1 + (p_2^2 - \omega^2)y_1 + 2\omega\dot{x}_1 &= -g \cos \omega t. \end{aligned} \quad (25)$$

Якщо частота обертання ω не лежить в області (24), то обертання буде стійке і вимушену складову можна визначити у вигляді

$$x_1 = A \sin \omega t, \quad y_1 = B \cos \omega t. \quad (26)$$

Підставимо (26) в (25), одержимо після скорочення відповідно на $\sin \omega t$ і $\cos \omega t$ рівняння для визначення A і B :

$$A(p_1^2 - 2\omega^2) + 2B\omega^2 = -g,$$

$$2A\omega^2 + B(p_2^2 - 2\omega^2) = -g.$$

Розв'язуючи цю систему, знайдемо:

$$A = -\frac{g(p_2^2 - 4\omega^2)}{p_1^2 p_2^2 - 2\omega^2(p_1^2 + p_2^2)},$$

$$B = -\frac{g(p_1^2 - 4\omega^2)}{p_1^2 p_2^2 - 2\omega^2(p_1^2 + p_2^2)}.$$

Очевидно, що величини амплітуд A і B наближуються до нескінченності при

$$\omega = \omega_* = \frac{p_1 p_2}{\sqrt{2(p_1^2 + p_2^2)}}. \quad (27)$$

Нехай $p_1 < p_2$. Тоді з (27) випливає, що

$$0.5 p_1 \leq \omega_* \leq 0.5 p_2.$$

Тобто критична частота ω_* (яку називають критичною частотою другого роду) завжди буде більшою половиною меншої з двох критичних частот першого роду, але менше половиною більшої.

При малій відмінності жорсткостей c_1 і c_2 буде $p_1 \approx p_2 = \omega_0$ (критична частота першого роду). І тоді критична частота другого роду слабоанізотропного ротора буде (див. формулу (27)) дорівнювати $\omega_* \approx 0,5\omega_0$. Таким чином, критична частота другого роду слабоанізотропного ротора складає половину критичної частоти першого роду.

4. Кінематика руху горизонтального ротора

Розглянемо кінематику вимушених коливань урівноваженого анізотропного ротора, описуваного диференціальними рівняннями (25). Для спостерігача, що знаходиться в системі координат (рис. 9), що обертається, центр диска C , рухомий згідно із законом (26), описує еліпс з півосями A і B , що представляється рівнянням

$$\frac{x_1^2}{A^2} + \frac{y_1^2}{B^2} = 1.$$

Підставимо розв'язок (26) у формули перетворення координат:

$$x = x_1 \cos \omega t - y_1 \sin \omega t, \quad y = x_1 \sin \omega t + y_1 \cos \omega t$$

і одержимо

$$x = \frac{A-B}{2} \sin 2\omega t, \quad y = \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} \cos 2\omega t. \quad (28)$$

З виразів (28) випливає, що зігнута вісь вала в центрі ротора зміщується по вертикалі на сталу величину

$$OO_1 = \Delta = \frac{A+B}{2},$$

а центр мас диска C прецесує навколо точки з координатами $x_0 = 0, y_0 = \Delta$ з подвоєною частотою 2ω у бік обертання (рис.10), описуючи коло радіусом $r = \frac{A-B}{2}$.

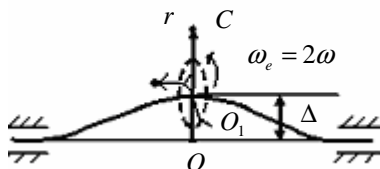


Рисунок 10

Таким чином, має місце пряма швидка прецесія. Диск щодо прецесуючої лінії $O_1C = r$ обертається у зворотний бік із частотою ω , що дорівнює частоті обертання ротора (рис. 11).

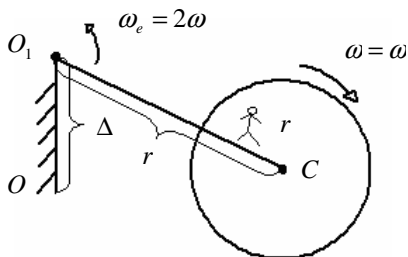


Рисунок 11

ЛЕКЦІЯ 4

1. Одномасова модель ротора відцентрового насоса.
2. Стійкість ротора.

1.Одномасова модель ротора відцентрового насоса

При розгляді одномасової моделі ротора відцентрового насоса (рис. 12) до пружних сил вала необхідно додати реакції рідкого шару в зазорах ущільнювачів робочих коліс.

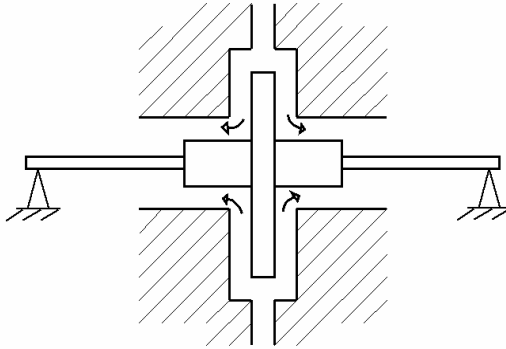


Рисунок 12

У разі ізотропної вала і квазіпружних сил в ущільненнях рівняння малих коливань неврівноваженого ротора записуються у вигляді [6,7]:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + b\dot{x} + cx + qy &= em\omega^2 \cos \alpha t, \\ m\ddot{y} + b\dot{y} + cy - qx &= em\omega^2 \sin \alpha t, \end{aligned} \quad (29)$$

де b - коефіцієнт опору; $c = c_e + c_{упр}$, c_e - згинальна жорсткість вала; $c_{упр}$ - квазіпружна жорсткість ущільнень; q - коефіцієнт циркуляційних сил.

У «спресованій» формі рівняння (29) наберуть вигляду у

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + cz - jqz = em\omega^2 e^{j\alpha t}. \quad (30)$$

Вимушені коливання шукаємо у вигляді прямої синхронної прещесії

$$z = re^{j(\omega t - \varphi)} \quad (31)$$

або

$$x = r \cos(\omega t - \varphi), \quad y = r \sin(\omega t - \varphi). \quad (31)$$

Підставляючи (31) в (30), одержимо після скорочення на $e^{j(\omega t - \varphi)}$

$$-r\omega^2 m + rbj\omega + rc - jqr = m\omega^2 (\cos\varphi + jsin\varphi). \quad (32)$$

Останнє рівняння, якщо записати його у вигляді

$$mr\omega^2 - jbr\omega - cr + jqr + me\omega^2 e^{j\varphi} = 0, \quad (32)'$$

де $\bar{F}_e = mr\omega^2$, $\bar{F}_{mp} = -jbr\omega$, $\bar{F}_{np} = -cr$, $\bar{F}_{цк} = jqr$, $\bar{F}_{цб} = me\omega^2 e^{j\varphi}$, можна розглядати як векторну умову рівноваги в тій, що обертається з частотою ω , системі координат деякої матеріальної точки масою m , на яку діють сили: опори \bar{F}_{mp} , пружності \bar{F}_{np} , циркуляційна сила $\bar{F}_{цк}$, відцентрова сила неврівноваженості $\bar{F}_{цб}$ і переносна сила інерції \bar{F}_e . Їх розташування, якщо речовинну вісь направити по лінії прогинання OO_1 , показано на рис. 13.

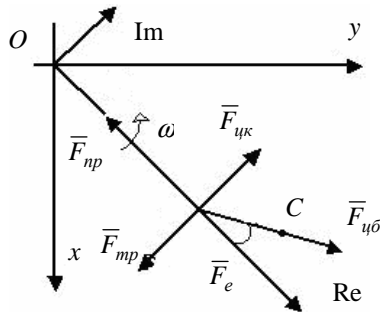


Рисунок 13

Важливо помітити, що циркуляційна сила направлена у бік обертання. Вона наче прагне прискорити прецесію ротора. Як буде показано нижче, саме наявність циркуляційної сили є причиною (за певних умов) втрати стійкості ротора.

З комплексного рівняння (32) одержуємо два скалярних:

$$\begin{aligned} r(c - m\omega^2) &= me\omega^2 \cos \varphi, \\ r(\omega b - q) &= me\omega^2 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (33)$$

Розв'язуючи систему (33), одержимо:

$$r = \frac{me\omega^2}{\sqrt{(c - m\omega^2)^2 + (\omega b - q)^2}}, \quad (34)$$

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\omega b - q}{c - m\omega^2}, & \omega < \sqrt{\frac{c}{m}}, \\ \operatorname{arctg} \frac{\omega b - q}{c - m\omega^2} + \pi, & \omega > \sqrt{\frac{c}{m}}. \end{cases} \quad (35)$$

Амплітудна (34) і фазова (35) частотні характеристики якісно мають вигляд, наведений вище на рис. 5.

2. Стійкість ротора відцентрового насоса

Проаналізуємо стійкість моделі (29) у разі урівноваженого ротора ($e = 0$). Характеристичне рівняння системи в цьому випадку можна одержати, прирівнюючи до нуля визначник

$$\begin{bmatrix} mp^2 + bp + c; q \\ -q; mp^2 + bp + c \end{bmatrix} = 0.$$

Після очевидних операцій алгебри це рівняння зводиться до вигляду

$$a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0, \quad (36)$$

де $a_0 = m^2, a_1 = 2mb, a_2 = 2mc + b^2, a_3 = 2bc, a_4 = c^2 + q^2$.

При позитивності всіх коефіцієнтів a_i необхідною і достатньою умовою стійкості полінома (36) згідно з критерієм Гурвіца є співвідношення $(a_1 a_2 - a_0 a_3) a_3 - a_1^2 a_4 > 0$.

Це співвідношення в даному випадку перетвориться до вигляду

$$b^2 c - m q^2 > 0. \quad (37)$$

Якщо не враховувати опір поза щілистими ущільненнями, то [6]

$$q = 0.5 b \omega. \quad (38)$$

Тоді умова (37) перетвориться до вигляду

$$\omega < 2 \sqrt{\frac{c}{m}} = 2 \omega_0,$$

де ω_0 - власна частота консервативної моделі ротора.

Таким чином, при перевищенні частоти обертання ротора значення, що дорівнює подвоєному критичному, втрачає стійкість. При цьому виникає режим автоколивань у вигляді несинхронної прецесії. Цей результат був підтверджений численними експериментами на фізичних одномасових моделях з щілистими ущільненнями за схемою рис. 12 [6,7].

При значному впливі зовнішнього середовища, як це і має місце у відцентрових насосах, в умову (37) необхідно підставити

$$b = b_0 + b_1, q = 0.5 b_0 \omega,$$

де b_0 - коефіцієнт опору в зазорі ущільнень;

b_1 - коефіцієнт опору зовнішнього середовища.

Тоді одержимо умову стійкості у вигляді

$$\omega < 2 \omega_0 \left(1 + \frac{b_1}{b_0}\right) = \omega_{zp}.$$

З останнього співвідношення видно, що гранична за стійкістю частота обертання ω_{ep} при b_1 , сумірному з b_0 , може істотно перевищити подвоєну критичну.

ЛЕКЦІЯ 5

Автоколивальні режими.

1. Основні співвідношення.
2. Автоколивання ротора без торкання із статором.
3. Автоколивальна прецесія ротора в умовах торкання із статором.

1. Основні співвідношення

Автоколивання можуть бути причиною підвищення вібрацій і шуму відцентрових машин. Їх бажано повністю виключати. Це досягається забезпеченням надійного запасу стійкості, що на практиці не завжди вдається. Через значне демпфіювання автоколивальні процеси можуть бути виражені відносно слабо і без спеціального дослідження вібрацій, що включає спектральний аналіз, залишитися непоміченими. Практичний інтерес (наприклад, у цілях діагностики) становить знання частот можливих автоколивань, оскільки виявлення в спектрі відповідних складових інформує про неблагополучний вібраційний стан машини.

При розгляді нелінійної моделі коефіцієнти рівняння вигляду (29) представляються функціями прогинання $r = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$c = c_{\epsilon} + c_{yn}(r), b = b(r), q = q(r).$$

Ці функції для відносно коротких щілин мають вигляд [6]:

$$\begin{aligned} c_{ynp}(r) &= c_{yno} \left(1 + \frac{0,75\alpha^2 r^2}{h_0^2} \right), \\ b(r) &= b_0 \left(1 + \frac{1,5r^2}{h_0^2} \right), q(r) = 0,5b(r)\omega, \end{aligned} \quad (39)$$

де h_0 - зазор ущільнень; c_{yno}, b_0 - коефіцієнти квазіпружної жорсткості і опору при концентричному розташуванні ротора в ущільненнях (тобто при $r = 0$); α - коефіцієнт, визначуваний параметрами ущільнень.

Спресоване нелінійне рівняння урівноваженого ротора записується у вигляді

$$m\ddot{z} + b(r)\dot{z} + c(r)z - jq(r)z = 0. \quad (40)$$

При порушенні умови стійкості лінеаризованої системи (див. співвідношення (37))

$$b_0^2(c_e + c_{yno}) - mq_0^2 > 0 \quad (41)$$

можливий автоколивальний режим. Для моделі (40) він може бути визначений у вигляді деякої прецесії

$$z = Ae^{j\Omega t}. \quad (42)$$

Вираз (42) відповідає розв'язку системи (29) без правої частини ($e = 0$) вигляду $x = A \cos \Omega t$, $y = A \sin \Omega t$, яке описує пряму прецесію лінії прогинання OO_1 (рис. 6) з деякою частотою обертання Ω і прогинанням $OO_1 = A$. Підставляючи (42) в (40), одержимо після скорочення на $Ae^{j\Omega t}$ комплексне рівняння

$$-m\Omega^2 + j\Omega b(A) + c(A) - jq(A) = 0.$$

З останнього виходять два скалярні рівняння:

$$-m\Omega^2 + c(A) = 0, \quad (43)$$

$$\Omega b(A) - q(A) = 0. \quad (44)$$

Виражаючи з (44)

$$\Omega = \frac{q(A)}{b(A)} \quad (45)$$

і підставляючи в перше, одержимо рівняння для визначення амплітуди автоколивальної прецесії A [7]:

$$\Delta(A) = b^2(A) \cdot c(A) - mq^2(A) = 0. \quad (46)$$

Розв'язуючи нелінійне рівняння (46) алгебри, знаходимо амплітуду автоколивальної прецесії A , потім за формулою (45) обчислюємо її частоту Ω .

Умова стійкості за Гурвіцею гармонійно лінеаризованого рівняння (40) має структуру (37), тобто $\Delta(A) > 0$. Тому умова стійкості автоколивального режиму буде

$$\left(\frac{\partial \Delta(A)}{\partial A} \right)_{A=A^*} > 0, \quad (47)$$

де A^* є розв'язком рівняння (46).

Співвідношення (46), (45) і (47) дозволяють знайти параметри автоколивального режиму A і Ω , досліджувати його стійкість. Залежно від виду функцій $b(r)$, $q(r)$ і $c(r)$, які визначаються конкретними технічними ситуаціями, можливі різні способи знаходження і дослідження автоколивань.

2. Автоколивання ротора без торкання із статором

Із співвідношення (45) і формули (38) випливає, що $\Omega = 0.5\omega$. Оскільки втрата стійкості відбувається при $\omega \geq 2\omega_0$, то під час переходу граничної за стійкістю частоти $\omega_{zp} = 2\omega_0$ автоколивання мають частоту $\Omega = \omega_0$.

Далі із зростанням ω пропорційно збільшується і Ω . Помітимо, що має місце пряма повільна прецесія $\omega_e = \Omega < \omega$.

Підставляючи в (46) залежності (39), одержимо після перетворень алгебри

$$A = h_0 \frac{2\omega_0}{\alpha\sqrt{3}\omega_1} \sqrt{\frac{\omega^2}{4\omega_0^2} - 1}, \quad (48)$$

де введені позначення

$$\omega_1^2 = \frac{c_{yno}}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{c_e + c_{yno}}{m}.$$

Помітимо, що автоколивальний режим має місце при $\omega > 2\omega_0$, а це і є умова нестійкості ротора. Умова стійкості автоколивань (47) в даному випадку завжди виконується:

$$\left(\frac{\partial f \Delta(A)}{\partial A} \right)_{A=A^*} = 0,75c_{\text{упр}} \alpha^2 \frac{2A^*}{k_0^2} > 0.$$

Умова безконтактних автоколивань $A^* < h_0$ з урахуванням формули (48) зводиться до вигляду

$$\omega < 2\omega_0 \sqrt{1 + \frac{3\alpha^2 \omega_1^2}{4\omega_0^2}} = \omega^*$$

Таким чином, безконтактні автоколивання матимуть місце на частотах обертання в діапазоні $2\omega_0 < \omega < \omega^*$.

3. Автоколивальна прецесія ротора в умовах торкання із статором

При $\omega > \omega^*$ можлива автоколивальна прецесія з постійним тертям в циліндрових втулках ущільнення (рис. 14).

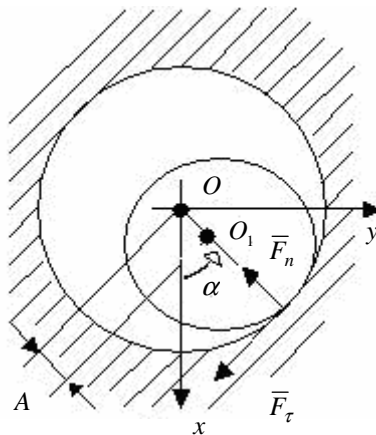


Рисунок 14

У припущенні кулонового тертя нормальна і дотична реакції поверхні статора виражаються так:

$$F_n = c_k (A - h_0), F_\tau = f c_k (A - h_0),$$

де f - коефіцієнт тертя; c_k - жорсткість при контактних деформаціях. Суми проєкцій цих реакцій на нерухомі осі Ox і Oy рівні:

$$F_x = -F_n \cos \alpha + F_\tau \sin \alpha, \quad F_y = -F_n \sin \alpha - F_\tau \cos \alpha.$$

Враховуючи, що $\sin \alpha = \frac{y}{A}$, $\cos \alpha = \frac{x}{A}$, можемо записати:

$$F_x = -c_k \left(1 - \frac{h_0}{A}\right)x + f c_k \left(1 - \frac{h_0}{A}\right)y,$$

$$F_y = -c_k \left(1 - \frac{k_0}{A}\right)y - f c_k \left(1 - \frac{k_0}{A}\right)x.$$

При сталій прецесії $A \approx h_0$, оскільки $c_k \gg c_\theta + c_{yk}(h_0)$. Тому динамічні коефіцієнти ротора, визначувані реакціями рідинного шару ущільнень, допустимо вважати сталими і такими, що дорівнюють:

$$b(r) = b(A) \approx b(h_0) = b_1 = 2,5b_0,$$

$$q(r) \approx q(h_0) = q_1 = 0,5b_1\omega;$$

$$c_\theta + c_{yпр}(A) \approx c_\theta + c_{yпр0}(1 + 0,75\alpha^2) = c_1.$$

Гармонійно лінеаризовані рівняння ротора при цьому запишуться так [7]:

$$m\ddot{x} + b_1\dot{x} + c_T(A)x + q_T(A)y = 0,$$

$$m\ddot{y} + b_1\dot{y} + c_T(A)y - q_T(A)x = 0.$$

Або в комплексній формі:

$$m\ddot{z} + b_1\dot{z} + c_T(A)z - jq_T(A)z = 0,$$

де

$$\begin{aligned} c_T(A) &= c_1 + c_k \left(1 - \frac{h_0}{A}\right), \\ q_T(A) &= q_1 - fc_k \left(1 - \frac{h_0}{A}\right). \end{aligned} \quad (49)$$

Результати розділу 1.8.1, частоту Ω прецесії $z = Ae^{j\Omega t}$ знаходимо за формулою (45)

$$\Omega = \frac{q_T(A)}{b_T(A)} = 0,5\omega - \frac{fc_k}{b_1} \left(1 - \frac{h_0}{A}\right).$$

З останнього співвідношення виходить, що тертя об статор уповільнює автоколивальну прецесію.

Амплітуду прецесії можна знайти з рівняння (46), яке з урахуванням введених позначень переписеться у вигляді

$$b_1^2 c_T(A) - m q_T^2(A) = 0. \quad (50)$$

Позначивши $\Delta a = \frac{\Delta A}{h_0}$, де $\Delta A = A - h_0$, припустимо, що

$$1 - \frac{h_0}{A} = 1 - \frac{1}{1 + \Delta a} \approx \Delta a.$$

Тоді рівняння (50) з урахуванням формул (49) можна записати у вигляді

$$b_1^2 (c_1 + c_k \Delta a) - m (q_1 - fc_k \Delta a)^2 = 0.$$

З останнього квадратного відношення Δa рівняння знаходиться Δa і далі амплітуда прецесії $A = h_0 (1 + \Delta a)$.

ЛЕКЦІЯ 6

1. Автоколивання плаваючого кільця ущільнювача.
2. Стійкість і автоколивання при анізотропії пружних сил.
3. Вплив в'язкого внутрішнього тертя на динаміку горизонтального ротора.

1. Автоколивання плаваючого кільця ущільнювача при сухому терті торця

Плаваюче ущільнення унаслідок рухливості в радіальних напрямках (рис. 15) має більшу надійність порівняно із щілистим.

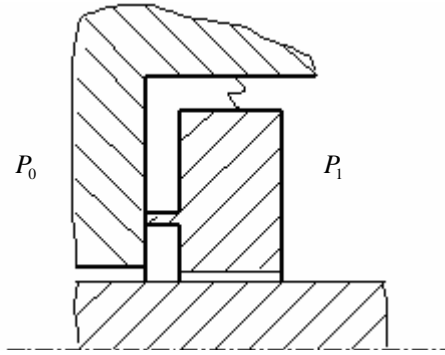


Рисунок 15

Математична модель динаміки плаваючого кільця аналогічна моделі одномасового ротора. У припущенні сухого тертя торця комплексне диференціальне рівняння руху кільця може бути записане у вигляді

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + c(r)z - iqz + R \frac{\dot{z}}{|\dot{z}|} = 0, \quad (51)$$

де візьмемо, що $b = \text{const}$, $q = 0,5b\omega$, $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$,
 x, y - координати центра мас кільця;

$$c(r) = c + c_{\text{ов}} \left(1 + 0,75\alpha^2 \left(\frac{r}{h_0}\right)^2\right),$$

де c - жорсткість пружини, що пружно фіксує кільце;

$c_{\text{упо}}$ - квазіпружна жорсткість у щілистому зазорі кільця;

R - сила сухого тертя.

Автоколивальний режим шукаємо у вигляді кругової прецесії вигляду (42). При підстановці цього розв'язку в (51) одержимо після скорочення на $e^{j\Omega t}$ комплексне рівняння

$$-m\Omega^2 + (c + c_{\text{упо}}(1 + 0,75\alpha^2 a^2)) + j(b\Omega - q + \frac{R}{ah_0}) = 0,$$

де $a = \frac{A}{h_0}$ - відносна амплітуда прецесії.

З цього рівняння виходить:

$$c + c_{\text{упо}}(1 + 0,75\alpha^2 a^2) - m(0,25\omega^2 - \frac{\omega R h_0}{ba} + \frac{R^2}{b^2 h_0^2 a^2}) = 0, \quad (52)$$

$$\Omega = 0,5\omega - \frac{R}{bh_0 a}. \quad (53)$$

Рівняння (52) перетвориться до рівняння четвертого порядку відносно a . Відносна амплітуда a , знайдена з розв'язку цього рівняння, потім підставляється у формулу (53), за якою обчислюється частота прецесії Ω . Формула (53) показує, що сухе тертя торця зменшує частоту автоколивальної прецесії.

2. Стійкість і автоколивання одномасової моделі при анізотропії пружних сил

Анізотропія пружних сил може мати місце, наприклад, при неточності центрування ротора в ущільненнях, що обумовлює неконцентричність зазору.

Розглянемо відповідну модель:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + b\dot{x} + (c + c_1)x + qy &= 0; \\ m\ddot{y} + b\dot{y} + (c - c_1)y - qx &= 0, \end{aligned} \quad (54)$$

де візьемо $b = \text{const}$, $q = 0,5b\omega$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,
 $c = c_0 + \mu r^2$; c_1 - жорсткість, що визначає анізотропію.

Для малих коливань $c = c_0$, при цьому характеристичне рівняння лінеаризованої системи (54) запишеться у вигляді

$$\begin{bmatrix} mp^2 + bp + c_0 + c_1; q \\ -q; mp^2 + bp + c_0 - c_1 \end{bmatrix} = 0. \quad (55)$$

Умова стійкості полінома (55) зводиться до вигляду

$$b^2 c_0 - mq^2 + mc_1^2 > 0. \quad (56)$$

З цього співвідношення випливає, що анізотропія ($c_1 \neq 0$) покращує стійкість. При порушенні умови (56) можливий автоколивальний режим. Проте система (54) не зводиться до «спресованої» форми вигляду (40) і неприпустимо шукати розв'язок у вигляді (42). У даному випадку автоколивальний режим знаходиться у вигляді еліптичної прецесії, коли центр ротора рухається по еліпсу з осями, нахиленими по відношенню до нерухомих осей Ox, Oy на деякий кут φ (рис. 16).

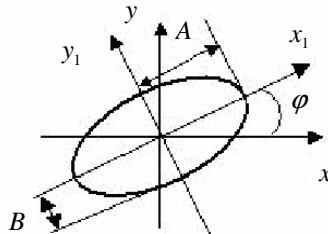


Рисунок 16

У цих осях

$$x_1 = A \cos \Omega t, y_1 = B \sin \Omega t.$$

У системі xOy матимемо

$$x = A \cos \Omega t \cos \varphi - B \sin \Omega t \sin \varphi,$$

$$y = A \cos \Omega t \sin \varphi + B \sin \Omega t \cos \varphi.$$

Підставляючи останній вираз у (54), утримуючи постійні складові і містять множники першої гармоніки ($\sin \Omega t, \cos \Omega t$), одержують кінець кінцем чотири нелінійні рівняння щодо шуканих A, B, Ω, φ [7].

Розв'язок реалізується числовим методом.

Цікаво відзначити, що одне з рівнянь має вигляд $\Omega = \frac{q}{b} f(\alpha)$, де $\alpha = \frac{B}{A}$ і $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$. Графік функції $f(\alpha)$ показаний на рис. 17.

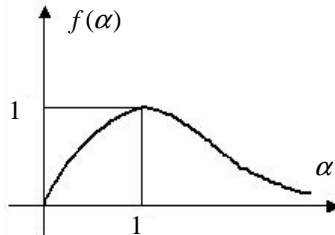


Рисунок 17

В ізотропному випадку ($A = B, f(\alpha) = 1$) $\Omega = \frac{q}{b} = 0,5\omega$. При будь-якій анізотропії ($c_1 \neq 0, A \neq B$) частота автоколивань Ω буде менша половини частоти обертання.

3. Вплив в'язкого внутрішнього тертя на динаміку горизонтального ротора

Диференціальне рівняння одномасової моделі ротора (12) у разі горизонтального розташування записується у вигляді

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + cz = mg + me\omega^2 \exp(i\omega t).$$

Разом з нерухомою системою координат xOy (рис.1) розглядатимемо таку, що обертається з частотою обертання ротора ω , систему $\xi O\eta$. Положення центра ротора O_1 у цій системі визначатимемо комплексною координатою $\zeta = \xi + i\eta$. Між координатами z і ζ має місце співвідношення

$$z = \zeta \exp(i\omega t).$$

Реакція сил внутрішнього в'язкого тертя в припущенні лінійної залежності від відносної швидкості $\dot{\zeta}$ у системі координат, що обертається, запишеться у вигляді

$$\bar{P}_v = -h\dot{\zeta}.$$

Враховуючи, що $\zeta = z \exp(-i\omega t)$, можемо записати

$$\bar{P}_v = -h(\dot{z} \exp(-i\omega t) - i\omega z \exp(-i\omega t)).$$

При цьому в нерухомій системі координат цей вектор сили набере вигляду

$$\bar{P}_z = \bar{P}_v \exp(i\omega t) = -h(\dot{z} - i\omega z).$$

Таким чином, комплексне диференціальне рівняння ротора з урахуванням внутрішнього тертя може бути записане у вигляді

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + cz + h\dot{z} - i\omega z h = mg + me\omega^2 \exp(i\omega t).$$

Розділивши на масу m і ввівши позначення

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}, k = \frac{b}{m}, \delta = \frac{h}{m},$$

одержимо рівняння

$$\ddot{z} + (k + \delta)\dot{z} + \omega_0^2 z - i\omega\delta\dot{z} = g + e\omega^2 \exp(i\omega t).$$

Розв'язок для вимушених коливань шукаємо у вигляді

$$Z = Z_e \exp(i\omega t) + Z_g,$$

де Z_e, Z_g - комплексні амплітуди відповідно динамічного і статичного прогинань. Підставляючи це рішення в попереднє диференціальне рівняння, одержимо після очевидних операцій алгебри вирази для комплексних амплітуд:

$$Z_e = e\omega^2 / (\omega_0^2 - \omega^2 + ik\omega), Z_g = g / (\omega_0^2 - i\omega\delta).$$

Очевидно, що відповідно до цих виразів амплітуди і фази прогинань можуть бути знайдені за формулами:

$$R_e = |Z_e| = e\omega^2 / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + k^2\omega^2},$$

$$\psi = \begin{cases} -\arctg \frac{k\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, & \text{if } \omega \leq \omega_0, \\ \text{els } -\arctg \frac{k\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} + \pi & ; \end{cases}$$

$$R_g = |Z_g| = g / \sqrt{\omega_0^4 + \omega^2\delta^2},$$

$$\varphi = \arctg \frac{\omega\delta}{\omega_0^2}.$$

На підставі цих останніх виразів можна зробити такі висновки.

1. Внутрішнє тертя не впливає на динамічне прогинання.
2. Внутрішнє тертя впливає на статичне прогинання, декілька його зменшуючи і зсовуючи стрілу прогинання у бік обертання.

3. Із зростанням частоти обертання статичне прогинання зменшується, а кут зрушення його від вертикалі збільшується.

При $\omega \rightarrow \infty$ $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

ЛЕКЦІЯ 7

1. Дискретні багатомасові моделі.
2. Вплив гіроскопічного моменту.

1. Дискретні багатомасові моделі

Почнемо з розгляду одномасової моделі урівноваженого ротора: зосереджена маса на пружному невагомому валу (рис. 18).

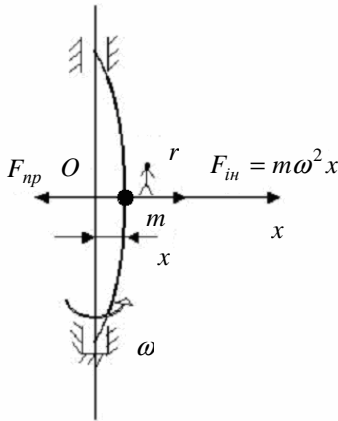


Рисунок 18

Визначимо критичну частоту як таку, при якій при випадкових відхиленнях маси на величину x матиме місце рівновага пружної сили, що діє на масу з боку вала, і переносної сили інерції, яку необхідно умовно додати при розгляді рівноваги в системі координат, що обертається:

$$F_{пр} = c_{\epsilon} x = F_{ин} = mx\omega^2, \quad (57)$$

де c_{ϵ} - згинальна жорсткість вала в точці закріплення маси. Це так званий стан «байдужої рівноваги», коли випадкове прогинання x може набирати які завгодно значення [1]. З (57) випливає значення

$$\text{критичної частоти } \omega_{кр} = \sqrt{\frac{c_{\epsilon}}{m}}.$$

Співвідношення (57) можна інтерпретувати також так. Якщо розглядати масу як зовнішнє тіло по відношенню до вала, то вона при обертанні діятиме на вал з реальною ньютонівською силою інерції $F_{in} = mx\omega^2$, від дії якої він пружно прогнеться на величину

$$x = \delta_{11}x\omega^2 m, \quad (57)'$$

де $\delta_{11} = \frac{1}{c_\theta}$ - податливість вала в точці закріплення маси.

Розглядаючи поперечні коливання вала, що не обертається, – балки з точковою масою, можемо записати

$$m\ddot{x} = -c_\theta x, \quad (58)$$

або

$$x = -\delta_{11}m\ddot{x}, \quad (58)'$$

де згідно з принципом Даламбера $F_{in} = -m\ddot{x}$ - даламберова сила інерції.

Для знаходження вільних коливань в систему (58) підставимо $x = A \sin \omega t$ і одержимо після скорочення на $\sin \omega t$:

$$m\omega^2 = c_\theta,$$

звідки власна частота

$$\omega_c = \sqrt{\frac{c_\theta}{m}}.$$

Таким чином, власна частота поперечних коливань валу, що не обертається, ω_c дорівнює критичній частоті вала, що обертається $\omega_{кр}$.

При цьому частотне рівняння можна одержати, розглядаючи умову рівноваги зігнутої осі ротора в системі координат, що обертається, або записуючи диференціальне рівняння вільних коливань вала, що не обертається.

нетривіальності розв'язка однорідної системи рівнянь (59) одержуємо частотне рівняння для визначення критичних частот:

$$\begin{bmatrix} m_1 \delta_{11} - \lambda; m_2 \delta_{12}; \dots; m_n \delta_{1n} \\ m_1 \delta_{21}; m_2 \delta_{22} - \lambda; \dots; m_n \delta_{2n} \\ \dots \\ m_1 \delta_{n1}; m_2 \delta_{n2}; \dots; m_n \delta_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = 0, \quad (60)$$

де позначено $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$.

Точно таке ж рівняння може бути одержане з розгляду диференціальних рівнянь вільних поперечних коливань вала, що не обертається, записаних на основі принципу Даламбера у вигляді

$$\begin{aligned} x_1 &= -\delta_{11} m_1 \ddot{x}_1 - \delta_{12} m_2 \ddot{x}_2 - \dots - \delta_{1n} m_n \ddot{x}_n, \\ x_2 &= -\delta_{21} m_1 \ddot{x}_1 - \delta_{22} m_2 \ddot{x}_2 - \dots - \delta_{2n} m_n \ddot{x}_n, \\ &\dots \\ x_n &= -\delta_{n1} m_1 \ddot{x}_1 - \delta_{n2} m_2 \ddot{x}_2 - \dots - \delta_{nn} m_n \ddot{x}_n. \end{aligned}$$

Ця система є багатомасовим аналогом рівняння (58)'.

Підставляючи в неї розв'язок вигляду

$$x_1 = c_1 \sin \omega t, x_2 = c_2 \sin \omega t, \dots, x_n = c_n \sin \omega t,$$

одержимо після скорочення на $\sin \omega t$ систему однорідних рівнянь щодо амплітуд c_1, c_2, \dots, c_n . Умова нетривіальності розв'язання приведе до того ж частотного рівняння (60).

Таким чином, при моделюванні динаміки ротора точковими масами (і, взагалі кажучи, розподіленими масами) критичні частоти вала, що обертається, збігатимуться з власними частотами поперечних коливань вала, що не обертається, – балки.

2. Вплив гіроскопічного моменту

Якщо на валу є диски з відносно великими діаметрами, то заміна їх у розрахунковій схемі зосередженими масами може при визначенні критичних частот призвести до деяких похибок. У разі розташування диска в кінці консольного ротора (рис. 20) або поблизу опорного

підшипника (рис. 21) при синхронній прецесії зігнутого вала дія на нього насадженого диска визначається не тільки силою F_H , що дорівнює головному вектору сил інерції диска, але і моментом сил інерції M_z (рис.22), який прийнято називати гіроскопічним.

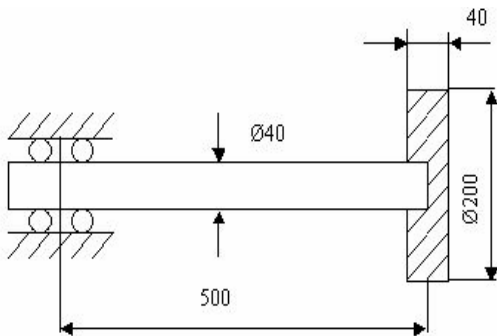


Рисунок 20

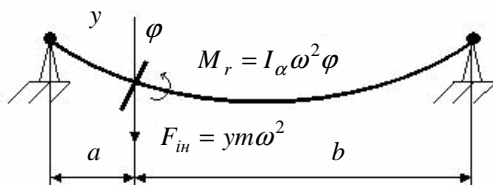


Рисунок 21

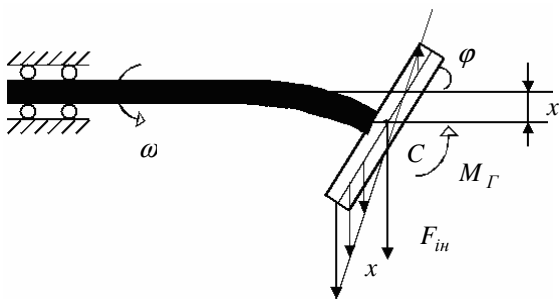


Рисунок 22

Гіроскопічний момент визначається як інтегральна сума моментів сил інерції елементарних мас (рис. 23):

$$M_z = \int dm x \omega^2 \cdot x \varphi = \varphi \omega^2 I_d,$$

де $I_d = \int x^2 dm$ - діаметральний момент інерції диска.

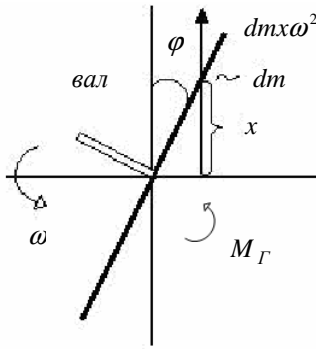


Рисунок 23

Для тонкого диска $I_d = \frac{mD^2}{16}$ ((m - маса диска; D - діаметр).

Для диска, товщиною b якого не можна нехтувати, $I_d = \frac{mD^2}{16} - \frac{mb^2}{12}$ [4].

Дія гіроскопічного моменту направлена у бік випрямлення зігнутої осі вала (рис. 21,22,23). Він неначе «посилиє» вал, тому його урахування приводить до збільшення розрахункового значення критичної частоти.

Розглянемо критичні частоти двомасової моделі консольного ротора, що складається з невагомго пружного вала і диска, дія якого на вал визначатиметься не тільки силою інерції диска як точкової маси, але і гіроскопічним моментом (рис. 22). Використовуючи формули сопромату для прогинання x і кута повороту перетину φ кінця консолі під дією сили і моменту, запишемо:

$$\begin{aligned}x &= \delta_{11}F_{in} - \delta_{12}M_{\Gamma}, \\ \varphi &= \delta_{21}F_{in} - \delta_{22}M_{\Gamma}.\end{aligned}\tag{61}$$

де $F_{in} = mx\omega^2$, $M_{\Gamma} = I_d\omega^2\varphi$, $\delta_{11} = \frac{l^3}{3EI}$, $\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{l^2}{2EI}$, $\delta_{22} = \frac{l}{EI}$;

m - маса диска; l - довжина ротора; E - модуль Юнга; I - момент інерції перетину вала. Знак мінус в (61) відображає той факт, що гіроскопічний момент діє у бік, протилежний куту повороту диска φ .

При підстановці виразів для F_{in} і M_{Γ} у (61) одержимо систему двох однорідних рівнянь відносно x і φ . Умова нетривіальності розв'язків цієї системи приводить до вимоги рівності нулю визначника

$$\begin{vmatrix} \frac{m\omega^2 l^3}{3EI} - 1; & -\frac{Id\omega^2 l^2}{2EI} \\ \frac{m\omega^2 l^2}{2EI}; & -\frac{Id\omega^2 l}{EI} - 1 \end{vmatrix} = 0.\tag{62}$$

Останнє рівняння зводиться до безрозмірного частотного рівняння вигляду

$$z^2 + \left(\frac{4}{3\eta} - 4\right)z - \frac{4}{3\eta} = 0,\tag{63}$$

де $z = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ - квадрат відносної критичної частоти;

$\omega_0^2 = \frac{3EI}{l^3 m}$ - квадрат критичної частоти ротора, підрахованої без

урахування гіроскопічного моменту; $\eta = \frac{I_d}{ml^2}$ - безрозмірний

коефіцієнт, що враховує «питому вагу» моменту інерції диска. З урахуванням введених позначень критична частота консольного ротора з диском

$$\omega_{\Gamma} = \sqrt{z_1} \omega_0,\tag{64}$$

де z_1 - додатний корінь рівняння (63). Неважко бачити, що при $\eta = 0, z_1 = 1$ і $\omega_\Gamma = \omega_0$, а при $\eta \rightarrow \infty, z_1 \rightarrow 4$ і $\omega_\Gamma \rightarrow 2\omega_0$.

Критична частота ω_Γ завжди перевищуватиме критичну частоту точкової моделі, набираючи значення залежно від η у межах $\omega_0 < \omega_\Gamma < 2\omega_0$ (рис. 24).

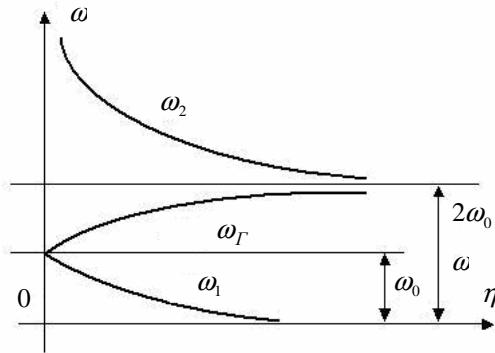


Рисунок 24

Проте практичні співвідношення параметрів звичайно бувають такими, що навіть в «найгіршому» консольному варіанті ротора поправка на урахування гіроскопічного моменту не перевищує 1%.

Розглянемо, наприклад, конструкцію ротора, наведеного на рис.

20. Для неї при $\rho = 7800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ маємо $I_d = 0.021 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $m_{ps} = 11 \text{ кг}, l = 0,5 \text{ м}, \eta = 0,0076$. При даному η додатний корінь рівняння (63) має значення $z_1 = 1,0173$. За формулою (64) маємо $\omega_\Gamma = 1,0086\omega_0$. Таким чином, поправка в даному випадку виявляється менше 1%.

У разі двохопального ротора поправки, зв'язані з урахуванням гіроскопічного моменту, виявляються ще менш значними. Розглянемо модель, наведену на рис. 21. Для цієї моделі рівняння для прогинання і кута повороту диска записуються у вигляді

$$\begin{aligned}
 y &= \delta_{11} m \omega^2 y - \delta_{12} I_d \omega^2 \varphi, \\
 \varphi &= \delta_{21} m \omega^2 y - \delta_{22} I_d \omega^2 \varphi,
 \end{aligned}
 \tag{65}$$

де коефіцієнти податливості, які можна одержати методом Мора, перемножуючи відповідні епюри моментів від одиничної сили і від одиничного моменту, обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned}
 \delta_{11} &= \frac{a^2 b^2}{3EI(a+b)}, \delta_{22} = \frac{a^3 + b^3}{3EI(a+b)^2}, \\
 \delta_{12} &= \delta_{21} = \frac{ab(b-a)}{3EI(a+b)}.
 \end{aligned}
 \tag{66}$$

Позначивши $z = \frac{1}{\omega^2}$, частотне рівняння, впливаючи з вимоги нетривіальності розв'язку, приводиться до вигляду

$$z^2 - (\delta_{11} m - \delta_{22} I_d) z + (\delta_{12}^2 - \delta_{11} \delta_{22}) m I_d = 0.
 \tag{67}$$

Нехай параметри одномасового ротора, що відповідає схемі на рис. 21, будуть такі:

$$d = 0,05 \text{ м}, a = 0,6 \text{ м}, b = 0,4 \text{ м}, m = 15 \text{ кг}, I_d = 0,02 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

$$I_d = 0,02 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, I_d = 0,02 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

За формулами (66) знаходимо

$$\delta_{11} = 0,313 \cdot 10^{-6} \frac{\text{с}^2}{\text{кг}},$$

$$\delta_{22} = 0,152 \cdot 10^{-5} \frac{\text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}^2},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -0,261 \cdot 10^{-6} \frac{\text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}}.$$

Рівняння (67) після підстановки числових значень набере вигляду

$$z^2 - 4,66 \cdot 10^{-6} z - 12,23 \cdot 10^{-14} = 0.$$

Додатний корінь $z_1 = 4,69 \cdot 10^{-6} c^2$, звідки

$$\omega_\Gamma = \sqrt{\frac{1}{z_1}} = 461,7 \frac{1}{c}.$$

Критична частота без урахування гіроскопічного моменту

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}} = 461,5 \frac{1}{c}.$$

Відносна похибка розрахунку критичної частоти, що вноситься нехтуванням впливу гіроскопічного моменту, в даному випадку становить величину

$$\delta = \frac{\omega_\Gamma - \omega_0}{\omega_0} \cdot 100\% = 0,04\%.$$

Урахування гіроскопічного моменту обумовлює відмінність між критичними частотами ротора і власними частотами поперечних коливань вала-балки, що не обертається. Диференціальні рівняння вільних поперечних коливань неповоротного диска, закріпленого на кінці невагомої пружної балки (рис. 20), записуються у вигляді

$$\begin{aligned} x &= -\delta_{11} m \ddot{x} - \delta_{12} I_d \ddot{\varphi} \\ \varphi &= -\delta_{21} m \ddot{x} - \delta_{22} I_d \ddot{\varphi}. \end{aligned}$$

Умова нетривіальності розв'язку $x = c_1 \sin \omega t$, $\varphi = c_2 \sin \omega t$ для цієї системи приводить до частотного рівняння

$$\left[\begin{array}{l} \frac{m\omega^2 l^3}{3EI} - 1; \frac{I_d \omega^2 l^2}{2EI} \\ \frac{m\omega^2 l^2}{2EI}; \frac{I_d \omega^2 l^2}{EI} - 1 \end{array} \right]. \quad (68)$$

Це рівняння відрізняється від частотного рівняння для критичних частот (62) зміною знака в доданках, що містять множник I_d . Відповідне безрозмірне рівняння вигляду (63) тепер запишеться у вигляді

$$z^2 - \left(\frac{4}{3\eta} + 4\right)z + \frac{4}{3\eta} = 0. \quad (69)$$

Менш додатний корінь цього рівняння $z_1 < 1$, тому перша частота власних коливань консольної балки з диском на кінці буде нижче власною частоти ω_0 , знайденої без урахування сил інерції кутових коливань диска. Для розглянутого вище прикладу при $\eta = 0,0074$ одержимо, розв'язуючи (69), $z_1 = 0,983$ і за формулою (64) буде $\omega_1 = \sqrt{z_1} \omega_0 = 0,99\omega_0$.

Аналіз кореня рівняння (69) показує, що при $\eta \rightarrow 0$, $z_1 = 1$ і $\omega_1 = \omega_0$, а більший корінь $z_2 \rightarrow \infty$ і $\omega_2 \rightarrow \infty$. При $\eta \rightarrow \infty$, $z_1 \rightarrow 0$ і $\omega_1 \rightarrow 0$, а $z_2 \rightarrow 4$ і $\omega_2 \rightarrow 2\omega_0$. Графіки залежностей від η критичної частоти ротора ω_r , визначуваної за допомогою рівняння (63), а також першої ω_1 і другої ω_2 власних частот поперечних коливань того самого ротора, що не обертається, обчислюваних за рівнянням (69), показані на рис. 24.

ЛЕКЦІЯ 8

Методи розрахунку коливань роторів орієнтовані на застосування ЕОМ.

1. Метод початкових параметрів

1.1 Вільні поперечні коливання стрижня постійного перетину.

Розглянемо стрижень, на який діє довільно розподілене навантаження $q(z)$ (рис. 25).

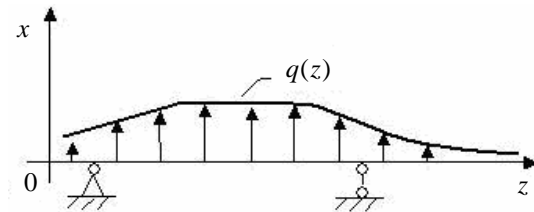


Рисунок 25

Як відомо з курсу опору матеріалів, диференціальна залежність між внутрішнім згинальним моментом $M(z)$ і навантаженням має вигляд

$$\frac{\partial^2 M(z)}{\partial z^2} = q(z). \quad (70)$$

Згинальний момент визначається залежністю

$$M = EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}, \quad (71)$$

де EI - згинальна жорсткість; $x = x(z)$ - закон зміни прогинання стрижня.

При вільних коливаннях стрижня роль навантаження $q(z)$ відіграють елементарні сили інерції

$$\Delta F_{in} = -\mu(z) \cdot \Delta z \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2},$$

де $\mu(z)$ - погонна маса стрижня; $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ - прискорення поточної точки стрижня. Інтенсивність сил інерції

$$q_{in} = \frac{\Delta F_{in}}{\Delta z} = -\mu(z) \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}. \quad (72)$$

Підставивши (71) і (72) в (70), одержуємо диференціальне рівняння вільних поперечних коливань стрижня

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}) + \mu(z) \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0. \quad (73)$$

Для стрижня постійного перетину $EI = const$, і рівняння (73) набуває вигляду

$$EI \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} + \mu \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0. \quad (74)$$

Розв'язок (74) шукається у вигляді

$$x(z, t) = U(z) \sin pt, \quad (75)$$

де $U(z)$ називається формою вільних коливань. Після підстановки (75) в (74) і подальшого скорочення на $\sin pt$ одержують диференціальне рівняння для форм вільних коливань вигляду

$$EI \frac{d^4 U}{dz^4} - \mu p^2 U = 0.$$

Якщо позначити

$$\alpha^4 = \frac{P^2 \mu}{EI}, \quad (76)$$

то останнє рівняння набере вигляду

$$\frac{d^4 U}{dz^4} - \alpha^4 U = 0. \quad (77)$$

Відповідне цьому диференціальному рівнянню характеристичне рівняння $z^4 - \alpha^4 = 0$ має чотири кореня

$$r_{1,2} = \pm j\alpha; r_{3,4} = \pm \alpha.$$

Загальний розв'язок (77) відповідно до цього коріння містить доданки чотирьох функцій:

$$U(z) = A_1 \cos(\alpha z) + A_2 \sin(\alpha z) + A_3 e^{\alpha z} + A_4 e^{-\alpha z}.$$

Цей розв'язок зручно представити у вигляді комбінації так званих функцій Крилова

$$U(z) = c_1 K_1(\alpha z) + c_2 K_2(\alpha z) + c_3 K_3(\alpha z) + c_4 K_4(\alpha z), \quad (78)$$

де c_1, c_2, c_3, c_4 знаходяться з граничних умов. Функції Крилова визначаються за формулами:

$$\begin{aligned} K_1(\alpha z) &= \frac{1}{2}(ch(\alpha z) + \cos(\alpha z)), \\ K_2(\alpha z) &= \frac{1}{2}(sh(\alpha z) + \sin(\alpha z)), \\ K_3(\alpha z) &= \frac{1}{2}(ch(\alpha z) - \cos(\alpha z)), \\ K_4(\alpha z) &= \frac{1}{2}(sh(\alpha z) - \sin(\alpha z)). \end{aligned} \quad (79)$$

Враховуючи, що

$$\frac{dK_1}{dz} = \alpha k_4, \frac{dK_2}{dz} = \alpha k_1, \frac{dK_3}{dz} = \alpha k_2, \frac{dK_4}{dz} = \alpha k_3 \text{ і}$$

$K_1(0) = 1, K_2(0) = K_3(0) = K_4(0) = 0$, довільні постійні розв'язки (78) визначаються за формулами

$$c_1 = U(0), c_2 = \frac{1}{\alpha} \theta(0), c_3 = \frac{M(0)}{\alpha^2 EI}, c_4 = \frac{Q(0)}{\alpha^3 EI},$$

де $U(0), \theta(0), M(0), Q(0)$ відповідно прогинання, кут повороту, момент і поперечна сила на лівому кінці стрижня. Таким чином, загальний розв'язок рівняння (77) можна представити у вигляді

$$U(z) = U(0)k_1(\alpha z) + \frac{1}{\alpha} \theta(0)k_2(\alpha z) + \frac{M(0)}{\alpha^2 EI} k_3(\alpha z) + \frac{Q(0)}{\alpha^3 EI} k_4(\alpha z). \quad (80)$$

Розв'язок (80) лежить в основі методу початкових параметрів розрахунку вільних і вимушених коливань роторів і поперечних коливань балок найбільш довільної конструкції.

1.2 Матриці переходу

Розглянемо ділянку постійного перетину ротора завдовжки l_i із значеннями на лівому кінці (у i -й перетині) прогинання x_i , кута повороту θ_i , моменту M_i і поперечної сили Q_i (рис. 26).

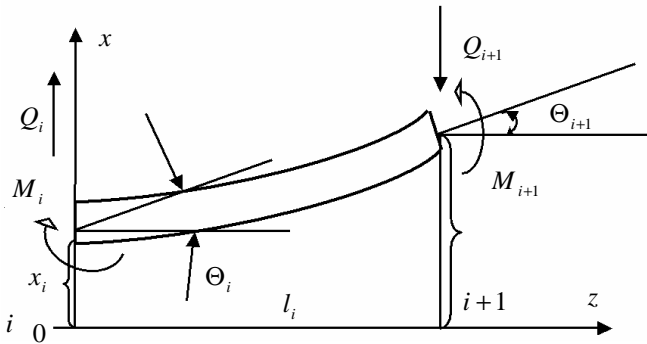


Рисунок 26

Тоді згідно з розв'язком (80) у локальній системі координат Oz з початком в i -му перетині можемо записати

$$\begin{aligned}
 x(z) = & x_i K_1(\alpha_i z) + \frac{1}{\alpha_i} \theta_i K_2(\alpha_i z) + \\
 & + \frac{M_i}{EI_i \alpha_i^2} K_3(\alpha_i z) + \frac{Q_i}{EI_i \alpha_i^3} K_4(\alpha_i z),
 \end{aligned}
 \tag{81}$$

де згідно з (76) $\alpha_i = \sqrt[4]{\frac{\rho^2 \mu_i}{EI_i}}$.

Для круглого перетину

$$I_i = \frac{\pi d_i^4}{64}, \mu_i = \frac{\rho \pi d_i^2}{4},$$

$$\alpha_i = 2 \sqrt[4]{\frac{\rho^2 \rho_i}{E d_i^2}}.$$

Послідовно диференціюючи по z (81), запишемо:

$$\theta(z) = \frac{dx}{dz} = x_i \alpha_i K_4(\alpha_i z) + \theta_i K_1(\alpha_i z) + \frac{M_i}{EI_i \alpha_i} K_2(\alpha_i z) + \frac{Q_i}{EI_i \alpha_i^2} K_3(\alpha_i z),$$

$$M(z) = EI_i \frac{d\theta}{dz} = x_i EI_i \alpha_i^2 K_3(\alpha_i z) + \theta_i EI_i \alpha_i K_4(\alpha_i z) + M_i K_1(\alpha_i z) + \frac{Q_i}{\alpha_i} K_2(\alpha_i z),$$

$$Q(z) = \frac{dM}{dz} = x_i EI_i \alpha_i^3 K_2(\alpha_i z) + \theta_i EI_i \alpha_i^2 K_3(\alpha_i z) + M_i \alpha_i K_1(\alpha_i z) + Q_i K_1(\alpha_i z).$$

Підставляючи в ці співвідношення $z = l_i$, знаходимо параметри $x_{i+1}, \theta_{i+1}, M_{i+1}, Q_{i+1}$ за відповідними параметрами в i -му перетині.

У матричній формі залежності між параметрами можна представити так:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ \theta_{i+1} \\ M_{i+1} \\ Q_{i+1} \end{bmatrix}}_{\tilde{Y}_{i+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} K_{1i}; \frac{1}{\alpha_i} K_{2i}; \frac{1}{EI_i \alpha_i^2} K_{3i}; \frac{1}{EI_i \alpha_i^3} K_{4i} \\ \alpha_i K_{4i}; K_{1i}; \frac{1}{EI_i \alpha_i} K_{2i}; \frac{1}{EI_i \alpha_i^2} K_{3i} \\ EI_i \alpha_i^2 K_{3i}; EI_i \alpha_i K_{4i}; K_{1i}; \frac{1}{\alpha_i} K_{2i} \\ EI_i \alpha_i^3 K_{2i}; EI_i \alpha_i^2 K_{3i}; \alpha_i K_{4i}; K_{1i} \end{bmatrix}}_{A_1^{(i)}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_i \\ \theta_i \\ M_i \\ Q_i \end{bmatrix}}_{\tilde{Y}_i},$$

де $K_{1i} = K_1(\alpha_i l_i)$ і т.д.

Таким чином, вектор-стовпець параметрів в $(i+1)$ -й перетині Π_{i+1} знаходиться за вектором-стовпцем параметрів в i -й перетині Π_i шляхом множення останнього зліва на квадратну матрицю типу A_1 переходу через ділянку постійного перетину

$$\Pi_{i+1} = A_1^{(i)} \Pi_i.$$

Розглянемо далі ділянку «нульової довжини», що містить зосереджену масу m_i і (якщо враховувати гіроскопічний момент) диск з моментом інерції I_{di} (рис. 27).

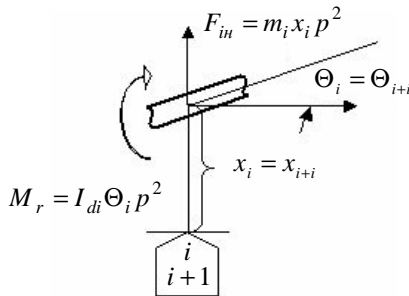


Рисунок 27

Під час переходу через таку ділянку прогинання і кут повороту залишаються незмінними, а поперечна сила і згинальний момент зазнають стрибок:

$$x_{i+1} = x_i, \theta_{i+1} = \theta_i, M_{i+1} = M_i + I_{di} p^2 \theta_i, Q_{i+1} = Q_i + m_i p^2 x_i.$$

У матричній формі перехід через таку ділянку (ділянка другого типу) виразиться таким матричним співвідношенням:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ \theta_{i+1} \\ M_{i+1} \\ Q_{i+1} \end{bmatrix}}_{\Pi_{i+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1; 0; 0; 0 \\ 0; 1; 0; 0 \\ 0; I_{di} p^2; 1; 0 \\ m_i p^2; 0; 0; 1 \end{bmatrix}}_{A_1^{(i)}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_i \\ \theta_i \\ M_i \\ Q_i \end{bmatrix}}_{\Pi_i}.$$

У разі переходу через ділянку нульової довжини під пружною опорою (рис. 28) прогинання кут повороту і момент залишаються незмінними, а поперечна сила зменшується на величину реакції пружної опори:

$$Q_{i+1} = Q_i - c_i x_i,$$

де c_i - жорсткість опори.

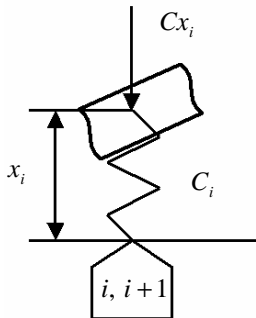


Рисунок 28

Перехід через пружну опору (ділянка третього типу) можна представити матричним співвідношенням

$$\Pi_{i+1} = A_3^{(i)} \Pi_i,$$

де

$$A_3^{(i)} = \begin{bmatrix} 1; 0; 0; 0 \\ 0; 1; 0; 0 \\ 0; 0; 1; 0 \\ -c_i; 0; 0; 1 \end{bmatrix}.$$

1.3 Розрахунок власних частот і форм

Коли частота обертання ротора p виявляється такою, що дорівнює критичній p_k , ротор згинається за відповідною власною формою $U_k(z)$, і його прогинання можуть досягти небезпечних величин.

Розрахуємо форму прогинання ротора при якійсь довільній частоті обертання p . Для зручності програмування і користування програмою вважатимемо лівий і правий кінець вала вільними (що практично завжди має місце). Тоді на лівому кінці ($i=0$) вектор параметрів матиме вигляд

$$\Pi_0 = (x_0, \theta_0, 0, 0)^T.$$

Якби були відомі конкретні значення для початкових параметрів x_0, θ_0 , то шляхом переходу від ділянки до ділянки можна було б обчислити параметри на правому кінці:

$$\Pi_n = A_k^{(n)} A_k^{(n-1)} \dots A_k^{(1)} \Pi_0,$$

де n - число ділянок, а $k = 1$ або 2, або 3.

Вектор параметрів на правому кінці можна лінійно виразити через початкові параметри x_0, θ_0 , користуючись так званим методом двох розрахунків. Візьмемо спершу $x_0 = 1$ і $\theta_0 = 0$ і обчислимо параметри першого розрахунку на правому кінці згідно з матричним співвідношенням

$$\Pi_n^I = A_k^{(n)} A_k^{(n-1)} \dots A_k^{(1)} \Pi_0^I,$$

де $\Pi_0^I = (1, 0, 0, 0)^T$ і $k = 1$ або 2, або 3.

Потім візьмемо $x_0 = 0$ і $\theta_0 = 1$ і визначимо параметри другого розрахунку

$$\Pi_n^{II} = A_k^{(n)} A_k^{(n-1)} \dots A_k^{(1)} \Pi_0^{II},$$

де $\Pi_0^{II} = (0, 1, 0, 0)^T$.

Через лінійність системи і справедливості принципу суперпозиції параметри на правому кінці виразяться через початкові параметри у вигляді лінійного співвідношення

$$\Pi_n = x_0 \Pi_n^I + \theta_0 \Pi_n^{II},$$

або в скалярній формі:

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 x_n^I + \theta_0 x_n^{II}, \theta_n = x_0 \theta_n^I + \theta_0 \theta_n^{II}, \\ M_n &= x_0 M_n^I + \theta_0 M_n^{II}, Q_n = x_0 Q_n^I + \theta_0 Q_n^{II}. \end{aligned}$$

Розрахунок проводиться при якомусь пробному значенні частоти обертання p . І лише при рівності цієї частоти однієї з критичних частот p_k виконуватимуться граничні умови у правому кінці:

$$\begin{aligned} M_n &= M_n^I x_0 + M_n^{II} \theta_0 = 0, \\ Q_n &= Q_n^I x_0 + Q_n^{II} \theta_0 = 0. \end{aligned}$$

З умови нетривіальності розв'язку ($x_0 \neq 0, \theta_0 \neq 0$) повинен бути таким:

$$\Delta(p) = M_n^I Q_k^{II} - M_k^{II} Q_n^I = 0. \quad (82)$$

Співвідношення (82), по суті, є частотним рівнянням, яке перетворюється на тотожність тільки при $p = p_k$ ($k = 1, 2, \dots$). Почавши розрахунок з якогось малого значення p_0 з деяким початковим кроком Δp_0 , чисельно визначаються точки перетину функції $\Delta(p)$ з віссю абсцис p (рис. 29), які і є власними частотами.

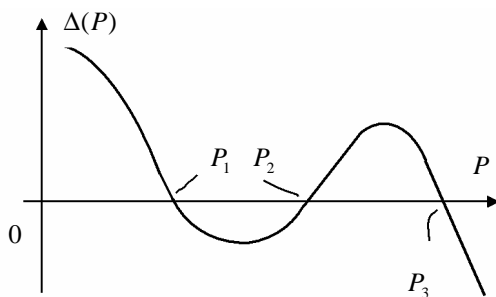


Рисунок 29

При цьому використовується алгоритм дроблення кроку до величини Δp_{\min} , що визначає необхідну точність розрахунку.

ЛЕКЦІЯ 9

1. Метод початкових параметрів (продовження)

1.4. Підготовка початкових даних.

Для виконання розрахунку на ПЕВМ за технічними даними складається розрахункова схема ротора (наприклад, на рис. 30).

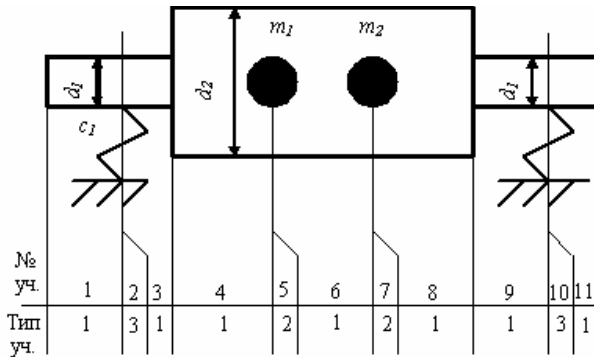


Рисунок 30

Виділяються ділянки постійного перетину (типу 1), зосереджених мас (типу 2) і пружних опор (типу 3). Як зосереджені маси звичайно беруться робочі колеса, муфти й інші насадні деталі.

Початковими даними для програми є: N - число ділянок параметра, $geal$ $p_0, p_{max}, \Delta p_0, \Delta p_{min}, \rho, E$; масиви $ML(1:N)$ - ознакою ділянок, $geal$ - масиви $L(1:N)$ довжин, $D(1:N)$ - діаметрів, $C(1:N)$ - жорсткостей і $M(1:N)$ - мас. Для схеми рис. 30 дані за елементами масивів заносяться згідно з таблицею 1.

Таблиця 1

<i>i</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
<i>ML</i>	1	3	1	1	2	1	2	1	1	3	1
<i>L</i>	l_1	0	l_3	l_4	0	l_6	0	l_8	l_9	0	l_{10}
<i>D</i>	d_1	0	d_1	d_2	0	d_2	0	d_2	d_1	0	d_1
<i>C</i>	0	C_1	0	0	0	0	0	0	0	C_2	0
<i>M</i>	0	0	0	0	m_1	0	m_2	0	0	0	0

Власні форми розраховуються з точністю до сталого множника. Тому один з початкових параметрів можна взяти довільно, наприклад, припустимо, що $\theta_0 = \theta_0^* = 0,1$. Тоді з умови на правому кінці

$$M_n = x_0 M_n^I + \theta_0 M_n^{II} = 0 \text{ обчислюється } x_0^* = -0,1 \frac{M_n^I}{M_n^{II}}.$$

Потім при знайденій k -й власній частоті p_k виконується розрахунок зліва направо з вектором початкових параметрів $\dot{I}_0^* = (x_0^*, 0, 1; 0; 0)^T$. Можна передбачити накопичення масиву $X[1:L]$ значень прогинань x_i (L - число ділянок першого типу) і друк графіків $U_k(z)$ власних форм.

1.5. Розрахунок вимушених коливань

При розрахунку вимушених коливань в програмі передбачаються ділянки нульової довжини (четвертого типу), де прикладені вимушу вальні сили. Під час переходу через цю ділянку прогинання кут повороту і момент залишаються незмінними, а поперечна сила набуває приросту.

$$Q_i = Q_{i-1} + F_i,$$

де F_i - амплітуда гармонійної вимушувальної сили. Для ротора, що обертається, ця сила визначається неврівноваженою масою $F_i = D_i p^2$, де $D_i [кг \cdot м]$ - дисбаланс в i -му перетині. Розрахунок виконується на ПЕВМ при робочій частоті обертання $p = \omega_p$ таким чином.

Обчислюються параметри першого і другого розрахунків:

$$\Pi_n^I = \prod_{i=1}^n A_k^{(i)} \Pi_0^I, \quad \Pi_n^{II} = \prod_{i=1}^n A_k^{(i)} \Pi_0^{II},$$

де $k = 1$ або 2 , або 3 .

Далі проводиться розрахунок «вимушених» параметрів

$$\Pi_n^e = \prod_{i=1}^n A_k^{(i)} \Pi_0(0),$$

де $\Pi_0(0) = (0,0,0,0)^T$ і $k = 1$ або 2 , або 3 , а перехід через ділянку типу 4 визначається співвідношеннями

$$x_{i+1} = x_i, \theta_{i+1} = \theta_i, M_{i+1} = M_i, Q_{i+1} = Q_i + D_i p^2.$$

Потім з умов на правому (вільному) кінці

$$M_n = M_n^I x_0 + M_n^{II} \theta_0 + M_{n\bar{n}} = 0,$$

$$Q_n = Q_n^I x_0 + Q_n^{II} \theta_0 + Q_{n\bar{n}} = 0$$

обчислюються початкові параметри

$$x_0 = \frac{-M_{n\bar{n}} Q_n^{II} + Q_{n\bar{n}} M_n^{II}}{M_n^I Q_n^{II} - M_n^{II} Q_n^I},$$

$$\theta_0 = \frac{-M_n^I Q_{n\bar{n}} + Q_n^I M_{n\bar{n}}}{M_n^I Q_n^{II} - M_n^{II} Q_n^I}.$$

Далі при знайдених x_0, θ_0 , тобто при

$$\Pi_0 = (x_0, \theta_0, 0, 0)^T,$$

остаточно визначаються параметри вимушених коливань на кожній i -й ділянці:

$$\Pi_i = A_k^{(i)} \dots A_k^{(2)} A_k^{(1)} \Pi_i, \quad (i = \bar{1}, \bar{n}; k = 1 \text{ або } 2, \text{ або } 3, \text{ або } 4).$$

ЛЕКЦІЯ 10

Методи розрахунку коливань роторів, орієнтовані на застосування ЕОМ.

2. Метод кінцевих елементів

2.1 Розрахункова схема

Підготовка розрахункової схеми для визначення власних частот і форм методом кінцевих елементів (МКЕ) аналогічно описаній вище для МНП. Відмінність полягає лише у тому, що всі елементи будуть однотипними, що мають на лівому кінці зосереджену масу і пружну опору (рис. 31).

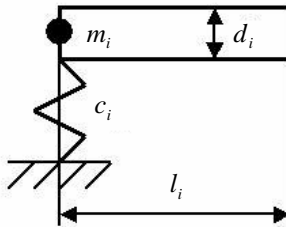


Рисунок 31

На стиках, де зосереджені параметри відсутні, в масивах зосереджених мас і жорсткостей проставляються нулі. У таблиці 2 наведені початкові дані масивів ротора, розрахункова схема якого була наведена вище на рис. 30. При використуванні програми МКЕ число ділянок дорівнює числу ділянок постійного діаметра (типу 1) в програмі МНП.

Таблиця 2

<i>i</i>	1	2	3	4	5	6	7
<i>L</i>	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7
<i>D</i>	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7
<i>C</i>	0	C_1	0	0	0	0	C_2
<i>M</i>	0	0	0	m_1	m_2	0	0

$$\begin{bmatrix} (k_{11} - m_{11}\lambda); k_{12} - m_{12}\lambda; \dots; k_{1,(2n+2)} - m_{1,(2n+2)}\lambda \\ \dots \\ k_{(2n+2),1} - m_{(2n+2),1}\lambda; \dots; k_{(2n+2),(2n+2)} - m_{(2n+2),(2n+2)}\lambda \end{bmatrix} = 0. \quad (85)$$

Або коротко у векторній формі

$$\det[\bar{K} - \lambda\bar{M}] = 0. \quad (85)'$$

Програма розрахунку власних коливань методом КЕ включає такі блоки:

- 1) обчислення коефіцієнтів матриць \bar{M} і \bar{K} ;
- 2) розв'язання частотного рівняння (85) $2(n+1)$ -го порядку і знаходження заданого числа власних частот p_1, p_2, \dots, p_k ($k \leq 2(n+1)$);
- 3) розрахунок відповідних власних форм $U_k(z)$.

Власну k -ю форму можна розрахувати таким чином. Припустивши, що $X_1 = 1$, решта амплітуд $\theta_1, X_2, \theta_2, \dots, X_{n+1}, \theta_{n+1}$ знаходять з розв'язку системи $2n+1$ лінійних рівнянь, яка виходить при підстановці рішень (84) в систему диференціальних рівнянь (83)' і скорочення в ній потім на $\sin pt$. В одержаній таким чином системі треба відкинути, наприклад, останнє рівняння припустимо, що $p = p_k$.

2.3 Розрахунок вимушених коливань консервативної МКЕ – моделі ротора

Рівняння вимушених коливань балки, розбитої на кінцеві елементи, в матричній формі мають вигляд

$$\overline{M}\ddot{U} + \overline{K}U = \overline{F}, \quad (86)$$

де \overline{F} - стовпець вимушувальних сил і моментів.

Для сталих коливань частотою ω під дією вимушувальних сил

$$\overline{F} = \overline{F}_m \sin \omega t \quad (87)$$

розв'язок шукаємо у вигляді

$$\bar{U} = \bar{U}_m \sin \omega t. \quad (88)$$

Після підстановки (88) і (87) в (86) одержимо систему $2(n+1)$ лінійних рівнянь для визначення вектора амплітуд \bar{U}_m . Ця система в матричній формі має вигляд

$$[\bar{K} - \bar{M}\omega^2]\bar{U}_m = \bar{F}_m. \quad (89)$$

2.4 Розрахунок вимушених коливань неконсервативної МКЕ – моделі ротора

При розрахунку форми динамічного прогинання вала, що обертається, з урахуванням опору в опорних точках коефіцієнти матриці жорсткостей \bar{K} і елементів векторів \bar{U}_m і \bar{F}_m є комплексними числами. У матрицях жорсткостей окремих елементів \bar{K}_i (4x4) перший елемент першого рядка набуває вигляду [9]

$$r_{11}^{(i)} = \frac{12EI_i}{l_i^3} + c_i + jb_i,$$

де c_i - коефіцієнт жорсткості опори; b_i - коефіцієнт опору.

Вектор амплітуд \bar{F}_m вимушувальних сил, джерелом яких є дисбаланс, має структуру

$$\bar{F}_m = \omega^2 [D_1^{(r)} + jD_1^{(j)}; 0; D_2^{(r)} + jD_2^{(j)}; 0 \dots; D_k^{(r)} + jD_k^{(j)}; 0; D_{k+1}^{(r)} + jD_{k+1}^{(j)}; 0]^T.$$

В останньому виразі комплекс i -го дисбалансу

$$\bar{D}_i = D_i^{(r)} + jD_i^{(j)} = D_{mi} \cos \varphi_i + jD_{mi} \sin \varphi_i$$

визначається як величина дисбалансу

$$D_{mi} = \sqrt{(D_i^{(r)})^2 + (D_i^{(j)})^2},$$

так і фаза його розташування щодо деякої мітки на роторі:

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{D_i^{(j)}}{D_i^{(r)}}, D_i^{(r)} > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{D_i^{(j)}}{D_i^{(r)}} + \pi, D_i^{(r)} < 0. \end{cases}$$

У результаті розв'язку системи (89) знаходиться шуканий вектор комплексних амплітуд:

$$\bar{U}_m = [(Y_1^{(r)} + jY_1^{(j)}); (\theta_1^{(r)} + j\theta_1^{(j)}); \dots; (Y_{n+1}^{(r)} + jY_{n+1}^{(j)}); (\theta_{n+1}^{(r)} + j\theta_{n+1}^{(j)})],$$

де $Y_i^{(r)}, Y_i^{(j)}$ - дійсна і уявна частини динамічного прогинання в i -му перетині вала; $\theta_i^{(r)}, \theta_i^{(j)}$ - дійсна і уявна частини кута повороту цього перетину.

У загальному випадку фази прогинань в різних перетинах різні, тому лінія динамічного прогинання вала під дією довільного набору дисбалансів буде просторовою кривою.

Картина розташування вектора прогинання \bar{Y}_i і вектора дисбалансу \bar{D}_i у деякому i -му перетині вала показана на рис. 32.

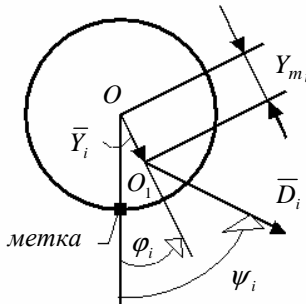


Рисунок 32

На рисунку позначено:

$$Y_{mi} = \sqrt{(Y_i^{(r)})^2 + (Y_i^{(j)})^2} - \text{амплітуда прогинання};$$

$$\varphi = \arg \bar{Y}_i = \begin{cases} \arctg \frac{Y_i^{(j)}}{Y_i^{(r)}}, Y_i^{(r)} > 0, \\ \arctg \frac{Y_i^{(j)}}{Y_i^{(r)}} + \pi, Y_i^{(r)} < 0. \end{cases} \quad \text{- фаза прогинання.}$$

Комплексні амплітуди експериментально можуть бути визначені таким чином. У зручному для вимірювання місці на роторі фіксується мітка (наприклад, за допомогою шматочка ізоляційної стрічки), де встановлюється датчик оборотів і відліку фаз. У деякому i -му перетині встановлюється датчик, що вимірює амплітуду Y_{mi} і фазу φ_i , відлічувану від мітки у бік обертання.

ЛЕКЦІЯ 11

Врівноваження роторів.

1. Умови динамічної рівноваги твердого тіла, що обертається

Динамічна рівновага ω твердого тіла, що обертається з постійною кутовою швидкістю, визначається рівністю нулю головного вектора і головного моменту відцентрових сил, з якими неврівноважені точкові маси m_i діють на нього (рис. 33).

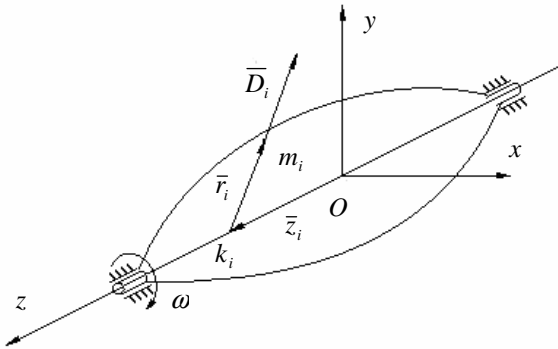


Рисунок 33

У векторній формі умови динамічної рівноваги записуються у вигляді:

$$\sum \overline{F_{ci}} = \omega^2 \sum m_i \overline{r_i} = \omega^2 \sum \overline{D_i} = 0, \quad (90)$$

$$\sum \overline{M_0(F_{yi})} = \omega^2 \sum \overline{z_i} \times (m_i \overline{r_i}) = \omega^2 \sum \overline{z_i} \times \overline{D_i} = 0, \quad (91)$$

де $\overline{r_i}$ - вектор-ексцентриситет неврівноваженої маси m_i ($\overline{r_i} \perp O_z$); $\overline{z_i}$ - радіус-вектор z -ї координати неврівноваженої маси; $\overline{D_i} = m_i \overline{r_i}$ - векторний дисбаланс.

Оскільки рівняння (90), (91) можна скоротити на ω^2 , то умови динамічної рівноваги тіла, що обертається, зводяться до вимог еквівалентності нулю всієї сукупності векторних дисбалансів:

$$(\overline{D}_1, \overline{D}_2, \dots, \overline{D}_n) \sim 0.$$

Ця умова виконується при рівності нулю головного вектора і головного моменту системи дисбалансів:

$$\begin{aligned} \sum \overline{D}_i &= 0, (90)', \\ \sum \overline{z}_i \times \overline{D}_i &= 0 (91)'. \end{aligned}$$

Для виконання умови (90) необхідно і достатньо, щоб вісь обертання ротора проходила через його центр мас.

Умову (91) можна переписати у вигляді двох скалярних:

$$\begin{aligned} \sum m_i x_i z_i &= I_{xz} = 0, \\ \sum m_i y_i z_i &= I_{yz} = 0, \end{aligned}$$

де I_{xz}, I_{yz} – відцентрові моменти інерції тіла. Отже, умова (91)' еквівалентна рівності нулю відцентрових моментів інерції твердого тіла щодо осей, одна з яких є віссю обертання.

2. Види невірноваженості

Статичною невірноваженістю називається випадок, коли не виконується умова (90)' і виконується (91)', тобто головний вектор системи дисбалансів $\overline{D} = \sum \overline{D}_i \neq 0$, а $I_{xz}, I_{yz} = 0$.

Тоді головна центральна вісь Z' буде паралельна осі обертання Z (рис. 34а).

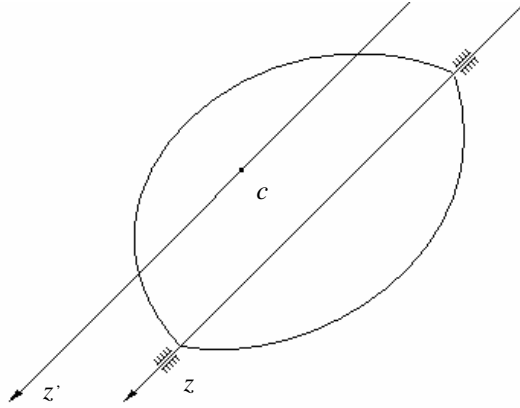


Рисунок. 34а

Моментною невірноваженістю називають випадок, коли $\overline{D}_i = 0$, а $I_{xz}, I_{yz} \neq 0$. У цьому випадку головна центральна вісь Z' перетинає вісь обертання Z в центрі мас C (рис. 34б).

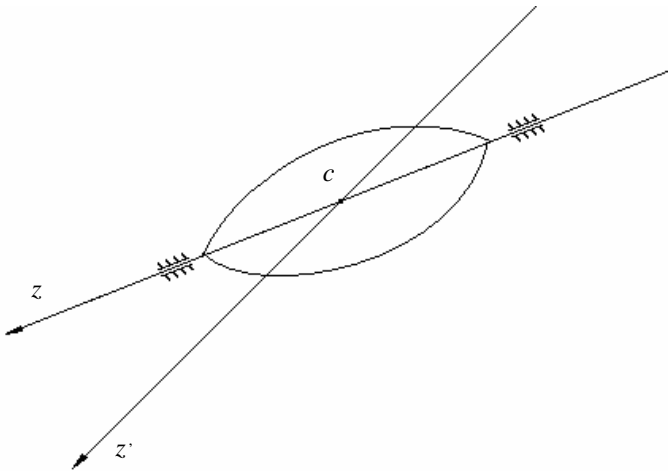


Рисунок 34б

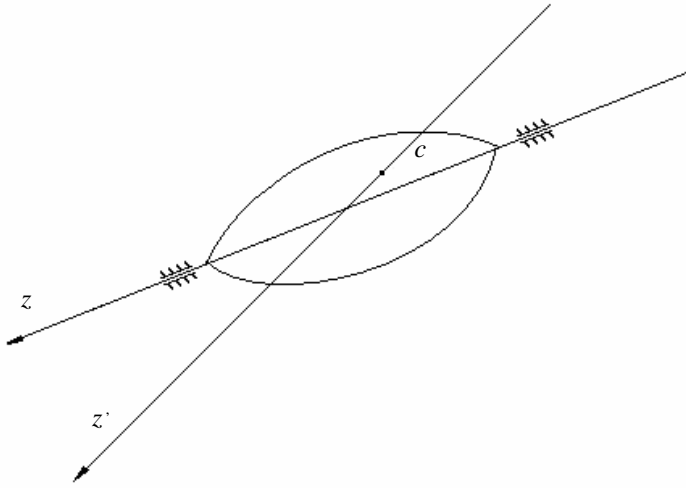


Рисунок 34в

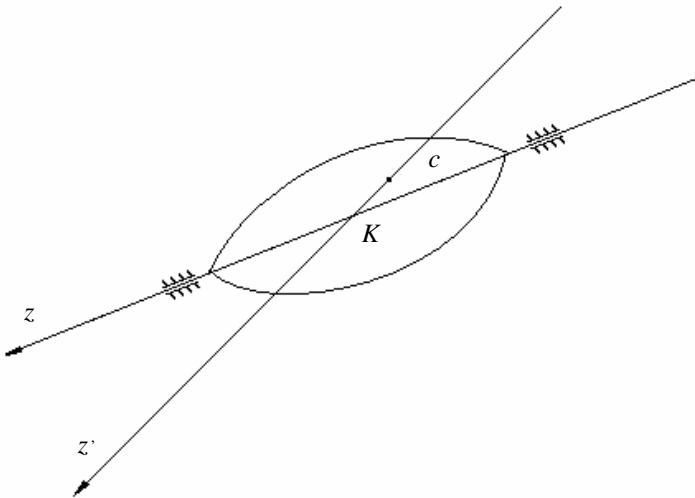


Рисунок 34г

Динамічна невірноваженість має місце при $\overline{D}_i \neq 0$ і $I_{xz}, I_{yz} \neq 0$. При цьому головна центральна вісь Z' або схрещується з віссю Z (рис. 34в), або перетинає її в деякій точці D_0 , що не збігається з центром мас C (рис. 34г).

3. Еквівалентні системи дисбалансів

Довільну систему векторних дисбалансів, як це впливає з правил зведення системи векторів у статиці, можна замінити двома векторними дисбалансами, що лежать у двох довільно вибраних площинах, перпендикулярних осі обертання. Точно так, як і будь-яку систему просторових сил, завжди можна замінити двома силами, що схрещуються.

Нехай, наприклад, є система двох деяких дисбалансів $\overline{D}_1, \overline{D}_2$ (рис. 35).

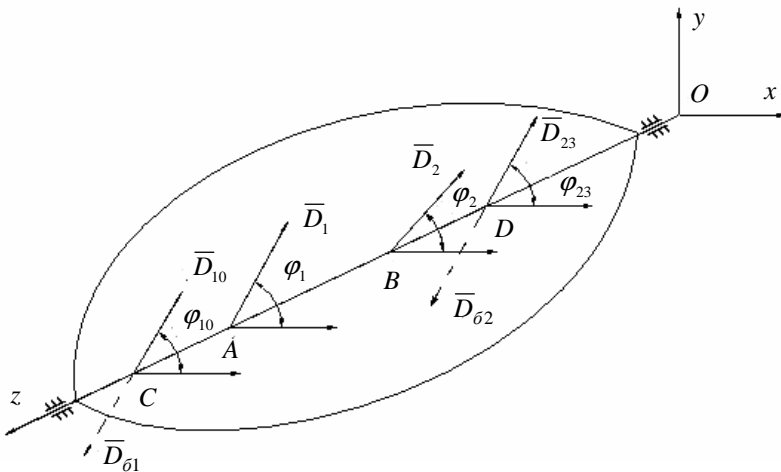


Рисунок 35

Покажемо, як цю систему можна замінити двома еквівалентними дисбалансами $\overline{D}_{1z}, \overline{D}_{2z}$, що лежить у довільно призначених площинах C і D , званих площинами корекції. Припустимо, величини і розташування початкових векторних дисбалансів $\overline{D}_1, \overline{D}_2$ відомі, тобто дані величини (рис. 35)

$r_1 = OA$, $r_2 = OB$, $\overline{D_1}, \overline{D_2}$ і кути векторних дисбалансів з деякою віссю Ox φ_1 , φ_2 . Потрібно при заданих координатах площин корекції $OC = r_1'$, $OD = r_2'$ визначити еквівалентні дисбаланси $\overline{D_1}'$, $\overline{D_2}'$ і кути φ_1' , φ_2' .

Умова еквівалентності систем двох векторів

$$(\overline{D_1}, \overline{D_2}) \sim (\overline{D_{1Y}}, \overline{D_{2Y}})$$

означає виконання двох векторних рівнянь:

$$\begin{aligned} \overline{D_{1Z}} + \overline{D_{2Z}} &= \overline{D_1} + \overline{D_2}; \\ \overline{M_0(D_{1Z})} + \overline{M_0(D_{2Z})} &= \overline{M_0(D_1)} + \overline{M_0(D_2)}. \end{aligned}$$

У даному випадку, коли всі вектори перпендикулярні осі Oz і лінії їх дії проходять через цю вісь, останні два векторні рівняння зводяться до чотирьох скалярних:

$$D_{1XZ} + D_{2XZ} = D_1 \cos \varphi_1 + D_2 \cos \varphi_2, \quad (a)$$

$$D_{1YZ} + D_{2YZ} = D_1 \sin \varphi_1 + D_2 \sin \varphi_2, \quad (б)$$

$$D_{1XZ} \cdot r_{1Z} + D_{2XZ} \cdot r_{2Z} = D_1 \cos \varphi_1 \cdot r_1 + D_2 \cos \varphi_2 \cdot r_2, \quad (в)$$

$$D_{1YZ} \cdot r_{1Z} + D_{2YZ} \cdot r_{2Z} = D_1 \sin \varphi_1 \cdot r_1 + D_2 \sin \varphi_2 \cdot r_2. \quad (г)$$

Із сумісного розв'язку (а) і (в) визначаємо $\overline{D_{1XZ}}, \overline{D_{2XZ}}$, а з (б) і (г) $-D_{1YZ}, D_{2YZ}$.

Шукана система вантажів балансувань визначається із співвідношень:

$$\begin{aligned} D_{\delta 1x} &= -D_{1XZ}, & D_{\delta 1y} &= -D_{1YZ}, \\ D_{\delta 2x} &= -D_{2XZ}, & D_{\delta 2y} &= -D_{2YZ}. \end{aligned}$$

Кути установок коригуючих вантажів обчислюються за формулами

$$\varphi_{\delta} = \begin{cases} \arctg \frac{D_{\delta y}}{D_{\delta x}}, & \text{при } D_{\delta x} > 0, \\ \arctg \frac{D_{\delta y}}{D_{\delta x}} + 180^{\circ} & \text{при } D_{\delta x} < 0 (i=1,2). \end{cases}$$

Очевидно, що система $\overline{D_{1\delta}}, \overline{D_{2\delta}}, \overline{D_1}, \overline{D_2}$ буде урівноваженою.

4. Поняття жорсткого ротора

З погляду способів урівноваження ротори розділяють на жорсткі і гнучкі [11].

Жорстким вважається ротор, який, будучи збалансованим у двох площинах корекції на деякій частоті обертання n_b (як правило, меншої робочої частоти), зберігає необхідні динамічні параметри (динамічні реакції опор, рівень вібрації у заданих точках) в допустимих межах на всьому діапазоні робочих частот обертання.

Такий ротор на всіх частотах обертання аж до максимальної робочої $n_{p \max}$ поводить як абсолютно тверде тіло. Для жорсткого ротора не має значення, де вибрані площини корекції і на якій частоті n_b $n_{p \max}$ вироблене балансування.

На практиці жорстким береться ротор, у якого максимальна робоча частота обертання

$$n_{p \max} \leq k \cdot n_1,$$

де n_1 – перша критична частота. Коефіцієнт k призначається залежно від типу машини у межах

$$0.2 < k < 0.7.$$

5. Критерії якості балансування

Балансуванням називається процес експериментального визначення величин коригуючих дисбалансів і кутів їх розташування в призначених площинах корекції і установки в цих площинах відповідних врівноважуючих мас.

Якість балансування можна оцінити різними способами.

А. За величиною допустимого залишкового дисбалансу. При цьому використовується поняття питомого залишкового дисбалансу

$$e = D/m_r,$$

де e – питомий дисбаланс; D – дисбаланс; m_r - маса ротора. Питомий дисбаланс дорівнює зрушенню центра мас ротора від осі обертання. Різні фірми призначають допустимі залишкові питомі дисбаланси залежно від типу машин і частоти обертання. Наприклад, для гіроскопів допустимі дисбаланси складають величини порядку 0,25 – 0,50 мкм, для турбогенераторів - 2 – 10 мкм.

Б. Призначенням допустимих амплітуд вібрацій ротора в опорних точках або на корпусах підшипників. Наприклад, для електричних машин великої потужності вібрація на корпусах підшипників не повинна перевищувати 40-80 мкм.

В. Призначенням допустимих динамічних навантажень на підшипники. Рівень динамічних навантажень задається коефіцієнтом неврівноваженості, дорівнює відношенню відцентрової сили, викликаній дисбалансом, до статичного навантаження на підшипники від сили ваги. Для різних типів машин цей коефіцієнт призначається в межах

$$0.01 \leq k \leq 0.5.$$

ЛЕКЦІЯ 12

1. Статичне балансування

Для ротора з одним диском може виявитися достатнім статичне балансування в одній площині корекції, розташованій приблизно в головній центральній площині інерції диска. Практично це можливо при відношенні довжини ротора до діаметра диска менше 0.2 - 0.25. Ідея всіх способів статичного балансування полягає в досягненні незбуреного положення ротора, що не обертається, встановленого на призмах або на дводисковому пристрої (рис. 36).

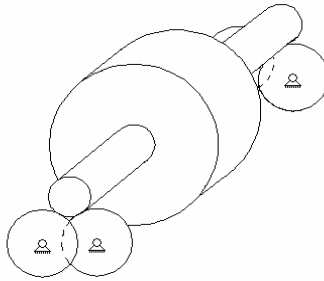


Рисунок 36

Точність статичного балансування оцінюється питомим дисбалансом e_{cm} , мкм, який визначається як відношення залишкового дисбалансу D_{ocm} , кг·мкм, до маси ротора m_p , кг:

$$e_{cm} = D_{ocm} / m_p .$$

Очевидно, що питомий дисбаланс дорівнює ексцентриситету центра мас ротора, що має точкову нерівноважену масу.

При виконанні зазначеної вище умови точність статичного балансування може бути доведена до значень залишкового питомого дисбалансу $e_{cm} = 10 - 80$ мкм (верхня межа - для важких роторів).

Одним із способів статичного балансування є такий. Пробну масу m_p встановлюють на деякому радіусі балансування r_δ під кутом 90° до вертикалі АК (рис. 37).

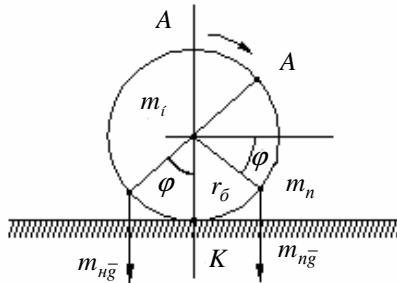


Рисунок 37

При цьому ротор відкочується на кут φ по відношенню до початкового стану. З умови рівноваги $m_n r_\delta \sin \varphi = m_n r_\delta \cos \varphi$ (де m_n – початкова нерівноважена маса, якщо вважати, що вона розташована на радіусі r_δ) визначається $m_n = m_p \operatorname{ctg} \varphi$. Очевидно, що коригуючу масу $m_k = m_n$ необхідно встановити у верхній точці А початкового положення ротора.

2. Динамічне балансування

При сучасних засобах вимірювання амплітуд і фаз вимушених коливань роторів найзручнішим є так зване двохплощинне балансування. Цей спосіб вимагає трьох запусків ротора: початкового, потім із пробною масою у першій площині корекції I і далі з пробною масою у другій площині корекції II (рис. 38).

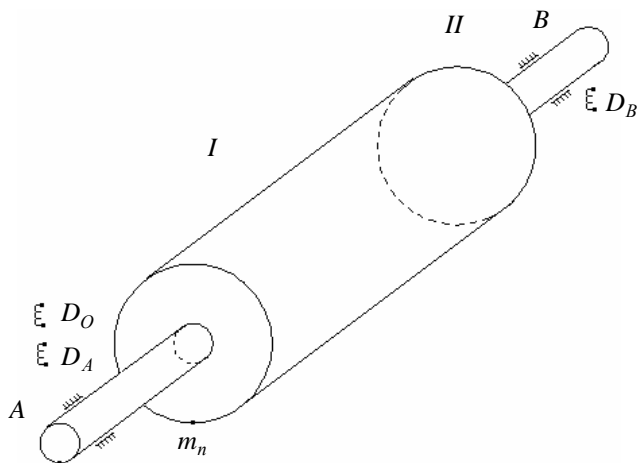


Рисунок 38

Нехай у результаті початкового запуску виміряні у деяких двох точках вимірювання А і В амплітуди Y_{m10} , Y_{m20} і фази φ_{10} , φ_{20} щодо мітки, встановленої на роторі в площині датчика оборотів D_0 . За цими вимірюваннями визначаються відповідні комплексні амплітуди

$$\begin{aligned}\overline{Y}_{10} &= Y_{m10} \cos \varphi_{10} + j Y_{m10} \sin \varphi_{10}, \\ \overline{Y}_{20} &= Y_{m20} \cos \varphi_{20} + j Y_{m20} \sin \varphi_{20}.\end{aligned}$$

Використовуючи принцип суперпозиції, можемо записати

$$\overline{Y}_{10} = \overline{W}_{11} \overline{D}_{10} + \overline{W}_{12} \overline{D}_{20}, \quad (92)$$

де $\overline{W}_{11}, \overline{W}_{12}$ - комплексні коефіцієнти впливу;

$\overline{D}_{10}, \overline{D}_{20}$ - шукані дисбаланси (у припущенні, що вони знаходяться в площинах корекції). Аналогічно, комплексна амплітуда в другій точці вимірювання визначиться співвідношенням

$$\overline{Y}_{20} = \overline{W}_{21} \overline{D}_{10} + \overline{W}_{22} \overline{D}_{20}. \quad (93)$$

Далі закріплюється пробний вантаж m_p у площині корекції I і вимірюються комплексні прогинання першого пуску $\overline{Y}_{11}, \overline{Y}_{21}$. На роторі тепер буде система дисбалансів $\overline{D}_{11} = \overline{D}_{10} + D_i$, $\overline{D}_{21} = \overline{D}_{20}$, де $D_n = r_\sigma m_p$ – пробний дисбаланс. Звичайно пробну масу рекомендують брати

$$m_n \leq 18 m_p / (n_\sigma^2 r_\sigma),$$

де m_p – маса ротора, кг; n_σ – частота обертання балансування, об/год; r_σ – радіус установки пробної маси, м.

Наведене співвідношення еквівалентне вимозі неперевищення відцентрової сили від пробного вантажу $F_y = m_i r_\sigma \omega_\sigma^2$ двох відсотків від ваги ротора $G_p = m_p g$.

Пробний вантаж доцільно встановлювати в площині мітки, тоді комплекс пробного дисбалансу $\overline{D}_n = D_n + j \cdot 0$. У цьому випадку для комплексних амплітуд першого пуску можна записати

$$\overline{Y}_{11} = \overline{W}_{11}(\overline{D}_{10} + D_i) + \overline{W}_{12}\overline{D}_{20}, \quad (94)$$

$$\overline{Y}_{21} = \overline{W}_{21}(\overline{D}_{10} + D_n) + \overline{W}_{22}\overline{D}_{20}. \quad (95)$$

Аналогічно, після установки пробної маси (на тому ж радіусі r_σ) в другій площині корекції буде

$$\overline{Y}_{12} = \overline{W}_{11}\overline{D}_{10} + \overline{W}_{12}(\overline{D}_{20} + D_n), \quad (96)$$

$$\overline{Y}_{22} = \overline{W}_{21}\overline{D}_{10} + \overline{W}_{22}(\overline{D}_{20} + D_i). \quad (97)$$

Віднімаючи з (94) (92), можемо записати

$$\overline{Y}_{11} - \overline{Y}_{10} = \overline{W}_{11}D_i.$$

Далі, віднімаючи з (95) (93), одержимо

$$\overline{Y}_{21} - \overline{Y}_{20} = \overline{W}_{21} D_i .$$

Віднімаючи від (96) (92), від (97) (93), можемо відповідно записати:

$$\overline{Y}_{12} - \overline{Y}_{10} = \overline{W}_{12} D_i ,$$

$$\overline{Y}_{22} - \overline{Y}_{20} = \overline{W}_{22} D_i .$$

Таким чином, за наслідками вимірів комплексних амплітуд у трьох запусках експериментально визначаються динамічні податливості ротора:

$$\begin{aligned} \overline{W}_{11} &= (\overline{Y}_{11} - \overline{Y}_{10}) / D_n, & \overline{W}_{21} &= (\overline{Y}_{21} - \overline{Y}_{20}) / D_n, \\ \overline{W}_{12} &= (\overline{Y}_{12} - \overline{Y}_{10}) / D_n, & \overline{W}_{22} &= (\overline{Y}_{22} - \overline{Y}_{20}) / D_n. \end{aligned} \quad (98)$$

Далі обчислюються шукані дисбаланси шляхом розв'язання систем рівнянь (92), (93) з урахуванням знайдених за формулами (98) комплексних коефіцієнтів впливу:

$$\overline{D}_{10} = \overline{A} / \overline{\Delta} , \quad \overline{D}_{20} = \overline{B} / \overline{\Delta} , \quad (99)$$

де

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \overline{Y}_{10} \overline{W}_{22} - \overline{Y}_{20} \overline{W}_{12} , \\ \overline{B} &= \overline{W}_{11} \overline{Y}_{20} - \overline{W}_{21} \overline{Y}_{10} , \\ \overline{\Delta} &= \overline{W}_{11} \overline{W}_{22} - \overline{W}_{12} \overline{W}_{21} . \end{aligned} \quad (100)$$

Процес балансування закінчується установкою рівноважувальних вантажів у площинах корекції, які визначають дисбаланси

$$\overline{D}_{\delta 1} = -\overline{D}_{10} , \quad \overline{D}_{\delta 2} = -\overline{D}_{20} .$$

Очевидно, що рівноважувальні маси слід обчислювати за формулами:

$$m_{\delta 1} = \overline{D_{\delta 1}} / r_{\delta} \quad m_{\delta 2} = \overline{D_{\delta 2}} / r_{\delta}.$$

Кути установки мас, відлічувані від мітки у бік обертання ротора, будуть дорівнювати:

$$\varphi_{\delta 1} = \arg \overline{D_{\delta 1}}, \quad \varphi_{\delta 2} = \arg \overline{D_{\delta 2}}.$$

ЛЕКЦІЯ 13

Методи врівноваження гнучких роторів

1. Явище розбалансування ротора, урівноваженого в двох площинах на низьких оборотах

Розглянемо, наприклад, ротор з початковим $D_n = m_n e_n$ дисбалансом в області центра мас, урівноважений у площинах опор двома вантажами $m_{б1}$ і $m_{б2}$ (рис. 39).

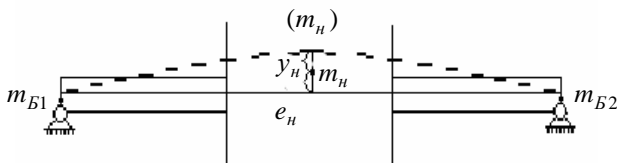


Рисунок 39

Нехай балансування виконане на низькій частоті обертання (істотно меншої першої критичної) за описаним методом. При обертанні ротора, скажімо, поблизу першої критичної він вигнеться за першою формою і з'явиться додатковий дисбаланс $\Delta D = m_n$, де прогинання y_n стає сумірним з початковим ексцентриситетом e_n . Цей дисбаланс виявляється нічим не урівноважений. При обертанні у області другої критичної частоти істотні додаткові дисбаланси дадуть неврівноважені маси, розташовані в районах максимумів другої форми. Таким чином, при обертанні ротора на частотах, близьких до критичних, і, взагалі кажучи, на будь-яких частотах, вище першої критичної, прогинання істотно залежать від розташування неврівноважених мас, нехай навіть вони в сукупності утворювали рівноважну систему дисбалансів на низьких частотах обертання.

Якщо уявити собі ідеальний випадок, коли кожна неврівноважена маса врівноважується там, де вона знаходиться, то ротор виявиться урівноваженим на будь-якій частоті. Проте таке балансування практично неможливе, оскільки немає способів виявити істинні розташування дисбалансів. У цьому полягає складність проблеми балансування гнучких роторів.

2. Розкладання прогинання синхронної процесії неврівноваженого ротора за власними формами

Розглянемо вимушені коливання ротора з довільним розподілим дисбалансом:

$$\bar{d}(z) = \mu(z) \cdot \bar{e}(z) = \mu(z)(e_r(z) + je_j(z)), \quad (101)$$

де $\mu(z)$ – погонна маса; $e_r(z)$, $e_j(z)$ – складові ексцентриситету в розкладанні по деяких взаємно перпендикулярних напрямках x , y (рис. 40).

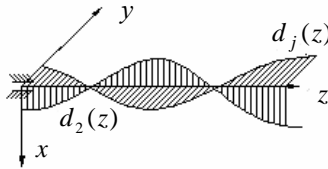


Рисунок 40

Результуюча еюра розподілених дисбалансів буде просторовою кривою. Відповідно і лінія прогинань ротора також буде просторовою кривою, описуваною деякою функцією

$$\bar{v}(z) = x(z) + jy(z).$$

При введених комплексних уявленнях для розподілених дисбалансів і лінії прогинання диференціальне рівняння вимушених коливань ротора можна записати у вигляді

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (EI \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial z^2}) + \mu(z) \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial t^2} = \omega^2 \bar{d}(z) \sin \omega t, \quad (102)$$

Де $\bar{W}(z,t)$ - шукана комплексна функція коливань; ω – частота обертання ротора, решта позначень обумовлена раніше.

Розв'язок (102) шукаємо в розкладанні за власними формами

$$\bar{W}(z,t) = \sum_k \bar{C}_k U_k(z) \cdot \sin \omega t = \bar{v}(z) \sin \omega t, \quad (103)$$

де $\bar{v}(z) = \sum_k \bar{C}_k U_k(z)$ - шукана комплексна функція прогинань.

Комплексний коефіцієнт $\bar{C}_k = C_{kr} + jC_{kj}$ визначає амплітудний множник

$$C_k = \sqrt{C_{kr}^2 + C_{kj}^2}$$

складовій прогинання, відповідний k -й власній формі, а також площина розташування цієї складової, визначуваної кутом

$$\varphi_k = \arg \bar{C}_k = \begin{cases} \arctg \frac{C_{kj}}{C_{kr}} & \text{при } C_{kr} > 0, \\ \arctg \frac{C_{kj}}{C_{kr}} + \Pi & \text{при } C_{kr} < 0. \end{cases}$$

Кожна k -та власна форма, як відомо, задовольняє однорідне рівняння

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (EI \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2}) - \mu(z) \omega_k^2 u_k = 0, \quad (104)$$

де $\omega_k - k$ -та власна частота; $k=1,2,3,\dots$

Підставляючи (103) в (102), одержимо після скорочення на $\sin(\omega t)$

$$\sum_k (\frac{\partial^2}{\partial z^2} (EI \bar{C}_k \frac{\partial^2}{\partial z^2} u_k)) - \mu(z) \omega_k^2 \bar{C}_k u_k = \omega^2 \bar{d}(z).$$

Враховуючи рівняння (104), останнє співвідношення можна переписати так:

$$\sum_k \bar{C}_k \mu(z) (\omega_k^2 - \omega^2) u_k(z) = \omega^2 \bar{d}(z). \quad (105)$$

Помножимо ліву і праву частини (105) на $u_k(z)$ і проінтегруємо по довжині ротора. Тоді, враховуючи властивість ортогональності власних форм

$$\int_0^l \mu(z) u_k(z) u_j(z) dz = 0 \quad (j \neq k), \quad (106)$$

одержимо формули для визначення комплексних множників \overline{C}_k :

$$\overline{C}_k = \frac{\omega^2}{\omega_k^2 - \omega^2} \cdot \frac{\int_0^l \overline{d}(z) \cdot u_k(z) dz}{\int_0^l \mu(z) u_k^2(z) dz}. \quad (107)$$

Комплексний розподілений дисбаланс (101) представимо в розкладанні за власними формами

$$\overline{d}(z) = \mu(z) \overline{e}(z) = \mu(z) \sum_k \overline{e}_k u_k(z). \quad (108)$$

Помноживши співвідношення (108) на $u_k(z)$, проінтегруємо ліву і праву частини по довжині ротора. Враховуючи властивість ортогональності (106), можна записати

$$\overline{e}_k = \int_0^l \mu(z) \overline{e}(z) u_k(z) dz / \int_0^l \mu(z) u_k^2(z) dz. \quad (109)$$

Тоді формулу (107) можна представити у вигляді

$$\overline{C}_k = \omega^2 \overline{e}_k / (\omega_k^2 - \omega^2).$$

Остаточно вираз для комплексного прогинання тепер можна записати так:

$$\bar{v}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega^2 \bar{e}_k u_k(z) / (\omega_k^2 - \omega^2). \quad (110)$$

При обертанні на k -й критичній частоті (тобто при $\omega = \omega_k$) можна приблизно припустити, що

$$\bar{v}(z) = \omega^2 \bar{e}_k u_k(z) / (\omega_k^2 - \omega^2). \quad (111)$$

З останнього співвідношення випливає таке. По-перше, на k -ту критичній частоті ротор незалежно від закону розподілу дисбалансів $\bar{d}(z)$ згинається в одній площині, визначуваній кутом $\varphi = \arg e_k$ (тобто в площині має в своєму розпорядженні k -й складову розподіленого дисбалансу), за відповідною власною формою. По-друге, це прогинання визначається складовою дисбалансу, що відповідає даній власній формі в розкладанні (108), тобто складовою

$$\bar{d}_k(z) = \bar{e}_k \mu(z) u_k(z).$$

Решта складових на це прогинання не впливає. Тому балансування гнучкого ротора можна проводити роздільно по кожній із складових дисбалансу на відповідній критичній частоті. Балансування, виконане таким чином, приводить (у ідеалі) до урівноваження гнучкого ротора на всіх частотах.

Вищевикладені уявлення покладені в основу деяких практичних методів урівноваження гнучких роторів [10,11].

3.Балансування за формами власних коливань

Нехай на першій критичній ω_1 робиться вимір комплексної амплітуди в деякій точці ротора $\bar{Y}_0^{(1)}$. Далі на роторі встановлюється система симетричних пробних дисбалансів, наприклад, у трьох точках ротора $D_{1П}^{(1)}, D_{2П}^{(1)}, D_{3П}^{(1)}$ (рис. 41а).

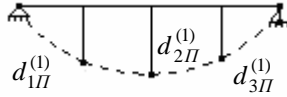


Рисунок 41а

Ця система повинна приблизно відповідати першій власній формі. Потім на критичній частоті ω_1 робиться в тій самій точці вимір амплітуди $\overline{Y}_1^{(1)}$. Можемо записати умовно

$$\overline{Y}_0^{(1)} = \overline{W}^{(1)} \cdot (\overline{D}_{1*}^{(1)}, \overline{D}_{2*}^{(1)}, \overline{D}_{3*}^{(1)}), \quad (112)$$

де $\overline{W}^{(1)}$ - деякий комплексний коефіцієнт впливу від шуканої системи дисбалансів, що відповідає першій формі.

При установці на роторі в площині мітки системи пробних дисбалансів амплітуда в тій самій точці визначатиметься співвідношенням

$$\overline{Y}_1^{(1)} = \overline{W}^{(1)} \cdot [\overline{D}_{1*}^{(1)}, \overline{D}_{2*}^{(1)}, \overline{D}_{3*}^{(1)}] + (D_{1П}, D_{2П}, D_{3П}). \quad (113)$$

Віднімаючи з (113) (112), запишемо

$$\overline{Y}_1^{(1)} - \overline{Y}_0^{(1)} = \overline{W}^{(1)} \cdot (D_{1П}, D_{2П}, D_{3П}),$$

звідки

$$\overline{W}^{(1)} = \frac{\overline{Y}_1^{(1)} - \overline{Y}_0^{(1)}}{(D_{1П}, D_{2П}, D_{3П})},$$

а система встановлювальних шуканих дисбалансів за першою формою визначається співвідношенням

$$(\overline{D}_{1*}^{(1)}, \overline{D}_{2*}^{(1)}, \overline{D}_{3*}^{(1)}) = \overline{\eta}_1 \cdot (D_{1П}, D_{2П}, D_{3П}),$$

де безрозмірний комплексний коефіцієнт $\overline{\eta}_1$ обчислюється за експериментальними даними згідно із співвідношенням

$$\overline{\eta}_1 = \eta_{1r} + j\eta_{1j} = \frac{\overline{Y}_0^{(1)}}{\overline{Y}_1^{(1)} - \overline{Y}_0^{(1)}}. \quad (114)$$

Система вантажів балансувань визначається тепер так. За модулем

$$D_{1\sigma} = D_{1\Pi}\eta, \quad D_{2\sigma} = D_{2\Pi}\eta, \quad D_{3\sigma} = D_{3\Pi}\eta,$$

де

$$\eta = \sqrt{\eta_{12}^2 + \eta_{1j}^2}.$$

Площина розташування цієї системи знаходиться під кутом (по відношенню до мітки) $\varphi_{\delta 1} = \varphi_1 + 180^0$, де

$$\varphi_1 = \arg \overline{\eta}_1 = \begin{cases} \arctg \frac{\eta_{1j}}{\eta_{1r}} & \text{при } \eta_{1r} > 0, \\ \arctg \frac{\eta_{1j}}{\eta_{1r}} + 180^0 & \text{при } \eta_{1r} < 0. \end{cases}$$

Аналогічно визначається система вантажів балансувань при обертанні ротора на другій критичній частоті. Найбільш спрощений підхід припускає систему двох кососиметрично розташованих дисбалансів $D_{1\Pi}^{(2)}$, $D_{2\Pi}^{(2)}$ (рис. 41б).

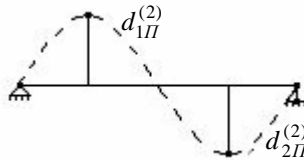


Рисунок 41б

Виробивши при $\omega = \omega_2$ виміри амплітуд $\overline{Y}_0^{(2)}$ початкового ротора і $\overline{Y}_1^{(2)}$ при установці кососиметричної системи пробних вантажів у площині мітки, потім обчислюють комплексний коефіцієнт

$$\overline{\eta}_2 = \eta_{12r} + j\eta_{2j} = \overline{Y}_0^{(2)} / (\overline{Y}_1^{(2)} - \overline{Y}_0^{(2)}) .$$

Модуль цього коефіцієнта η_2 визначає величину врівноважувальних дисбалансів

$$D_{1\sigma}^{(2)} = D_{1II}^{(2)} \cdot \eta_2 , \quad D_{2\sigma}^{(2)} = D_{2II}^{(2)} \cdot \eta_2 .$$

Аргумент $\overline{\eta}_2$ вказує площину розташування кососиметричної системи врівноважувальних вантажів, визначуваний кутом щодо площини мітки $\varphi_{\delta 2}$, рівному

$$\varphi_{\delta 2} = \arg \overline{\eta}_2 + 180^\circ .$$

При робочій частоті, що лежить між першою і другою критичними, іноді добиваються задовільного урівноваження, виробивши вищезгадані операції на першій критичній ω_1 для симетричної системи пробних вантажів і на робочій частоті для кососиметричної.

4. Спосіб Ден-Гартога

Застосовується при балансуванні роторів, робочі частоти яких визначаються деяким діапазоном

$$\omega_{p \min} < \omega_p < \omega_{p \max} .$$

У цьому діапазоні можуть знаходитися одна або декілька критичних частот.

Нехай ми вибрали 1 площину корекції, де встановлюватимуться врівноважувальні вантажі (рис. 42).

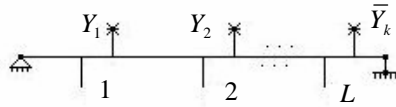


Рисунок 42

У ряду n частот в інтервалі

$$\omega_{p \min} \leq \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \leq \omega_{p \max}$$

робляться виміри комплексних амплітуд у деяких точках вимірювання $\bar{Y}_{10}^{(\nu)}, \bar{Y}_{20}^{(\nu)}, \dots, \bar{Y}_{k0}^{(\nu)}$ ($\nu = \overline{1, n}$). Далі в площині мітки встановлюється пробний вантаж ДП послідовно в першій, другій і т.д. площинах корекції, і вимірюються відповідні сукупності комплексних амплітуд $\bar{Y}_{ai}^{(\nu)}$ ($a = \overline{1, k}; i = \overline{1, l}; \nu = \overline{1, n}$), де індекс i означає номер коригуючої площини, в якій встановлюється пробний вантаж;

a – номер точки вимірювання; ν – номер частоти вимірювання. Потім обчислюються комплексні коефіцієнти впливу

$$\bar{W}_{ai}^{(\nu)} = \frac{\bar{Y}_{ai}^{(\nu)} - \bar{Y}_{a0}^{(\nu)}}{D_{ii}}. \quad (115)$$

Припустимо, що є система врівноважувальних дисбалансів $\bar{D}_{i\delta}$ ($i = \overline{1, l}$), установка яких робить ротор збалансованим на всіх робочих частотах. Тоді прогинання в кожній точці вимірювання при будь-якій частоті ω_ν ($1, n$) повинен дорівнювати нулю. Тому можна записати для кожної частоти вимірювання $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$:

$$\begin{aligned} \bar{Y}_1^{(\nu)} &= \bar{Y}_{10}^{(\nu)} + \bar{W}_{11}^{(\nu)} \bar{D}_{1\delta} + \bar{W}_{12}^{(\nu)} \bar{D}_{2\delta} + \dots + \bar{W}_{1l} \bar{D}_{l\delta} = 0, \\ \bar{Y}_2^{(\nu)} &= \bar{Y}_{20}^{(\nu)} + \bar{W}_{21}^{(\nu)} \bar{D}_{1\delta} + \bar{W}_{22}^{(\nu)} \bar{D}_{2\delta} + \dots + \bar{W}_{2l} \bar{D}_{l\delta} = 0, \\ &\dots \\ \bar{Y}_k^{(\nu)} &= \bar{Y}_{k0}^{(\nu)} + \bar{W}_{k1}^{(\nu)} \bar{D}_{1\delta} + \bar{W}_{k2}^{(\nu)} \bar{D}_{2\delta} + \dots + \bar{W}_{kl} \bar{D}_{l\delta} = 0; \end{aligned} \quad (116)$$

$(\nu = \overline{1, n}).$

Таким чином, одержуємо систему $n \times k$ лінійних рівнянь з комплексними коефіцієнтами для визначення l комплексних врівноважувальних дисбалансів $\overline{D}_{1\delta}, \dots, \overline{D}_{n\delta}$. Необхідно підібрати величини n і k так, щоб $n \times k = l$. Тоді система (116) матиме єдиний розв'язок.

Проте можливо (і більш інформативно) узяти $n \times k > l$ і використовувати формулу лінійної регресії для знаходження врівноважувальних дисбалансів, як це буде викладено нижче.

ЛЕКЦІЯ 14

Балансування гнучких роторів як задача оцінювання дисбалансів

1. Математичні моделі

У загальному випадку математична модель будь-якого об'єкта або процесу є способом (алгоритм) обчислення деякої сукупності вихідних величин

$$y_1, y_2, \dots, y_k$$

за деякими вхідними даними, що визначають моделі і умови експерименту. Ці дані можна розділити на дві групи величин: дані, які стають достовірно відомими

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r,$$

і параметри, що підлягають оцінюванню:

$$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l.$$

Надалі вихідні величини представлятимемо k -вимірним вектором-стовпцем

$$\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k)^T.$$

Відповідно відомі величини моделі позначимо вектором

$$\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)^T,$$

а параметри, що підлягають оцінюванню, l -вимірним вектором

$$\bar{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l)^T.$$

Простою математичною моделлю є так звана зведена модель [2], визначувана сукупністю до залежностей алгебри

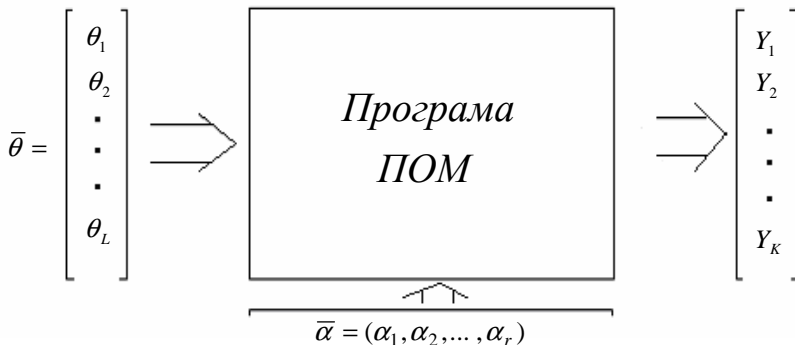


Рисунок 43

Взагалі кажучи, процес створення і уточнення структури і параметрів математичної моделі на основі експериментального дослідження об'єкта є ідентифікацією.

Оцінювання є окремими, простим випадком ідентифікації, коли ставиться задача визначення деякої сукупності параметрів математичної моделі $\bar{\theta}$ за даними експериментів \bar{y} при заданій структурі моделі.

Очевидно, що як вихідні величини y_1, y_2, \dots, y_k слід розглядати тільки такі, які можуть бути змінені. Тому далі вектор \bar{y} іменуватиметься також вектором вимірюваних величин.

2. Цільова функція методу найменших квадратів

Оцінювання вектора $\bar{\theta}$ реалізується за допомогою деякої цільової функції 1 змінних $\Phi(\bar{\theta}) = \Phi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l)$, знаходження екстремуму якої визначить ті значення $\bar{\theta} = \hat{\bar{\theta}}$, при яких математична модель відповідно до вибраного критерію буде найбільш адекватна реальному об'єкту. Нижче розглядаються способи оцінювання на основі методу якнайменших квадратів. Згідно з цим методом цільової функції береться як сума квадратів різниць величин, які заміряються на реальному об'єкті і відповідно обчислюються за допомогою математичної моделі

$$\Phi(\bar{\theta}) = \sum_{a=1}^k (y_a^* - y_a(\bar{\alpha}, \bar{\theta}))^2, \quad (119)$$

де y_a^* - та експериментально заміряна величина об'єкта;

$y_a(\bar{\alpha}, \bar{\theta})$ - відповідна розрахункова величина моделі, обчислена при деякому наборі параметрів $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l$. Задача оцінювання зводиться до знаходження такого вектора:

$$\hat{\bar{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_l)^T,$$

при яких сума квадратичних відхилень розрахункових величин y_a від експериментально вимірених y_a^* буде мінімальною. Тоді цільова функція $\Phi(\bar{\theta})$ (119) досягає мінімуму.

При проведенні n експериментів, в кожному μ -му з яких змінюється набір відомих параметрів

$$\bar{\alpha}_\mu = (\alpha_{\mu_1}, \alpha_{\mu_2}, \dots, \alpha_{\mu_n}) \quad (\mu = \overline{1, n}),$$

цільова функція включатиме квадрати відхилень в усіх проведених експериментах

$$\Phi(\bar{\theta}) = \sum_{a=1}^k \sum_{\mu=1}^n (y_{\mu a}^* - y_{\mu a}(\bar{\alpha}_\mu, \bar{\theta}))^2. \quad (120)$$

Значення $\bar{\theta} = \hat{\bar{\theta}}$, які дають мінімум цільовій функції (120), знаходяться з умов $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right) = 0$, тобто

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} = - \sum_{a=1}^k \sum_{\mu=1}^n 2(y_{\mu a}^* - y_{\mu a}(\bar{\alpha}_\mu, \bar{\theta})) \cdot \frac{\partial y_{\mu a}(\bar{\alpha}_\mu, \bar{\theta})}{\partial \theta_i} = 0 \quad (i = \overline{1, l}). \quad (121)$$

$$\bar{K} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccc} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1l} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{k1} & k_{k2} & & k_{kl} \end{array} \right]}_l \Bigg\} k.$$

Коефіцієнти k_{ai} можуть розглядатися як деякі коефіцієнти впливу. Відповідно матрицю \bar{K} далі називатимемо матрицею коефіцієнтів впливу.

Для складних математичних моделей, де елементи вектора \bar{y} визначаються неявними співвідношеннями алгебри вигляду (117) або (122), а в результаті розрахунку на ПОМ (структура рис. 43) кожен коефіцієнт k_{ai} можна обчислити за програмою прямої задачі як вихідну величину y_a при $\theta_i = 1$ і всіх інших $\theta_r = 0, r \neq i$. Зрозуміло, робити це допустимо, якщо явно відомо, що залежність \bar{y} від $\bar{\theta}$ лінійна. Наприклад, це має місце у разі розрахунку методом початкових параметрів або МКЕ прогинань Y_a ($a = 1, k$) при вимушених коливаннях довільного ротора. Прогинання лінійно залежатимуть від дисбалансів.

Лінійне оцінювання не має проблем для числової реалізації на відміну від нелінійного, де ця задача не завжди «приречена на успіх».

У випадку $k = l$ матриця \bar{K} квадратна, і тоді вектор $\bar{\theta}$ знаходиться шляхом безпосереднього розв'язку системи (122) відносно $k = l$ невідомих $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l$. У матричній формі цей розв'язок записується у вигляді

$$\bar{\theta} = \bar{K}^{-1} \bar{y}^*, \tag{123}$$

де $\bar{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_k^*)$ - набір експериментально виміряних величин; \bar{K}^{-1} - матриця, зворотна матриці \bar{K} .

Багатьма дослідниками «зворотна задача» так і розумілася, як розв'язок вигляду (123). Тому число виміряних величин повинне було бути рівним числу оцінюваних параметрів. Але при $k > l$ має місце

велика інформативність, оскільки кількість виміряних величин перевищує (і чим більше, тим краще) кількість оцінюваних параметрів. У цьому випадку застосовують нижченаведений підхід [2], що будується, кінець кінцем, на методі найменших квадратів.

Помножимо зліва ліву і праву частини рівняння (122)' на транспоновану матрицю \overline{K}^T :

$$\overline{K}^T \overline{y} = \overline{K}^T \overline{K} \overline{\theta} . \quad (124)$$

Помітимо, що перетворення матриці \overline{K}^T розмірністю $l \times k$ на матрицю \overline{K} розмірністю $k \times l$ дає квадратну матрицю розмірністю $l \times l$. Тому вираз (124), якщо його виписати в скалярній формі, є не що інше, як система l лінійних рівнянь щодо невідомих $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l$. Її розв'язок у матричній формі є знаходженням вектора оцінюваних параметрів $\overline{\theta} = \hat{\theta}$:

$$\hat{\theta} = \left[\overline{K}^T \overline{K} \right]^{-1} \overline{K}^T \overline{y}^* . \quad (125)$$

Останнє співвідношення є відомою формулою лінійної регресії. Можна показати [2], що формула (125) виводиться з умови мінімуму цільової функції методу найменших квадратів (119), якщо зведена модель лінійна, тобто має вигляд (122).

Для читачів, що мають деякі труднощі в дослідженні операцій з матричними об'єктами, наведемо в скалярній формі вищенаведені перетворення при $k = 3$, $l = 2$. У цьому випадку співвідношення (122) будуть такі:

$$\begin{aligned} y_1 &= k_{11}\theta_1 + k_{12}\theta_2, \\ y_2 &= k_{21}\theta_1 + k_{22}\theta_2, \\ y_3 &= k_{31}\theta_1 + k_{32}\theta_2. \end{aligned}$$

Транспонована матриця

$$\overline{K'} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} & k_{31} \\ k_{12} & k_{22} & k_{32} \end{bmatrix}.$$

Утворення матриць

$$\overline{K'K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} & k_{31} \\ k_{12} & k_{22} & k_{32} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \\ k_{31} & k_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} l_{11} &= k_{11}^2 + k_{21}^2 + k_{31}^2, & l_{12} &= k_{11}k_{12} + k_{21}k_{22} + k_{31}k_{32}, \\ l_{21} &= k_{12}k_{11} + k_{22}k_{21} + k_{32}k_{31}, & l_{22} &= k_{12}^2 + k_{22}^2 + k_{32}^2. \end{aligned}$$

Тепер скалярне рівняння (124) можна подати так:

$$\begin{aligned} l_{11}\theta_1 + l_{12}\theta_2 &= k_{11}y_1 + k_{21}y_2 + k_{31}y_3, \\ l_{21}\theta_1 + l_{22}\theta_2 &= k_{12}y_1 + k_{22}y_2 + k_{32}y_3. \end{aligned}$$

Розв'язуючи останню систему рівнянь щодо оцінюваних параметрів, знаходимо оцінки $\theta_1 = \hat{\theta}_1$, $\theta_2 = \hat{\theta}_2$ для деякого набору вимірних величин $y_1 = y_1^*$, $y_2 = y_2^*$, $y_3 = y_3^*$. Цей розв'язок і є застосуванням формули лінійної регресії (125).

4. Оцінювання у разі комплексних коефіцієнтів впливу

Для розрахунку вимушених коливань неконсервативних моделей роторів з довільним просторовим розподілом дисбалансів використовується метод комплексних амплітуд (див. попередній розділ 3.2.4). Оскільки в програмі МКЕ передбачається лінійна модель ротора, то залежність між комплексними амплітудами

$$\overline{Y}_a = Y_a^{(r)} + jY_a^{(j)} \quad (a = \overline{1, k})$$

і дисбалансами

$$\overline{D}_i = D_i^{(r)} + jD_i^{(j)} \quad (i = \overline{1, l})$$

зводиться до лінійних комплексних відношень вигляду:

ЛЕКЦІЯ 15

Балансування гнучких роторів як задача оцінювання дисбалансів (продовження)

1 Балансування за допомогою розрахункової моделі ротора

Нехай у k точках ротора при деякій робочій частоті обертання ω_p виміряні комплексні амплітуди \overline{Y}_a^* ($a = \overline{1, k}$). Нехай далі у деяких l точках (площинах корекції) намічено встановити врівноважувальні дисбаланси \overline{D}_{δ_i} ($i = \overline{1, l}$). Задача полягає в оцінюванні групи деяких дисбалансів \overline{D}_i ($i = \overline{1, l}$) у припущенні, що вони розташовані в площинах корекції і викликають ті самі прогинання \overline{Y}_a у вимірюваних точках, що й істинна сукупність дисбалансів. Якщо ми оцінимо ці дисбаланси за формулою (131), тобто знайдемо

$$\hat{\overline{D}}_i = D_i^{(r)} + jD_i^{(j)}$$

і відповідно

$$\left| \hat{\overline{D}}_i \right| = \sqrt{(D_i^{(r)})^2 + (D_i^{(j)})^2},$$

$$\varphi_i = \arg \hat{\overline{D}}_i \quad (i = \overline{1, l}),$$

то процес балансування зведеться до установки в площинах корекції врівноважувальних дисбалансів (рис. 44), що дорівнюють

$$D_{\delta_i} = \left| \overline{D}_i \right|,$$

під кутами φ_{δ_i} , відлічуваними по обертанню від мітки, що дорівнюють

$$\varphi_{\delta_i} = \varphi_i + 180^\circ \quad (i = \overline{1, l}).$$

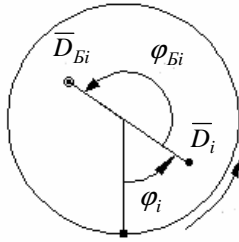


Рисунок 44

Програма оцінювання дисбалансів за описаною вище методикою містить також підпрограми:

а) розрахунку вимушених коливань неконсервативної моделі ротора методом кінцевих елементів;

б) формування комплексної матриці коефіцієнтів впливу $\overline{\overline{W}}[k \times l]$ і речовинної $\overline{W}[2k \times 2l]$;

в) реалізації формули лінійної регресії (131). Кожен комплексний коефіцієнт впливу \overline{W}_{ai} визначається за підпрограмою розрахунку вимушених коливань як комплексне прогинання \overline{Y}_a від одиничного дисбалансу $D=1$ у точці i .

Наведена вище методика оцінювання дисбалансів вимагає одного виміру комплексних прогинань \overline{Y}_a^* ($a=1, k$; k - число точок вимірювання). Вона може дати практично задовільний результат при достатньому рівні адекватності розрахункової моделі реальному ротору.

2. Практичне балансування гнучкого ротора на робочій частоті

На практиці комплексні коефіцієнти впливу \overline{W}_{ai} одержують експериментально. Для цього необхідно виконати $(l+1)$ вимірювань комплексних амплітуд, встановлюючи пробний дисбаланс у кожній з l площин корекції. У k точках ротора вимірюють на робочій частоті комплексні прогинання:

$$\overline{\overline{Y}}_0^* = (\overline{Y}_{10}^*, \overline{Y}_{20}^*, \dots, \overline{Y}_{k0}^*)^T \text{ - нульовий запуск;}$$

$$\bar{Y}_1^* = (\bar{Y}_{11}, \bar{Y}_{21}, \dots, \bar{Y}_{k1})^T \text{ - перший запуск;}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\bar{Y}_l^* = (\bar{Y}_{1l}, \bar{Y}_{2l}, \dots, \bar{Y}_{kl})^T \text{ - } l\text{-й запуск.}$$

Нульовий запуск є запуск ротора в початковому стані. У першому запуску встановлюється пробний дисбаланс в площині мітки в першій площині корекції. Далі в другій, третій, аж до установки пробного дисбалансу в останній, k -й площині корекції.

Можемо записати в матричній формі

$$\bar{Y}_0^* = \bar{W} \bar{D}, \tag{132}$$

де $\bar{D} = (\hat{D}_1, \hat{D}_2, \dots, \hat{D}_l)$ - вектор оцінюваних дисбалансів.

Введемо поняття i -го вектора пробних дисбалансів

$$\bar{D}_{np} = (0; \dots; D_{np}; \dots; 0) \quad (i = \overline{1, l})$$

як «сукупності» дисбалансів, що складається з одного пробного дисбалансу D_{np} , встановленого в i -й площині корекції:

$$\begin{aligned} \bar{D}_{1np} &= (D_{np}; 0; \dots; 0), \\ \bar{D}_{2np} &= (0; D_{np}; 0; \dots; 0), \\ &\dots\dots\dots \\ \bar{D}_{lnp} &= (0; \dots; 0; D_{np}). \end{aligned}$$

Тоді для i -го пуску матиме місце співвідношення

$$\bar{Y}_i^* = \bar{W}(\bar{D} + \bar{D}_{inp}). \tag{133}$$

Віднімаючи з (133) для кожного i ($i = \overline{1, l}$) (132), визначимо матрицю $k \times l$ комплексних коефіцієнтів впливу, кожен елемент якої буде дорівнювати

$$\hat{W}_{ai} = \frac{\overline{Y}_{ai}^* - \overline{Y}_{a0}^*}{D_{np}} \quad (a = \overline{1, k}; i = \overline{1, l}). \quad (134)$$

Далі, виходячи з експериментально таким чином знайдених коефіцієнтів впливу \hat{W}_{ai} , за методикою, описаною в розд. 5.3, оцінюється шуканий набір дисбалансів \hat{D} згідно з формулою (131) і виробляється розрахунок врівноважувальних дисбалансів, як це описано вище.

Для чіткішого розуміння отримання формул (131) повторюваний їх висновок в скалярній формі при $k = 3$, $l = 2$. Шукана матриця в цьому випадку має структуру

$$\overline{\overline{W}} = \begin{bmatrix} \hat{W}_{11} & \hat{W}_{12} \\ \hat{W}_{21} & \hat{W}_{22} \\ \hat{W}_{31} & \hat{W}_{32} \end{bmatrix}.$$

Співвідношення (132) має вигляд

$$\begin{aligned} \overline{Y}_{10}^* &= \overline{W}_{11} \overline{D}_1 + \overline{W}_{12} \overline{D}_2, \\ \overline{Y}_{20}^* &= \overline{W}_{21} \overline{D}_1 + \overline{W}_{22} \overline{D}_2, \\ \overline{Y}_{30}^* &= \overline{W}_{31} \overline{D}_1 + \overline{W}_{32} \overline{D}_2. \end{aligned} \quad (132)'$$

Для першого пуску слід записати

$$\begin{aligned}
\bar{Y}_{11}^* &= \bar{W}_{11}(\bar{D}_1 + D_{np}) + \bar{W}_{12}\bar{D}_2, \\
\bar{Y}_{21}^* &= \bar{W}_{21}(\bar{D}_1 + D_{np}) + \bar{W}_{22}\bar{D}_2, \\
\bar{Y}_{31}^* &= \bar{W}_{31}(\bar{D}_1 + D_{np}) + \bar{W}_{32}\bar{D}_2.
\end{aligned}
\tag{133}'$$

Віднімаючи із співвідношень (133)' відповідні співвідношення (132)', одержимо:

$$\bar{W}_{11} = \frac{(\bar{Y}_{11}^* - \bar{Y}_{10}^*)}{D_{np}}, \quad \bar{W}_{21} = \frac{(\bar{Y}_{21}^* - \bar{Y}_{20}^*)}{D_{np}}, \quad \bar{W}_{31} = \frac{(\bar{Y}_{31}^* - \bar{Y}_{30}^*)}{D_{np}}.$$

Аналогічно, записавши співвідношення для другого пуску і виконавши відповідні віднімання, можемо записати

$$\bar{W}_{12} = \frac{(\bar{Y}_{12}^* - \bar{Y}_{10}^*)}{D_{np}}, \quad \bar{W}_{22} = \frac{(\bar{Y}_{22}^* - \bar{Y}_{20}^*)}{D_{np}}, \quad \bar{W}_{32} = \frac{(\bar{Y}_{32}^* - \bar{Y}_{30}^*)}{D_{np}}.$$

3. Використовування формули лінійної регресії при балансуванні гнучких роторів способом Ден-Гартога

Розглянемо систему комплексних рівнянь (116) у разі, коли число рівнянь, що дорівнює $n \times k$, більше числа площин корекції l . Тоді систему (116) матриці можна звести до вигляду (126)', де $\bar{D} = (\bar{D}_{1\delta}, \bar{D}_{2\delta}, \dots, \bar{D}_{l\delta})^T$ - шуканий вектор комплексних врівноважувальних балансів;
 $\bar{Y} = (-\bar{Y}_{10}^{(1)}, -\bar{Y}_{20}^{(1)}, \dots, -\bar{Y}_{k0}^{(1)}; -\bar{Y}_{10}^{(2)}, -\bar{Y}_{20}^{(2)}, \dots, -\bar{Y}_{k10}^{(2)}; \dots; -\bar{Y}_{10}^{(n)}, -\bar{Y}_{20}^{(n)}, \dots, -\bar{Y}_{k10}^{(n)})^T$ - вектор розмірністю $n \times k$ узятих із знаком мінус комплексних амплітуд нульового пуску;

$$\bar{W} = \begin{bmatrix} \bar{W}_{11}^{(1)}, \bar{W}_{12}^{(1)}, \dots, \bar{W}_{1l}^{(1)} \\ \dots \\ \bar{W}_{k1}^{(1)}, \bar{W}_{k2}^{(1)}, \dots, \bar{W}_{kl}^{(1)} \\ \dots \\ \bar{W}_{11}^{(n)}, \bar{W}_{12}^{(n)}, \dots, \bar{W}_{1l}^{(n)} \\ \dots \\ \bar{W}_{k1}^{(n)}, \bar{W}_{k2}^{(n)}, \dots, \bar{W}_{kl}^{(n)} \end{bmatrix} \quad \text{- матриця}$$

розмірністю $(n \times k) \times l$ комплексних коефіцієнтів впливу. Ці коефіцієнти \bar{W}_{ai}^{ν} ($a = \overline{1, k}; i = \overline{1, l}; \nu = \overline{1, n}$) визначаються за експериментально вимірними амплітудами згідно з формулами (115). Далі шуканий «витагнутий» вектор врівноважувальних дисбалансів $\bar{D} = (D_{1\delta}^{(r)}, D_{1\delta}^{(j)}, \dots, D_{l\delta}^{(r)}, D_{l\delta}^{(j)})^T$ визначається згідно з матричними співвідношенням (131), як це було описано вище.

4. Використовування формули лінійної регресії при балансуванні за власними формами

Розглянемо, наприклад, балансування за першою власною формою, що використовує систему пробних вантажів, відповідну першій формі. Цю систему умовно позначимо буквою $D_H^{(1)}$, розуміючи під нею деяку сукупність пробних вантажів $D_1^{(1)}, D_2^{(1)}, \dots, D_l^{(1)}$, встановлювану в площині мітку.

Нехай на першій критичній частоті робиться вимір комплексних амплітуд нульового пуску не в одній точці, як це було описано вище в розд. 4.2.3, а в k точках:

$$\bar{Y}_{10}, \bar{Y}_{20}, \dots, \bar{Y}_{k0}.$$

Далі встановлюється система пробних вантажів $D_H^{(1)}$ і на тій самій частоті робиться вимір комплексних амплітуд першого пуску:

$$\bar{Y}_{11}, \bar{Y}_{21}, \dots, \bar{Y}_{k1}.$$

Можемо записати:

$$\bar{Y}_{10} = \bar{W}_1 \bar{D}, \quad \bar{Y}_{20} = \bar{W}_2 \bar{D}, \quad \dots, \quad \bar{Y}_{k0} = \bar{W}_k \bar{D}, \quad (135)$$

де \bar{W}_a ($a = \overline{1, k}$) - комплексні коефіцієнти впливу, а під буквою \bar{D} розуміється деяка сукупність шуканих комплексних дисбалансів $\bar{D}_1, \bar{D}_2, \dots, \bar{D}_l$, за модулем пропорційних систем пробних дисбалансів

$$\left(\frac{|\bar{D}_1|}{D_1^{(1)}} = \frac{|\bar{D}_2|}{D_2^{(1)}} = \dots = \frac{|\bar{D}_l|}{D_l^{(1)}} \right)$$
 і розташованих в площині під шуканим

кутом φ до площини мітки.

Для першого пуску матимуть місце співвідношення

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{11} = \bar{W}_1 (\bar{D} + D_H^{(1)}), \bar{Y}_{21} = \bar{W}_2 (\bar{D} + D_H^{(1)}), \dots, \\ \bar{Y}_{k1} = \bar{W}_k (\bar{D} + D_H^{(1)}) \end{aligned} \quad (136)$$

Із співвідношень (135) і (136) випливають залежності

$$\bar{Y}_{10} = \bar{K}_1 \bar{\eta}, \bar{Y}_{20} = \bar{K}_2 \bar{\eta}, \dots, \bar{Y}_{k0} = \bar{K}_k \bar{\eta}, \quad (137)$$

де

$$\bar{K}_1 = \bar{Y}_{11} - \bar{Y}_{10}, \bar{K}_2 = \bar{Y}_{21} - \bar{Y}_{20}, \dots, \bar{K}_k = \bar{Y}_{k1} - \bar{Y}_{k0};$$

$\bar{\eta} = \frac{\bar{D}}{D_H}$ - оцінюваний безрозмірний комплексний коефіцієнт. Модуль

$|\bar{\eta}|$ дорівнює коефіцієнту пропорційності між пробними й «істинними» дисбалансами за першою формою:

$$|\bar{\eta}| = \frac{|\bar{D}_1|}{D_1^{(1)}} = \dots = \frac{|\bar{D}_l|}{D_l^{(1)}}.$$

Аргумент комплексного числа $\bar{\eta} = \eta^{(r)} + j\eta^{(j)}$, що дорівнює

$$\varphi = \arg \bar{\eta} = \begin{cases} \arctg \left(\frac{\eta^{(j)}}{\eta^{(r)}} \right), & \text{если } \eta^{(j)} > 0, \\ \arctg \left(\frac{\eta^{(j)}}{\eta^{(r)}} \right) + 180^\circ, & \text{если } \eta^{(j)} < 0, \end{cases} \quad (138)$$

визначає площину, в якій розташована сукупність «істинних» дисбалансів, що відповідає першій формі.

Отже, маємо систему комплексних співвідношень (137), де підлягає оцінюванню комплексний параметр $\bar{\eta}$ за експериментально вимірними комплексними величинами $\bar{Y}_{10}, \dots, \bar{Y}_{k0}; \bar{K}_1, \dots, \bar{K}_k$.

Позначимо:

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{a0} &= y_a^{(r)} + jy_a^{(j)}, \\ \bar{K}_a &= k_a^{(r)} + jk_a^{(j)} \quad (a = \overline{1, k}), \\ \bar{\eta} &= \eta^{(r)} + j\eta^{(j)}. \end{aligned}$$

Неважко переконалися, що з урахуванням цих позначень комплексним співвідношенням (137) відповідає речовинне матричне співвідношення щодо «витагнутих» векторів вигляду

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r)} \\ y_1^{(j)} \\ y_2^{(r)} \\ y_2^{(j)} \\ \dots \\ y_k^{(r)} \\ y_k^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1^{(r)}; -k_1^{(j)} \\ k_1^{(j)}; k_1^{(r)} \\ k_2^{(r)}; -k_2^{(j)} \\ k_2^{(j)}; k_2^{(r)} \\ \dots \\ k_k^{(r)}; -k_k^{(j)} \\ k_k^{(j)}; k_k^{(r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_r \\ \eta_j \end{bmatrix}, \quad (139)$$

або в компактній формі

$$\bar{y} = \bar{K}\bar{\eta}, \quad (140)$$

де структура вектора \bar{y} розмірністю $2k$, вектора $\bar{\eta}$ розмірністю 2 і матриці \bar{K} розмірністю $2k \times 2$ очевидні з співвідношення (139).

Використовуючи для моделі (140) формулу лінійної регресії, одержимо оцінку для $\bar{\eta}$:

$$\bar{\eta} = \left[\bar{K}^T \bar{K} \right]^{-1} \bar{K}^T \bar{y}.$$

Далі визначаються величини врівноважувальних дисбалансів

$$D_{\delta_i} = |\bar{\eta}| \cdot D_i^{(1)} \quad (i = \bar{1}, \bar{l}).$$

Площина установки цієї системи дисбалансів розташована під кутом $\varphi_{\delta} = \varphi + 180^\circ$, де кут φ обчислюється за формулою (138).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1965. – 559с.
2. Бард Й. Нелинейное оценивание параметров. – М.: Статистика, 1979. – 352с.
3. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. – М.: Изд-во «Высшая школа», 1980. – 408с.
4. Ден-Гартог Дж. П. Механические колебания. – М.: Физматиз, 1960. – 580с.
5. Диментберг Ф. М. Изгибные колебания вращающихся валов. – М.: Изд. АН СССР, 1959. – 247с.
6. Марцинковский В.А. Бесконтактные уплотнения роторных машин. – М.: Машиностроение, 1980. – 200с.
7. Симоновский В.И. Устойчивость и нелинейные колебания роторов центробежных машин. – Харьков: Изд-во «Вища школа», 1986. – 128с.
8. Симоновський В.І. Коливання нелінійних систем. – Суми: Вид-во СумДУ, 1999. – 131с.
9. Симоновський В.І., Хворост В.А. Оцінювання параметрів динамічних моделей роторів. – Суми: Вид-во СумДУ, 2002. – 143с.
10. Симоновський В.І. Уточнення математичних моделей коливальних систем за експериментальними даними.—Суми: Вид-во СумДУ, 2010. – 91с.
11. Основы балансировочной техники .Том 2. Уравновешивание гибких роторов и балансировочное оборудование.-- / Под ред. В.А. Щепетильникова. – М.: Машиностроение, 1975.—680с.
12. Вибрации в технике: справочник: в 6 томах. Том 6. Защита от вибрации и ударов./ под ред. К.В. Фролова. – М.: Машиностроение, 1981. – 456с.

Навчальне видання

ДИНАМІКА РОТОРНИХ МАШИН

Конспект лекцій

для студентів напрямку підготовки
6.040202 «Механіка»
денної форми навчання

Відповідальний за випуск доцент Є. М. Савченко
Редактор Н. В. Лисогуб
Комп'ютерне верстання В. І. Симоновського

Підп. до друку _____, поз.
Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. _____ Обл.-вид. арк. _____ Тираж 40 пр. Зам. №
Собівартість видання _____ грн. _____ коп.

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007