

ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ СТЕНКИ ПЛОСКОГО КАНАЛА ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ

ABOUT STABILITY OF PLANE CHANNEL WALL OSCILLATIONS UNDER NON-STATUONARY LIQUID FLOW

ТАРАСЕВИЧ Юлия Ярославовна, аспирант,
Сумский государственный университет, г. Сумы, Украина.

Abstract. Hydrodynamic characteristics of liquid in plane channel with mobile wall under non-stationary moved out flow are determined in the paper. Considered construction modulates processes which take place in annular seals. Stability conditions of flexible fixed channel wall (flatter and divergentia conditions) are determined.

Современные роторные машины содержат большое количество бесконтактных уплотнений, течение жидкости в которых происходит в малых кольцевых зазорах. При расчете динамики роторов таких машин радиальными силами, возникающими в кольцевых и торцовых зазорах пренебрегать нельзя, поскольку при определенных условиях они могут привести к потере устойчивости. В связи с тем, что кривизна поверхностей, образующих короткое кольцевое уплотнение незначительна, по сравнению с радиусом, их можно развернуть на плоскость. В работе определены гидродинамические характеристики жидкости в плоском канале при совместном действии напорного течения и нестационарного потока вытеснения.

Рассмотрен плоский конусный канал, в котором верхняя стенка вместе с осью AB (рисунок 1) совершает малые поперечные (вдоль оси Oy) и угловые (вокруг оси Ox) колебания. Амплитуда поперечных колебаний мала по сравнению со средним зазором. Зазор, в свою очередь, мал по сравнению с длиной канала ($\frac{h}{l} \ll 1$). Поэтому изменение давления по толщине зазора не учитывалось $\left(\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0\right)$.

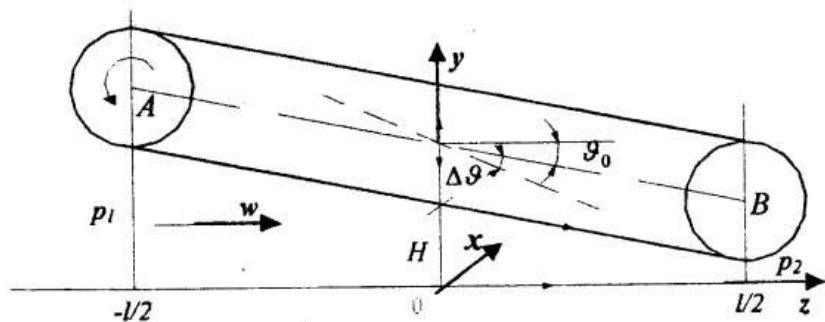


Рисунок 1 - Схема плоского конусного канала

После оценки членов уравнения Рейнольдса с учетом локальной и нелинейной конвективной составляющих силы инерции, в качестве исходного уравнения движения принято:

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{k\mu}{h^3} q_{pc} \quad (1)$$

где q_{pc} – расход напорного течения.

$$\mu - \text{вязкость жидкости, } k = \frac{l}{8} \frac{C}{Re^n} Re = k_0 \left(\frac{hw_{pc}}{Hw_*} \right)^{1-n} = k_0 \left(\frac{q_{pc}}{q_0} \right), \text{ (посто-}$$

янные C и n зависят от режима течения) $k_0 = C Re_0^{1-n} / 8$, Re_0 – число Рейнольдса для канала с параллельными стенками.

Значение зазора в произвольном сечении выражается формулой:

$$h = H(1 - \varepsilon \sin \alpha z) - (\vartheta_0 + \Delta \vartheta_0 \sin \alpha z) z = H(y - \theta z \bar{z}),$$

где

$$\varepsilon = \frac{e_0}{H}, \delta = \frac{\Delta \vartheta_0}{\vartheta_0}, \theta = \frac{\vartheta_0 l}{2H}, \bar{z} = \frac{2z}{l}; y = 1 - \varepsilon \sin \alpha z, \vartheta = 1 + \delta \sin \alpha z.$$

безразмерные параметры и координаты. Параметр конусности θ и относительные амплитуды поперечных и угловых колебаний ε, δ – величины первого порядка малости относительно единицы.

Осреднив по толщине зазора уравнение неразрывности, с учетом нестационарных граничных условий для скоростей:

$$y = 0 : v(0) = 0, \quad w(0) = w_0; \quad y = h : v(h) = \dot{h} = H(y - \theta z \bar{z}), \quad w(h) = 0$$

получим:

$$\frac{\partial q}{\partial z} = v(0) - v(h) + w(h) \frac{\partial h}{\partial z} \quad (2)$$

где q – полный расход через канал: $q = q_p + q_d$, q_d – расход потока вытеснения.

Для принятых граничных условий правая часть осредненного уравнения неразрывности принимает вид:

$$v(0) - v(h) + w(h) \frac{\partial h}{\partial z} = \dot{h} = -\omega H (\varepsilon + \delta \theta \bar{z}) \cos \omega t,$$

и не содержит продольных скоростей стенок, а представляет распределение по длине канала поперечных скоростей верхней стенки. Составляющая $-\omega H \varepsilon$ - постоянная по длине амплитуда поперечных скоростей стенки; $\omega H \theta \delta \bar{z}$ - антисимметричные относительно оси $0x$ амплитуды скоростей, порождаемых угловыми колебаниями стенки. То есть правая часть осредненного уравнения неразрывности определяет поток вытеснения, расход которого равен:

$$q_d = -0,5\omega H [\varepsilon(\bar{z} + 1) + 0,5\theta\delta(\bar{z}^2 - 1)] \cos \omega t + C.$$

В первом приближении постоянную составляющую расхода потока вытеснения C можно определить из уравнения Рейнольдса без учета инерционных сил:

$$C = \frac{lH}{2} y(1 + \alpha) + \frac{lH}{6} \theta \vartheta$$

где $\alpha = \theta \frac{1 + \delta \sin \omega t}{1 - \varepsilon \sin \omega t} \approx \theta(1 - y + \vartheta)$.

Выразив расход q_{pc} из уравнения движения (1) и подставив его в осредненное уравнение неразрывности (2), получили уравнение Рейнольдса для распределения давления по длине канала:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left\{ \frac{h^3}{k} \left[\frac{\partial p}{\partial \bar{z}} + \rho \frac{l}{2h} (q_p + q_d) \right] \right\} = 0,5\mu l [0,5Hly - 0,5Hl\theta \bar{z}\vartheta]. \quad (3)$$

В уравнении (3) инерционный член заменен его осредненным по толщине зазора значением.

Из последнего выражения путем интегрирования по длине канала с учетом граничных условий для давления: $\bar{z} = -1, p = p_1, \bar{z} = 1, p = p_2$, найдено распределение давления по длине канала.

Гидростатическая составляющая давления:

$$p_p = p_1 - \frac{\Delta p}{2} (1 - \alpha)^2 \frac{1 + \bar{z} + 0,5\alpha(1 - \bar{z}^2)}{(1 - \alpha \bar{z})^2}$$

представляет закон изменения заданного давления в связи с потерями энергии на преодоление гидравлического сопротивления канала.

Гидродинамическую составляющую, характеризующую изменение давления потока вытеснения, можно разложить на две компоненты:

$$p_d = p_\varepsilon + p_\vartheta$$

$$P_{\varepsilon} = -\frac{\mu l^2 k_0 \dot{y}}{8H^2 y^2} \frac{1 - \bar{z}^2}{y(1 - \alpha \bar{z})^2} \quad P_g = \frac{\mu l^2 k_0 \theta}{24H^2 y^2} \frac{g}{y} \left[\bar{z} - \bar{z}^3 + \frac{3}{4} a (1 + 2\bar{z}^2 - 3\bar{z}^4) \right]$$

Первое слагаемое определяет распределение давления, обусловленное радиальными колебаниями верхней стенки, второе - угловыми.

Инерционная составляющая давления:

$$P_{gd} = \frac{\rho l^2 \omega^2}{12\tau} \left[(\alpha \varepsilon + 0,5\theta\delta)(\bar{z} + 1) - 1,5\varepsilon(\bar{z}^2 - 1) - (\alpha \varepsilon + 0,5\theta\delta)(\bar{z}^3 + 1) \right] \sin \alpha x,$$

По компонентам давления определены соответствующие составляющие силы давления на стенку и моменты этих составляющих относительно оси Ox . Гидростатическая составляющая силы и момента:

$$f_p = l p_m + \frac{\Delta p l}{2} \alpha \quad m_p = \frac{\Delta p l^2}{12}$$

Линеаризованные выражения для потока вытеснения

$$f_y \approx -\frac{\mu l^3 k_0}{12H^2} \dot{y} = -k_y \dot{y}, \quad k_y = \frac{\mu l^3 k_0}{12H^2},$$

$$m_y \approx \frac{\mu l^4 k_0}{60H^2} \theta y = \frac{l}{5} \theta k_y y;$$

$$f_g \approx \frac{\mu l^3 k_0}{30H^2} \theta^2 g = k_g \theta g \sim \theta^2 \approx 0,$$

$$m_g \approx -\frac{\mu l^4 k_0}{360H^2} \theta g = -k_g \frac{l}{12} g, \quad k_g = \frac{\mu l^3 k_0}{30H^2} \theta.$$

Отметим, что момент, обусловленный радиальными колебаниями стенки увеличивает амплитуду угловых колебаний при движении стенки вверх в конфузорном канале и при движении стенки вниз в диффузорном.

Элементарная сила и момент инерционного давления:

$$f_{gd} \approx k_d (1 - 2\theta) y, \quad k_d = \frac{\rho l^3}{12},$$

$$m_{gd} \approx m_{dy} + m_{dg},$$

$$m_{dy} = -k_d \frac{l}{15} \theta y, \quad m_{dg} = k_d \frac{l}{30} \theta g;$$

f_{gd} в первом приближении пропорциональна амплитудному значению радиального ускорения верхней стенки.

Найденные силовые характеристики являются реакциями потока на внешние гармонические воздействия, вызывающие колебания верхней стенки канала. Полученные силовые характеристики потока определяют относительные амплитуды ε и δ вынужденных колебаний стенки, и могут использоваться для вычисления ее амплитудных и фазовых частотных характеристик.

Для оценки динамической устойчивости упруго закрепленной стенки

канала (рисунок 2.) рассмотрим случай, когда на нее не действуют внешние силы и моменты: выведенная из состояния равновесия за счет возмущения начальных условий, стенка совершает свободные колебания.

Начало координат расположено в центре масс пластинки, когда она находится в положении статического равновесия. Обобщенные координаты в безразмерной форме имеют вид:

$$\varepsilon = e/H = \varepsilon_0 \sin \omega t, \quad \delta = \Delta\vartheta/\vartheta_0 = \delta_0 \sin \omega t$$

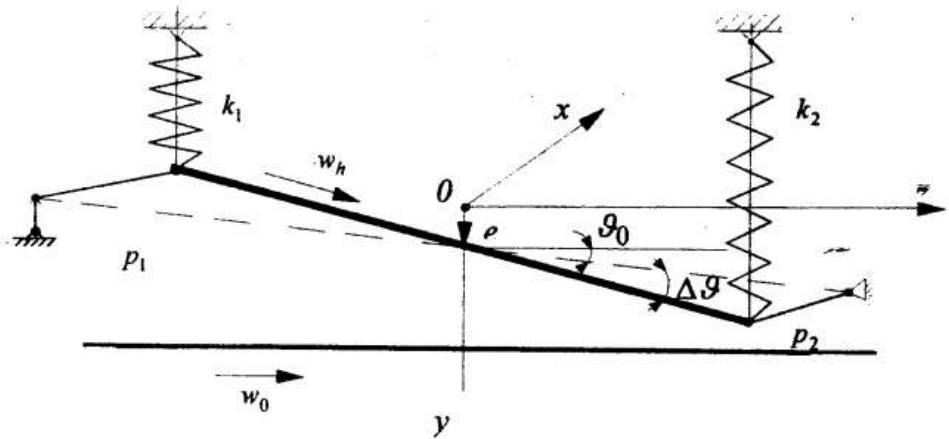


Рисунок 2 - Схема плоского канала с упруго закрепленной верхней стенкой

Уравнения свободных колебаний в безразмерных обобщенных координатах имеют вид:

$$\begin{aligned} y + \omega_{10}^2 y - c_{12} \vartheta - \frac{f_1}{mH} &= 0, \\ \vartheta + \omega_{20}^2 \vartheta - c_{21} y - \frac{m_1}{I\vartheta_0} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

где $\omega_{10}^2 = (k_1 + k_2)/m$, $\omega_{20}^2 = (k_1 + k_2)l^2/4I$, - парциальные частоты, $c'_{12} = c'_{21} = 0,5l(k_1 - k_2)$ - коэффициенты упругой связи. f_1, m_1 - сила и момент, действующие со стороны потока на элемент стенки единичной ширины.

Уравнения колебаний в операторной форме примут вид:

$$\begin{aligned} (a_1 p^2 + a_2 p + a_3) y + (\alpha_1 p^2 + \alpha_2 p - \alpha_3) \vartheta &= 0, \\ (-b_1 p^2 + b_2 p - b_3) y + (\beta_1 p^2 + \beta_2 p + \beta_3) \vartheta &= 0. \end{aligned}$$

где

$$a_1 = 1 - \frac{\rho l^3}{12mH}(1-2\theta), \quad a_2 = \frac{\mu l^3 k_0}{12mH^3}, \quad a_3 = \omega_{10}^2 + \Delta\omega_1^2, \quad \Delta\omega_1^2 = \frac{\Delta p l \theta}{2mH};$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = c_{12} - \Delta c_{12}, \quad \Delta c_{12} = \frac{\Delta p l^2}{4mH^2};$$

$$\beta_1 = 1 - \frac{\rho l^5}{720IH}, \quad \beta_2 = \frac{\mu l^5 k_0}{720IH^3}, \quad \beta_3 = \omega_{20}^2;$$

$$b_1 = \frac{\rho l^4 \theta}{360I}, \quad b_2 = \frac{\mu l^4 k_0 \theta}{60IH^2}, \quad b_3 = c_{21};$$

коэффициенты упругой (α_3, b_3) , диссипативной (α_2, b_2) и инерционной (b_1) связей.

Условием существования нетривиальных решений уравнений (4) относительно амплитуд, является равенство нулю определителя этой системы.

Раскрыв определитель, получим характеристическое уравнение

$$C_0 \lambda^4 + C_1 \lambda^3 + C_2 \lambda^2 + C_3 \lambda + C_4 = 0, \quad (5)$$

Коэффициенты которого равны:

$$C_0 = a_1 \beta_1, \quad C_1 = a_1 \beta_2 + a_2 \beta_1, \quad C_2 = a_1 \beta_3 + a_2 \beta_2 + a_3 \beta_1 - \alpha_3 b_1,$$

$$C_3 = a_2 \beta_3 + a_3 \beta_2 + \alpha_3 b_2, \quad C_4 = a_3 \beta_3 - \alpha_3 b_3$$

Характеристическое уравнение может иметь как вещественные, так и комплексные корни. Вещественные корни соответствуют аperiodическому движению. Границей аperiodической устойчивости, разделяющей области возрастания и убывания по экспоненциальному закону обобщенных координат, являются нулевые вещественные корни.

В диффузорном канале коэффициенты жесткости a_3 и α_3 , коэффициент инерционной связи b_1 , коэффициент диссипативной связи b_2 зависят от параметра конусности и могут становиться отрицательными или равными нулю, а значит и коэффициенты характеристического уравнения могут также менять знак или обращаться в нуль.

При отрицательной гидростатической жесткости возможно равенство:

$$C_4 = a_3 \beta_3 - \alpha_3 b_3 = 0$$

В этом случае характеристическое уравнение (4) имеет один вещественный, равный нулю корень, что соответствует расположению системы на аperiodической границе устойчивости: любое изменение параметров системы может привести к неограниченным отклонениям ее от положения равновесия. В гидроаэроуругости такое явление называется дивергенцией.

Критическое значение перепада давления, при котором возникает

дивергенция определяется выражением

$$\Delta p = -8 \frac{H}{l} \frac{k_1 k_2}{\theta(k_1 + k_2) + (k_1 - k_2)}$$

В канале с параллельными в равновесном состоянии стенками ($\mathcal{D}_0=0$) статическая потеря устойчивости возможна лишь в случае различных жесткостей, значения которых должны увеличиваться по направлению потока ($\Delta k < 0$). Если жесткости стенки равны ($k_1 = k_2$), то дивергенция возникает за счет начальной диффузности:

$$\Delta p = -\frac{4Hk}{l\theta}$$

Если корни характеристического уравнения комплексные, то вещественная часть корня характеризует изменение амплитуды во времени, а мнимая часть определяет частоту колебаний. Чисто мнимые корни ($\lambda = \pm i\nu$) являются границей колебательной устойчивости, им соответствуют незатухающие колебания системы.

В случае отрицательной демпфирующей связи ($b_2 < 0$) момент, вызванный радиальными колебаниями вала, увеличивает угловые колебания стенки. При этом коэффициент характеристического уравнения C_3 может быть равен нулю.

Коэффициент C_1 представляет собой произведения инерционных и коэффициентов демпфирования. Поскольку положительные значения демпфирующих сил и моментов стабилизируют движение стенки, примем $C_1 = 0$, т.е. найдем границу устойчивости с некоторым запасом. Характеристическое уравнение в этом случае становится биквадратным:

$$C_0 \lambda^4 + C_2 \lambda^2 + C_4 = 0,$$

а его корни

$$\lambda_{1,2}^2 = -\frac{C_2}{2C_0} \pm \sqrt{\frac{C_2^2}{4C_0^2} - \frac{C_4}{C_0}}.$$

Если подкоренное выражение положительно - корни характеристического уравнения чисто мнимые, - система совершает колебания с постоянной амплитудой.

Если подкоренное выражение отрицательно, то $\lambda_{1,2}^2 = a \pm ib$, где $a = -\frac{C_2}{2C_0}$, $b = \sqrt{\frac{C_4}{C_0} - \frac{C_2^2}{4C_0^2}}$. Корни характеристического уравнения - сопряженные комплексные числа:

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{a^2 + b^2} e^{\mp i \frac{1}{2} \arctg \frac{b}{a}} = \alpha \pm i\beta,$$

следовательно, система совершает колебания с возрастающей во времени амплитудой.

Из условия $\sqrt{\frac{C_2^2}{4C_0^2} - \frac{C_4}{C_0}} < 0$, определим перепад давления, при кото-

ром возникает флаттер (в теории гидроаэроупругости: самовозбуждающиеся колебания элементов конструкций, возникающие при определенных скоростях обтекания воздухом упругих элементов этих конструкций)

$$\Delta p = 4 \frac{H(k_1 + k_2)}{l\theta} \left(1 + \frac{3(k_1 - k_2)}{\theta(k_1 + k_2)} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2}{3} \theta \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}} \right) \right)$$

Для канала : $k_1 = 3 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$, $k_2 = 10^5 \text{ Н/м}^2$, $H = 5 \text{ мм}$, $\theta = 0,2$ критическое значение перепада давления - $\Delta p = 3 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $\Delta p = 6,5 \cdot 10^6 \text{ Па}$.

Таким образом, вследствие отрицательной демпфирующей связи, в канале с колеблющимися стенками под действием напорного течения возможно явление, подобное флаттеру.

Следует отметить, что даже в конфузормом канале, при перепадах давления сравнимых или превышающих жесткости k_1 и k_2 подвесок, C_3 также может быть равным нулю. Поэтому несмотря на то, что в дросселирующих каналах рекомендуется конфузормая форма, даже при такой геометрии канала возможны колебания стенок с возрастающей амплитудой.

Несмотря на то, что динамическая система ротор-щелевые уплотнения намного сложнее рассматриваемого плоского канала с упруго закрепленной жесткой стенкой (ротор – упругое тело с распределенными параметрами, а в щелевых уплотнениях возникает более сложная система гидродинамических сил), полученные результаты позволяют достаточно просто объяснить физику экспериментально установленного факта – самовозбуждающихся колебаний вала в щелевых уплотнениях при отсутствии вращения.

ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК

1. Марцинковский В.А. Бесконтактные уплотнения роторных машин. – М.:Машиностроение. 1980, 200 с.
2. Никитин Г.А. Щелевые и лабиринтные уплотнения гидроагрегатов. – М.:Машиностроение, 1982. – 109 с.
3. Марцинковский В.А. Гидродинамика дросселирующий каналов. – Сумы, СумДУ. 2002, 340 с.