

## РАСЧЕТ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАКРУЧЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ В ПРЯМООСНЫХ КАНАЛАХ

### CALCULATION OF AXISYMMETRIC SWIRLING FLOWS IN STRAIGHT CHANNELS

**КОЧЕВСКИЙ Алексей Николаевич**, к.т.н., м.н.с.,  
Сумский государственный университет, г. Сумы, Украина.

***Abstract.** A Single-Sweep Method for solution of Reynolds equations is developed and used for numerical investigation of flow in channels of direct axis with different wall shapes and different swirl intensity. It is shown that this method allows to calculate the non-separating and weakly separating axisymmetrical weakly swirling flows with satisfactory accuracy.*

#### Математическая модель течения

Незакрученные и слабо закрученные течения в прямоосных каналах встречаются во многих технических устройствах – от обычных труб до щелевых уплотнений и проточных частей гидравлических машин. Для расчета таких течений уравнения Рейнольдса, описывающие наиболее общий случай турбулентного движения жидкости, можно существенно упростить. При проведении данного исследования мы используем следующие допущения:

- течение полагается осесимметричным;
- предполагается наличие доминирующего направления течения, вдоль которого расходная составляющая скорости повсюду положительна и намного превосходит радиальную;
- предполагается, что скорость в осевом направлении меняется намного медленнее, чем в радиальном;
- величины скоростей и давления в каждой точке потока зависят только от условий выше по потоку и не зависят от условий ниже по потоку.

Эти допущения позволяют провести анализ порядков слагаемых в уравнениях Рейнольдса и отбросить те из них, которые не оказывают заметного влияния на результат расчета. Для удобства проведения расчета течения в каналах с криволинейными или ломаными образующими оси координат удобно направить таким образом, чтобы продольная ось прибли-

зительно совпадала с линиями тока жидкости, а поперечная ось была ортогональна к ней. Полученная система уравнений в этой криволинейной ортогональной системе координат имеет следующий вид:

$$\frac{u}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} + \frac{v}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} - \frac{w^2}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial q_2} + \frac{(\overline{u'v'})}{H_1^2 H_2 H_3} \frac{\partial(H_1^2 H_3)}{\partial q_2} = \quad (1)$$

$$= -\frac{1}{H_1} \frac{\partial p}{\partial q_1} + \frac{1}{Re} \left( \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2} + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial u}{\partial q_2} \frac{\partial(H_1 H_3 / H_2)}{\partial q_2} \right);$$

$$\frac{\partial p_r}{\partial q_2} = \frac{w^2}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_2}, \quad (2)$$

$$\frac{u}{H_1} \frac{\partial w}{\partial q_1} + \frac{v}{H_2} \frac{\partial w}{\partial q_2} + \frac{uw}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} + \frac{vw}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial(\overline{v'w'})}{\partial q_2} + \frac{(\overline{v'w'})}{H_1 H_2 H_3^2} \frac{\partial(H_1 H_3^2)}{\partial q_2} = \quad (3)$$

$$= \frac{1}{Re} \left( \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial q_2^2} + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial w}{\partial q_2} \frac{\partial(H_1 H_3 / H_2)}{\partial q_2} + \frac{w}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{H_1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \right) \right);$$

$$\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left( u \frac{\partial(H_2 H_3)}{\partial q_1} + v \frac{\partial(H_3 H_1)}{\partial q_2} \right) + \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial v}{\partial q_2} = 0, \quad (4)$$

где  $q_1, q_2, q_3$  – оси координат ( $q_1$  – доминирующее направление течения),  $u, v, w$  – составляющие вектора скорости в продольном, поперечном и окружном направлениях,  $H_1, H_2, H_3$  – коэффициенты Лямэ,  $p(q_1, q_2, q_3) = p_l(q_1) + p_r(q_1, q_2, q_3)$  – статическое давление,  $p_l$  – давление вдоль координаты  $q_1$ ,  $p_r$  – поправка, учитывающая изменение давления в поперечном направлении.

Полученная система уравнений (1) – (4) представляет собой обобщенные уравнения Прандтля (в западной литературе – укороченные уравнения Рейнольдса) и замыкается уравнением постоянства расхода жидкости:

$$\int_0^{Q_2} u H_2 H_3 dq_2 = const, \quad (5)$$

где  $Q_2$  – координата  $q_2$  на наружной стенке канала.

Эта система уравнений сводится к уравнениям Прандтля, если окружная скорость потока равна нулю. При этом следует отметить, что мы используем эти уравнения не только для пограничного слоя, но для всей области потока. Система имеет параболический тип, это значит, что граничные условия в выходном сечении не задаются. В качестве исходных данных используются эпюры скорости во входном сечении канала.

Для моделирования турбулентных членов используется гипотеза Буссинеска:

$$\overline{u'v'} = -\frac{1}{\text{Re}} \frac{\nu_x}{\nu} \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2}, \quad \overline{v'w'} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\nu_\phi}{\nu} \left( -\frac{1}{H_2} \frac{\partial w}{\partial q_2} + \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \frac{w}{H_2 H_3} \right),$$

где  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости.

Для вычисления коэффициентов турбулентной вязкости  $\nu_x$  и  $\nu_\phi$  используется алгебраическая модель турбулентной вязкости, модифицированная для учета закрутки, выпуклости и вогнутости стенок канала, противодавления и шероховатости стенок. В ядре потока расчет турбулентной вязкости ведется по формуле Клаузера, а вблизи стенок – по формуле Вандриста.

Более подробное описание математической модели приведено в работах [1 - 4].

### Численное решение уравнений математической модели

Численное решение выполняется за один маршевый проход от входного сечения канала к выходному. Перед выполнением расчета строится расчетная сетка (рис. 1), и неизвестные значения скоростей и давления отыскиваются в узлах этой сетки. Дискретизация уравнений математической модели выполняется методом конечных разностей с использованием следующих формул:

$$\frac{\partial u}{\partial q_1} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{(q_1)^{n+1} - (q_1)^n}, \quad \frac{\partial u}{\partial q_2} = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{(q_2)_{j+1} - (q_2)_{j-1}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{((q_2)_{j+1} - (q_2)_{j-1})^2}.$$

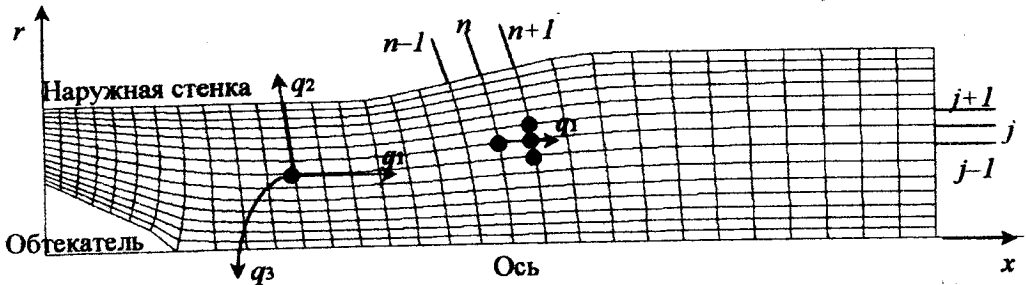


Рисунок 1 – Нумерация узлов расчетной сетки

В каждом последующем сечении неизвестные значения скоростей и давления отыскиваются по вычисленным ранее значениям скоростей и давления в предыдущем расчетном сечении. При этом частные производные в уравнениях математической модели заменяются дискретными конечно-разностными аналогами, а сами эти уравнения сводятся к системам линейных алгебраических уравнений. Решение этих систем уравнений осуществляется методом исключения Гаусса.

Разработанный автором метод расчета [1 – 4] связывает воедино идеи двух зарубежных работ: в работе [5] (а также [6]) описан алгоритм расчета безотрывных закрученных течений, а в работе [7] (а также [8]) – слабо отрывных незакрученных течений. А именно, сначала выполняется численное решение уравнения (3) по неявной схеме Кранка-Николсона для определения окружной скорости и уравнения (2) для определения поправки давления (за один маршевый проход в направлении  $q_2$ ), а затем выполняется совместное решение уравнений неразрывности (4) и движения (1) с учетом условия постоянства расхода жидкости (5). При этом градиент давления  $\partial p_1 / \partial q_1$  входит в матрицу системы линейных алгебраических уравнений как дополнительная неизвестная.

Для проведения расчета в области отрыва потока, где расходная скорость отрицательна, используется аппроксимация Флюгге – Лотц, состоящая в том, что первый член в уравнении (1) полагается равным нулю. В результате разработанный метод позволяет получать устойчивое решение не только для безотрывного потока, но даже при наличии в потоке небольших замкнутых зон отрыва.

Для обеспечения сеточной независимости результатов рекомендует-ся использовать расчетную сетку, содержащую  $NJ = 101$  узел в радиальном направлении ( $q_2$ ) и сгущающуюся у наружной стенки и у втулки или оси канала по закону геометрической прогрессии. При этом радиальный шаг сетки у стенки составляет 0.001 входного диаметра канала. Осевой шаг постепенно увеличивается от 0.01 диаметра на входе до 0.05 диаметра на выходе.

### Результаты сопоставления с экспериментальными данными

*Затухание закрутки в длинной цилиндрической трубе.* Важным положительным качеством разработанного метода по сравнению с методами, основанными на модели идеальной жидкости, является возможность моделирования постепенного затухания закрутки под действием трения. Для демонстрации такой возможности мы используем экспериментальные данные работы [9], где исследовалось затухание закрутки в длинной трубе. На рис. 2 эти экспериментальные данные сопоставлены с расчетными результатами. Число Рейнольдса, рассчитанное по входному диаметру, составляло 60000.

Интенсивность закрутки, с которой поток был закручен в этом эксперименте, слишком велика для проведения точного сопоставления, поскольку методика расчета при такой закрутке дает сбой из-за возникновения обратного течения. Поэтому для иллюстрации расчетных результатов интенсивность закрутки во входном сечении была взята несколько меньшей. Все же рисунок позволяет сделать вывод об удовлетворительной точности расчетного определения скорости затухания закрутки.

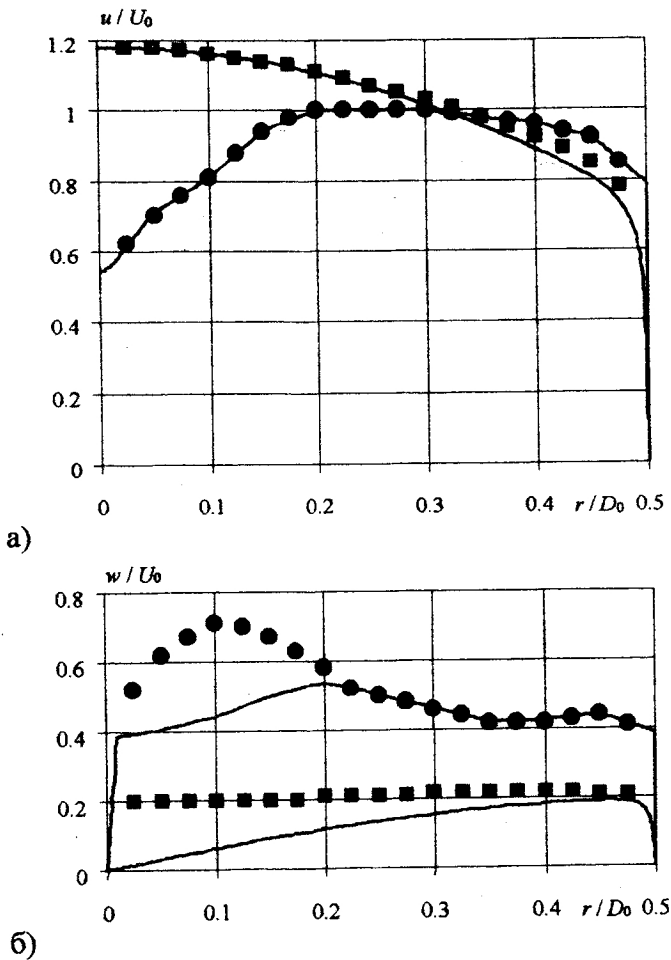


Рисунок 2 – Трансформация расходной (а) и окружной (б) эпюры скорости при затухании закрутки в длинной цилиндрической трубе:  
 ● – при  $x/D_0 = 26.875$ ; ■ – при  $x/D_0 = 108.125$

**Течение в диффузоре с малым углом раскрытия и малой интенсивностью закрутки.** Для тестирования метода расчета на закрученном турбулентном потоке в коническом диффузоре использованы экспериментальные данные Со [10]. Угол раскрытия диффузора составлял  $7^\circ$ , степень расширения – 2.5,  $Re = 382000$  (рассчитано по входному диаметру). Закрутка потока создавалась с помощью центробежного устройства, отношение максимальной окружной скорости к средней по входному сечению расходной скорости составляло около 0.25. На рис. 3 результаты расчета расходной и окружной составляющих скорости сопоставлены с экспериментальными данными, полученными во входном сечении. Отметим существенное снижение расходной скорости на оси диффузора, что является следствием постепенного затухания закрутки потока под действием сил трения.

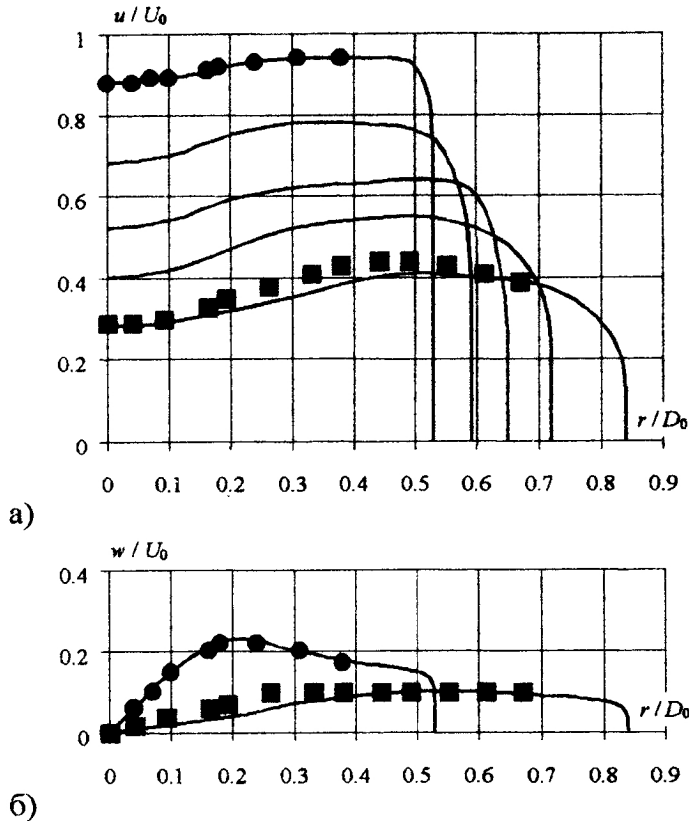


Рисунок 3 – Трансформация эпюры расходной (а) и окружной (б) скорости в коническом диффузоре с углом раскрытия  $\alpha = 7^\circ$ :

● – входное сечение, при  $x/D_0 = 0.6$ ; ■ – выходное сечение, при  $x/D_0 = 6.0$

**Течение в диффузоре с умеренным углом раскрытия и умеренной интенсивностью закрутки.** Для иллюстрации возможности применения разработанного метода к расчету такого течения использованы экспериментальные данные [11]. Степень расширения исследованных в этой работе диффузоров составила 4.0, число Рейнольдса, рассчитанное по входному диаметру – около 200000. На рис. 4 приведены расчетные и экспериментальные эпюры расходной и окружной скорости для диффузора с углом  $\alpha = 12^\circ$ . Отношение максимальной окружной скорости к средней по входному сечению расходной скорости составляло около 0.4.

Повышенные угол раскрытия и интенсивность закрутки обусловили несколько худшее количественное согласование с экспериментальными данными, чем в предыдущем случае. Для течений с большим углом раскрытия или большей интенсивностью закрутки расчетные результаты получить не удалось совсем, поскольку в процессе расчета уже было зафиксировано обратное течение вдоль оси диффузора, чего не наблюдалось экспериментально.

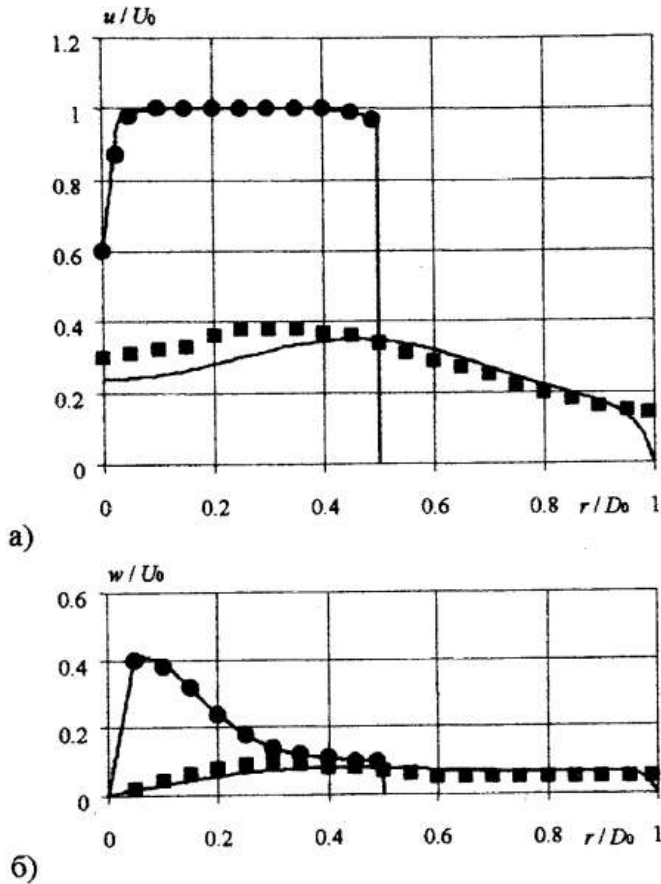


Рисунок 4 – Трансформация эпюры расходной (а) и окружной (б) скорости в коническом диффузоре с углом раскрытия  $\alpha = 12^\circ$ :

● – входное сечение; ■ – выходное сечение

**Течение в диффузорном канале, образованном цилиндрической трубой и конической втулкой.** Для сопоставления результатов использована работа [12], в которой описано экспериментальное исследование поля скорости в диффузорах с различными углами при вершине втулки и различной интенсивностью закрутки. Схема канала приведена на рис. 5. Полуугол при вершине втулки составлял  $\gamma = 8^\circ, 12^\circ$  и  $18^\circ$ , число Рейнольдса – около 100000. Закрутка на входе в канал создавалась направляющими лопатками, интенсивность закрутки характеризовалась углом установки лопаток  $\beta$ .

Входное сечение расчетной области принято при  $x/H_0 = 0$ , выходное – при  $x/H_0 = 14$ . Отметим, что в таком канале расчет удобно выполнять именно в криволинейной системе координат.

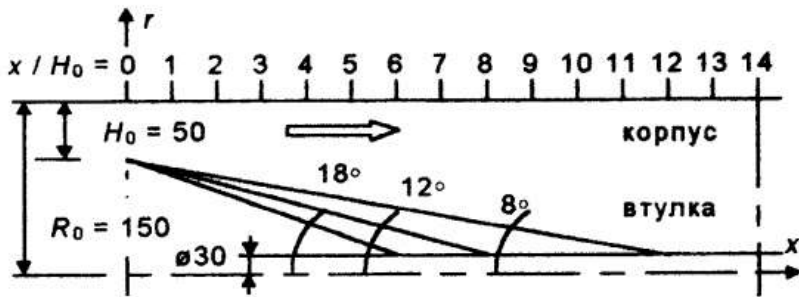


Рисунок 5 – Схема канала, образованного цилиндрической трубой и конической втулкой

При отсутствии закрутки пограничный слой быстрее растет на втулке, и именно на втулке происходит отрыв. На рис. 6 представлены эпюры скорости для случая незакрученного течения, на рис. 7 – при наличии закрутки. Радиус линий тока вниз по потоку уменьшается. Согласно уравнению (3), при этом возрастает окружная скорость, а ее эпюра приобретает форму, соответствующую постоянному моменту скорости. Давление вдоль наружной стенки возрастает, поскольку течение является диффузорным. Однако, согласно уравнению (2), с увеличением окружной скорости возрастает разность давлений между наружной стенкой и втулкой. В результате давление вдоль втулки вниз по потоку убывает. На рис. 8 представлены полученные расчетным путем линии равного значения безразмерного давления  $(p - p_1) / \rho U_0^2$ , где  $U_0$  – средняя расходная скорость во входном сечении,  $p_1$  – давление во входном сечении на наружной стенке.

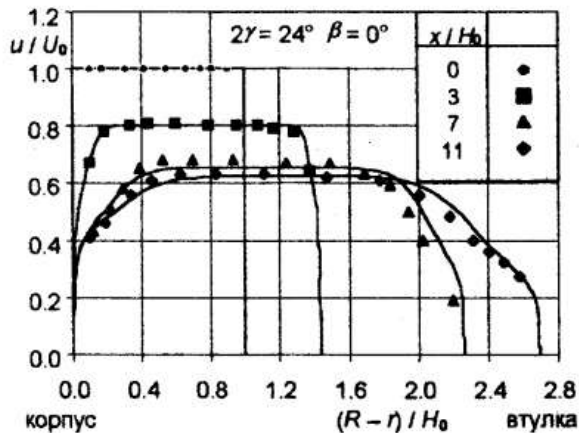


Рисунок 6 – Сопоставление с экспериментами [12]. Эпюры скорости в случае незакрученного течения



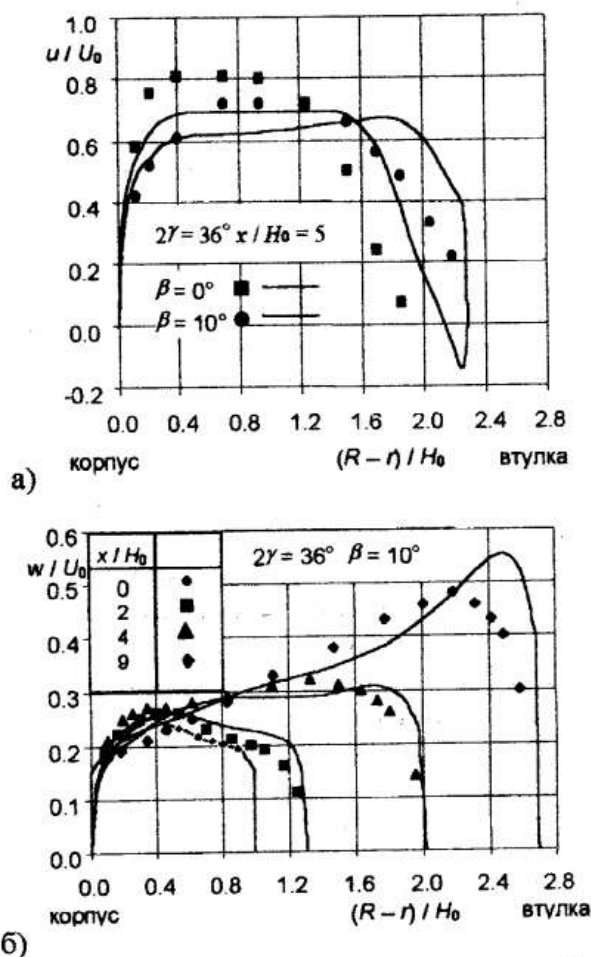


Рисунок 7 – Сопоставление с экспериментами [12].  
Эпюры скорости в случае незакрученного течения:  
(а) – расходная скорость, (б) – окружная скорость

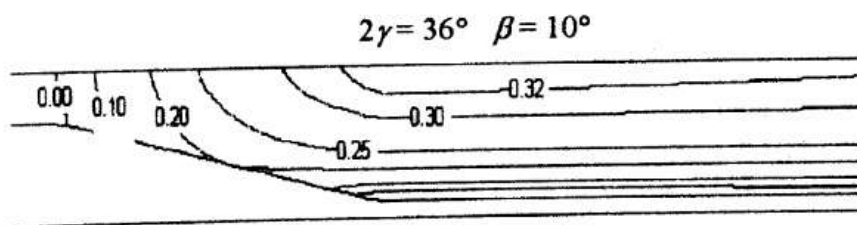


Рисунок 8 – Расчетные линии равного давления в закрученном потоке

Согласно уравнению (1), неравномерный по сечению осевой градиент давления вызывает трансформацию эпюры расходной скорости, заставляя ее прижиматься к втулке. На цилиндрическом участке происходит затухание закрутки, осевой градиент давления оказывается максимальным

у оси канала, прижимая эпюру расходной скорости к наружной стенке. В результате при достаточно интенсивной закрутке у оси канала появляется обратное течение. Кроме того, при достаточно интенсивной закрутке член  $(w^2 \partial H_3) / (H_1 H_3 \partial q_1)$  в уравнении (1) становится весьма большим, вызывая отрыв потока от втулки еще до начала цилиндрического участка.

Как можно видеть, разработанная методика позволяет с удовлетворительной точностью рассчитать картину течения вплоть до появления обратного течения, хотя в области сильной закрутки имеет место отклонение от данных эксперимента. Отметим, что с использованием аппроксимации Флюгге – Лотц удалось рассчитать отрыв у втулки (рис. 7, а).

### Вывод

Показано, что результаты расчета по разработанному автором методу хорошо согласуются с экспериментальными для слабо закрученных течений в цилиндрической трубе и прямоосных диффузорах с малыми углами раскрытия. В диффузорах с большими углами раскрытия и  $\gamma$  или при наличии значительной закрутки течения расхождение расчетных и экспериментальных результатов становится заметным. В случае сильной закрутки течения и  $\gamma$  или при наличии обширной зоны отрыва методика расчета не позволяет получить результаты совсем – для расчета таких течений следует использовать полные уравнения Рейнольдса.

### ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК

1. Кочевский А. Н. Результаты исследования течения в отводящем устройстве насоса с лопастной системой типа НР // Вестник НТУ "ХПИ". – Харьков, 2001. – Вып.129, Ч.2. – С.332-342.
2. Кочевський О. М. Оптимізація геометричних параметрів відвідних пристроїв насосів високої швидкохідності з лопатевою системою типу НР / Автореф. і дис. канд. техн. наук. – Суми: СумДУ, 2001. – 20с.
3. Kochevsky A. N. Numerical Investigation of Swirling Flow in Annular Diffusers With a Rotating Hub Installed at the Exit of Hydraulic Machines // Transactions of the ASME, Journal of Fluids Engineering – September 2001. – Vol. 123, Issue 3. – P.484-489.
4. Kochevsky A. N. Investigation of Swirling Flow in Diffusers Installed at the Exit of an Axial-Flow Pump // TASK Quarterly – No. 4, 2001. – P.603-610.
5. Armfield S. W., Fletcher C. A. J. Numerical Simulation of Swirling Flow in Diffusers // International Journal for Numerical Methods in Fluids. – 1986. – Vol. 6. – P.541-556.
6. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2х томах: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991.
7. Квон О., Плетчер Р., Льюис Дж. Расчет течений с внезапным расширением при помощи уравнений пограничного слоя // Теоретические осно-

- вы инженерных расчетов / Труды американского общества инженеров-механиков. – 1984. – Т. 106, № 3. – С.116-123.
8. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2х томах: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990.
  9. Hui Li, Yuji Tomita. Characteristics of Swirling Flow in a Circular Pipe // Transactions of the ASME, Journal of Fluids Engineering. – 1994. – Vol. 116. – P.370-373.
  10. So K. L. Vortex Decay in a Conical Diffuser. Report No.75, Gas Turbine Lab, M.I.T., September 1964.
  11. Senoo Y., Kawaguchi N., Nagata T. Swirl Flow in Conical Diffusers // Bulletin of the JSME. – January, 1978. – Vol. 21, № 151. – P.112-119.
  12. Kanemoto T., Toyokura T., Kurokawa J. Flow in Annular Diffuser (1st Report, Internal Flow and Performance) // Bulletin of the JSME. – June, 1982. – Vol. 25, № 204. – P.912-918.