УДК 621.391.1

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДВОИЧНОГО БИНОМИАЛЬНОГО СЧЕТА

А.А.Борисенко, проф.

В данной работе рассматриваются основные теоретические положения двоичного биномиального счета, основанного на предложенной автором в 1981 г. биномиальной системе счисления с двоичным алфавитом [1]. Практика двоичного биномиального счета, как это часто бывает, значительно опередила адекватную этому счету теорию. На сегодня получен ряд оригинальных биномиальных устройств, защищенных авторскими свидетельствами, имеются биномиальные интегральные микросхемы, опытные образцы цифровых устройств и систем с биномиальным счетом, но отсутствует его законченная теория. Этот пробел в теории цифровых устройств частично восполняется ниже.

Двоичной К - биномиальной системой счисления с двоичным алфавитом называется функция

$$F = x_{r-1} C_{n-1}^{k-q_r} + \ldots + x_i C_{n-r+i}^{k-q_{i+1}} + \ldots + x_0 C_{n-r}^{k-q_1} \qquad (1)$$

с системами ограничений:

$$\begin{cases} q_0 = k_1, & (2) \\ r \le n-1, & (3) \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} n - k = r - q_0, & (4) \\ q_0 \le k-1, & (5) \end{cases}$$

где $x_i \in \{0,1\}$;

r - количество разрядов биномиального числа;

k - максимальное число единиц в биномиальном числе;

i - порядковый номер разряда;

n - параметр системы счисления;

q_i - сумма единичных значений цифр от (r - 1) - го разряда до i - го включительно:

$$q_i = \sum_{j=i}^{r-1} X_j \qquad (6)$$

Функция (1) и ограничения (2, 3, 4, 5) получены с более общих соображений, вытекающих из общей теории неоднородных позиционных систем счисления, исследованных автором в работе [2].

Важнейшей особенностью биномиальных систем счисления является неравная длина их чисел. Это свойство непосредственно вытекает из ограничений (2, 3) и (4, 5).

Теорема 1 Максимальная длина биномиальных чисел с двоичным алфавитом $r_{max} = n - 1$, а минимальная для ограничений (2, 3) $r_{min}=k$ и для ограничений (4, 5) $r_{min} = n - k$.

Доказательство. Для системы ограничений (2, 3), как следует из (3),

$r = r_{max} = n - 1$. В случае ограничений (4, 5) из (4) следует, что $r = n\text{-}k+q_0$, а так как из (5) вытекает, что максимальное значение $q_0 = k - 1$, то $r_{max} = n\text{-}k+k\text{-}1 = n\text{-}1$. Следовательно, максимальная длина биномиальных чисел $r_{max} = n - 1$ для обеих систем ограничений.

Минимальная длина r_{min} биномиальных чисел не может быть меньше числа q_0 содержащихся в них единиц. Так как в соответствии с (2) $q_0 = k$, то и минимальная длина чисел применительно к ограничениям (2, 3) должна равняться k. Для ограничений (4, 5) $r = n - k + q_0$. Так как в этом случае минимальное значение $q_0 = 0$, то $r_{min} = n - k$.

Теорема доказана.

Теорема 2 Длины r биномиальных чисел с двоичным алфавитом, задаваемых ограничениями (2, 3), принимают значение $n\text{-}k$ и, задаваемых ограничениями (4, 5), - k различных значений.

Доказательство. Так как для ограничений (2, 3) $r_{min} = k$, то число возможных различных длин биномиальных чисел с $q_0 = k$ равно

$$d = r_{max} - r_{min} + 1 = n - 1 - k + 1 = n - k.$$

Для ограничений (4, 5) $r_{min} = n - k$ при $q_0 = 0$.

Тогда

$$d = r_{max} - r_{min} + 1 = n - 1 - n - k + 1 = k.$$

Теорема доказана.

Теорема 3 Биномиальные числа с двоичным алфавитом и ограничениями (2, 3) и (4, 5) разбиваются на два непересекающихся класса, один из которых содержит k единиц, а другой - $n - k$ нулей.

Доказательство. Из ограничений (2, 3) следует, что определяемые ими числа содержат $q_0 = k$ единиц и соответственно $r - k$ нулей.

Ограничения (4, 5) указывают, что $r = n - k + q_0$ и $q_0 < k$. Следовательно, все задаваемые ими числа содержат $n - k$ нулей и $q_0 = 0, 1, ..., k - 1$ единиц.

Так как параметры биномиального числа, определяемые ограничениями (2, 3), не удовлетворяют ограничениям (4, 5) и наоборот, то это число может принадлежать только одному классу биномиальных чисел.

Теорема доказана.

Следствие. Биномиальные числа оканчиваются единицей в случае, если они содержат k единиц или нулем в случае, если они содержат $n - k$ нулей.

Появление k - й единицы или $(n\text{-}k)$ - го нуля в числе свидетельствует о принадлежности его соответственно к первому или второму классу биномиальных чисел. При этом отсутствует необходимость в дополнительных цифрах для идентификации числа.

Из полученных выше доказательств теорем следует, что биномиальные числа с двоичным алфавитом имеют следующие длины:

для ограничений (2, 3)

$$r = k, k + 1, ..., n - 1\ ;$$

для ограничений (4, 5)

$$r = n - k, n - k + 1, ..., n - 1.$$

В этих условиях для ограничений (2, 3) количество нулей в числе может равняться

$$l = 0, 1, ..., n - 1 - k = n - k - 1,$$

а для ограничений (3, 4) количество единиц

$$q_0 = 0, 1, \ldots, n - 1 - n - k = k - 1.$$

Теорема 4 Количество биномиальных чисел равной длины, содержащих k единиц и $l \le n - k - 1$ нулей,

$$N_l = C_{k+l-1}^{l}. \qquad (7)$$

Доказательство. Так как длины биномиальных чисел рассматриваемого класса $r = k + l$ и в их конце стоят единицы, то общее число биномиальных чисел для заданного l определяется числом сочетаний $(k - 1)$ - й единицы или l нулей из $(r - 1)$ - го элемента:

$$N_l = C_{r-1}^{k-1} = C_{r-1}^{l} = C_{k+l-1}^{k-1} = C_{k+l-1}^{l}. \qquad (8)$$

Теорема доказана.

Следствие. При $l = n - k - 1$ длина $r=k + l = k + n - k - 1 = n - 1$ достигает максимального значения и, значит, в этом случае

$$N_l = N_{n-k-1} = C_{n-2}^{n-k-1}. \qquad (9)$$

Теорема 5 Количество биномиальных чисел, содержащих в конце единицу,

$$N_1 = C_{n-1}^{k}. \qquad (10)$$

Доказательство. Суммируя N_l по всем возможным $l = 0, 1, \ldots, n-k-1$, получим количество биномиальных чисел, содержащих в конце единицу:

$$N_1 = \sum_{l=0}^{n-k-1} N_l = \sum_{l=0}^{n-k-1} C_{k+l-1}^{l} = C_{n-2}^{n-k+1} + \ldots + C_k^1 + C_{k-1}^0 =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-k-1} C_{n-2-j}^{n-k-1-j} = C_{n-1}^{n-k-1} = C_{n-1}^{k}.$$

Теорема доказана.

Теорема 6 Количество биномиальных чисел равной длины $r = n-k+q_0$, содержащих $n-k$ нулей и $q_0 \le k - 1$ единиц, равно

$$N_{q_0} = C_{n-k-q_0-1}^{q_0}. \qquad (11)$$

Доказательство. Так как длины биномиальных чисел рассматриваемого класса $r = n - k + q_0$ и в их конце стоят нули, то общее число двоичных биномиальных чисел при заданном q_0 должно определяться числом сочетаний $n - k - 1$ нулей или q_0 единиц из $k-1$ элементов:

$$N_{q_0} = C_{r-1}^{n-k-1} = C_{r-1}^{q_0} = C_{n-k+q_0-1}^{q_0}.$$

Теорема доказана.

Следствие. При $q_0 = k - 1$ длина $r = n - k + k - 1 = n - 1$ достигает максимального значения и, следовательно,

$$N_{q_0} = N_{k-1} = C_{n-2}^{k-1}. \qquad (12)$$

Теорема 7 Количество биномиальных чисел, содержащих в конце ноль,

$$N_{q_0} = C_{n-1}^{k-1}. \qquad (13)$$

Доказательство. Суммируя N_{q_0} по всем возможным $q_0 = 0,1,..., k$-1, получим следующее количество биномиальных чисел, содержащих в конце единицу:

$$N_0 = \sum_{q_0=0}^{k-1} N_{q_0} = \sum_{q_0=0}^{k-1} C_{n-k+q_0-1}^{q_0} = C_{n-2}^{k-1} + ... + C_{n-k}^{1} + C_{n-k-1}^{0} = \sum_{j=0}^{k-1} C_{n-2-j}^{k-1-j} = C_{n-1}^{k-1}.$$

Теорема доказана.

Теорема 8 Количество биномиальных чисел, задаваемых ограничениями (2, 3) и (4, 5),

$$N = C_n^k. \qquad (14)$$

Доказательство. Так как $N = N_1 + N_0$, то, подставив вместо N_0 и N_1 их значения из (7) и (10), получим

$$N = N_1 + N_0 = C_{n-1}^{k} + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k.$$

Теорема доказана.

Следствие. Так как количество всех биномиальных чисел равно C_n^k, то и их диапазон **P** равен также этому числу:

$$P = C_n^k. \qquad (15)$$

Полученные выше результаты показывают, что часть биномиальных чисел имеет разную длину, и, следовательно, образуемый ими код является неравномерным. Для того чтобы такие числа можно было однозначно декодировать, необходимо, чтобы задаваемое биномиальной системой счисления множество биномиальных чисел было префиксным.

Требование префиксности состоит в том, чтобы ни одна кодовая комбинация префиксного кода не была началом другой.

Теорема 9 Биномиальный код является префиксным.

Доказательство. Из теоремы 3 следует, что множество биномиальных чисел разбито на два больших класса, один из которых содержит k единиц и $l < n - k$ нулей, а другой - $n - k$ нулей и $q_0 < k$ единиц.

Так как числа первого класса содержат k единиц, а большие или равные по длине числа второго класса содержат $q_0 < k$ единиц, то последние обязательно будут содержать хотя бы один нуль против одной из единиц меньших или равных им чисел первого класса. Поэтому ни одно число, меньшее или равное числам второго класса, не будет их началом, и соответственно требование префиксности для этого случая будет выполнено.

Так как числа второго класса содержат $n - k$ нулей, то большие от них числа первого класса, содержащие $l < n - k$ нулей, обязательно будут содержать хотя бы одну единицу против одного из нулей меньших чисел второго класса. Следовательно, требование префиксности в этом случае для меньших чисел второго класса также будет выполнено.

А так как никаких других вариантов сравнения чисел первого и второго классов не имеется, то свойство префиксности для всех чисел из разных классов соблюдено.

Из теоремы 4 следует, что первый класс биномиальных чисел, содержащий k единиц, в свою очередь разбивается на $n - k$ подмножеств, содержащих биномиальные числа равной длины с $l = 0, 1, . . . , n - k - 1$ нулями. Входящие в эти подмножества числа представляют собой сочетания k единиц из их длин $r = k + l$. Как известно, для сочетаний требование префиксности всегда выполняется. Поэтому числа, входящие в подмножества, обладают взаимным свойством префиксности.

Так как в соответствии со следствием теоремы 3 в конце биномиальных чисел, содержащих k единиц, стоит единица, а количество единиц в числе равно k, то биномиальные числа в каждом подмножестве первого класса в своей начальной (префиксной) части будут содержать, как минимум, на одну единицу меньше по сравнению с количеством единиц в числах других подмножеств этого же класса меньшей длины.

Учитывая, что в рассматриваемом случае отсутствуют подмножества с одинаковой длиной $r = k + l$ биномиальных чисел, приходим к выводу, что свойство префиксности соблюдается для всех чисел, принадлежащих к разным подмножествам первого класса. А так как внутри подмножеств, как показано выше, биномиальные числа также обладают свойством префиксности, то можно утверждать, что все числа первого класса обладают свойством префиксности.

Из теоремы 6 следует, что второй класс биномиальных чисел, содержащих $n - k$ нулей и $q_0 < k$ единиц, разбивается на k подмножеств, содержащих $q_0 = 0, 1, \ldots, k - 1$ единиц. Входящие в эти подмножества числа представляют собой сочетание k единиц из их длин $r = n - k + q_0$, и, следовательно, они обладают свойством префиксности.

Так как в соответствии со следствием теоремы 3 в конце биномиальных чисел, содержащих $n - k$ нулей, стоит ноль, а количество нулей в числе равно $n - k$, то биномиальные числа в каждом подмножестве второго класса в своей префиксной части будут содержать хотя бы на один нуль меньше по сравнению с количеством нулей в числах других подмножеств этого же класса меньшей длины.

Так как во втором классе, как и в первом, отсутствуют подмножества с одинаковой длиной $r = n - k + q_0$ биномиальных чисел, то свойство префиксности выполняется для всех чисел, принадлежащих к разным подмножествам второго класса. Учитывая, что внутри подмножеств свойство префиксности также выполняется, то это свойство распространяется на все биномиальные числа второго класса.

А так как выше в доказательстве данной теоремы было показано, что числа первого и второго классов также обладают свойством префиксности, то можно утверждать, что все биномиальные числа, задаваемые ограничениями (2, 3), (4, 5) обладают свойством префиксности.

Теорема доказана.

Продолжение следует.

SUMMARY

The theory of binomial number system with binary alphabet is stated. Here the series of the important theorems and their consequences allowing to solve the binomial number problems and to construct specialized number binomial devices are proved.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисенко А.А. Система счисления с "биномиальным" основанием и двоичным алфавитом. Деп. рук. N 909-82. ВИНИТИ, 1982. - 6 с.
2. Борисенко А.А. Методы синтеза информационных систем на основе позиционных чисел с неоднородной структурой. Дис... докт. техн. наук. - Харьков, 1991.- 355 с.

Поступила в редколлегию 23 сентября 1998 г.