УДК 621.391.1

О НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕННЫХ КЛАССИФИКАЦИОННЫХ ПРИЗНАКАХ ПОЗИЦИОННЫХ СИСТЕМ СЧИСЛЕНИЯ

А.А.Борисенко, проф.

Развитие математики неразрывно связано с системами счисления, которые в своем развитии прошли сложный путь от простейших непозиционных систем через пальцевой счет и числа совокупности до современных позиционных систем счисления.

Число по своей природе двойственно. С одной стороны, оно определяет количество, а с другой - порядок расположения элементов в множествах. Количество является абстракцией от свойств множества и представляется числом содержащихся в нем элементов. На этой идее основан подход Кантора к определению числа. Оно представляет то общее, что имеют равномощные множества независимо от их природы. Порядковые свойства чисел исследует теория порядковых чисел, основанная на аксиомах Пеано. Они обосновывают возможность порядкового счета элементов с помощью чисел.

К системам счисления предъявляется ряд требований, среди которых наиболее важными являются требования однозначности, конечности, эффективности, возможности сравнения чисел между собой по величине, выполнения над числами арифметических и логических действий. От удачного или неудачного выбора системы счисления зависит эффективность ее применения для практических нужд математики.

Исторически первыми возникли непозиционные системы счисления. В их основе лежит количественный подход к определению числа. Для определенных количеств придумывались особые знаки-числа, которыми в дальнейшем пользовались для получения других чисел.

Когда количество используемых чисел ограничивалось несколькими десятками, то такое кодирование устраивало практику, но с ростом ряда чисел появилась потребность в более сложных системах счисления, позволяющих решать задачу кодирования чисел и, что особенно важно, выполнять над ними арифметические и логические операции.

Позиционные системы счисления появились в Европе относительно недавно, в XIII веке. Их принесли из Индии арабские завоеватели. История их создания теряется в прошлом и на сегодня имеется немного достоверных сведений о них.

Уверенно можно утверждать лишь то, что позиционные системы счисления произвели революцию в мышлении и практической деятельности человека и что создавало их практически все человечество в течение нескольких тысячелетий.

Первыми позиционными системами счисления, получившими распространение на практике, была пятеричная и затем десятичная системы счисления. После появились двоичная, восьмеричная, двенадцатеричная и другие системы счисления, основанные на одном из чисел натурального ряда. Такие системы счисления названы естественными.

Разработка более сложных позиционных систем счисления началась во второй половине XX века после появления цифровой техники. Они использовались в основном при построении специализированных вычислителей, систем связи и управления, кодирующих и декодирующих устройств с целью получения более высокой эффективности этой техники.

При этом возникла задача исследования общих принципов позиционного счета, чтобы на этой основе произвести классификацию позиционных систем счисления, исследовать их новые классы и разработать новые методы построения.

Каждая позиционная система счисления характеризуется древовидной структурой, которая создается в процессе последовательных разбиений некоторого конечного множества элементов $Q=\{q_1, q_2, \dots, q_k\}$ по шагам $j=1, 2, \dots, n$ на подмножества до получения в каждом из них одного элемента.

Признаки $i=0, 1, \dots, K$ подмножеств, получаемых в том или ином разбиении, называются цифрами.

Наибольшее множество цифр среди всех возможных разбиений называется алфавитом системы счисления $A=(0, 1, \dots, K_{max})$, где K_{max} - наибольшая цифра разбиения с наибольшим количеством подмножеств.

Последовательность цифр

$$X=(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n), \ x_j \in A,$$

которая в процессе разбиений однозначным образом кодирует один из элементов множества Q, называется числом.

Число, функция или какое-либо условие, по которому происходят разбиения в системе счисления, называется ее основанием.

Число n шагов последовательных разбиений исходного множества Q до получения подмножества, состоящего из одного элемента, называется разрядностью числа, а номер $r=n-j$ - его разрядом.

Представленную выше последовательность цифр чисел, получаемых по шагам разбиений, можно с помощью равенства $r=n-j$ представить в виде последовательности цифр, расположенных по разрядам:

$$X=x_{n-1}\, x_{n-2} \dots x_r \dots x_0, \ x_r \in A.$$

Количество M элементов в разбиваемом множестве Q называется диапазоном представимых в данной позиционной системе счисления чисел.

Количество элементов в подмножестве, получаемом в том или ином разбиении, называется весом, соответствующей этому подмножеству цифре в данном разбиении.

Количество цифр в числе называется его длиной.

Равную длину числа имеют только тогда, когда подмножества, получаемые на каждом шаге разбиений, содержат одинаковое число элементов. Это условие имеет место для десятичной, двоичной, восьмеричной и других естественных систем счисления.

Системы счисления с равной длиной относятся к классу равномерных кодов.

Однако в общем случае, когда получаемые в процессе разбиения подмножества содержат разное количество элементов, длины чисел будут различными. Причем ни одно число в этом случае не может быть префиксом другого. Это следует из того, что последняя цифра каждого числа кодирует подмножество, содержащее один элемент, и соответственно дальнейшее разбиение этих подмножеств невозможно. А раз это так, то продолжение числа отсутствует, и, значит, оно не может быть началом никакого другого числа.

Системы счисления с различной длиной чисел относятся к неравномерным (префиксным) кодам.

Для естественных систем счисления, как уже отмечалось выше, наблюдается постоянство числа подмножеств в разбиениях. Поэтому они являются равномерными кодами.

Более сложным ограничением на число подмножеств будет требование постоянства числа подмножеств в разбиениях в пределах одного их шага. При этом устанавливается функциональная связь между номером шага j и числом подмножеств в разбиениях этого шага.

Веса цифр, принадлежащих к одному разряду, в этом случае равны между собой.

Числа для систем счисления с такими ограничениями имеют, как и для естественных, равную длину.

Системы счисления, при построении которых число подмножеств в разбиениях зависит только от номера их шага,назовем однородными.

Примером такой системы счисления является факториальная и в более общем случае - система счисления со смешанным основанием или полиадическая [1,2].

Еще более сложным ограничением на количества подмножеств в разбиениях будет зависимость как от шага j разбиения, так и от значений предшествующих цифр в числе. В результате число подмножеств, получаемых в пределах одного шага разбиения, в общем случае будет различным. В этом случае кодирование чисел будет неравномерным (префиксным).

Системы счисления с неравномерным кодированием назовем неоднородными.

Их характерным признаком будет разная длина принадлежащих им чисел. Примером неоднородных систем счисления являются биномиальные [3].

Однородные и неоднородные системы счисления, в качестве оснований которых выбраны комбинаторные соотношения, назовем комбинаторными.

Примером комбинаторных систем счисления будут упоминавшиеся ранее факториальные системы счисления, основанные на факториале, и биномиальные, использующие в своей основе биномиальные коэффициенты.

Наиболее сложными ограничениями на количество подмножеств в разбиениях являются числа, полученные случайным образом, например, с помощью генератора случайных чисел. Числа в таких системах счисления будут являться неоднородными.

Назовем такие системы счисления табличными.

Таким образом, позиционные системы счисления по признаку длин входящих в них чисел подразделяются на два больших класса - однородные с равной длиной и неоднородные с неравной длиной чисел. Однородные, в свою очередь, подразделяются на естественные, комбинаторные с равной длиной чисел и со смешанным основанием, а неоднородные - на комбинаторные с неравной длиной чисел и табличные.

Все позиционные системы счисления без исключений могут быть представлены в виде деревьев разбиений, вершины которых отображают разбиваемые подмножества, а ветви представляют цифры, кодирующие подмножества, получаемые после разбиения. При этом последовательности цифр образуют числа позиционных систем счисления.

SUMMARY

Cjmmjn characteristics of positional arithmetic systems, presented as trees, are examined on the basis of structure analysis. Generalised classification of the mentioned systems is offered. There are similar and nonsimilar arithmetic systems distinguished, which are different in the length of belonging them figures.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика/Пер. с англ. - Изд-во Мир. - М.: 1980. - 476 с.
2. Поспелов А.Д. Арифметические основы вычислительных машин дискретного действия: Учеб. пособие. - М.: Высшая школа, 1970. - 308 с.
3. Борисенко А.А. Системы счисления и ЭВМ/Вісник Сумського державного університету, 1996. - N 6. - С. 72-75.

Поступила в редколлегию 23 сентября 1998 г.