УДК 537.624

# ДИНАМІКА МАГНІТНОГО МОМЕНТУ НАНОЧАСТИНКИ В ОСЦИЛЮВАЛЬНОМУ МАГНІТНОМУ ПОЛІ

***В.Ф. Нефедченко, канд. фіз.-мат. наук;***
***А.М. Юнда, канд. фіз.-мат. наук***
*Сумський державний університет, вул. Р.-Корсакова, 2 , Суми, 40007*
*E-mail*

*На основі оберненого рівняння Фоккера-Планка, яке описує стохастичну динаміку магнітного моменту дрібних магнітних частинок, розроблено метод знаходження середнього часу термоіндукованої переорієнтації магнітного моменту одноосної наночастинки в осцилювальному полі.*

## ВСТУП

Дрібнодисперсні магнетики є одними із найцікавіших об'єктів дослідження фізики магнітних матеріалів. Інтерес до цих об'єктів обумовлений насамперед тим, що їх незвичайні, а часто й унікальні властивості визначають характеристики пристроїв для записування і зчитування інформації, ферорідин, пігментів барвників та інше. Головна властивість дрібнодисперсних магнетиків полягає в тому, що ефективні магнітні моменти дрібних магнітних частинок, які складають ці магнетики, під дією флуктуацій теплового магнітного поля можуть переорієнтовуватися між рівноважними напрямками, які визначаються повною магнітною енергією частинки. Стохастична динаміка магнітного моменту дрібних магнітних частинок описується за допомогою математичного методу теорії випадкових неперервних марковських процесів, в основі якого лежить пряме рівняння Фоккера-Планка. Цей метод, як правило, потребує розв'язання рівняння Фоккера-Планка, і не завжди приводить до отримання точних результатів для статистичних характеристик динаміки магнітного моменту дрібних магнітних частинок. Однак з теорії випадкових процесів добре відомо, що поряд з прямим існує й обернене рівняння Фоккера-Планка, яке також повністю описує стохастичну динаміку магнітного моменту дрібних магнітних частинок.

## 1 МОДЕЛЬ І ОСНОВНІ РІВНЯННЯ

Розглянемо однодоменну феромагнітну частинку магнітний момент $\mathbf{m} = \mathbf{m}(t)$ якої взаємодіє з рівноважним термостатом. Припустимо, що дія термостата на магнітний момент поділена на дві частини: тертя та теплове магнітне поле $\mathbf{h} = \mathbf{h}(t)$. Згідно з [1] такий розділ можливий, якщо характерна частота $\omega_T$ теплового магнітного поля суттєво перевищує характерні частоти $\omega_n$ макроскопічної еволюції $\mathbf{m}$. У цьому наближенні можемо описати стохастичну динаміку магнітного моменту рівнянням прецесії, в якому в ефективне магнітне поле $\mathbf{H}_{eff}$, діюче на $\mathbf{m}$, включено теплове магнітне поле $\mathbf{h}$. Якщо релаксаційний доданок має форму Ландау-Лифшиця [2] (відзначимо, що згідно з умовою поділу дії термостата на дві частини, теплове поле $\mathbf{h}$ не повинно бути включено у релаксаційний доданок), то стохастичне рівняння для $\mathbf{m}$ запишеться у такому вигляді:

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -\gamma \mathbf{m} \times \left(\mathbf{H}_{eff} + \mathbf{h}\right) - \frac{\lambda\gamma}{m} \mathbf{m} \times \mathbf{m} \times \mathbf{H}_{eff} , \qquad (1)$$

де $\gamma$ $(> 0)$ – гіромагнітне відношення; $\mathbf{H}_{eff} = -\partial W / \partial \mathbf{m}$; $W$ – магнітна енергія частки; $\lambda$ – параметр релаксації; $m = |\mathbf{m}|$.

Оскільки $\omega_T >> \omega_n$, будемо розглядати теплове магнітне поле $\mathbf{h} = (h_x, h_y, h_z)$ як гаусівський білий шум, який визначається співвідношеннями:

$$< h_i >= 0, \quad < h_i(t) h_j(t') >= 2\Delta \delta_{ij} \delta(t - t') \qquad (i, j = x, y, z) , \qquad (2)$$

де $\Delta$ – інтенсивність білого шуму; $\delta_{ij}$ – символ Кронекера; $\delta(t)$ – дельта функція Дірака; $x$, $y$, $z$ – осі декартової системи координат; кутові дужки позначають усереднення за реалізаціями $\mathbf{h}$.

## 2 СЕРЕДНІЙ ЧАС ТЕРМОІНДУКОВАНОЇ ПЕРЕОРІЄНТАЦІЇ

Розглядаючи одноосьову феромагнітну частинку, стохастична динаміка магнітного моменту якої описується рівнями (1) та (2), повна магнітна енергія частинки має вигляд

$$W(\psi_1, t) = -m \cos\psi_1 (H - H_0 \cos\omega t) - \frac{\beta_1}{2} \frac{m^2}{V} \cos^2 \psi_1 , \qquad (3)$$

де $H$ – амплітуда стаціонарної компоненти; $H_0$ – амплітуда осцилювальної компоненти; $\omega$ – частота поля.

Запишемо для щільності ймовірності переходу $P = P(\psi_1, \psi_2, t \mid \psi_1', \psi_2', \tau)$ вектора $\mathbf{m}$ з початкового положення в кінцеве пряме

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} = &-\frac{\partial}{\partial \psi_1}\left(\gamma^2 \Delta \operatorname{cotan}\psi_1 + F_1(\psi_1, \psi_2, t)\right) P - \frac{\partial}{\partial \psi_2}\left(F_2(\psi_1, \psi_2, t) P\right) + \\ &+ \gamma^2 \Delta \frac{\partial^2 P}{\partial \psi_1^2} + \frac{\gamma^2 \Delta}{\sin^2 \psi_1} \frac{\partial^2 P}{\partial \psi_2^2} \end{aligned} \qquad (4)$$

та обернене

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \tau} = &-\left(\gamma^2 \Delta \operatorname{cotan}\psi_1' + F_1(\psi_1', \psi_2', \tau)\right) \frac{\partial P}{\partial \psi_1'} - F_2(\psi_1', \psi_2', \tau) \frac{\partial P}{\partial \psi_2'} - \\ &- \gamma^2 \Delta \frac{\partial^2 P}{\partial \psi_1'^2} - \frac{\gamma^2 \Delta}{\sin^2 \psi_1'} \frac{\partial^2 P}{\partial \psi_2'^2} \end{aligned} \qquad (5)$$

рівняння Фоккера-Планка, де функції $F_1$, $F_2$ відповідно подаються виразами:

$$F_1(\psi_1, \psi_2) = -\frac{\gamma}{m \sin\psi_1} \left[\frac{\partial}{\partial \psi_2} + \lambda \sin\psi_1 \frac{\partial}{\partial \psi_1}\right] W ,$$

$$F_2(\psi_1,\psi_2) = \frac{\gamma}{m\sin\psi_1}\left[\frac{\partial}{\partial\psi_1} - \lambda\frac{1}{\sin\psi_1}\frac{\partial}{\partial\psi_2}\right]W .$$

Визначимо через $R = R(\psi_1',\psi_2',\tau)$ середній час, необхідний моменту $\mathbf{m}$ для того, щоб вперше досягти конічної поверхні, рівняння якої визначається з умови максимальності енергії (3) і має такий вигляд:

$$\theta(t) = \arccos(-b(1-\varepsilon\cos\omega t)) , \tag{6}$$

де $b = HV/\beta\mu$ , $b_0 = H_0V/\beta\mu$ , $\varepsilon = H_0/H$ .

Нехай

$$G(\psi_1',\psi_2',t,\tau) = \int_0^{2\pi} d\psi_2 \int_0^{\theta(t)} P(\psi_1,\psi_2,t|\psi_1',\psi_2',\tau)d\psi_1 \tag{7}$$

є ймовірність того, що магнітний момент $\mathbf{m}$, який має в початковий момент часу $\tau$ кут $\psi_1'(0 \le \psi_1' < \theta(\tau))$, у момент часу $t$ має кут $\psi_1$, значення якого лежить в інтервалі від 0 до $\theta(t)$. Тоді функцію $R$ визначимо як

$$R(\psi_1',\psi_2',\tau) = \int_\tau^\infty G(\psi_1',\psi_2',t,\tau)dt . \tag{8}$$

Одержимо на підставі оберненого рівняння Фоккера-Планка (4) диференціальне рівняння для функції $R$. Для цього спочатку проінтегруємо обидві частини рівняння (4) у межах, зазначених у (7). У результаті отримаємо

$$\frac{\partial G(\psi_1',\psi_2',t,\tau)}{\partial\tau} = -\left(\gamma^2\Delta\,\mathrm{cotan}\,\psi_1' + F_1(\psi_1',\psi_2',\tau)\right)\frac{\partial G(\psi_1',\psi_2',t,\tau)}{\partial\psi_1'} -$$
$$-F_2(\psi_1',\psi_2',\tau)\frac{\partial G(\psi_1',\psi_2',t,\tau)}{\partial\psi_2'} - \gamma^2\Delta\frac{\partial^2 G(\psi_1',\psi_2',t,\tau)}{\partial\psi_1'^2} - \frac{\gamma^2\Delta}{\sin^2\psi_1'}\frac{\partial^2 G(\psi_1',\psi_2',t,\tau)}{\partial\psi_2'^2} . \tag{9}$$

Далі, після інтегрування одержаного рівняння по $t$, із урахуванням визначення (8), маємо

$$\int_\tau^\infty \frac{\partial}{\partial\tau}G(\psi_1',\psi_2',t,\tau)dt = -\left(\gamma^2\Delta\,\mathrm{cotan}\,\psi_1' + F_1(\psi_1',\psi_2',\tau)\right)\frac{\partial R(\psi_1',\psi_2',\tau)}{\partial\psi_1'} -$$
$$-F_2(\psi_1',\psi_2',\tau)\frac{\partial R(\psi_1',\psi_2',\tau)}{\partial\psi_2'} - \gamma^2\Delta\frac{\partial^2 R(\psi_1',\psi_2',\tau)}{\partial\psi_1'^2} - \frac{\gamma^2\Delta}{\sin^2\psi_1'}\frac{\partial^2 R(\psi_1',\psi_2',\tau)}{\partial\psi_2'^2} . \tag{10}$$

Оскільки права частина рівняння (10) залежить від $\tau$ , то заміна $\frac{\partial}{\partial\tau}$ на $-\frac{\partial}{\partial t}$ неможлива. Для того щоб виразити ліву частину рівняння (10) через функцію $R(\psi_1',\psi_2',\tau)$, запишемо спочатку, з врахуванням визначення (8), вираз для похідної $\frac{\partial R(\psi_1',\psi_2',\tau)}{\partial\tau}$. Цей вираз має такий вигляд:

$$\frac{\partial R(\psi_1',\psi_2',\tau)}{\partial\tau} = -G(\psi_1',\psi_2',\tau,\tau) + \int_\tau^\infty \frac{\partial}{\partial\tau} G(\psi_1',\psi_2',t,\tau)dt\,. \tag{11}$$

Звідки, враховуючи що $G(\psi_1',\psi_2',\tau,\tau) = 1$, отримаємо

$$\int_\tau^\infty \frac{\partial}{\partial\tau} G(\psi_1',\psi_2',t,\tau)dt = \frac{\partial R(\psi_1',\psi_2',\tau)}{\partial\tau} + 1\,. \tag{12}$$

Підставляючи вираз (12) в (10) для функції $R(\psi_1',\psi_2',\tau)$, одержимо таке диференціальне рівняння:

$$\frac{\partial}{\partial\tau} R(\psi_1',\psi_2',\tau) = -1 - \left(\gamma^2\Delta\,\mathrm{cotan}\,\psi_1' + F_1(\psi_1',\psi_2',\tau)\right)\frac{\partial R(\psi_1',\psi_2',\tau)}{\partial\psi_1'} -$$
$$-F_2(\psi_1',\psi_2',\tau)\frac{\partial R(\psi_1',\psi_2',\tau)}{\partial\psi_2'} - \gamma^2\Delta\frac{\partial^2 R(\psi_1',\psi_2',\tau)}{\partial\psi_1'^2} - \frac{\gamma^2\Delta}{\sin^2\psi_1'}\frac{\partial^2 R(\psi_1',\psi_2',\tau)}{\partial\psi_2'^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau} R(\psi_1',\tau) = -1 + \left[\frac{\gamma\lambda}{\mu}\frac{\partial W(\psi_1',\tau)}{\partial\psi_1'} - \gamma^2\Delta\cot an\psi_1'\right]\frac{\partial R(\psi_1',\tau)}{\partial\psi_1'} - \gamma^2\Delta\frac{\partial^2}{\partial\psi_1'^2}R(\psi_1',\tau)\;\;. \tag{13}$$

Відзначимо, що рівняння (13) є більш загальним в тому плані, що воно справедливе для будь-якої енергії частинки (навіть якщо вона явно залежить від часу).

Відповідно до фізичного змісту функції $R$ розв'язки рівняння повинні бути скінченними та задовольняти граничні умови:

$$R(\theta(\tau),\tau) = 0\;, \qquad \frac{\partial}{\partial\psi_1'}R(\psi_1',\tau)\Big|_{\psi_1'=0} = 0\,. \tag{14}$$

Оскільки повна магнітна енергія (3) частинки не залежить від кута азимутального $\psi_2'$, то вводячи до розгляду функцію

$$R(\psi_1',\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R(\psi_1',\psi_2',\tau)d\psi_2'$$

перепишемо рівняння (13) у такому вигляді:

$$\frac{\partial}{\partial\tau} R(\psi_1',\tau) = -1 + \left[\frac{\gamma\lambda}{\mu}\frac{\partial W(\psi_1',\tau)}{\partial\psi_1'} - \gamma^2\Delta\cot an\psi_1'\right]\frac{\partial R(\psi_1',\tau)}{\partial\psi_1'} - \gamma^2\Delta\frac{\partial^2}{\partial\psi_1'^2}R(\psi_1',\tau)\,. \tag{15}$$

Рівняння (15) дуже складне в плані розв'язання. Спробуємо лінеаризувати рівняння (15). Для цього зробимо ряд припущень. Будемо припускати, що частота осцилюючого поля $\omega$ набагато менша, ніж характерна частота зміни параметрів системи, тобто частоти зміни напрямку $\mathbf{m}$, яка в даному випадку має порядок $1/R$. У цьому наближенні можна подати функцію $R$ у вигляді суми усередненого $R_0(\psi_1')$ та осцилюючого $R_1(\psi_1',\tau)$ доданків [3, 4]

$$R(\psi_1',\tau)=R_0(\psi_1')+R_1(\psi_1',\tau)\,. \tag{16}$$

Причому

$$<R(\psi_1',\tau)>=R_0(\psi_1')\,. \tag{17}$$

Тут кутові дужки позначають усереднення по $\tau$ .

Далі, підставляючи розкладання (16) в (13), після усереднення по $\tau$ отримаємо відповідні рівняння для усередненої та осцилювальної компонент

$$\frac{\mathrm{d}^2R_0(\psi_1')}{\mathrm{d}\psi_1'^2}+\left[\cot\mathrm{an}\psi_1'-2a\sin\psi_1'(b+\cos\psi_1')\right]\frac{\mathrm{d}R_0(\psi_1')}{\mathrm{d}\psi_1'}-$$
$$-<2ab\varepsilon\sin\psi_1'\cos\omega\tau\frac{\partial R_1(\psi_1',\tau)}{\partial\psi_1'}>=-ca \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2R_1(\psi_1',\tau)}{\partial\psi_1'^2}+\left[\cot\mathrm{an}\psi_1'-2a\sin\psi_1'(b+\cos\psi_1')\right]\frac{\partial R_1(\psi_1',\tau)}{\partial\psi_1'}-$$
$$-2ab\varepsilon\sin\psi_1'\cos\omega\tau\frac{\mathrm{d}R_0(\psi_1')}{\mathrm{d}\psi_1'}=-ac\frac{\partial R_1(\psi_1',\tau)}{\partial\tau} \tag{19}$$

Осцилювальну компоненту можна подати у вигляді розкладання:

$$R_1(\psi_1',\tau)=R_{11}(\psi_1')\cos\omega\tau+R_{12}(\psi_1')\sin\omega\tau\,. \tag{20}$$

Підставляючи дане розкладання у рівняння (18), (19) та проводячи усереднення в (18) одержимо таку систему лінеаризованих рівнянь:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2R_{12}}{\mathrm{d}\psi_1'^2}+[\cot\mathrm{an}\psi_1'-2a\sin\psi_1'(b+\cos\psi_1')]\dfrac{\mathrm{d}R_{12}}{\mathrm{d}\psi_1'}=ac\omega R_{11},\\ \dfrac{\mathrm{d}^2R_{11}}{\mathrm{d}\psi_1'^2}+[\cot\mathrm{an}\psi_1'-2a\sin\psi_1'(b+\cos\psi_1')]\dfrac{\mathrm{d}R_{11}}{\mathrm{d}\psi_1'}=-ac\omega R_{12}+2ab\varepsilon\sin\psi_1'\dfrac{\mathrm{d}R_0}{\mathrm{d}\psi_1'},\\ \dfrac{\mathrm{d}^2R_0}{\mathrm{d}\psi_1'^2}+[\cot\mathrm{an}\psi_1'-2a\sin\psi_1'(b+\cos\psi_1')]\dfrac{\mathrm{d}R_0}{\mathrm{d}\psi_1'}=-ac+2ab\varepsilon\sin\psi_1'\dfrac{\mathrm{d}R_{11}}{\mathrm{d}\psi_1'},\end{cases} \tag{21}$$

яка повністю визначає середній час $R$ . Відзначимо, що система (21) значно простіша, ніж вихідне рівняння (13).

Тепер у випадку $\varepsilon<<1$ запишемо граничні умови до системи рівнянь (21). У цьому наближенні рівняння конічної поверхні (6) можна записати у вигляді

$$\theta(t)=\theta_0+\theta_1(t)\,, \tag{22}$$

де $\theta_0=\arccos(-b)$ ; $\theta_1=b\varepsilon(1-b^2)^{-1/2}\cos\omega\tau$ .

Враховуючи (22) та (14), отримаємо такі граничні умови:

$$\left.\frac{\mathrm{d}R_0}{\mathrm{d}\psi_1'}\right|_{\psi_1'=0}=0\,,\qquad R_0(\theta_0)=-\frac{1}{4}\frac{b^2\varepsilon^2}{1-b^2}\left.\frac{\mathrm{d}R_0}{\mathrm{d}\psi_1'}\right|_{\theta_0}-\frac{1}{2}\frac{b\varepsilon}{\sqrt{1-b^2}}\left.\frac{\mathrm{d}R_{11}}{\mathrm{d}\psi_1'}\right|_{\theta_0}\,;$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}R_{11}}{\mathrm{d}\psi_1'}\right|_{\psi_1'=0} = 0\,, \qquad R_{11}(\theta_0) = -\frac{b\varepsilon}{\sqrt{1-b^2}}\left.\frac{\mathrm{d}R_0}{\mathrm{d}\psi_1'}\right|_{\theta_0}\,; \tag{23}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}R_{12}}{\mathrm{d}\psi_1'}\right|_{\psi_1'=0} = 0\,, \qquad R_{12}(\theta_0) = 0\,.$$

Розв'язуючи систему рівнянь (21) з граничними умовами (23) можна отримати середній час термоіндукованої переорієнтації магнітного моменту, яке в розглянутому випадку визначається як $t_t = 2R_0(0)$.

## ВИСНОВКИ

У даній роботі розроблено новий метод знаходження середнього часу термоіндукованої переорієнтації магнітного моменту одноосьової наночастинки в осцилювальному полі.

Отримані результати справедливі для систем слабовзаємодіючих або невзаємодіючих дрібних магнітних частинок.

## SUMMARY


DYNAMIC OF MAGNATIC OF SINGLE DOMAIN PARTICLE OF AN EXTERNAL OSCILLATING MAGNETIC FIELD


***V.F. Nefedchenko, A.M. Yunda***
*Sumy State University, R.-Korsakov str., 2, Sumy, 40007*


*Dynamic of magnetic moment of single domain particles was examined at presence of an external oscillating field. Method of finding an average time thermalinduced reorientation magnetic moment of uniaxial nanoparticle in an oscillating field was developed.*


## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. Ахиезер А.И., Пелетминский С.В. Методы статистической физики. – М.: Наука, 1977. – 368 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 626 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. – М.: Наука, 1973. – 208 с.
4. Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ. – 1951. – Т.21, № 5. – С. 588–597.



*Надійшла до редакції 21 серпня 2006 р.*