

Ю.Я. Тарасевич

**Ймовірнісні розрахунки
на міцність та вібрацію**

Навчальний посібник

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Суми
Сумський державний університет
2010

УДК 621.81:519.21 (075.8)
ББК 34.41
Т 19

Рецензенти:

В.І. Гнесін – доктор технічних наук, професор Інституту проблем машинобудування НАН України;
В.Б. Тарельник – доктор технічних наук, професор Сумського національного аграрного університету

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів
(лист №1/11-7602 від 10.08.2010 р.)*

Тарасевич Ю.Я.

Т 19 Ймовірнісні розрахунки на міцність та вібрацію: навч. посіб.
/ Ю.Я. Тарасевич. – Суми: Сумський державний університет, 2010. – 203 с.
ISBN 978-966-657-332-5

Посібник розрахований на студентів спеціальності „Динаміка та міцність”, а також студентів, аспірантів та інженерів, що займаються ймовірнісними розрахунками механічних систем.

Викладені прикладні методи розрахунку механічних систем під дією випадкових впливів. Особлива увага приділена побудові математичних моделей та отриманню ймовірнісних характеристик на виході за заданими ймовірнісними характеристиками процесу на вході. Наведені приклади, що полегшують вивчення та освоєння матеріалу.

УДК 621.81:519.21 (075.8)
ББК 34.41

ISBN 978-966-657-332-5

© Тарасевич Ю.Я., 2010
© Сумський державний
університет, 2010

ЗМІСТ

Вступ	5
Розділ 1	
Основні положення теорії ймовірностей і теорії випадкових процесів	
1.1. Випадкові величини та їх характеристики.....	6
1.2. Невипадкові функції випадкових величин.....	11
1.3 Випадкові процеси та їх характеристики.....	16
1.3.1. Функція розподілу ймовірності та щільність імовірності випадкового процесу.....	17
1.3.2. Ймовірнісні характеристики випадкових процесів.....	19
1.4. Комплексні випадкові процеси.....	25
1.5. Визначення характеристик випадкової функції з досліду.....	27
1.6. Лінійні перетворення випадкових процесів.....	29
1.7. Стаціонарні випадкові процеси.....	34
1.8. Спектральне представлення стаціонарного випадкового процесу.....	38
Розділ 2	
Основи ймовірнісних розрахунків на міцність	
2.1. Основні поняття та постановка завдання.....	52
2.2. Методи визначення ймовірнісних характеристик параметрів стану.....	65
2.3. Імовірність неруйнування для випадку, коли характеристики міцності матеріалу – детерміновані величини	72
2.3.1. Розтягнення стиснення стрижнів сталого поперечного перерізу.....	76
2.3.2. Скрут стрижнів сталого перерізу	80
2.3.3. Вигин балки	82
2.3.4. Позацентрове розтягнення-стиснення.....	84
2.4. Імовірність неруйнування для випадку, коли несуча здатність - випадкова величина.....	86
2.5. Зв'язок між коефіцієнтом запасу та ймовірністю неруйнування..	92
2.6. Статистичні запаси міцності	98
2.7. Імовірність неруйнування елементів при різних законах розподілу діючих та граничних напружень	100
2.8. Проектування елементів машин та конструкцій заданої надійності.....	106

Розділ 3

Випадкові коливання механічних систем

3.1. Вільні коливання	114
3.1.1. Вільні коливання систем з одним ступенем вільності.....	114
3.1.2. Вільні коливання систем зі скінченим числом ступенів вільності.....	117
3.2. Визначення ймовірнісних характеристик частот вільних загасаючих коливань.....	123
3.3. Вимушені стаціонарні випадкові коливання.....	130
3.4. Вимушені нестаціонарні випадкові коливання систем з одним ступенем вільності.....	134
3.5. Вимушені нестаціонарні випадкові коливання систем зі скінченим числом ступенів вільності.....	140
3.6. Ймовірнісні розрахунки нелінійних систем.....	143
3.6.1. Метод малого параметра.....	144
3.6.2. Метод статистичної лінеаризації.....	146
3.7. Випадкові коливання систем з розподіленими параметрами.....	150

Розділ 4

Визначення міцності елементів конструкцій методами теорії викидів

4.1. Постановка завдання.....	155
4.2. Викиди випадкового процесу за заданий рівень.....	159
4.3. Визначення ймовірності безвідмовної роботи високонадійних систем.....	167
4.4. Розподіл екстремумів випадкового процесу.....	178
4.5. Аналіз нормальних стаціонарних процесів.....	181
4.6. Аналіз квазістаціонарних нормальних процесів.....	185
Додаток А	190
Список використаної літератури	199
Предметний покажчик	201

ВСТУП

Цей посібник присвячений аналізу міцності механічних систем при випадкових впливах.

Використання теорії ймовірності та теорії випадкових процесів при розрахунку механічних систем є необхідною умовою для створення надійних методів проектування довговічних й ефективних конструкцій, причому кількість задач, де потрібне застосування методів імовірнісного розрахунку, постійно зростає.

Посібник містить чотири розділи. У першому розділі наведені основні відомості з теорії ймовірності та теорії випадкових процесів, необхідні для розрахунку на міцність, надійність і вібрацію елементів конструкцій.

Другий розділ присвячений основним методам розрахунку на міцність з урахуванням випадковості властивостей матеріалів. Висвітлено методи розрахунку за граничними напруженнями, які можуть бути як детермінованими, так і випадковими величинами. Також наведено методи визначення параметрів конструкції, зокрема розмірів її поперечного перерізу, що відповідають заданій нормативній надійності.

Серед прикладних задач теорії випадкових процесів особливе місце займають задачі, пов'язані з аналізом випадкових коливань механічних систем. У третьому розділі наведений розрахунок коливальних систем як зі скінченим числом ступенів вільності, так і з розподіленими параметрами, розв'язок яких може бути одержаний у замкненому аналітичному вигляді.

У четвертому розділі наведені основні підходи до визначення міцності, в основу яких покладена теорія викидів випадкових процесів. Під мірою надійності в цьому випадку розуміють імовірність відсутності викиду випадкової функції за межі області допустимих станів.

Автор сподівається, що книга буде корисною для всіх, хто розпочинає вивчення методів імовірнісного розрахунку механічних систем із метою їх застосування у своїй практичній діяльності.

Розділ 1

Основні положення теорії ймовірностей і теорії випадкових процесів

Силові фактори, що діють на реальні системи, як правило, багатократно відтворюються або розгортають свої властивості у часі. Конструкційні матеріали виготовляються у масовій кількості, тому можна вичерпно дослідити їх механічні властивості. З'єднання, що використовуються у конструкціях, також, як правило, є масовими елементами або ж можуть бути досліджені у кількості, достатній для встановлення статистичних характеристик. Таким чином, поведінка будь-якої системи може бути визначена випадковими факторами масового характеру, для кожного з яких можливе статистичне розуміння ймовірності і є справедливим закон великих чисел. Теорія ймовірності описує закономірності, притаманні саме випадковим подіям масового характеру. Тому в цьому розділі наведені основні положення теорії ймовірностей і теорії випадкових процесів, які можуть бути корисними при ймовірнісних розрахунках систем та використані у подальших розділах.

1.1. Випадкові величини та їх характеристики

Основою для математичного опису випадкових процесів і потоків подій є математичний опис випадкових величин.

На практиці для опису випадкових величин найчастіше використовують:

1. Закони розподілу випадкової величини.
2. Числові характеристики випадкової величини.
3. Характеристичні функції.

Випадкові величини поділяють на дискретні та безперервні.

Якщо кількість значень випадкової величини, визначених в інтервалі $[a, b]$, є зліченною (але не обов'язково скінченною), то випадкова величина називається дискретною. Якщо ж випадкова величина набуває значення у будь-якій точці визначеного інтервалу, то вона називається безперервною випадковою величиною.

Законом розподілу випадкової величини називають залежність між можливим значенням випадкової величини та ймовірністю появи цього значення. Для випадкової величини функція розподілу дорівнює ймовірності того, що значення випадкової величини будуть меншими, ніж x :

$$F(x) = P(X < x).$$

Причому $F(x)$ є неспадною функцією, а $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$, тобто $0 \leq F(x) \leq 1$.

Функцію розподілу $F(x)$ називають також інтегральною функцією розподілу, або інтегральним законом розподілу.

Відмінна від нуля ймовірність може бути пов'язана лише з потраплянням величини у заданий, можливо і досить вузький, інтервал:

$$P(x < X < x + \Delta x).$$

Очевидно, що якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то $P(x < X < x + \Delta x) \rightarrow 0$. Позначимо $f(x)$ границю відношення

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} = f(x). \quad (1.1)$$

Функція $f(x)$ називається **щільністю розподілу випадкової величини**. З формули (1.1) випливає нерівність, що справедлива для малих величин:

$$P(x < X < x + \Delta x) \cong f(x)\Delta x. \quad (1.2)$$

Для безперервної випадкової величини $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$.

Ймовірність потрапляння випадкової величини до інтервалу $[a, b]$ дорівнює

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (2.23)$$

Щільність ймовірності задовольняє умову нормування

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \quad (2.24)$$

При емпіричному визначенні закону розподілу випадкової величини умова нормування щільності ймовірності є основним критерієм перевірки його коректності.

Закони розподілу дають вичерпний опис випадкової величини. Але для їх експериментального визначення необхідно мати великий обсяг даних. У більшості практичних випадків для опису випадкових величин використовують наближені методи за допомогою числових характеристик.

До числових характеристик належать: початкові та центральні моменти k -го порядку, мода, медіана, коефіцієнти варіації і форми тощо.

Початковим моментом k -го порядку називається не випадкова величина, що визначається за такою формулою:

$$\alpha_k = M[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx, \quad (1.3)$$

де $M[\]$ - операція знаходження математичного сподівання.

З початкових моментів найчастіше використовується **математичне сподівання**, що характеризує середнє значення досліджуваної випадкової величини та визначає положення піка кривої розподілу:

$$\alpha_1 = M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = m_x .$$

Центральні моменти k -го порядку визначаються за формулою

$$\mu_k = M\left[X^k\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (X - m_x)^k f(x)dx, \quad (1.4)$$

де $\overset{o}{X} = X - m_x$ - **центрована випадкова величина**.

Найчастіше використовують другий, третій та четвертий центральні моменти розподілу. Так $\mu_2 = D_x$ - **дисперсія випадкової величини**, що характеризує розкид її значень відносно математичного сподівання; $\mu_3 = M\left[\overset{o}{X}^3\right]$ - характеризує симетричність закону розподілу;

$\mu_4 = M\left[\overset{o}{X}^4\right]$ - характеризує гостроту піка закону розподілу. Для

зручності замість μ_3 та μ_4 вводять **коефіцієнт асиметрії** $\gamma = \frac{\mu_3}{S_x^3}$ та

коефіцієнт ексцесу $e = \frac{\mu_4}{S_x^4} - 3$.

Мода – найбільш імовірне значення випадкової величини X , яке визначають із розв'язання рівняння $f'_x(x) = 0$.

Медіана визначається з рівняння $F(x) = P(x < Me) = 0,5$ і ділить площу під кривою розподілу навпіл.

Коефіцієнт варіації дорівнює $\nu_x = \frac{S_x}{m_x}$.

Чим більше моментів випадкової величини використовують при розрахунках, тим точніший отримують опис.

Замість щільності ймовірності може бути використана **характеристична функція**, що визначається співвідношенням (перетворенням Фур'є):

$$\varphi(q) = M\left[e^{iqx}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iqx} f(x)dx .$$

У курсах математичного аналізу доведено, що якщо функція $\varphi(q)$ виражається через $f(x)$ за допомогою перетворення Фур'є, то, у свою чергу, функція $f(x)$ виражається через $\varphi(q)$ за допомогою так званого оберненого перетворення Фур'є:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iqx} \varphi(q) dq.$$

Отже, характеристична функція випадкової величини також є її повною імовірнісною характеристикою. Знаючи характеристичну функцію, можна визначити початкові та центральні моменти випадкової величини:

$$\alpha_k = \frac{1}{i^k} \varphi^{(k)}(0), \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\mu_k = \frac{1}{i^k} \left(e^{-iqm_x} \varphi(q) \right)_{q=0}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Для позитивних випадкових величин часто використовують перетворення Лапласа щільності розподілу, що визначається співвідношенням

$$f^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

і перетворенням Лапласа функції розподілу

$$F^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} F(x) dx.$$

З останніх співвідношень випливає, що

$$F^*(s) = \frac{1}{s} f^*(s).$$

Найбільш уживані розподіли та їх статистичні характеристики наведені в таблиці А.1.

Більшість досліджуваних фізичних величин є не скалярними, а векторними (сили, швидкість, прискорення і т.д.), тому введемо поняття n -вимірного випадкового вектора. Випадковим вектором (випадковою векторною величиною) називається сукупність випадкових величин

$$\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Для ймовірнісного опису випадкового вектора також використовують два основних способи: за допомогою функцій сумісного розподілу та за допомогою числових характеристик (моментних функцій).

Сумісна функція розподілу компонент випадкового вектора \vec{X} визначає ймовірність сукупності випадкових подій $X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n$, тобто

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P \begin{pmatrix} X_1 < x_1 \\ X_2 < x_2 \\ \dots \\ X_n < x_n \end{pmatrix} = P(\vec{X} < \vec{x}).$$

Сумісна щільність ймовірності компонент випадкового вектора \vec{X} визначається аналогічно щільності ймовірності випадкової величини:

$$f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}.$$

За фізичним змістом сумісна щільність ймовірності є питомою ймовірністю потрапляння кінця випадкового вектора до елементарного об'єму. Тому ймовірність знаходження випадкового вектора \vec{X} у деякому об'ємі дорівнює

$$P(\vec{X} \in V) = \int_V \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Сумісна щільність ймовірності компонент випадкового вектора має ті самі властивості, що й сумісна щільність ймовірності випадкової величини.

Для повної характеристики випадкового вектора необхідно задати сумісну щільність усіх його компонентів або ж визначити відповідні моменти якомога високого порядку.

Моментні функції компонент випадкового вектора \vec{X} визначаються аналогічно до моментних функцій випадкової величини. Так, вектор математичних сподівань (вектор початкових моментів першого порядку) дорівнює

$$M[\vec{X}] = \begin{pmatrix} M[X_1] \\ M[X_2] \\ \dots \\ M[X_n] \end{pmatrix}.$$

Початкові моменти другого порядку складатимуть квадратну матрицю розміром $n \times n$, компоненти якої визначаються за формулою

$$M[X_j X_k] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_j x_k f(x_j, x_k) dx_j dx_k, \quad j, k = 1, 2, \dots, n$$

де $f(x_j, x_k)$ - сумісна щільність ймовірності j -ї та k -ї компонент випадкового вектора. Моментом третього порядку відповідатиме кубічна матриця і т.д.

Математичне сподівання, а також змішані центровані моменти другого порядку є найбільш інформативними характеристиками

випадкового вектора, оскільки з підвищенням порядку моментної функції її інформативність значно зменшується.

Змішані центровані моменти другого порядку також називаються **кореляційними моментами** й утворюють кореляційну матрицю розміру $n \times n$:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix},$$

де

$$K_{jk} = M \left[\overset{o}{X}_j \overset{o}{X}_k \right] = M \left[(X_j - M[X_j])(X_k - M[X_k]) \right] = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (X_j - M[X_j])(X_k - M[X_k]) f(x_j, x_k) dx_j dx_k. \quad j, k = 1, \dots, n$$

Кореляційна матриця має такі властивості:

1. Її компоненти є парними функціями

$$[K_{jk}] = [K_{kj}].$$

2. Матриця $[K]$ є позитивно визначеною, тобто її визначник та всі головні мінори є додатними величинами.

3. Діагональні елементи матриці $[K]$ дорівнюють дисперсіям відповідних компонент випадкового вектора:

$$K_{jj} = M \left[\overset{o}{X}_j^2 \right] = D_j \geq 0.$$

1.2. Невипадкові функції випадкових величин

Під час дослідження механічних систем, у яких існує взаємно однозначна детермінована функціональна залежність між векторами вхідних та вихідних параметрів, компоненти яких є випадковими величинами або квазістатичними випадковими функціями (так званих вироджених систем¹), важливим є питання про визначення функції розподілу та щільності ймовірностей функції від випадкових величин. Прикладом такої системи є балка під дією зосереджених сил, які є випадковими величинами або ж прикладаються квазістатично. Тому спочатку розв'яжемо таку задачу в загальному випадку. Нехай є безперервна випадкова величина X з відомою щільністю розподілу $f(x)$. Випадкова величина Y пов'язана з X функціональною залежністю

¹ Визначення поняття «вироджена» система наведено у п. 2.1

$$Y = \varphi(X),$$

де φ - детерміністична функція.

Необхідно знайти закон розподілу випадкової величини Y .

Розглянемо випадок, коли функція $\varphi(X)$ строго монотонна, безперервна і диференційована в інтервалі (a, b) всіх можливих значень випадкової величини X . За визначенням функція розподілу

$$G(y) = P(Y < y).$$

Якщо функція $\varphi(x)$ монотонно зростає на всій ділянці можливих значень випадкової величини X (рис.1.1а), то подія $(Y < y)$ еквівалентна події $(X < \psi(y))$, де $\psi(y) = x$ - функція, обернена функції $\varphi(x) = y$. Зі строгої монотонності $\varphi(x)$ випливає однозначність функції $\psi(y)$. Отже,

$$G(y) = P(Y < y) = P(X < \psi(y)) = \int_a^{\psi(y)} f(x) dx.$$

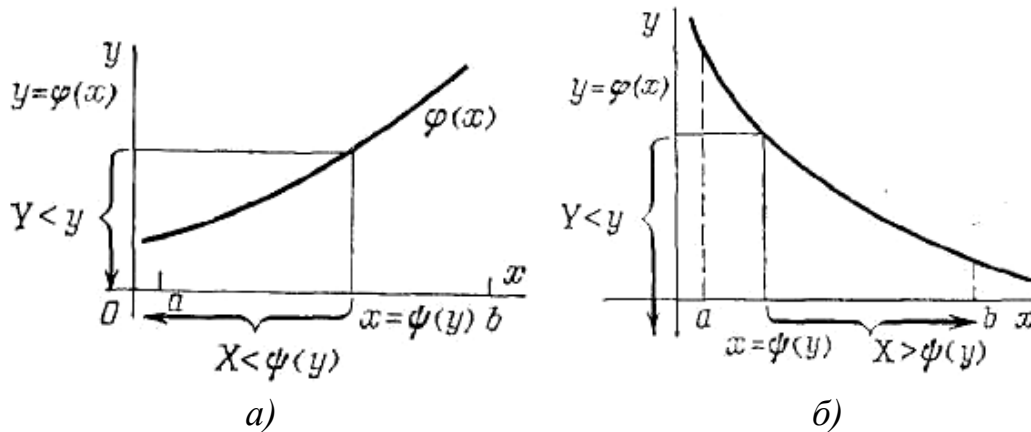


Рисунок 1.1

Використовуючи правило Лейбніца диференціювання інтеграла зі змінними межами (а саме: похідна інтеграла за такою змінною дорівнює значенню підінтегральної функції від верхньої межі, помноженому на похідну від верхньої межі мінус значення підінтегральної функції від нижньої межі, помножене на похідну від нижньої межі), одержимо щільність розподілу випадкової величини Y :

$$g(y) = \frac{dG(y)}{dy} = f(\psi(x)) \frac{d\psi(y)}{dy} = f(\psi(y)) \psi'(y).$$

Якщо функція $\varphi(x)$ на ділянці (a, b) можливих значень випадкової величини X монотонно спадає (рис.1.1 б), то подія $(Y < y)$ еквівалентна події $(X > \psi(y))$. Отже, у цьому випадку

$$G(y) = \int_{\psi(y)}^b f(x) dx,$$

а щільність розподілу

$$g(y) = \frac{dG(y)}{dy} = -f(\psi(y))\psi'(y).$$

Оскільки щільність не може бути від'ємною, то обидва ці випадки можна об'єднати однією формулою:

$$g(y) = f(\psi(y))|\psi'(y)|. \quad (1.5)$$

Розглянемо тепер випадок, коли функція $y = \varphi(x)$ на ділянці (a, b) не монотонна (рис. 1.2). У цьому випадку обернена функція $x = \psi(y)$ неоднозначна.

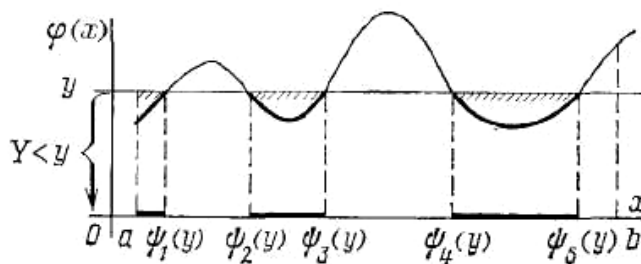


Рисунок 1.2

Число значень оберненої функції $\psi(y)$ залежить від поточного значення y . Позначимо ці значення $\psi_1(y), \psi_2(y), \dots, \psi_i(y), \dots$. Подія $Y < y$ рівносильна потраплянню випадкової величини X до одного із відрізків, що не перекриваються, відмічених жирною лінією на рис.1.2, де відповідна частина кривої $y = \varphi(x)$ лежить нижче, ніж пряма y . Останній відрізок може закінчуватися точкою b , може й однією з точок $\psi_i(y)$ (це неістотно). Потрапляння точки X у ці відрізки – події несумісні, а за правилом додавання ймовірності

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y < y) = P(X \in (a, \psi_1(y))) + P(X \in (\psi_2(y), \psi_3(y))) + \\ &\quad + P(X \in (\psi_4(y), \psi_5(y))) + \dots = \\ &= \int_a^{\psi_1(y)} f(x) dx + \int_{\psi_2(y)}^{\psi_3(y)} f(x) dx + \int_{\psi_4(y)}^{\psi_5(y)} f(x) dx + \dots \end{aligned}$$

Ураховуючи правило Лейбніца, одержимо

$$g(y) = f(\psi_1(y))\psi_1'(y) - f(a)\frac{da}{dy} + f(\psi_3(y))\psi_3'(y) - f(\psi_2(y))\psi_2'(y) + \dots \quad (1.6)$$

У тих точках, де $\varphi(x)$, перетинаючи пряму y , спадає, похідна $\psi'(y) < 0$; вона ж входить до суми (1.6) зі знаком мінус; у тих точках, де

$\varphi(x)$ зростає, $\psi'(y) > 0$. Похідні сталих a і b дорівнюють нулю, тому байдуже, чи фігурують точки a і b у вигляді початку або кінця якої-небудь ділянки. Всі члени у формулі (1.6) додатні, тому її можна подати у вигляді

$$g(y) = \sum_i f(\psi_i(y)) |\psi'_i(y)|. \quad (1.7)$$

Приклад. Контактні напруження на робочих поверхнях зубів шестерні прямо пропорційні кореню квадратному обертового моменту T , тобто $\sigma_H = b\sqrt{T}$. Визначити щільність розподілу контактних напружень, якщо момент є випадковою величиною, що має нормальний закон розподілу з параметрами m_T і D_T .

За даними таблиці А1 щільність розподілу моменту як випадкової нормально розподіленої величини визначається таким виразом:

$$f_1(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_T}} \exp\left[-\frac{(T - m_T)^2}{2D_T}\right].$$

Знайдемо обернену функцію $\sigma_H = b\sqrt{T}$:

$$T = \frac{\sigma_H^2}{b^2}.$$

Тоді за формулою (1.7) щільність розподілу контактних напружень

$$f_2(\sigma_H) = f_1\left(\frac{\sigma_H^2}{b^2}\right) \left| \frac{dT}{d\sigma_H} \right| = \frac{2\sigma_H}{b^2 \sqrt{2\pi D_T}} \exp\left[-\frac{(\sigma_H^2 - b^2 m_T)^2}{2b^4 D_T}\right].$$

Якщо для системи випадкових величин x_1, x_2, \dots, x_n з відомою сумісною щільністю ймовірностей $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ відомі функціональні залежності

$$y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

які допускають розв'язання відносно будь-яких m аргументів

$$x_i = \psi_i(y_1, y_2, \dots, y_m, x_{m+1}, \dots, x_n),$$

причому ψ_i - однозначні диференційовані функції, то щільність імовірності $f(y_1, \dots, y_m)$ визначається за такою формулою:

$$f(y_1, \dots, y_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int f(\psi_1, \dots, \psi_m, x_{m+1}, \dots, x_n) \left| \frac{\partial \psi}{\partial y} \right| dx_{m+1} \dots dx_n, \quad (1.8)$$

де якобіан перетворення дорівнює

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial y} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \psi_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}.$$

При $m=n$ цей вираз збігається з (1.7), якщо під y розуміти вектор.

Для випадку двох аргументів

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f[\psi(y, x_2), x_2] \left| \frac{\partial \psi}{\partial y} \right| dx_2. \quad (1.9)$$

Формули (1.8) і (1.9) можна узагальнити і на випадок, коли функції ψ_i є неоднозначними, аналогічно тому, як це було зроблено під час виведення формули (1.6).

Задача. Напрацювання до відмови є функцією діючих напружень σ і виражається залежністю (рівняння кривої втомленості в імовірнісному аспекті)

$$\lg t = b \lg \sigma + US_0 + A,$$

де b, S_0, A - сталі, що визначаються за результатами дослідів на втому; U - нормована випадкова величина, розподілена за нормальним законом з параметрами $m_u = 0$ і $S_u = 1$.

Визначити щільність розподілу напруження $\lg \sigma$, якщо напрацювання до відмови є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом з параметрами $m_{\lg \sigma}$ і $S_{\lg \sigma}$.

Для випадку, коли за умовами задачі достатньо визначити тільки числові характеристики випадкової величини $Y = \varphi(X)$, вони можуть бути знайдені без визначення закону розподілу випадкової величини Y . Зокрема

$$m_y = M[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx;$$

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x) - m_y]^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x)]^2 f(x) dx - m_y^2.$$

Аналогічно визначаються початкові й центральні моменти будь-якого порядку:

$$m_{yk} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)^k f(x) dx,$$

$$\mu_{yk} = \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x) - m_y)^k f(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.10)$$

Формули (1.10) також можуть бути узагальнені на будь-яку кількість випадкових аргументів: якщо $Y = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ то

$$m_{yk} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)^k f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad (1.11)$$

$$\mu_{yk} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) - m_y)^k f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad k = 1, 2, \dots$$

1.3. Випадкові процеси та їх характеристики

Випадковим процесом називається така функція $X(t)$, значення якої при кожному даному значенні аргументу t є випадковою величиною. Наприклад, випадковим процесом є тяга двигуна, яка залежить від часу і для кожного значення часу є випадковою величиною, амплітуди і частоти вимушених коливань роторних систем та ін. Якщо випадкова функція залежить від просторових координат $X(z, y, x)$ (або багатомірного параметра $X(r_i)$, $i=1, 2, \dots, n$), то таку функцію називають **випадковим просторовим полем**. Число незалежних параметрів r_i визначається розміром простору, на якому задане це випадкове поле. Випадкові просторові поля - це поля температури, тиску, магнітні поля, гравітаційні та ін. У більш загальному випадку, коли, крім просторових координат, є залежність і від часу $X(r_i, t)$, то таку функцію називають **випадковим просторово-часовим полем**. Випадкові просторово-часові поля у тривимірному просторі найчастіше зустрічаються у фізиці, під час дослідження хвильових та квантових процесів.

Конкретні значення, яких набуває випадкова функція у результаті дослідження, називаються **реалізацією випадкового процесу** (функції) $x_i(t)$ (рис. 1.3). Кожна реалізація є не випадковою функцією. Тобто у результаті кожного дослідження випадкова функція $X(t)$ перетворюється на не випадкову функцію. Зафіксуємо тепер деяке значення аргументу t , очевидно, що в цьому разі випадкова функція перетвориться на випадкову величину, яка називається **перерізом випадкової функції**, що відповідає даному t . Для випадкових процесів можна побудувати характеристики ймовірності, що аналогічні ймовірнісним характеристикам випадкових величин. На відміну від числових характеристик випадкових величин, що є певними числами, характеристики випадкових функцій у загальному випадку – не випадкові функції.

Необхідно зазначити, що при статистичному методі вивчення випадкових функцій досліджують не властивості кожної з функцій, що

характеризують процес, а властивості всієї множини функцій у цілому. Це дає можливість при аналізі руху механічної системи, що перебуває під впливом випадкових збуджень, досліджувати її поведінку не відносно якого-небудь одного впливу, а відносно цілої сукупності можливих випадкових впливів.

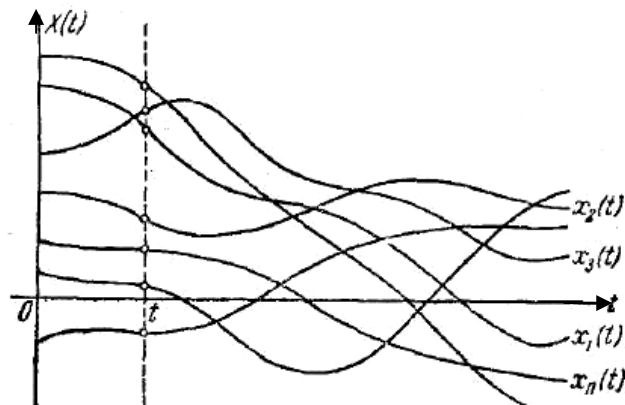


Рисунок 1.3 - Графічне зображення випадкового процесу $X(t)$

Так само, як і випадкові величини, випадкові функції можуть бути описані за допомогою законів розподілу (функції розподілу чи густини розподілу) або за допомогою їх числових характеристик (моментних функцій). Крім зазначених вище способів, випадкові функції можуть бути також описані за допомогою спектральної густини.

1.3.1. Функція розподілу ймовірності та щільність ймовірності випадкового процесу

Маючи у своєму розпорядженні реалізації одного і того самого випадкового процесу, що спостерігається за одних і тих самих однорідних умов, які можна зіставити, можна встановити залежність деякої функції від часу $F(x,t)$, яка називається функцією розподілу ймовірності і яка повністю визначає випадковий процес у статистичному плані.

Нехай маємо N реалізацій випадкового процесу, виділимо з цих реалізацій також n_1 реалізацій, значення яких в заданий момент часу t_1 будуть менші, ніж деяке число x_1 . Тоді відносна частка таких реалізацій n_1/N при достатньо великому числі N прагнучиме до сталої величини й, очевидно, що це число визначає ймовірність того, що при $t=t_1$ значення випадкової функції $X(t)$ будуть не вищими x_1 , тобто

$$P[X(t_1) \leq x_1].$$

Ця ймовірність залежить від фіксованого значення t_1 і значення x_1 , тобто можна ввести в розгляд функцію

$$F_1(x_1, t_1) = P[X(t_1) \leq x_1],$$

яка називається **одноточковою (першою інтегральною) функцією розподілу ймовірності випадкового процесу**.

Виділимо тепер з об'єму реалізацій N число реалізацій n_2 таких, які у момент часу $t = t_1$ менше x_1 , а у момент часу $t = t_2$ менше x_2 . Відношення n_2 / N при $N \rightarrow \infty$ прагнучиме до $const$ і буде ймовірністю того, що при $t = t_1$ значення випадкового процесу буде меншим x_1 і при $t = t_2$ - менше x_2 , тоді функція

$$F_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = P[X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2]$$

буде **двоточковою (другою інтегральною) функцією розподілу ймовірності випадкового процесу**.

Аналогічно можна побудувати нескінченну множину інтегральних функцій розподілу. За визначенням n -вимірної функція розподілу ймовірності характеризує ймовірність того, що випадковий процес у будь-які можливі моменти часу t_1, \dots, t_n набуде відповідно значення, що не перевищують рівні x_1, \dots, x_n .

Якщо інтегральні функції мають похідні по змінних $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, то ці похідні будуть визначати щільність розподілу:

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}.$$

Щільність розподілу дає уявлення про розподіл випадкового процесу у фіксовані моменти часу.

Одноточкова щільність імовірності може бути інтерпретована як питома ймовірність появи випадкової величини x_1 в момент часу t_1 . Двоточкова - появи двох випадкових величин x_1 і x_2 відповідно при t_1 і t_2 , і т.д. Тобто

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 = P \left(\begin{array}{l} x_1(t_1) < X(t_1) < x_1(t_1) + dx_1 \\ x_2(t_2) < X(t_2) < x_2(t_2) + dx_2 \end{array} \right).$$

Одноточкова та двоточкова щільності ймовірності не дають вичерпної інформації про поведінку випадкового процесу, але дозволяють визначити основні його моменти (математичне сподівання, дисперсію, кореляційну функцію та ін.). Для вичерпного опису випадкового процесу потрібно задати багатоточкові щільності ймовірності для якомога більшої кількості часових точок.

Сформулюємо основні властивості щільності ймовірності випадкового процесу.

1. За щільністю ймовірності випадкового процесу можна визначити функцію розподілу:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_n(y_1, y_2, \dots, y_n; t_1, t_2, \dots, t_n) dy_1 \dots dy_n.$$

2. Щільність розподілу – невід’ємна функція

$$f_n(x_1, x_2, \dots, t_1, \dots, t_n) \geq 0.$$

3. Щільність ймовірності задовольняє умову нормування

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n = 1.$$

4. Щільність ймовірності задовольняє умову узгодженості за будь-яким з її аргументів x_1, x_2, \dots, x_n , наприклад за x_j :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) dx_j = f_{n-j}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n), \quad (2.56)$$

або за будь-яким поєднанням аргументів x_j, x_{j+1}, \dots, x_k , наприклад

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) dx_3 dx_4, \dots, dx_n = f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) \quad (2.57)$$

і т.д.

1.3.2. Ймовірнісні характеристики випадкових процесів

Розглянемо переріз випадкового процесу $X(t)$ (під перерізом процесу розуміють значення випадкового процесу у фіксований момент часу t). У цьому перерізі маємо випадкову величину, для якої математичне сподівання (початковий момент першого порядку) – це функція часу

$$m_x(t) = M[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x, t) dx. \quad (1.12)$$

Математичним сподіванням випадкового процесу $X(t)$ називається не випадкова функція $m_x(t)$, яка при кожному значенні аргументу t дорівнює математичному сподіванню відповідного перерізу випадкового процесу.

За визначенням математичне сподівання випадкового процесу - це є деяка середня функція, біля якої різним чином варіюються реалізації випадкової функції. На рис. 1.4. тонкими лініями показані реалізації випадкової функції, жирною лінією – її математичне сподівання.

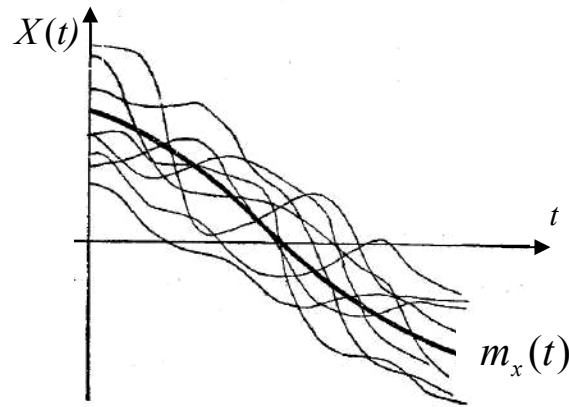


Рисунок 1.4 – До визначення математичного сподівання випадкової функції $X(t)$

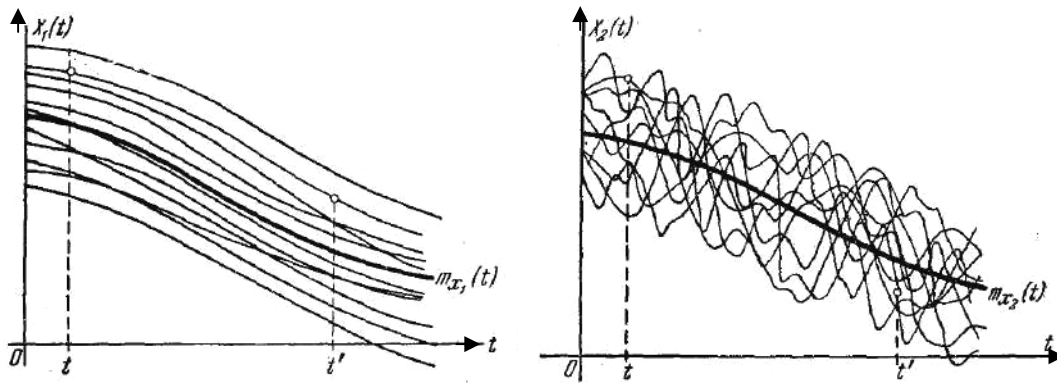
Дисперсією випадкового процесу називається його перший центральний момент

$$D_x(t) = M \left[\overset{o}{X}(t)^2 \right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x(t))^2 f_1(x, t) dx, \quad (1.13)$$

де $\overset{o}{X}(t) = X(t) - m_x(t)$ – центрований випадковий процес.

Середнє квадратичне відхилення $S_x(t) = \sqrt{D_x(t)}$. Дисперсія і середнє квадратичне відхилення характеризують ширину піка. Крива щільності розподілу тим гостріша і вища, чим менше S_x .

Математичне сподівання і дисперсія є дуже важливими характеристиками випадкового процесу, проте для повнішої характеристики вводиться ще одна не випадкова функція, що встановлює ступінь залежності між двома перерізами випадкового процесу, що належать до різних t . Щоб переконатися в цьому, розглянемо два випадкових процесу $X_1(t)$ і $X_2(t)$, наочно зображені сім'ями реалізацій на рис. 1.5. У випадкових процесів $X_1(t)$ і $X_2(t)$ приблизно однакові математичні сподівання і дисперсії; проте характер цих випадкових процесів різко відрізняється. Для випадкового процесу $X_1(t)$ характерна плавна, поступова зміна. Якщо, наприклад, у точці t випадковий процес $X_1(t)$ набув значення, яке помітно перевищує середнє, то з великою ймовірністю можна вважати, що і в точці t' він також набуде значення, більше середнього. Для випадкового процесу $X_2(t)$ характерна яскраво виражена залежність між її значеннями при різних t . Навпаки, випадковий процес $X_2(t)$ має різко коливальний характер з неправильними, хаотичними коливаннями. Для такого випадкового процесу характерне швидке загасання залежності між його значеннями в міру збільшення відстані за t між ними [6].

Рисунок 1.5 – Випадкові функції $X_1(t)$ і $X_2(t)$

Очевидно, внутрішня структура обох випадкових процесів абсолютно різна, але ця відмінність не вловлюється ні математичним сподіванням, ні дисперсією. Тому для її опису вводиться спеціальна характеристика – кореляційна функція.

Нехай є випадковий процес $X(t)$ (рис. 1.6); розглянемо два його перерізи, що належать до різних моментів часу t і t' , тобто дві випадкові величини $X(t)$ і $X(t')$. Очевидно, що при близьких значеннях t і t' величини $X(t)$ і $X(t')$ зв'язані тісною залежністю: якщо величина $X(t)$ набула якогось значення, то і величина $X(t')$ з великою імовірністю набуде значення, яке близьке до нього. Очевидно, що при збільшенні інтервалу між перетинами t, t' залежність величин $X(t)$ і $X(t')$ взагалі повинна спадати.

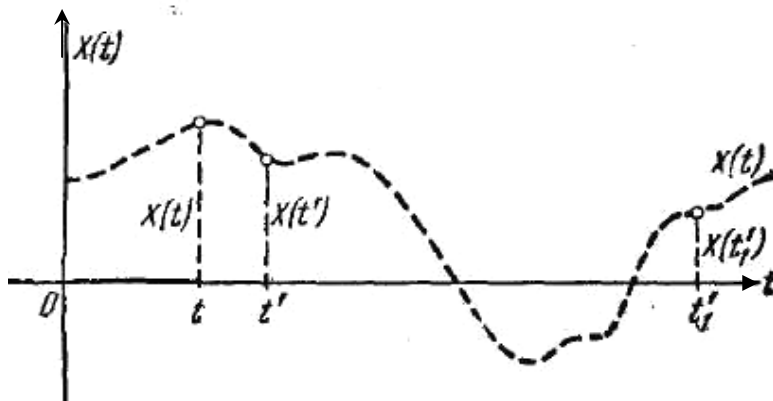


Рисунок 1.6

Ступінь залежності $X(t)$ і $X(t')$ може бути значною мірою охарактеризована їх другим центральним моментом, який є функцією двох аргументів t і t' . Ця функція і називається кореляційною функцією, яка визначається за формулою

$$K_x(t, t') = M \left[\overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{X}(t') \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_x(t_1))(x_2 - m_x(t_2)) f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2, \quad (1.14)$$

де $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t)$, $\overset{\circ}{X}(t') = X(t') - m_x(t')$ - центровані випадкові функції.

Основними властивостями кореляційної функції випадкового процесу є такі.

1. Кореляційна функція симетрична відносно своїх аргументів:

$$K_x(t, t') = K_x(t', t). \quad (1.15)$$

2. При $t = t'$

$$K_x(t, t') = M \left[\left(\overset{\circ}{X}(t) \right)^2 \right] = D_x(t) \geq 0 \quad (1.16)$$

кореляційна функція дорівнює дисперсії випадкової функції.

3. Кореляційна функція є спадною

$$\lim_{t-t' \rightarrow 0} K_x(t, t') = 0.$$

Таким чином, необхідність у дисперсії як окремій характеристиці випадкової функції відпадає: як основні характеристики випадкової функції достатньо розглядати її математичне сподівання і кореляційну функцію.

Якщо є два випадкові процеси $X(t)$, $Y(t)$ із середніми значеннями $m_x(t)$ і $m_y(t)$, статистично зв'язані між собою, то вводиться **взаємна кореляційна функція**, яка визначається за формулою

$$K_{xy}(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [X(t) - m_x(t)][Y(t') - m_y(t')] f(x, y, t, t') dx dy \quad (1.18)$$

або

$$K_{xy}(t, t') = M \left[\overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{Y}(t') \right]. \quad (1.19)$$

Взаємна кореляційна функція не задовольняє умову симетрії щодо своїх аргументів [24,25], тобто

$$K_{xy}(t, t') \neq K_{xy}(t', t),$$

але при одночасній перестановці моментів часу та індексів маємо

$$K_{xy}(t, t') = K_{yx}(t', t).$$

Якщо взаємна кореляційна функція K_{xy} тотожно не дорівнює

нулю, то випадкові функції X_1, X_2 називають **корельованими**; якщо ж тотожно дорівнює нулю, то такі функції називають **некорельованими**.

У прикладних задачах зручно використовувати коефіцієнт кореляції (нормовану кореляційну функцію)

$$r_x(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{S_x(t)S_x(t')} \quad (1.17)$$

Для двох випадкових процесів коефіцієнт кореляції

$$r_{xy}(t, t') = \frac{K_{xy}(t, t')}{S_x(t)S_y(t')}.$$

Причому $|r(t, t')| \leq 1$. Якщо $r = \pm 1$, то між випадковими процесами існує лінійна залежність із позитивним (від'ємним) кутовим коефіцієнтом.

Аналогічно (1.19) можна ввести кореляційну функцію (кореляційну матрицю) і коефіцієнт кореляції компонент випадкового вектора.

Приклад 1. Вимагається визначити нормовану кореляційну функцію, якщо випадкова функція $X(t) = Ae^{-\alpha t}$, де A - випадкова величина з відомим математичним сподіванням m_A і дисперсією D_A .

Математичне сподівання випадкової функції

$$m_x = M[Ae^{-\alpha t}] = e^{-\alpha t} \int_{-\infty}^{\infty} Af(A)dA = e^{-\alpha t} m_A.$$

Дисперсія

$$D_x(t) = M\left[\left(Ae^{-\alpha t} - m_A e^{-\alpha t}\right)^2\right] = e^{-2\alpha t} M\left[(A - m_A)^2\right] = e^{-2\alpha t} D_A.$$

Кореляційна функція випадкової функції $X(t)$

$$\begin{aligned} K_x(t, t') &= M\left[\left(Ae^{-\alpha t} - m_A e^{-\alpha t}\right)\left(Ae^{-\alpha t'} - m_A e^{-\alpha t'}\right)\right] = \\ &= e^{-\alpha t} e^{-\alpha t'} M\left[(A - m_A)^2\right] = e^{-\alpha(t+t')} D_A. \end{aligned}$$

Середні квадратичні відхилення для моментів часу t і t' визначаються за формулами

$$S_x(t) = \sqrt{D_x(t)} = S_A e^{-\alpha t}; \quad S_x(t') = S_A e^{-\alpha t'}.$$

Нормована кореляційна функція

$$r_x(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{S_x(t)S_x(t')} = \frac{D_A e^{-\alpha(t+t')}}{S_A^2 e^{-\alpha t} e^{-\alpha t'}} = 1.$$

Приклад 2. На рис. 1.7 показана балка, навантажена випадковими за величиною погонними моментами M_{x0} і M_{y0} з відомими характеристиками ймовірності $t_x, t_y, D_x, D_y, K_{xy}$. Потрібно знайти математичне сподівання і дисперсію максимального нормального напруження в довільному перерізі.

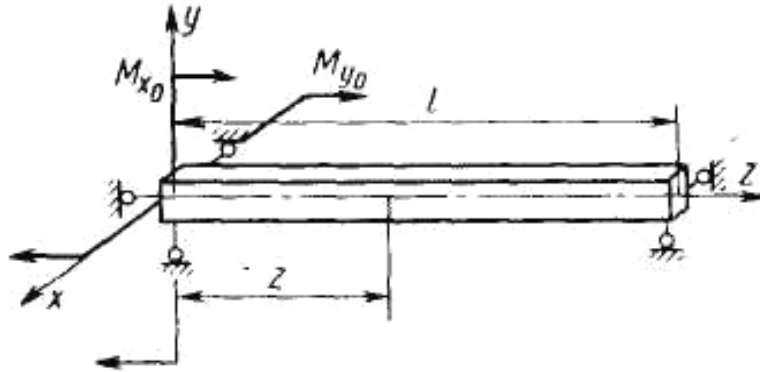


Рисунок 1.7 – Вигин балки випадковими за величиною моментами

Згинальні моменти в довільному перетині $M_x = M_{x0}(l - z)$, $M_y = M_{y0}(l - z)$. Максимальне нормальне напруження в довільному перерізі

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x y_1}{J_x} + \frac{M_y x_1}{J_y} = a_1 M_{x0}(l - z) + a_2 M_{y0}(l - z),$$

де x_1, y_1 - координати точки, максимально віддаленої від нейтральної лінії.

Математичне сподівання максимального нормального напруження

$$m_{\sigma} = a_1(l - z)m_{x0} + a_2(l - z)m_{y0}.$$

Кореляційна функція максимального нормального напруження

$$\begin{aligned} K_{\sigma}(z, z') &= M \left[(a_1 M_{x0} + a_2 M_{y0})^2 (l - z)(l - z') \right] = \\ &= (l - z)(l - z') \left[a_1^2 M \left[M_{x0}^2 \right] + 2a_1 a_2 M \left[M_{x0} M_{y0} \right] + a_2^2 M \left[M_{y0}^2 \right] \right] = \\ &= (l - z)(l - z') (a_1^2 D_{x0} + 2a_1 a_2 K_{xy} + a_2^2 D_{y0}). \end{aligned}$$

Дисперсія нормального напруження в довільному перерізі

$$D_{\sigma} = (l - z)^2 (a_1^2 D_{x0} + 2a_1 a_2 K_{xy} + a_2^2 D_{y0}).$$

Задача. Визначити кореляційну функцію випадкової функції $X(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$, де A і B - випадкові величини, для яких відомі математичне сподівання, дисперсія і взаємна кореляційна функція, причому $m_A = m_B = 0$.

1.4. Комплексні випадкові процеси

На практиці часто виявляється зручним записувати як самі випадкові процеси, так і їх характеристики не в дійсній, а в комплексній формі. У зв'язку з цим введемо визначення комплексної випадкової величини та комплексної випадкової функції (процесу).

Комплексною випадковою величиною називається випадкова величина вигляду

$$Z = X + iY,$$

де X, Y - дійсні випадкові величини.

Комплексну випадкову величину можна інтерпретувати як випадкову точку на площині xOy (рис.1.8).

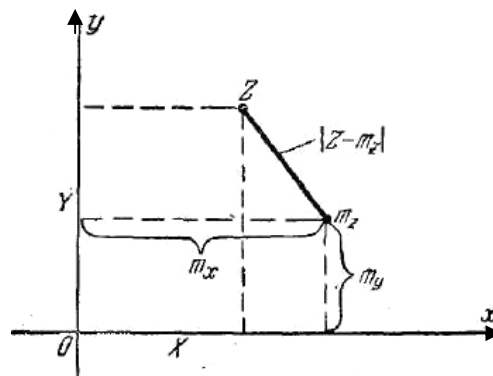


Рисунок 1.8 – Графічне зображення комплексної випадкової величини

Математичним сподіванням комплексної випадкової величини називається комплексне число

$$m_z = m_x + im_y. \quad (1.20)$$

Це є деяке середнє значення величини Z або, геометрично, середня точка m_z , навколо якої відбувається розсіювання випадкової точки Z .

Дисперсією комплексної величини називається математичне сподівання квадрата модуля відповідної центрованої величини:

$$D_z = M \left[\left| \overset{o}{Z} \right|^2 \right], \quad \overset{o}{Z} = Z - m_z. \quad (1.21)$$

Якщо виразити дисперсію комплексної випадкової величини через дисперсії її дійсної та уявної частин [7], то

$$D_z = D_x + D_y, \quad (1.22)$$

тобто дисперсія випадкової комплексної величини дорівнює сумі дисперсій її дійсної та уявної частин.

Перейдемо до визначення комплексного випадкового процесу та

його характеристик.

Комплексним випадковим процесом називається функція вигляду

$$Z(t) = X(t) + iY(t). \quad (1.23)$$

Математичне сподівання комплексного випадкового процесу визначається за формулою

$$m_z(t) = m_x(t) + im_y(t). \quad (1.24)$$

Дисперсія

$$D_z(t) = M \left[\left| \overset{\circ}{Z} \right|^2 \right], \quad (1.25)$$

або

$$D_z(t) = D_x(t) + D_y(t). \quad (1.26)$$

З визначення (1.26) випливає, що дисперсія комплексної випадкової функції дійсна і позитивна.

Кореляційна функція комплексної випадкової функції визначається як кореляційний момент її перерізів t і t' :

$$K_z(t, t') = M \left[\overset{\circ}{Z}(t) \overset{\circ}{Z}^*(t') \right], \quad (1.27)$$

де $\overset{\circ}{Z}^*(t') = \overset{\circ}{X}(t') - i\overset{\circ}{Y}(t')$ - комплексна величина, спряжена величині $\overset{\circ}{Z}(t')$. Тобто

$$\begin{aligned} K_z(t, t') = & M \left[(Z(t) - m_z(t))(Z^*(t') - m_z^*(t')) \right] = M \left[(X(t) - m_x(t))(X(t') - m_x(t')) + \right. \\ & \left. + (Y(t) - m_y(t))(Y(t') - m_y(t')) \right] - iM \left[(X(t) - m_x(t))(Y(t') - m_y(t')) - \right. \\ & \left. - (Y(t) - m_y(t))(X(t') - m_x(t')) \right] \end{aligned} \quad (1.28)$$

або

$$K_z(t, t') = K_x(t, t') + K_y(t, t') - i[R_{xy}(t, t') - R_{xy}(t', t)],$$

де $R_{xy}(t, t')$ - взаємна кореляційна функція випадкових функцій $X(t)$ і $Y(t)$ (дійсної та уявної частин випадкової функції).

З останнього виразу випливає, що не при будь-яких значеннях t та t' його уявна частина дорівнюватиме нулю. Для того щоб кореляційна функція комплексної випадкової функції була дійсною, необхідно, щоб функції $X(t)$ та $Y(t)$ були зв'язані особливими умовами.

У випадку, коли дійсна і уявна частини випадкової функції не є корельованими, остання формула набирає вигляду

$$K_z(t, t') = K_x(t, t') + K_y(t, t').$$

При одночасній перестановці аргументів та множників під знаком математичного сподівання в (1.28) отримаємо функцію, що є спряженою вихідній функції (властивість ермітовості):

$$K_z(t, t') = K_z^*(t', t). \quad (1.29)$$

Для випадку дійсної випадкової функції кореляційна функція також буде описуватися дійсним виразом, тому (1.29) набере вигляду (1.15)

Взаємна кореляційна функція для комплексних випадкових процесів

$$K_{xy}(t, t') = M \left[\overset{o}{X}_1(t) \overset{o}{X}_2^*(t') \right], \quad (1.30)$$

де $\overset{o}{X}_2^*$ - центрований комплексно спряжений випадковий процес.

Приклад. Знайти кореляційну функцію, якщо задана випадкова функція $X(t) = \sum_{j=1}^n A_j e^{i\omega_j t}$, де $A_j = A_{1j} + iA_{2j}$ - комплексна амплітуда.

Некорельовані випадкові величини A_{1j}, A_{2j} мають математичні сподівання, які дорівнюють нулю, та рівні між собою дисперсії.

Скористаємося формулою (1.27), тоді

$$K_x(t, t') = M \left[\left(\sum_{j=1}^n A_j e^{i\omega_j t} \right) \left(\sum_{k=1}^n A_k^* e^{-i\omega_k t'} \right) \right],$$

де $A_k^* = A_{1k} - iA_{2k}$.

Перетворивши, отримаємо

$$K_x(t, t') = \sum_{j=1}^n M \left[A_j A_j^* \right] e^{i(t-t')\omega_j},$$

$$M \left[A_j A_j^* \right] = D_{A_j} = 2D_j.$$

1.5. Визначення характеристик випадкової функції з дослідів

Нехай над випадковою функцією $X(t)$ виконано n незалежних дослідів (спостережень) і в результаті отримано n реалізацій випадкової функції (рис. 1.9).

Необхідно знайти оцінки для числових характеристик випадкової функції: її математичного сподівання $m_x(t)$, дисперсії $D_x(t)$ та кореляційної функції $K_x(t, t')$.

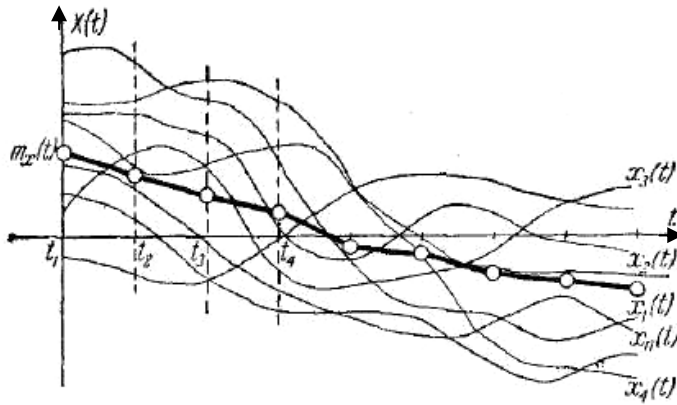


Рисунок 1.9 – Експериментально отримана випадкова функція $X(t)$

Для цього розглянемо ряд перерізів випадкової функції для моментів часу

$$t_1, t_2, \dots, t_m$$

та зареєструємо значення, що набула функція $X(t)$ в ці моменти часу. Кожному з моментів відповідатиме n значень випадкової функції.

Значення t_1, t_2, \dots, t_m , як правило, задаються рівновіддаленими; величина інтервалу між сусідніми значеннями вибирається залежно від виду експериментальних кривих так, щоб по вибраних точках можна було відновити основний хід кривих (реалізацій).

Зареєстровані значення $X(t)$ заносяться до таблиці, кожен рядок якої відповідає певній реалізації, а число стовпців дорівнює числу моментів часу (таблиця 1.1).

Отриманий матеріал є не що інше, як результати n дослідів над системою m випадкових величин і обробляється аналогічно. Перш за все знаходяться оцінки для математичних сподівань за формулою [6]:

$$\tilde{m}_x(t_k) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i(t_k)}{n}, \quad (1.31)$$

потім дисперсій:

$$\tilde{D}_x(t_k) = \frac{\sum_{i=1}^n [x_i(t_k) - \tilde{m}_x(t_k)]^2}{n-1} \quad (1.32)$$

і для кореляційної функції:

$$\tilde{K}_x(t_k, t_l) = \frac{\sum_{i=1}^n [x_i(t_k) - \tilde{m}_x(t_k)][x_i(t_l) - \tilde{m}_x(t_l)]}{n-1}, \quad k=1,2,\dots,m \quad (1.33)$$

Таблиця 1.1

	t_1	t_2	...	t_k	...	t_m
$x_1(t)$	$x_1(t_1)$	$x_1(t_2)$...	$x_1(t_k)$...	$x_1(t_m)$
$x_2(t)$	$x_2(t_1)$	$x_2(t_2)$...	$x_2(t_k)$...	$x_2(t_m)$
...
$x_i(t)$	$x_i(t_1)$	$x_i(t_2)$...	$x_i(t_k)$...	$x_i(t_m)$
...
$x_n(t)$	$x_n(t_1)$	$x_n(t_2)$...	$x_n(t_k)$...	$x_n(t_m)$

Після того як ці характеристики обчислені, можна, користуючись рядом значень $\tilde{m}_x(t_1), \tilde{m}_x(t_2), \dots, \tilde{m}_x(t_m)$, побудувати залежність $\tilde{m}_x(t)$. Аналогічно будується залежність $\tilde{D}_x(t)$. У разі потреби всі ці функції апроксимуються якими-небудь аналітичними виразами.

1.6. Лінійні перетворення випадкових процесів

Визначимо, як змінюються основні характеристики випадкового процесу при елементарних операціях над ним. Нехай на лінійну систему, що описується оператором L діє випадковий процес $X(t)$ з відомими ймовірнісними характеристиками: математичним сподіванням $m_x(t)$ і кореляційною функцією $K_x(t, t')$. Необхідно знайти характеристики випадкового процесу $Y(t)$, якщо

$$Y(t) = LX(t), \quad (1.34)$$

де під оператором L розуміють будь-які математичні дії: операції алгебри, диференціювання, інтегрування.

1. Розглянемо випадок, коли L - лінійний диференціальний оператор, тоді математичне сподівання $Y(t)$ дорівнюватиме

$$M[Y(t)] = m_y(t) = M\left[\frac{dX(t)}{dt}\right] = \frac{d}{dt}M[X(t)] = \frac{dm_x(x)}{dt}. \quad (1.35)$$

Істотну роль при виведенні співвідношення (1.35) виконує прийняте допущення про можливість перестановки операцій диференціювання та математичного сподівання, яке дозволило від операції математичного сподівання похідної перейти до похідної від математичного сподівання [24]. Перестановка операції математичного сподівання з іншими лінійними математичними операціями використовується і в подальших перетвореннях.

Одержимо співвідношення, що зв'язує кореляційні функції $K_y(t, t')$ і $K_x(t, t')$:

$$K_y(t, t') = M[(Y(t) - m_y(t))(Y(t') - m_y(t'))] = M\left[\frac{d\overset{\circ}{X}}{dt} \frac{d\overset{\circ}{X}}{dt'}\right]. \quad (1.36)$$

Добуток похідних під знаком математичного сподівання можна подати у вигляді

$$\frac{d}{dt} \overset{\circ}{X}(t) \frac{d}{dt'} \overset{\circ}{X}(t') = \frac{\partial^2 \left[\overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{X}(t') \right]}{\partial t \partial t'}. \quad (1.37)$$

Із співвідношення (1.36) з урахуванням (1.37) отримуємо

$$K_y(t, t') = M\left[\frac{\partial^2 \left(\overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{X}(t') \right)}{\partial t \partial t'}\right] = \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} M\left[\overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{X}(t')\right] = \frac{\partial^2 K_x(t, t')}{\partial t \partial t'}. \quad (1.38)$$

Якщо випадкові функції $X(t)$ і $Y(t)$ пов'язані співвідношенням

$$Y(t) = \frac{d^2 X(t)}{dt^2},$$

то кореляційна функція буде дорівнювати

$$K_y(t, t') = \frac{\partial^4 K_x(t, t')}{\partial t^2 \partial t'^2}.$$

Тобто для знаходження математичного сподівання перетвореної функції той самий лінійний оператор застосовується до математичного сподівання вихідної випадкової функція, а для знаходження кореляційної функції той самий лінійний оператор застосовується двічі до кореляційної функції вихідної випадкової функції.

2. Якщо L - лінійний інтегральний оператор, то математичне сподівання випадкової функції $Y(t)$ дорівнюватиме

$$M[Y(t)] = m_y(t) = M \int_0^t X(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^t M[X(\varepsilon)] d\varepsilon = \int_0^t m_x(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (1.39)$$

Кореляційна функція

$$\begin{aligned} K_y(t, t') &= M[(Y(t) - m_y(t))(Y(t') - m_y(t'))] = \\ &= M\left[\int_0^t [X(\varepsilon) - m_x(\varepsilon)] d\varepsilon \int_0^{t'} [X(\varepsilon_1) - m_x(\varepsilon_1)] d\varepsilon_1\right]. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Добуток двох інтегралів під знаком математичного сподівання у формулі (1.40) дорівнює подвійному інтегралу:

$$\int_0^t \int_0^{t'} (X(\varepsilon) - m_x(\varepsilon))(X(\varepsilon_1) - m_x(\varepsilon_1)) d\varepsilon d\varepsilon_1,$$

ТОМУ

$$K_y(t, t') = M \left[\int_0^t \int_0^{t'} (X(\varepsilon) - m_x(\varepsilon))(X(\varepsilon_1) - m_x(\varepsilon_1)) d\varepsilon d\varepsilon_1 \right] = \quad (1.41)$$

$$= \int_0^t \int_0^{t'} M[(X(\varepsilon) - m_x(\varepsilon))(X(\varepsilon_1) - m_x(\varepsilon_1))] d\varepsilon d\varepsilon_1 = \int_0^t \int_0^{t'} K_x(\varepsilon, \varepsilon_1) d\varepsilon d\varepsilon_1.$$

Оскільки сталий множник можна виносити за знак оператора

$$L[c(t)X(t)] = c(t)LX(t),$$

то у більш загальному випадку формули (1.39) і (1.41) наберуть вигляду

$$m_y(t) = c(t) \int_0^t m_x(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (1.42)$$

$$K_y(t, t') = c(t)c(t') \int_0^t \int_0^{t'} K_x(\varepsilon, \varepsilon_1) d\varepsilon d\varepsilon_1.$$

Приклад 1. Знайдемо ймовірнісні характеристики випадкової функції:

$$Y(t) = a(t)c + \int_0^t k(t, \tau)X_1(\tau) d\tau,$$

де $a(t), k(t, \tau)$ - невідповідні функції; c - випадкова величина з відомими m_c і D_c ; $X_1(\tau)$ - випадкова функція з відомими m_{x_1} та K_{x_1} .

Математичне сподівання $Y(t)$

$$m_y(t) = M \left[a(t)c + \int_0^t k(t, \tau)X_1(\tau) d\tau \right] = a(t)M[c] + \int_0^t k(t, \tau)M[X_1] d\tau = \quad (1.43)$$

$$= a(t)m_c + \int_0^t k(t, \tau)m_{x_1} d\tau.$$

Якщо c і X_1 незалежні, то кореляційна функція має вигляд

$$K_y(t, t') = M \left[\left(a(t)c + \int_0^t k(t, \tau)X_1(\tau) d\tau \right) \left(a(t')c + \int_0^{t'} k(t', \tau_1)X_1(\tau_1) d\tau_1 \right) \right] = \quad (1.44)$$

$$= a(t)a(t')M[c^2] + \int_0^t \int_0^{t'} k(t, \tau)k(t', \tau')K_{x_1}(\tau, \tau') d\tau d\tau'.$$

Приклад 2. Балка, показана на рис.1.10, знаходиться під дією випадкового розподіленого навантаження. Ймовірнісні характеристики навантаження відомі, тобто відомі математичне сподівання $m_q(z)$ як функції z і кореляційна функція $K_q(z, z')$.

Необхідно визначити характеристики ймовірності реакцій R_1 і R_2 . Розглядаючи рівновагу балки, отримуємо два рівняння:

$$R_1 + R_2 = \int_0^{l_1} q(z) dz; \quad R_2 l = \int_0^{l_1} q(z) z dz.$$

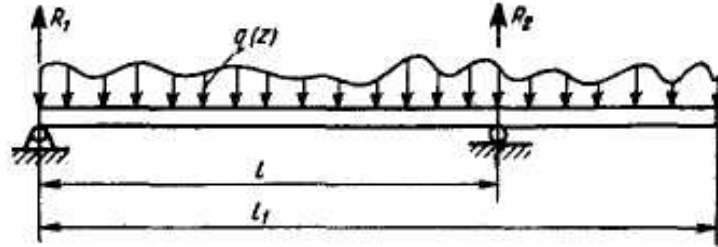


Рисунок 1.10 – Балка під дією випадкового розподіленого навантаження

Із системи знаходимо математичні сподівання реакцій:

$$m_{R_1} + m_{R_2} = \int_0^{l_1} m_q(z) dz;$$

$$l m_{R_2} = \int_0^{l_1} m_q(z) z dz.$$

Центровані випадкові величини $\overset{\circ}{R}_1$ і $\overset{\circ}{R}_2$ визначимо за формулами

$$\overset{\circ}{R}_1 = \int_0^{l_1} (q(z) - m_q(z)) \left(1 - \frac{z}{l}\right) dz; \quad \overset{\circ}{R}_2 = \int_0^{l_1} (q(z) - m_q(z)) \left(\frac{z}{l}\right) dz.$$

Дисперсія реакцій

$$\begin{aligned} D_{R_1} &= M \left[\int_0^{l_1} q_o(z_1) \left(1 - \frac{z_1}{l}\right) dz_1 \int_0^{l_1} q_o(z) \left(1 - \frac{z}{l}\right) dz \right] = \\ &= M \left[\int_0^{l_1} \int_0^{l_1} q_o(z_1) q_o(z) \left(1 - \frac{z}{l}\right) \left(1 - \frac{z_1}{l}\right) dz dz_1 \right] = \\ &= \int_0^{l_1} \int_0^{l_1} M[q_o(z_1) q_o(z)] \left(1 - \frac{z}{l}\right) \left(1 - \frac{z_1}{l}\right) dz dz_1 = \int_0^{l_1} \int_0^{l_1} K_q(z, z_1) \left(1 - \frac{z}{l}\right) \left(1 - \frac{z_1}{l}\right) dz dz_1; \\ D_{R_2} &= \int_0^{l_1} \int_0^{l_1} K_q(z, z_1) \left(\frac{z}{l}\right) \left(\frac{z_1}{l}\right) dz dz_1. \end{aligned}$$

При розв'язанні поставленої задачі можна обмежитися лише однорідними операторами L . Нехай оператор L є неоднорідним і може бути поданий у такому вигляді:

$$LX(t) = L_0X(t) + \varphi(t),$$

де L_0 - лінійний оператор, а $\varphi(t)$ - не випадкова функція.

Оскільки з властивості математичного сподівання

$$m_y(t) = L_0m_x(t) + \varphi(t), \quad (1.45)$$

тобто при додаванні до випадкової функції не випадкового доданку до її математичного сподівання додається той самий не випадковий доданок.

Кореляційна функція випадкової функції $Y(t)$

$$\begin{aligned} K_y(t, t') &= M \left[\overset{\circ}{Y}(t) \overset{\circ}{Y}(t') \right] = \\ &= M \left[(L_0X(t) + \varphi(t) - m_x(t) - \varphi(t)) (L_0X(t') + \varphi(t') - m_x(t') - \varphi(t')) \right] = (1.46) \\ &= M \left[L_0(X(t) - m_x(t)) L_0(X(t') - m_x(t')) \right] = L_0^{(t)} L_0^{(t')} K_x(t, t'). \end{aligned}$$

У формулі (1.46) позначення (t) , (t') у знака оператора L вказують, за яким аргументом він використовується.

Отже, у подальшому під лінійними операторами будемо розуміти лише лінійні однорідні оператори.

Тобто якщо випадкова функція з математичним сподіванням $m_x(t)$ і кореляційною функцією $K_x(t, t')$ перетворюється лінійним однорідним оператором L у випадкову функцію $Y(t)$ (1.34), то для знаходження математичного сподівання випадкової функції $Y(t)$ необхідно застосувати той самий оператор до математичного сподівання випадкової функції $X(t)$:

$$m_y(t) = Lm_x(t).$$

Для знаходження кореляційної функції необхідно двічі застосувати той самий оператор до кореляційної функції випадкової функції $X(t)$:

$$K_y(t, t') = L^{(t)} L^{(t')} K_x(t, t'). \quad (1.47)$$

Задача 1. Визначити кореляційну функцію і дисперсію для другої похідної випадкової функції $X(t)$, якщо $X(t) = A \sin t$ і відомі m_A і S_A .

Задача 2. Визначити кореляційну функцію випадкової функції

$$Y(t) = a(t)X(t) + b(t) \frac{dX(t)}{dt},$$

де $a(t), b(t)$ - не випадкові функції; X - випадкова функція з відомими ймовірнісними характеристиками $m_x = 0$ і $K_x(t, t')$.

1.7. Стаціонарні випадкові процеси

Значного поширення набули випадкові процеси, які проходять у часі приблизно однорідно і мають вигляд безперервних випадкових коливань відносно деякого середнього значення, причому ймовірнісні характеристики процесу в часі істотно не змінюються. Такі випадкові процеси називають стаціонарними. Стаціонарний процес аналогічний сталим коливанням, коли параметри сталих коливань не залежать від початку відліку часу, тому і під час дослідження стаціонарного процесу можна вибрати будь-який момент часу. Досліджуючи стаціонарний процес, на будь-якому відрізку часу ми повинні одержати одні й ті самі його характеристики.

Прикладом стаціонарного випадкового процесу може служити зміна висоти центра тяжіння літака на сталому режимі горизонтального польоту (рис. 1.11), коливання напруження, тиск газу в газопроводі та ін.

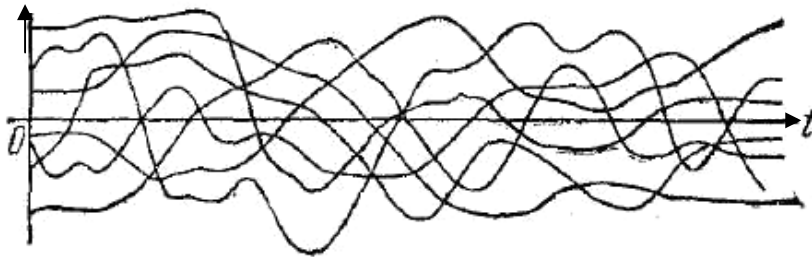


Рисунок 1.11 – Зміна висоти центра тяжіння літака на сталому режимі під час горизонтального польоту

Випадковий процес $X(t)$ називається стаціонарним (у вузькому, тобто у найбільш строгому розумінні), якщо всі його ймовірнісні характеристики (функції розподілу, щільності ймовірності та моментні характеристики) не залежать від вибору початкової точки відліку часу, тобто від зсуву усіх перерізів управо або вліво на один і той самий інтервал часу Δt .

Випадковий процес $X(t)$ називається стаціонарним у широкому розумінні (за О.Я. Хінчиним), якщо його перший початковий момент не залежать від t , тобто

$$m_x(t) = m_x = \text{const}, \quad (1.48)$$

а кореляційна функція залежить тільки від проміжку між першим і другим аргументами:

$$K_x(t, t') = K_x(t - t', 0) = K_x(\tau), \text{ де } \tau = t - t'.$$

Кореляційна функція є парною, тому для стаціонарного випадкового процесу

$$K_x(\tau) = K_x(-\tau).$$

Оскільки дисперсія $D_x(t) = K_x(t, t)$, то для стаціонарного

випадкового процесу

$$D_x(t) = K_x(0) = \text{const}. \quad (1.49)$$

Кореляційна функція похідної стаціонарного випадкового процесу

$$K_{\dot{x}}(t, t') = M \left[\frac{\partial}{\partial t} \overset{\circ}{X}(t) \frac{\partial}{\partial t'} \overset{\circ}{X}(t') \right] = \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} M \left[\overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{X}(t') \right] = \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} K_x(\tau) = -\frac{d^2 K_x(\tau)}{d\tau^2}.$$

Приклад. Визначити, чи є випадковий процес

$$X(t) = \sum_{j=1}^n (A_j \cos \omega_j t + B_j \sin \omega_j t)$$

стаціонарним, якщо A_j, B_j - випадкові, взаємно незалежні величини з нульовими математичними сподіваннями й рівними дисперсіями ($D_{A_j} = D_{B_j} = D_j$).

Математичне сподівання випадкового процесу $X(t)$ дорівнює нулю. Кореляційна функція

$$\begin{aligned} K_x(t, t') &= M \left[\sum_{j=1}^n (A_j \cos \omega_j t + B_j \sin \omega_j t) \sum_{j=1}^n (A_j \cos \omega_j t' + B_j \sin \omega_j t') \right] = \\ &= \sum_{j=1}^n M \left[A_j^2 \cos \omega_j t \cos \omega_j t' + A_j B_j \cos \omega_j t \sin \omega_j t' + \right. \\ &\quad \left. + B_j A_j \sin \omega_j t \cos \omega_j t' + B_j^2 \sin \omega_j t \sin \omega_j t' \right] \end{aligned}$$

Ураховуючи незалежність випадкових величин A_j і B_j та рівність їх дисперсій, отримуємо

$$K_x(t, t') = \sum_{j=1}^n D_j (\cos \omega_j t \cos \omega_j t' + \sin \omega_j t \sin \omega_j t') = \sum_{j=1}^n D_j \cos \omega_j (t - t').$$

Отриманий вираз залежить тільки від різниці моментів часу, тобто $X(t)$ є випадковим стаціонарним процесом. Дисперсія випадкового процесу

$$D_x = K_x(0) = \sum_{j=1}^n D_j.$$

Нехай $X(t)$ - деякий випадковий стаціонарний процес, а $x(t)$ - його реалізація. Тоді основною задачею теорії випадкових процесів є знаходження статистичних характеристик, що зв'язують різні реалізації, що описують одне й те саме фізичне явище. Кожна реалізація випадкового процесу є функцією часу, значення якої можуть бути отримані експериментально і є випадковими величинами.

Задача. Знайти кореляційну функцію для першої та другої похідних випадкового стаціонарного процесу.

Два випадкових процеси $X_1(t)$ і $X_2(t)$ одного й того самого

аргументу називають стаціонарно зв'язаними, якщо їх взаємна кореляційна функція залежить від різниці аргументів, тобто

$$K_{x_1 x_2}(t, t') = K_{x_1 x_2}(\tau), \quad \tau = t' - t. \quad (1.50)$$

Із властивості взаємної кореляційної функції виходить, що для комплексних стаціонарних випадкових процесів

$$K_{x_1 x_2}(t, t') = K_{x_1 x_2}(\tau) = K_{x_1 x_2}^*(-\tau),$$

а для дійсних випадкових процесів

$$K_{x_1 x_2}(\tau) = K_{x_2 x_1}(-\tau).$$

Як приклад визначимо взаємну кореляційну функцію стаціонарного випадкового процесу $X(t)$ та його похідної $\dot{X}(t)$:

$$K_{\dot{x}\dot{x}}(t, t') = M \left[\overset{\circ}{\dot{X}}(t) \frac{\partial}{\partial t'} \overset{\circ}{X}(t') \right] = \frac{\partial}{\partial t'} M \left[\overset{\circ}{\dot{X}}(t) \overset{\circ}{X}(t') \right] = \frac{\partial}{\partial t'} K_x(t - t') = -\frac{dK_x(\tau)}{d\tau}.$$

При перестановці індексів отримаємо

$$K_{\dot{x}\dot{x}}(t, t') = M \left[\frac{\partial}{\partial t} \overset{\circ}{\dot{X}}(t) \overset{\circ}{\dot{X}}(t') \right] = \frac{\partial}{\partial t} M \left[\overset{\circ}{\dot{X}}(t) \overset{\circ}{\dot{X}}(t') \right] = \frac{\partial}{\partial t} K_x(\tau) = \frac{dK_x(\tau)}{d\tau}.$$

Оскільки $K_x(\tau)$ - парна функція τ , то $\left. \frac{dK_x(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0$, тобто

стаціонарний процес $X(t)$ та його похідна для одного й того самого моменту часу є некорельованими випадковими величинами.

Тобто для існування похідної кореляційної функції випадкового процесу необхідно і достатньо існування похідної самого випадкового процесу (його диференційованість).

Для отримання характеристик стаціонарного випадкового процесу (математичного сподівання та кореляційної функції) потрібно знати деяке число реалізацій випадкової функції $X(t)$. За записами реалізацій можна знайти наближені значення m_x та $K_x(\tau)$.

Виникає питання: чи не можна отримати ті самі характеристики за однією реалізацією випадкового процесу $X(t)$? Оскільки випадковий процес є стаціонарним і проходить однорідно в часі (математичне сподівання не залежить від часу, а кореляційна функція – від початку відліку), природно припустити, що однієї єдиної реалізації достатньо для визначення характеристик випадкової функції.

Стаціонарні випадкові функції, для яких можна за однією реалізацією встановити ймовірнісні характеристики, називають **ергодичними стаціонарними випадковими процесами**. Властивість ергодичності полягає у тому, що кожна окрема реалізація випадкового

процесу дає можливість робити висновки про статистичні властивості всієї сукупності реалізацій.

Якщо стаціонарний випадковий процес $X(t)$ має ергодичні властивості, то для нього середнє значення за часом (на достатньому великому інтервалі спостереження) дорівнює середньому значенню з множини спостережень, тобто

$$m_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad (1.51)$$

де m_x - середнє значення з множини реалізацій (усереднене значення);

$\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$ - середнє значення за часом для однієї реалізації.

Достатньою умовою ергодичності випадкового стаціонарного процесу $X(t)$ (відносно математичного сподівання) (1.51) є умова необмеженого спадання його кореляційної функції $K_x(\tau)$ за модулем при $|\tau| \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} K_x(\tau) = 0.$$

Дисперсію ергодичного випадкового стаціонарного процесу можна визначити за формулою

$$D_x = \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - m_x)^2 dt. \quad (1.52)$$

Достатньою умовою виконання останньої рівності (ергодичності стаціонарного випадкового процесу $X(t)$ за дисперсією) є така

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} K_y(\tau) = 0,$$

де $K_y(\tau)$ - кореляційна функція випадкового процесу $Y(t) = X(t)^2$.

Кореляційна функція ергодичного стаціонарного випадкового процесу визначається за такою формулою:

$$K_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - m_x)(x(t - \tau) - m_x) dt. \quad (1.53)$$

Достатньою умовою використання співвідношення (1.53) є така:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} K_z(\tau) = 0,$$

де $K_z(\tau)$ - кореляційна функція випадкового процесу $Z(t) = X(t)X(t + \tau)$.

Випадкова функція, що є ергодичною відносно математичного сподівання, може не бути ергодичною відносно кореляційної функції [23,24]. Практично це означає, що якщо є одна реалізація стаціонарного випадкового процесу, причому в результаті обробки запису цього

процесу вдалося встановити, що процес має властивості ергодичного відносно математичного сподівання, то це ще не означає, що за цією реалізацією можна знайти кореляційну функцію цього процесу.

Задача. Встановити, чи є стаціонарний випадковий процес $X(t)$ з кореляційною функцією $K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}$ ергодичним.

1.8. Спектральне представлення стаціонарного випадкового процесу

Якщо який-небудь коливальний процес подається у вигляді суми гармонічних коливань різних частот (так званих «гармонік»), то спектром коливального процесу називається функція, що описує розподіл амплітуд за різними частотами. Спектр показує, якого роду коливання переважають у даному процесі, тобто яка його внутрішня структура.

Абсолютно аналогічний спектральний опис можна дати і стаціонарному випадковому процесу; вся різниця у тому, що для випадкового процесу амплітуди коливань будуть випадковими величинами. Спектр стаціонарної випадкової функції описуватиме розподіл дисперсій за різними частотами.

Спектральне представлення функції полягає у тому, що вона записується у вигляді ряду Фур'є з випадковими коефіцієнтами (дискретний варіант) або у вигляді інтеграла Фур'є (безперервний варіант), спектр якого є випадковою функцією.

Так само як і для детерміністичних функцій, окремо взятую реалізацію $x(t)$ стаціонарного випадкового процесу $X(t)$ можна розкласти у ряд Фур'є у тригонометричній формі, якщо вона задовольняє на відрізку $[a, b]$ умови теореми Діріхле (тобто існує

інтеграл $\int_a^b |x(t)| dt < \infty$, а функція $x(t)$ є однозначною, має скінченну

кількість точок розриву та екстремумів):

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{2\pi kt}{T} + B_k \cos \frac{2\pi kt}{T}, \quad (1.54)$$

де a_0 - середнє значення $x(t)$ за період $T = 2l = |b - a|$, що є сталою складовою; частота $\frac{2\pi}{T}$ - називається основною частотою (частота першої гармоніки), а кратні їй частоти – вищими гармоніками.

Коефіцієнти ряду визначаються із співвідношень:

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin \frac{2\pi kt}{T} dt;$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} dt;$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt.$$

Ряд Фур'є (1.54) можна також подати у такому вигляді:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(\cos \frac{2\pi kt}{T} + \varphi_k \right) \quad (1.55)$$

або

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(\sin \frac{2\pi kt}{T} + \theta_k \right),$$

де $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$; $\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{b_k}{a_k}$; $\operatorname{tg} \theta_k = \frac{a_k}{b_k}$. Обернені залежності для коефіцієнтів a_k, b_k у (1.55) мають вигляд $a_k = A_k \cos(\varphi_k)$ та $b_k = A_k \sin(\varphi_k)$. При розкладанні за формулою (1.55) A_k являє собою амплітуду, а φ_k - фазу k -ої гармоніки, тому сукупність A_k називають спектром амплітуд, а φ_k - спектром фаз.

Використовуючи формули Ейлера, ряд Фур'є можна також подати в комплексній формі:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi k \frac{t}{T}}, \quad (1.56)$$

де $c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$, $\frac{2\pi k}{T} = \omega_k$.

Комплексна амплітуда

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-i2\pi k \frac{t}{T}} dt. \quad (1.57)$$

Спектр періодичної функції можна зобразити графічно (рис. 1.12).

Кожному дискретному значенню частоти (частоти ω_k гармонік ряду Фур'є) відповідає певне значення коефіцієнта ряду c_k . Спектр, показаний на рис.1.12, називається дискретним спектром, або лінійчатим. Крім того спектр, зображений на рис. 1.12, називається гармонічним через те, що він складається з рівновіддалених спектральних ліній (частоти гармонік є кратними). Однак не слід вважати, що тільки періодичні функції мають дискретний спектр. Якщо розглядати функцію, яка є результатом додавання двох синусоїдальних коливань з несумірними частотами (наприклад ω_1 і $\sqrt{2}\omega_1$), то вона буде неперіодичною, однак спектр її буде дискретним і складатися з двох спектральних ліній.

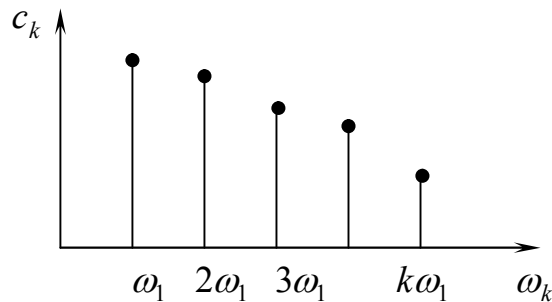


Рисунок 1.12 – Дискретний (лінійчатий) спектр

Розкладання в ряд Фур'є можна узагальнити і на випадок неперіодичної функції. Наближений метод розкладання Фур'є для неперіодичної функції полягає у застосуванні граничного переходу при $T \rightarrow \infty$ [24]. Дійсно, неперіодичну функцію можна розглядати як періодичну функцію, але при необмежено зростаючому періоді.

Підставивши значення амплітуди c_k , отримаємо

$$x(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi k \frac{t}{T}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-i2\pi k \frac{t}{T}} dt. \quad (1.58)$$

Перейдемо до границі в (1.58), спрямовуючи період до нескінченності з урахуванням того, що $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$. Частота $\Delta\omega$ являє собою частотний

інтервал між сусідніми гармоніками, частоти яких дорівнюють $\frac{2\pi k}{T}$ і $\frac{2\pi(k+1)}{T}$. При граничному переході при $T \rightarrow \infty$ $\Delta\omega \rightarrow d\omega$, а $\frac{2\pi k}{T} \rightarrow \omega$, де ω - поточна частота, що змінюється безперервно. Сума в (1.58) перейде в інтеграл, тоді

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1.59)$$

Інтеграл у правій частині (1.59) називається інтегралом Фур'є у комплексній формі. Його можна записати у такому вигляді:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (1.60)$$

де

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1.61)$$

Формула (1.61) є прямим перетворенням Фур'є функції $x(t)$, а (1.60) - оберненим перетворенням Фур'є.

Однією з відмітних особливостей інтегралу Фур'є від ряду Фур'є є те, що ряд Фур'є подає періодичну функцію як суму періодичних складових з частотами, що мають дискретні значення, тоді як інтеграл Фур'є подає неперіодичну функцію сумою періодичних складових з безперервною послідовністю частот. Тобто у випадку інтегралу Фур'є сума не має суттєвих властивостей своїх складових.

Приклад. Знайдемо перетворення Фур'є гармонічної функції $x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$.

Скористаємося формулою Ейлера $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$, тоді за формулою 1.61 отримаємо

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{A_0 e^{i\varphi}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt + \frac{A_0 e^{-i\varphi}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega + \omega_0)t} dt.$$

Оскільки $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i(\omega - \omega_0)t} dt = \delta(\omega \pm \omega_0)$ - дельта-функція (функція Дірака),

то

$$F(i\omega) = A_0 \pi [e^{i\varphi_0} \delta(\omega - \omega_0) + e^{-i\varphi_0} \delta(\omega + \omega_0)].$$

Якщо $\varphi = 0$, то косинус у часовій області перетворюється на суму двох дельта-функцій у частотній області. Дельта-функції розміщені на частотній осі у точках, що відповідають частоті косинуса. А це означає, що уся інформація про функцію після перетворення в частотній області сконцентрована у частотах $\pm \omega_0$.

Розглянемо тепер спектр неперіодичної функції. Функція $x(t)$ у вигляді (1.59) має безперервний спектр. У результаті граничного переходу від ряду до інтеграла Фур'є інтервали між окремими спектральними лініями необмежено скорочуються, вертикальні лінії зближуються і спектр у границі - це безперервна послідовність точок

(безперервна крива). На рис. 1.13 показаний спектр (безперервний) осьової вібрації заднього підшипника електродвигуна насоса.

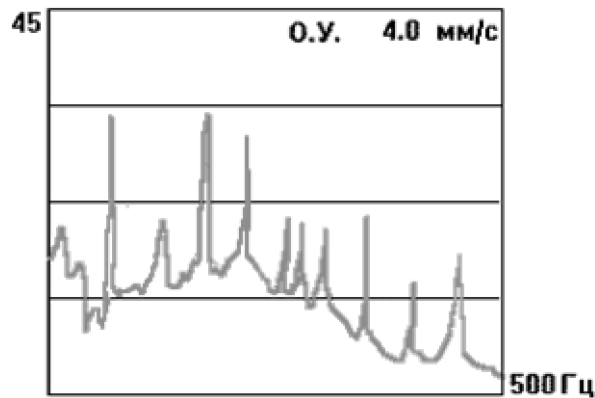


Рисунок 1.13 – Реальний спектр осьової вібрації заднього підшипника електродвигуна

Необхідно відмітити, що дискретний та безперервний спектри мають різну розмірність. Дискретний спектр має ту саму розмірність, що й сама функція, а розмірність безперервного спектра дорівнює відношенню розмірності функції до розмірності частоти. Якщо, наприклад, досліджувана функція визначає переміщення, то дискретний спектр матиме розмірність [м], а безперервний - метри за секунду [м/с].

Фізичний зміст виразу (1.60) полягає в тому, що безперервний спектр є безперервною сумою (інтегралом) гармонічних коливань з нескінченно малими комплексними амплітудами [32]:

$$dc = \frac{1}{2\pi} F(i\omega) d\omega.$$

Звідки

$$F(i\omega) = 2\pi \frac{dc}{d\omega}.$$

З останнього випливає, що $F(i\omega)d\omega$ має розмірність [амплітуда/секунду] і визначає амплітуду для інтервалу частот $(\omega, \omega + d\omega)$. Отже, $F(i\omega)$ можна розглядати як «щільність» комплексних амплітуд, що вміщується в інтервалі частот $(\omega, \omega + d\omega)$. Тому функцію $F(i\omega)$ називають спектральною щільністю комплексних амплітуд.

Випадковий процес, що описується множиною реалізацій $x_i(t)$, неможливо описати за допомогою комплексної спектральної щільності $F(i\omega)$, навіть якщо провести усереднення за усіма реалізаціями, оскільки через випадковість і незалежність фаз складових у різних

реалізаціях усереднення приводить до нульового результату при $m_x = 0$. Тому в теорії випадкових функцій спектральною щільністю або спектром стаціонарного випадкового процесу називається перетворення Фур'є не безпосередньо випадкових функцій, а перетворення Фур'є енергетичного спектра (функцій потужності випадкових процесів).

Для визначення енергетичного спектра випадкового процесу проінтегруємо квадрат модуля комплексної спектральної щільності $F(i\omega)$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(i\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)F(-i\omega)d\omega,$$

або, використовуючи формулу (1.61):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(i\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(-i\omega) \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} d\omega dt.$$

Якщо в останній формулі змінити порядок інтегрування та скористатися формулою (1.60), отримуємо так звану формулу Релея (теорема Парсеваля), що визначає енергетичний спектр випадкового стаціонарного процесу:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(i\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)]^2 dt.$$

Права частина останнього співвідношення становить величину, пропорційну енергії досліджуваного процесу. Оскільки для більшості процесів енергія за безкінечний інтервал часу прямує до безкінечності, то при розрахунках використовують середню енергію процесу:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(i\omega)|^2 d\omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t)]^2 dt,$$

або

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(i\omega)|^2 d\omega = S(\omega), \quad (1.62)$$

де $S(\omega)$ - спектральна щільність випадкового процесу, що пропорційна середній потужності процесу в інтервалі частот $(\omega, \omega + d\omega)$.

З (1.62) випливає, що спектральна щільність є додатною $S(\omega) \geq 0$ при будь-яких значеннях ω та парною функцією свого аргументу $S(\omega) = S(-\omega)$.

Згідно з методом спектральних зображень стаціонарний випадковий процес може бути поданий у вигляді інтегралу Фур'є:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)e^{i\omega t} d\omega.$$

За визначенням кореляційна функція комплексного випадкового процесу

$$K_x(t+\tau, t) = M[X(t+\tau)X^*(t)] = M\left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)e^{i\omega(t+\tau)} F(-i\omega')e^{-i\omega't} d\omega d\omega'\right] = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M[F(i\omega)F(-i\omega')]e^{i(\omega-\omega')t+i\omega\tau} d\omega d\omega'.$$

Для того, щоб кореляційна функція $K_x(t+\tau, t)$ не залежала від t , необхідно, щоб в останньому виразі показник експоненти не залежав від t , що можливо лише якщо

$$M[F(i\omega)F(-i\omega')] = S_x(\omega)\delta(\omega - \omega'), \quad (1.63)$$

де за умовою стаціонарності випадкового процесу дельта-функція повинна задовольняти умову

$$\delta(\omega - \omega') = \begin{cases} 0, & \omega \neq \omega', \\ \neq 0, & \omega = \omega'. \end{cases}$$

Умова (1.63) є умовою стохастичної ортогональності (некорельованості).

Тобто за умови (1.63) кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу дорівнюватиме

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (1.64)$$

Таким чином **кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу є оберненим перетворенням Фур'є її спектральної щільності**. Пряме перетворення Фур'є матиме вигляд

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (1.65)$$

Співвідношення (1.64) і (1.65) називаються формулами Вінера-Хінчина. Вони мають фундаментальне значення для аналізу стаціонарних випадкових процесів, оскільки встановлюють зв'язок між поданням випадкового процесу у часовій області (за допомогою кореляційних функцій) і у частотній області (за допомогою спектральних щільностей).

У табл. 1.2 наведені аналітичні вирази для типових моделей кореляційних функцій, необхідні для теоретичних розрахунків.

Оскільки кореляційна функція є парною функцією, то

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega; \quad (1.66)$$

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau.$$

Таблиця 1.2

$K_x(\tau)$	$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$
$D_x e^{-n \tau }$	$\frac{D_x n}{\pi(n^2 + \omega^2)}$
$D_x e^{-n \tau } (1 + n \tau)$	$\frac{2D_x n^3}{\pi(n^2 + \omega^2)^2}$
$D_x e^{-n \tau } (1 - n \tau)$	$\frac{2D_x n \omega^2}{\pi(n^2 + \omega^2)^2}$
$D_x e^{-n \tau } (1 + n \tau + n^2 \tau^2 / 3)$	$\frac{8D_x n^5}{3\pi(n^2 + \omega^2)^3}$
$D_x e^{-n \tau } \cos \omega_0 \tau$	$\frac{D_x n}{2\pi} \left[\frac{1}{n^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{n^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right]$
$D_x e^{-n \tau } \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{n}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$\frac{2D_x n(n^2 + \omega_0^2)}{\pi [n^2 + (\omega - \omega_0)^2] [n^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$
$D_x e^{-n \tau } \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{n}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$\frac{2D_x n \omega^2}{\pi [n^2 + (\omega - \omega_0)^2] [n^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$
$D_x e^{-n \tau } (\cos \omega_0 \tau + c \sin \omega_0 \tau)$	$\frac{2D_x [n(n^2 + \omega_0^2 + \omega^2) + c \omega_0 (n^2 - \omega^2 + \omega_0^2)]}{\pi [n^2 + (\omega - \omega_0)^2] [n^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$

Дисперсія стаціонарного випадкового процесу дорівнює $K_x(0)$, тому

$$K_x(0) = D_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega, \quad (1.67)$$

тобто дисперсія стаціонарної випадкової функції дорівнює площі під кривою спектральної щільності.

Якщо замість кореляційної функції $K_x(\tau)$ взяти взаємну кореляційну функцію двох стаціонарних процесів $X(t)$ і $Y(t)$, формули (1.66) наберуть вигляду

$$K_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega,$$

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau,$$

де $S_{xy}(\omega)$ - взаємна спектральна щільність процесів.

Для дискретного спектра

$$\Delta D_{xj} = \frac{1}{2\pi} S_x(\omega_j) \Delta\omega_j, \quad (1.68)$$

де ΔD_{xj} - елементарна дисперсія амплітуди гармоніки, що відповідає інтервалу частот $(\omega_j, \omega_j + \Delta\omega_j)$.

Для стаціонарної випадкової функції зі сталою спектральною щільністю S_0 кореляційна функція

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_0 e^{i\omega\tau} d\omega = K_0 \delta(\tau),$$

$$K_0 = \frac{S_0}{2\pi}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} d\omega = \delta(\tau).$$

З останньої формули випливає, що за нескінченно малий проміжок часу приріст функції повинен бути нескінченно великим. Для процесу, в якому випадкова функція безперервно отримує прирости з нескінченною дисперсією, потрібна нескінченна потужність, яку в реальних процесах одержати неможливо. **Стаціонарний випадковий процес, у якого кореляційна функція пропорційна дельта-функції, називається білим шумом.** S_0 - інтенсивність білого шуму. Білий шум (рис. 1.14) є сумою випадкових гармонічних коливань усіх частот, що мають одну й ту саму дисперсію амплітуди, тобто білий шум – це стаціонарний випадковий процес, у якого відсутній кореляційний зв'язок між різними значеннями аргументу.

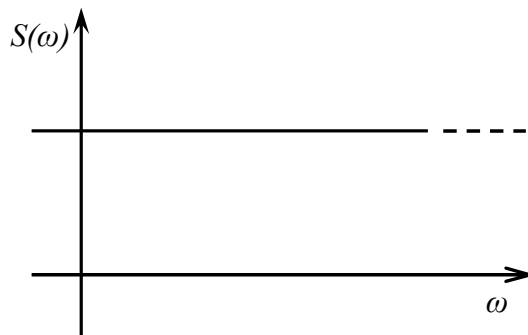


Рисунок 1.14 – Спектральна щільність випадкового процесу у вигляді білого шуму

Задача. Задана кореляційна функція випадкового стаціонарного процесу $X(t)$ - $K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}$. Визначити спектральну щільність і побудувати її графік.

Розглянемо лінійну динамічну систему, що описується диференціальним рівнянням вигляду

$$a_0 \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x(t) = b_0 \frac{d^m f(t)}{dt^m} + \dots + b_m f(t), \quad (1.69)$$

або в операторній формі

$$L_1 x(t) = L_2 f(t)$$

де a_i, b_k - сталі коефіцієнти; $f(t), x(t)$ - детерміновані або випадкові, одновимірні або векторні функції часу.

Часто $f(t)$ називають «входом», а $x(t)$ - «виходом», або «реакцією» системи на вхідну дію.

Для того щоб при стаціонарній дії реакція системи була теж стаціонарною, необхідно, щоб параметри системи (маса, жорсткість і т.д.) були сталими в часі.

Введемо позначення $\frac{d^k}{dt^k} = p^k$, тоді рівняння (1.69) матиме вигляд

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) x(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_n) f(t)$$

З останнього рівняння отримуємо

$$W(p) = L_2 L_1^{-1} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (1.70)$$

Функція $W(p)$ називається передаточною функцією лінійної динамічної системи. Якщо $p = i\omega$, то передаточна функція динамічної системи як будь-яка комплексна функція може бути записана у вигляді

$$W(i\omega) = \alpha(\omega) + i\beta(\omega),$$

або

$$W(i\omega) = |W(i\omega)| e^{i\varphi(\omega)},$$

де

$$|W(i\omega)| = \sqrt{\alpha(\omega)^2 + \beta(\omega)^2};$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\beta(\omega)}{\alpha(\omega)}.$$

Модуль передаточної функції $|W(i\omega)|$ називають амплітудно-частотною характеристикою динамічної системи. Функцію $\varphi(\omega)$ -

фазово-частотною характеристикою динамічної системи.

Знайдемо зв'язок між спектральною щільністю входу і виходу для лінійної системи.

Стационарне випадкове збудження на вході подамо у вигляді інтегралу Фур'є (1.60)

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (1.71)$$

Для лінійної системи зі сталими параметрами розв'язок рівняння (1.69) матиме вигляд

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} W(i\omega) F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (1.72)$$

Кореляційна функція вихідного процесу за визначенням дорівнює

$$K_x(\tau) = M[X(t + \tau) X^*(t)],$$

або

$$\begin{aligned} K_x(t + \tau, t) &= M \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(i\omega) F(i\omega) e^{i\omega(t+\tau)} W^*(i\omega') F(-i\omega') e^{-i\omega' t} d\omega d\omega' \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(i\omega) W(-i\omega') M[F(i\omega) F(-i\omega')] e^{i(\omega - \omega')t + i\omega\tau} d\omega d\omega'. \end{aligned}$$

Ураховуючи умову стохастичної ортогональності (1.63), отримуємо

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} W(i\omega) W^*(i\omega') S_f(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |W(i\omega)|^2 S_f(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Оскільки кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу $X(t)$ є оберненим перетворенням Фур'є від спектральної щільності (1.64), отримуємо

$$S_x(\omega) = |W|^2 S_f(\omega), \quad (1.74)$$

де $S_x(\omega)$ - спектральна щільність виходу; $S_f(\omega)$ - спектральна щільність входу. **Формула (1.74) є загальною формулою перетворення спектральних функцій для лінійних диференціальних рівнянь.**

Середнє процесу $x(t)$ можна одержати, якщо подати середнє вхідного процесу m_f як гармонічне коливання нульової частоти $\omega = 0$ [13].

Тоді з (1.70)

$$W(0) = \frac{b_m}{a_m},$$

і математичне сподівання вихідного процесу буде

$$m_x = \frac{b_m}{a_m} m_f. \quad (1.75)$$

Дисперсія вихідної величини і її перших двох похідних

$$D_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W|^2 S_f d\omega, \quad (1.76)$$

$$D_{\dot{x}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W|^2 \omega^2 S_f d\omega. \quad (1.77)$$

Перевага методу спектральних зображень полягає у тому, що за допомогою подання вхідних параметрів як ряду Фур'є (для дискретних випадкових процесів) або інтегралу Фур'є (для безперервних випадкових процесів) задача перетворюється на детерміновану з подальшим усередненням отриманих виразів.

Якщо необхідно враховувати початкові умови (перехідний режим), то процес на виході можна подати у вигляді

$$x(t) = x_n(t) + W(i\omega)e^{i\omega t}, \quad (1.78)$$

де $x_n(t)$ - загальний розв'язок операторного рівняння, отриманий з урахуванням початкових умов.

Більш ґрунтовне дослідження динамічних систем методом спектральних зображень наведено у розділі 3.

Приклад. На стаціонарну лінійну динамічну систему, що описується диференціальним рівнянням $\ddot{x} + 8\dot{x} + 15x = 5\dot{f} + 10f$, діє стаціонарний випадковий процес $f(t)$ з математичним сподіванням $m_f = 5$ та спектральною щільністю $S_f(\omega) = \frac{\sin 7\omega}{\omega}$. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкового процесу $x(t)$ на виході системи.

За формулою (1.75)

$$m_x = \frac{b_m}{a_m} m_f = \frac{10}{15} 5 = \frac{10}{3}.$$

Передаточна функція системи дорівнює

$$W(p) = \frac{5p + 10}{p^2 + 8p + 15} = \frac{5p + 10}{(p + 3)(p + 5)}.$$

Тоді

$$|W(i\omega)|^2 = W(i\omega)W(-i\omega) = \frac{5i\omega + 10}{(i\omega + 5)(i\omega + 3)} \frac{-5i\omega + 10}{(-i\omega + 5)(-i\omega + 3)} = \frac{25\omega^2 + 100}{(\omega^2 + 9)(\omega^2 + 25)}.$$

За формулою (1.76) знаходимо дисперсію

$$D_x = \int_0^{\infty} |W(i\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} \frac{25\omega^2 + 100}{(\omega^2 + 9)(\omega^2 + 25)} \frac{\sin 7\omega}{\omega} d\omega.$$

Для розрахунку цього інтеграла розкладемо підінтегральну функцію на прості дроби:

$$\begin{aligned} \frac{25\omega^2 + 100}{(\omega^2 + 9)(\omega^2 + 25)} &= \frac{A}{(\omega^2 + 9)} + \frac{B}{(\omega^2 + 25)} = \frac{A\omega^2 + 25A + B\omega^2 + 9B}{(\omega^2 + 9)(\omega^2 + 25)} = \\ &= -\frac{125}{16} \frac{1}{\omega^2 + 9} + \frac{525}{16} \frac{1}{\omega^2 + 25}. \end{aligned}$$

Тоді

$$D_x = -\frac{125}{16} \int_0^{\infty} \frac{\sin 7\omega}{(\omega^2 + 9)\omega} d\omega + \frac{525}{16} \int_0^{\infty} \frac{\sin 7\omega}{(\omega^2 + 25)\omega} d\omega.$$

Оскільки

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin m\omega}{(\omega^2 + a^2)\omega} d\omega = \frac{\pi}{2a^2} (1 - e^{-ma}),$$

то шукана дисперсія дорівнюватиме

$$D_x = -\frac{125}{16} \frac{\pi}{2 \cdot 9} (1 - e^{-7.3}) + \frac{525}{16} \frac{\pi}{2 \cdot 25} (1 - e^{-7.5}).$$

Задача. На вхід стаціонарної лінійної динамічної системи, що описується диференціальним рівнянням $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 5\dot{f}$, подається стаціонарний випадковий процес $f(t)$ з відомою кореляційною функцією $K_f(\tau) = 16e^{-4|\tau|} \cos 3\tau$. Знайти спектральну щільність $S_x(\omega)$.

Знаючи спектральну щільність можна розв'язувати прикладні задачі з різних предметних областей: визначення корисного сигналу на фоні шумів, ідентифікація об'єктів та ін. За допомогою спектральної щільності можна знаходити еквівалентну ширину спектра, частоту, що відповідає максимуму спектральної щільності, значення максимуму і т.д.

Існують різні способи визначення еквівалентної ширини спектра випадкового процесу $\Delta\omega_e$. Найчастіше для процесів, у яких спектральна щільність зосереджена біля нульової частоти $\Delta\omega_e$, визначають таким чином:

$$\Delta\omega_e = \frac{D_x}{2S_x(\omega)_{\max}}.$$

Якщо основна потужність процесу зосереджена біля екстремальної частоти спектральної щільності ω_e , вираз для оцінювання еквівалентної ширини набирає вигляду

$$\Delta\omega_e' = \omega_e + 0,5\Delta\omega_e.$$

Скориставшись поняттям $\Delta\omega_e$, можна отримати аналітичний вираз оцінки зверху дисперсії вихідного сигналу лінійної динамічної системи без використання аналітичного виразу спектральної щільності. Так, дисперсія вихідного сигналу лінійної динамічної системи дорівнює

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} |W(i\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega \leq 2S_x(\omega)_{\max} \int_0^{\infty} |W(i\omega)|^2 d\omega \leq \frac{D_x \Delta\omega_c}{\Delta\omega_e} |W(i\omega)|_{\max}^2,$$

де $\Delta\omega_c = \frac{\int_0^{\infty} |W(i\omega)|^2 d\omega}{|W(i\omega)|_{\max}^2}$ – смуга пропускання лінійної динамічної системи.

Поняття еквівалентної ширини спектра випадкового процесу дозволяє розділити випадкові процеси на два класи: вузькосмугові та широкосмугові.

Вузькосмуговим випадковим процесом називається процес, основна потужність якого зосереджена біля якої-небудь частоти ω_0 . Умову вузькосмуговості записують у вигляді $0,5\Delta\omega_e \ll \omega_0$. Процеси, що не задовольняють цю умову, називають широкосмуговими.

До вузькосмугових процесів належать процеси, що мають коливальну кореляційну функцію з показником коливальності $\frac{\omega_0}{n} > 5$ (див. табл. 1.2, моделі 4-7). До широкосмугових відносять усі моделі з табл. 1.2, причому для моделей 4-7 $\frac{\omega_0}{n} > 5$ (рис.1.15).

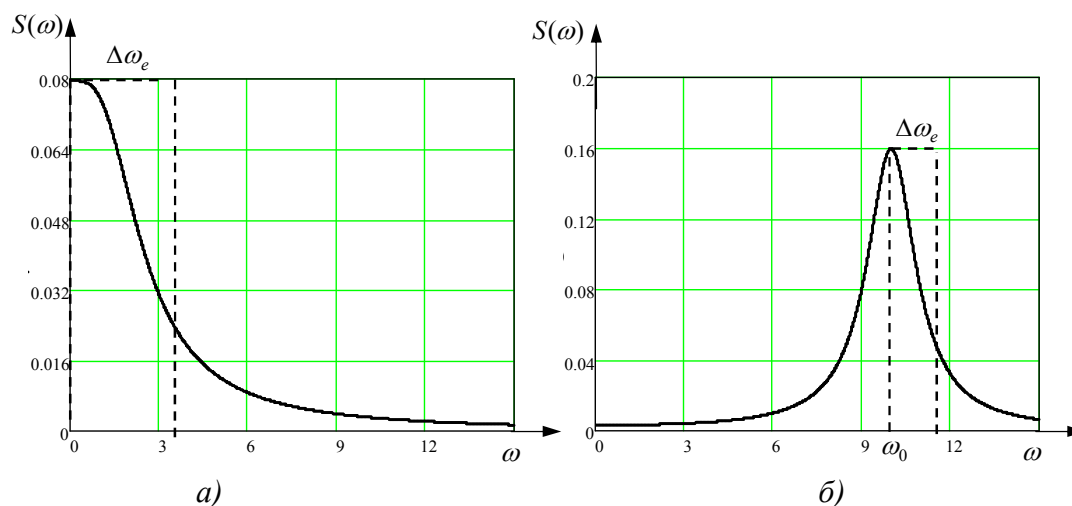


Рисунок 1.15 – Еквівалентна ширина спектра випадкового процесу:
а) – широкосмуговий, б) вузькосмуговий

Під час розв'язання ряду прикладних задач виникає необхідність оцінки частоти, що відповідає максимуму спектральної щільності ω_e . Її визначають з умови $S'_x(\omega) = 0$.

Розділ 2

Основи ймовірнісних розрахунків на міцність

Задачу оцінки надійності конструкції при випадкових впливах можна поділити на дві: задачу розрахунку конструкцій за граничним станом, що зводиться до визначення ймовірності настання небезпечного стану, і задачу накопичення втомних пошкоджень при випадкових напруженнях (наприклад, при випадкових коливаннях). Вказані задачі дуже часто зустрічаються під час прогнозування ресурсу та розрахунку довговічності конструкцій. У цьому розділі наведено розв'язання задачі розрахунку однопараметричної системи за граничним станом, коли діючі та граничні напруження є випадковими величинами з відомими законами розподілу або з відомими ймовірнісними характеристиками.

2.1. Основні поняття та постановка завдання

Розрахунок механічних систем і елементів конструкцій на міцність полягає в порівнянні їх потенційних можливостей з тими вимогами за міцністю, які ставляться до них під час експлуатації. Можливості елементів конструкцій за міцністю характеризуються такими поняттями, як руйнівне навантаження, руйнівне число циклів навантаження і т.п. Судження про характеристики на міцність натурних елементів будується, як правило, за наслідками вивчення механічних характеристик матеріалів, з яких ці елементи виконані. При розрахунках потрібно враховувати особливості технології їх виготовлення, геометричні розміри та умови експлуатації.

З курсу опору матеріалів відомо, що більшість речовин (виключаючи в'язкі рідини під час зсуву, а також деякі складні речовини) при певних напруженнях мають властивість пружності. Якщо напруження збільшується, то матеріал, що є пластичним, з деякого моменту починає текти й отримує залишкові деформації. Якщо ж матеріал крихкий, то за аналогічних умов він руйнується без помітної залишкової деформації.

З математичної точки зору дослідження цих двох явищ однаково. Маючи деяке уявлення про напруження, при яких матеріал починає текти або руйнуватися при звичному розтягуванні або стисненні, прагнуть встановити деякий критерій, який давав би можливість визначити, при якому напруженні і в якому місці почнеться пластична течія або руйнування матеріалу, що знаходиться в складнішому напруженому стані. В результаті досліджень був створений ряд критеріїв міцності:

- максимальних нормальних напружень (I);

- максимальної деформації розтягування (II);
- максимальних дотичних напружень (III);
- найбільших деформацій зсуву (IV);
- найбільшої енергії деформації (V);
- максимальної енергії формозмінення (VI);
- найбільшого збереження енергії деформації спотворення форми (VII) і багато інших.

Необхідно відзначити, що теорії (I), (II) і (V) не можуть задовольнити всі можливі випадки руйнування. Теорія (I) найчастіше використовується для крихких матеріалів. Теорія (III) та її узагальнення є найпростішими і найбільш використовуваними умовами. Теорія (VI) має переваги при математичному трактуванні і в даний час широко використовується в теорії пластичності. Теорія (VII) і її узагальнення застосовуються для дослідження впливу швидкості деформації на міцність.

Розглядаючи питання міцності, необхідно також охарактеризувати основні явища руйнування, які схематично подані на рис. 2.1.

- (I) Руйнування пластичних матеріалів при розтягуванні, як правило, пов'язане з місцевою пластичною деформацією, що характеризується утворенням шийки і супроводжується утворенням «чашки і конуса» (рис. 2.1 а). Сторони AB і CD є твірними конуса, тоді як центральна частина BC , де фактично відбувається руйнування, має плоску форму. Руйнування пластичних матеріалів у результаті місцевої пластичної деформації зазвичай називається розмахом.
- (II) Руйнування крихких матеріалів при розтягуванні характеризується розривом по площині, перпендикулярній до розтягувальної сили (рис. 2.1 б).
- (III) Під час стискання крихких матеріалів руйнування характеризується сколюванням і, як правило, спрямоване по двох площинах або поверхні конуса, приблизно таких, що збігаються з напрямом максимальних дотичних напружень, що, проте, завжди лежать у проміжку між цим напрямом і напрямом стискальної сили (рис. 2.1 в).

Існують також й інші типи руйнування матеріалу, наприклад, пов'язані зі втомою, що викликана повторними знакозмінними навантаженнями, а також із повзучістю при високих температурах.

Умови статичної міцності зручно подати у вигляді

$$\sigma_{екв} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \lambda_0, \lambda_1, \dots) < \sigma_{lim}, \quad (2.1)$$

де $\sigma_{екв}$ - еквівалентне напруження, розраховане за одним із критеріїв міцності; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - головні напруження, причому $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$; λ_0, λ_1 -

параметри, що залежать від механічних властивостей матеріалу; σ_{lim} - границя міцності матеріалу при одноосьовому розтягуванні. Для відносно невеликих робочих температур значення $\sigma_{\text{lim}} = \sigma_T$ - для пластичних матеріалів та $\sigma_{\text{lim}} = \sigma_\sigma$ - для крихких матеріалів.

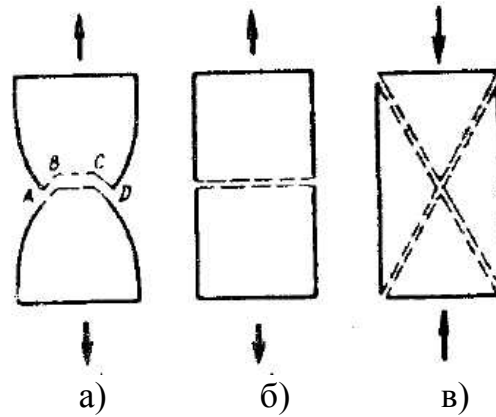


Рисунок 2.1 - Схеми руйнування матеріалів

Еквівалентне напруження встановлює відповідність між складним напруженим станом і одноосьовим розтягуванням.

Якщо в найбільш напруженій точці деталі

$$\sigma_{\text{екв}} < \sigma_\sigma,$$

то умову міцності вважають виконаною. При

$$\sigma_{\text{екв}} \geq \sigma_\sigma$$

настає руйнування в небезпечних точках конструкції.

Умову міцності, або неруйнування, можна також подати через деформації

$$\varepsilon_{\text{екв}} = \varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3; \omega_0, \omega_1, \dots) = \varepsilon_\sigma, \quad (2.2)$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ - головні деформації ($\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$); ω_0, ω_1 - параметри, що залежать від механічних властивостей матеріалу, ε_σ - відносні подовження у момент руйнування при одноосьовому розтягуванні; або за умовами жорсткості.

Діючі навантаження, параметри системи та граничні напруження мають випадковий характер, а закони розподілу їх можна встановити лише шляхом систематичного накопичення експериментальних даних. Тому нерівності (2.1, 2.2) можуть виконуватися лише з тією чи іншою ймовірністю, тобто розрахунок механічних систем і елементів конструкцій на міцність необхідно проводити методами теорії ймовірностей або теорії випадкових процесів.

В інженерній практиці випадковий характер основних розрахункових величин враховується під час вибору коефіцієнта запасу, який, як це буде показано нижче, має статистичну природу. Тоді умови статичної міцності використовують у вигляді

$$\sigma_{екв} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{lim}}{n}, \quad (2.3)$$

де $n = n_T$ - для пластичних, $n = n_g$ - для крихких матеріалів. Вибір коефіцієнтів n_T, n_g залежить від методів розрахунку напружень, від точності цих методів, від серйозності наслідків, які спричинить за собою руйнування деталі та від властивостей самого матеріалу. Значення коефіцієнтів запасу назначаються з урахуванням можливих випадкових змін напруження, що можуть бути обумовлені випадковими пошкодженнями та дефектами виробництва. У таблиці А2 наведені орієнтовні значення допустимих напружень при статичному навантаженні для найбільш уживаних матеріалів.

Залежно від критерію працездатності системи детерміновані розрахунки на міцність проводяться за коефіцієнтами запасу міцності за напруженнями n_σ , за граничними навантаженнями n_Q , за довговічністю n_L , за деформаціями, прискореннями, граничними швидкостями і т.д. При цьому один загальний коефіцієнт запасу розчленовують на ряд складових, частинних коефіцієнтів запасу, кожний з яких відображає вплив на міцність елемента конструкції якого-небудь певного чинника або групи чинників. Наприклад, один із коефіцієнтів відображає можливі відхилення механічних характеристик матеріалу від тих, що беруться як розрахункові, інший - відхилення діючих навантажень від їх розрахункових значень і т.д.

Таке розділення загального коефіцієнта запасу дозволяє краще врахувати багатоманітні конкретні умови роботи деталей машин і споруд і проектувати їх з більшою надійністю й економічністю.

Коефіцієнт запасу міцності подають у вигляді добутку

$$n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3.$$

У питанні про частинні коефіцієнти та їх значення до цього часу немає одноманітності. Значення коефіцієнтів запасу міцності, як правило, беруть на підставі досвіду конструювання та експлуатації машин певного типу. У даний час у машинобудуванні є рекомендації користуватися одним, трьома, п'ятьма і навіть десятьма частинними коефіцієнтами запасу міцності. У «Довіднику машинобудівника» рекомендується користуватися трьома частинними коефіцієнтами:

n_1 - коефіцієнт, що враховує випадковість при визначенні навантажень і напружень. Значення цього коефіцієнта при підвищеній точності визначення діючих напружень може братися таким, що

дорівнює 1,2-1,5, при меншій точності розрахунку – 2-3;

n_2 - коефіцієнт, що враховує стохастичні характеристики матеріалу, підвищену його чутливість до недоліків механічної обробки. Коефіцієнт n_2 у розрахунках по границі текучості при дії статичних навантажень можна брати за табл. 2.1 [3] (без урахування впливу абсолютних розмірів) залежно від відношення границь текучості до границі міцності.

Таблиця 2.1

	Досить пластичний матеріал	Пластичний матеріал	Мало-пластичний матеріал	Крихкий матеріал
σ_T / σ_s	0,45-0,55	0,55-0,7	0,7-0,9	
n_2	1,2-1,5	1,4-1,8	1,7-2,3	2,0-3,0

При розрахунку по границі міцності для малопластичних і крихких матеріалів величину n_2 беруть такою:

а) для малопластичних матеріалів (високоміцні сталі при низькому відпуску) $n_2=2-3$;

б) для крихких матеріалів $n_2=3-4$;

в) для дуже крихких матеріалів $n_2=4-6$. При розрахунку на втому коефіцієнт n_2 беруть таким, що дорівнює 1,5-2,0, збільшуючи його для матеріалу зі зниженою однорідністю (особливо для литва) і для деталей великих розмірів до 3,0 і більше;

n_3 - коефіцієнт умов роботи, що враховує ступінь відповідальності деталі, дорівнює 1-1,5.

При розрахунках на міцність систем та елементів використовують дві основні моделі: детерміновану та статистичну (ймовірнісну). Детермінована модель характеризується повною визначеністю її параметрів як зовнішніх впливів (вхідних параметрів), так і реакцій системи на ці впливи (вихідних параметрів). При цьому структура системи та її параметри розглядаються як відомі детерміновані функції змінних стану та часу. Детермінована система описується співвідношеннями, що визначають однозначну відповідність між реалізаціями вхідних та вихідних параметрів. Дослідження процесів та систем у такій моделі зводиться до вивчення перетворення детермінованою системою вхідних параметрів у вигляді заданих функцій часу у вихідні параметри у вигляді детермінованих функцій часу.

У статистичній моделі процеси та поведінка системи залежать від наявності випадкових факторів і характеризуються ймовірнісними

характеристиками. При цьому вхідні та вихідні параметри, так само як і параметри і структура системи або процесу у загальному випадку, є випадковими функціями часу (випадковими процесами), або випадковими величинами.

Під **системою** надалі розумітимемо деяку множину взаємозв'язаних об'єктів, організованих зв'язками у єдине ціле, що виділені з середовища на певний час із певною метою.

З математичної точки зору будь-яку систему, що взаємодіє з навколишнім середовищем, можна описати рівнянням типу

$$u = Lq, \quad (2.4)$$

де q - елементи простору вхідних параметрів Q , що характеризують зовнішні впливи; u - елементи простору вихідних параметрів U , що характеризують поведінку системи; оператор L характеризує структуру та властивості системи. Кожній реалізації зовнішнього впливу q відповідає реалізація поведінки системи u . Рівняння (2.4) встановлює зв'язок між вхідними та вихідними параметрами системи (рис.1). Математична природа просторів Q і U є довільною. Це можуть бути числа, вектори, тензори, функції однієї чи декількох змінних і т.п. Прикладом такої системи є будь-яка пружна система, навантажена зовнішніми силами. Як зовнішні впливи виступають сили, а як параметри поведінки системи – напруження, переміщення чи деформації. У цьому разі оператор L задається рівняннями теорії пружності чи будівельної механіки.

Якщо для кожного параметра u можна однозначно відновити відповідні параметри q , то існує зворотний оператор H , за допомогою якого система може бути описана рівнянням типу

$$Hu = q. \quad (2.5)$$

У задачах теорії пружності, теорії коливань та будівельної механіки поведінка систем описується саме рівняннями типу (2.5), тобто у формі, що не дає розв'язку відносно елементів простору U .

Необхідно відмітити, що вибір просторів Q та U , а відповідно і оператора H або L , не є єдиним, оскільки самі поняття системи та навколишнього середовища є умовними і немає конкретних правил визначення цих просторів. Тому в кожному конкретному випадку залежно від того, як визначена межа між навколишнім середовищем та системою, операторне рівняння (2.4) або (2.5) матиме свій зміст. Крім того, далеко не завжди метою розрахунку є визначення вичерпної інформації про поведінку системи. У прикладних задачах дуже часто обмежуються визначенням значень деяких параметрів в окремих точках. Так, при статичному розрахунку конструкції обмежуються визначенням напружень лише у найбільш відповідальних елементах чи перерізах, переміщень лише у тих точках, де очікуються їх максимальні значення і

т.д. Це збільшує кількість можливих варіантів для вибору просторів Q та U .

Якщо вхідні параметри q є випадковими, тобто являють собою випадкові числа, функції, вектори і т.п., то кожен елемент q з простору Q характеризується деякою ймовірнісною мірою. Так, якщо вхідний параметр є випадковим числом, то воно характеризується функцією розподілу (щільністю ймовірності). Якщо вхідний параметр є випадковою функцією – то вона задається багатомірною функцією розподілу, якщо вхідний параметр – випадковий вектор – то багатомірним сумісним розподілом його компонент. У багатьох прикладних задачах замість повного опису вхідних та вихідних параметрів використовують частковий опис за допомогою математичних сподівань, дисперсій та інших моментів від випадкових величин, моменті та кореляційні функції від випадкових процесів і т.д.

Основною задачею під час дослідження механічних систем під дією випадкових впливів є знаходження характеристик вихідних параметрів за відомими характеристиками вхідних параметрів та параметрів системи. Обернена задача знаходження характеристик вхідних параметрів за відомими характеристиками вихідних параметрів розв'язується тими самими методами, що й основна задача. Розв'язання оберненої задачі суттєво ускладнюється у тому разі, якщо діє декілька зовнішніх впливів і необхідно за поведінкою системи встановити ймовірнісні характеристики кожного з цих впливів окремо. Третю групу задач становлять задачі з визначення параметрів самої системи за відомими характеристиками вхідних та вихідних параметрів (так звана задача про «чорний ящик»). З такими задачами ми, як правило, зустрічаємося у технічній діагностиці й, зокрема, у вібраційній діагностиці, коли за даними вимірювань вібрації системи дають висновок про її надійність та технічний стан. Четверту групу становлять задачі синтезу систем із заданими властивостями стосовно до деякого класу зовнішніх впливів. Як приклад такої задачі можна навести підбір оптимальної структури та оптимальних параметрів віброзахисних систем при випадкових навантаженнях.

Якщо розв'язана основна задача, то, як правило, отримані результати можуть бути використані для розв'язання інших, перелічених вище задач. Тому зосередимо увагу саме на розв'язанні основної задачі.

Вибір методу розв'язання основної задачі суттєво залежить від характеру досліджуваної системи. Надалі розрізнятимемо лінійні та нелінійні системи. Система, що описується операторним рівнянням (2.4), є лінійною, якщо оператор L задовольняє умови

$$\begin{aligned} L[\alpha q] &= \alpha Lq, \\ L[q_1 + q_2] &= Lq_1 + Lq_2, \end{aligned} \quad (2.6)$$

де α - довільне число; q_1, q_2 - зовнішні впливи. Якщо оператор L не задовольняє умови (2.6), то система є нелінійною. Реакція лінійної системи на суму зовнішніх впливів може бути знайдена як сума реакцій, розрахованих від кожного впливу окремо (принцип суперпозиції). Зазначимо, що система, яка є лінійною відносно одних впливів, може бути нелінійною відносно інших впливів. Зокрема, відносно параметричних впливів будь-яку систему слід розглядати як нелінійну.

Залежно від поведінки системи у часі розрізнятимемо **стаціонарні** (якщо властивості системи не змінюються у часі) і **нестаціонарні** (властивості системи є функціями часу) системи. Одна і та сама фізична система залежно від рівня схематизації може бути віднесена як до стаціонарної, так і до нестаціонарної.

Відповідно до аналітичних властивостей оператора системи H розрізнятимемо **вироджені** та **невироджені системи**. Вироджені оператори описують системи, в яких зовнішні впливи та поведінка системи описуються скінченим числом параметрів, зв'язок між якими виражається формулами, що не містять операцій диференціювання чи інтегрування. Вироджений оператор матиме будь-яка система зі скінченим числом ступенів вільності, для якої змінами параметрів та зовнішніх впливів у часі можна знехтувати.

Залежно від способу опису випадкових процесів методи розв'язання основної задачі можуть бути поділені на дві групи – кореляційні методи та методи кінетичних рівнянь.

В основі кореляційних методів лежить зв'язок між кореляційними функціями вхідних та вихідних параметрів системи. Ці зв'язки можуть виражатися через диференціальні або інтегро-диференціальні рівняння. До кореляційних методів відносять: метод функцій Гріна, метод диференціальних рівнянь та метод спектральних зображень.

Друга група методів базується на розв'язанні диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь, що описують еволюцію функцій розподілу випадкових параметрів у часі. Методи кінетичних рівнянь, як правило, використовують до процесів без наслідків (марківських процесів). Тому ці методи доцільно використовувати для задач, у яких вихідні параметри можна розглядати як компоненти деякого багатовимірного марківського процесу. Основною перевагою цих методів є можливість безпосереднього отримання функцій розподілу досліджуваних параметрів. Але реалізація цих методів наштовхується на значні математичні труднощі, пов'язані з розв'язанням диференціальних рівнянь у частинних похідних (особливо під час дослідження нестаціонарних систем).

При ймовірнісних розрахунках на міцність широко використовується поняття надійності. **Надійність** – властивість об'єкта зберігати у часі в установлених межах значення усіх його параметрів, що

характеризують здатність виконувати необхідні функції у заданих режимах та умовах застосування, технічного обслуговування, зберігання та транспортування. Надійність є комплексною властивістю, яка залежно від призначення об'єкта та умов його застосування може включати безвідмовність, довговічність, ремонтпридатність і збереження чи певні поєднання цих властивостей. Припинення виконання чи порушення виконання хоча б однієї з виконуваних об'єктом функцій у теорії надійності називається **відмовою**. До відмов відносять неприпустимі відхилення параметрів системи від розрахункових значень, тимчасові порушення умов нормальної експлуатації системи або повний вихід системи з ладу. Майже всі відмови викликані впливом випадкових факторів, які або закладені у систему під час її виготовлення, або діють на неї в процесі експлуатації. Розрізняють раптові й поступові, конструкційні, виробничі та експлуатаційні відмови. Серед них особливе місце займають відмови, що переводять об'єкт у граничний стан, по досягненні якого подальше використання цього об'єкта є недоцільним або неприпустимим. Трактують відмови як випадкової події є одним із основних положень теорії надійності. Надалі під надійністю будемо розуміти **ймовірність неруйнування, або безвідмовної роботи**, яка полягає у тому, що у межах заданого часу не відбудеться жодної відмови об'єкта.

Знання характеристик міцності матеріалів і характеристик процесів навантаження дозволяє провести повний розрахунок надійності на міцність конструкції. При цьому можуть бути визначені:

- 1) ймовірність однократного перевищення діючими напруженнями своїх небезпечних значень (границі міцності або границі текучості) та (або) визначено відповідний цій імовірності час навантаження;
- 2) ймовірнісні характеристики накопиченого до деякого моменту часу втомного пошкодження, або втомна довговічність конструкції, що визначається за моментом появи втомної тріщини;
- 3) для заданих моментів часу ймовірності неперевихнення коефіцієнтами інтенсивностей напружень своїх небезпечних значень, або довговічність конструкції.

Перший вид розрахунку називають імовірнісним статичним розрахунком конструкції, другий – імовірнісним розрахунком втомної довговічності, третій – імовірнісним розрахунком живучості.

Імовірнісний розрахунок на міцність та вібрацію механічних систем та елементів конструкцій полягає у знаходженні характеристик вихідних параметрів за відомими характеристиками вхідних параметрів та параметрів системи і визначення ймовірності неперевихнення окремими вихідними параметрами встановлених рівнів (імовірності безвідмовної роботи). На першому етапі у детермінованій постановці

методами опору матеріалів, теорії пружності чи будівельної механіки визначають діючі напруження або переміщення (залежно від обраного критерію міцності). Далі за статистичними даними про мінливість діючих навантажень, геометричних параметрів та умов роботи визначають закони розподілу цих характеристик або їх основні моменти розподілу. Після цього на основі аналітичних залежностей між напруженнями (переміщеннями) та навантаженнями, геометричними параметрами й умовами роботи визначають імовірнісні характеристики діючих напружень методами теорії ймовірностей чи теорії випадкових функцій.

Другим етапом є розрахунок надійності системи та порівняння її з нормативним значенням чи визначення параметрів цієї системи за заданою надійністю. Для цього необхідно мати статистичні дані про граничні напруження (переміщення), що дозволяють визначити їх імовірнісні характеристики.

Наведена вище методика ймовірнісного розрахунку надійності систем та елементів конструкції дозволяє проаналізувати чутливість надійності до розкиду механічних характеристик матеріалів, навантажень та геометричних параметрів. Це дозволяє підвищити надійність систем та елементів шляхом удосконалення технології виготовлення чи економічно обґрунтованої зміни матеріалу.

Нормативна надійність залежить від вибору розрахункової схеми, точності проведення розрахунків, достовірності статистичних характеристик навантаження, механічних характеристик матеріалу та параметрів системи. Значення нормативної надійності також повинне враховувати ступінь відповідальності відмов та базуватися на статистичних даних про відмови аналогічних систем та конструкцій. Встановлення значень нормативної надійності, так само як і коефіцієнта запасу, є складною комплексною техніко-економічною задачею. З практики функціонування механічних систем можна сформулювати задачу оптимізації надійності систем у загальному вигляді. Так, система з низькою надійністю має малий строк служби, швидко виходить з ладу і потребує витрат на ремонт. Підвищення надійності неодмінно пов'язане зі збільшенням вартості системи. Тобто у загальному випадку задача оптимізації надійності зводиться до відшукування максимуму надійності за умови мінімуму затрат.

Якщо зовнішні навантаження є випадковими процесами, то характеристики системи також будуть випадковими процесами. Тобто при визначенні надійності системи маємо задачу статистичної динаміки. Введемо у розгляд простір V , елементи якого характеризуватимуть якість системи. Кожній траєкторії стану $u(t)$ у просторі U відповідатиме траєкторія $v(t)$ у просторі якості V . Зв'язок між

елементами цих просторів та траєкторіями також можна описати операторним рівнянням

$$\dot{v} = Mv, \quad (2.7)$$

де оператор M вважається заданим.

Значення елементів простору V , що є допустимими за технічними умовами експлуатації системи, створюють область допустимих значень Ω . Межа цієї області відповідає граничним станам. Якщо вектор $v(t)$ знаходиться всередині цієї області, то параметри якості системи не виходять за встановлені межі. Перетин вектором $v(t)$ межі області допустимих станів Ω у напрямку зовнішньої нормалі розглядається як випадковий викид елемента із заданої області й означає відмову системи. Тобто як основний показник надійності у цьому випадку беруть імовірність перебування параметрів системи в області допустимих станів Ω на заданому відрізку часу $[t_0, t]$, а за відмову – випадковий викид з цієї області

$$P(t) = P(v(\tau) \in \Omega_0) \tau \in [t_0, t]. \quad (2.8)$$

Наприклад, під час роботи насосного агрегату, можливі задирки диска гідроп'яти. При задирках відбувається збільшення витрат, порушення розвантаження осьової сили або ж заклинювання гідроп'яти, що може призвести до виходу з ладу всього насосного агрегату. Якщо за параметр якості взяти відносне осьове переміщення диска гідроп'яти і розглядати його як випадкову функцію, то задача ймовірності задирки еквівалентна задачі про ймовірність перевищення $x(t) \geq x_0$, де x_0 - вільний хід гідроп'яти (рис. 2.2).

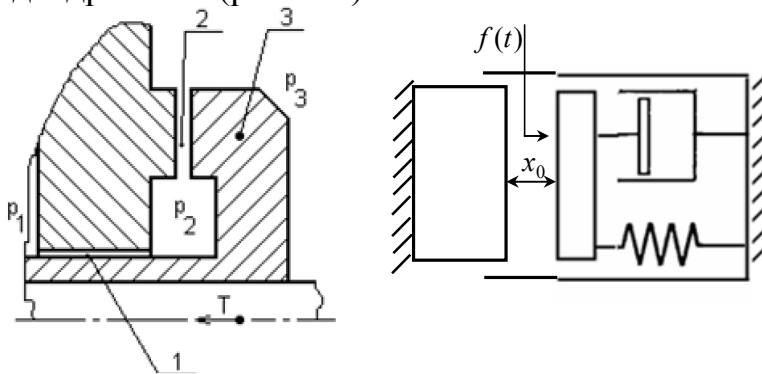


Рисунок 2.2 – Схема пристрою автоматичного розвантаження осьової сили (гідроп'яти)

Поняття якості має широкий зміст. Вибір простору якості залежить від прийнятої при розрахунках моделі відмови системи. Далі будуть розглянуті випадки відмов, що з'являються як результат досягнення одновимірним випадковим вектором якості $v(t)$ граничного випадкового рівня R . Якщо сумісна щільність імовірності $f(v, R, t)$ відома, то надійність системи визначатиметься за формулою

$$H(t) = \iint_{v < R} f(v, R, t) dR dv. \quad (2.9)$$

Якщо можна припустити, що v та R є некорельованими, то

$$f(v, R, t) = f_v(v, t) f_R(R).$$

У загальному випадку навантаження та міцність - це випадкові функції часу, але при заданому терміні служби елемента час у більшості випадків можна виключити з розрахунку й описувати навантаження та міцність не випадковими функціями, а випадковими величинами з відомими законами розподілу.

Параметри якості й відповідно граничні рівні визначаються виходячи з обраного критерію працездатності системи. Якщо розрахунок проводиться на міцність, то надійність системи за критерієм міцності можна записати так:

$$H = P(R - Q > 0), \quad (2.10)$$

де Q - найбільше значення напруження (аналітичний вираз цієї функції визначається з розрахунку детермінованої задачі); R - границя текучості, границя міцності.

При розрахунках на міцність рівняння (2.5) є диференціальним рівнянням рівноваги у переміщеннях, якщо зовнішнє навантаження не залежить від часу, або диференціальним рівнянням руху, якщо зовнішнє навантаження є випадковим процесом. Тоді рівняння (2.7) визначатиме зв'язок між напруженням та переміщеннями (узагальнений закон Гука).

Якщо проводиться розрахунок на жорсткість системи, то параметром якості буде переміщення $u(t)$, а як граничний рівень беруть допустиме граничне зміщення. У цьому випадку оператор $M \equiv 1$. Надійність системи за критерієм жорсткості також визначатиметься за формулою (2.10), де Q - найбільше значення переміщення; R - граничне зміщення.

Якщо проводиться розрахунок на стійкість, то за параметр якості беруть зовнішнє навантаження q , а за граничний рівень - її критичне значення. Тоді надійність системи також визначатиметься за формулою (2.10). Наприклад, якщо Q - робочий тиск, то R - тиск руйнування, якщо Q - стискальне зусилля, то R - критична сила втрати стійкості і т.п.

Разом з тим вибір тієї або іншої пари параметрів певною мірою довільний. Так, для сферичного балона діаметром D і завтовшки стінки δ , навантаженого внутрішнім тиском p , можна вважати навантаженням тиск p , напруження $pD/(4\delta)$ або зусилля $p\pi D^2/4$ - подаючи відповідно граничний рівень як руйнівний тиск, границю міцності або руйнівне зусилля. Всі три варіанти правомірні, але в першому з них чіткіше розділені зовнішня дія і параметри конструкції.

Надалі з метою узагальнення розрахунків на міцність, жорсткість та стійкість для однопараметричних систем граничний рівень характеризуватимемо несучою здатністю системи.

На сьогодні накопичений великий обсяг експериментальних даних про розподіли фізико-механічних властивостей різних матеріалів. Для характеристик міцності, як правило, використовують нормальний або логарифмічно нормальний закон, розподіл Вейбула та гамма-розподіл. Є також багато теоретичних робіт з обґрунтування законів розподілу характеристик міцності, що базуються на різних моделях статистичного руйнування [3,11,16]. Серед них можна виділити три моделі, що мають чіткий фізичний зміст:

1) модель найслабкішої ланки, що приводить до розподілу Вейбула;

2) модель класичного пучка, що припускає зміцнення слабкої ланки і перерозподіл напружень між сусідніми ланками, та приводить до нормального розподілу;

3) модель з однорідним розподілом дефектів, що приводить до гамма-розподілу.

Необхідно відмітити, що нормальний розподіл частіше зустрічається у теоретичних розрахунках, хоча він не дуже зручний для опису розподілу міцності, оскільки має межі зміни від $-\infty$ до $+\infty$, тоді як негативні значення міцності не мають сенсу. Проте коли коефіцієнт варіації менше 0,3, то ймовірність появи негативних значень міцності настільки мала, що нею можна знехтувати. Крім того, властивості міцності сплавів краще описуються логарифмічно нормальним законом або розподілом Вейбула. Розподіл довговічності часто описується розподілом з лівою асиметрією і добре апроксимується логарифмічно нормальним законом або гамма-розподілом [11].

Розподіл напружень та переміщень залежить від законів розподілу навантажень, геометричних параметрів та фізичних характеристик матеріалу, тобто є функцією випадкових аргументів, отже, він може бути знайдений аналітично перетворенням щільності ймовірності. Якщо одержаний вираз незручний для аналітичних розрахунків, то його можна у відомих межах апроксимувати одним із відомих законів розподілу ймовірності або подати зваженою сумою нормальних законів [6].

Вибір розподілу для конкретного типу навантажень повинен ґрунтуватися як на уявленнях про фізичну природу і властивості цих навантажень, так і на статистичному аналізі результатів спостережень. У розрахунках вони найчастіше описуються нормальним законом розподілу. Використання нормального закону виправдано тим, що у випадку сумісної дії досить великої кількості випадкових факторів, що мають різні закони розподілу, якщо серед них немає такого, що превалює, результуючий процес матиме, згідно з центральною

граничною теоремою теорії ймовірностей Мавра-Лапласа, розподіл, близький до нормального. На практиці розподіли для багатьох факторів відмінні від нормального хоча б через те, що за фізичним змістом цілий ряд параметрів (границя міцності, товщина і т.п.) не можуть мати від'ємних значень. Але усічення розподілів, як правило, незначні, що дозволяє досить широко використовувати нормальний закон розподілу. Для машинобудівних конструкцій розподіл навантажень, як правило, залежить від тривалості спостереження. Це є відображенням того факту, що навантаження є не просто випадковими величинами, а випадковими функціями часу, тобто є випадковими процесами. Для опису ймовірності таких процесів необхідно мати осцилограму тривалої реалізації діючих навантажень.

Під час проведення розрахунків на міцність функція надійності визначається через щільність розподілу абсолютних максимумів навантаження за термін служби конструкцій. Для цього розподілу, як правило, використовують один із асимптотичних розподілів максимальних значень, що найчастіше зводиться до розподілу Вейбула.

Випадковий характер геометричних параметрів пов'язаний з технологією виготовлення деталей і визначається допуском на розмір, який регламентується стандартами. Тому, як правило, розподіл геометричних розмірів підлягає нормальному закону.

2.2. Методи визначення ймовірнісних характеристик параметрів стану

Числові характеристики параметрів стану $u(t)$ (математичні сподівання, дисперсії та ін.), необхідні для розрахунку надійності за міцністю, на етапі проектування машин найчастіше не відомі. Іноді неможливо встановити їх безпосередньо за даними досліджень і в період випробувань машин через неможливість прямого вимірювання параметрів стану. Тому виникає задача знаходження числових характеристик розподілу (у загальному випадку – закону розподілу) параметра стану за відомими числовими характеристиками (законами розподілу) збуджувальних параметрів, що обумовлюють стохастичний характер функціонування даного об'єкта.

Розв'язок такої задачі базується на математичній моделі процесу функціонування об'єкта як динамічної системи. За основу береться детермінована модель функціонування, що використовується під час проектування об'єкта. Модель відображає перетворення випадкових вхідних параметрів (збуджень) у вихідні параметри динамічної системи (параметри стану) за допомогою рівнянь (2.4) або (2.5).

Моделі, які відповідають фізичним процесам функціонування конкретних вузлів, агрегатів і систем агрегатів, дуже різноманітні. Їх

розроблення ґрунтується на теоретичній механіці, аеродинаміці, теорії польоту, теплотехніці, будівельній механіці та ряду інших дисциплін, але виклад специфічних особливостей моделей не є метою цього навчального посібника. Обмежимося загальним математичним формулюванням моделі функціонування.

Модель функціонування як залежність параметрів стану u_n від збуджень q_i у достатньо загальному вигляді є системою s звичайних диференціальних рівнянь першого порядку і $(n-s)$ алгебраїчних рівнянь зв'язку:

$$\begin{cases} \frac{du_n}{dt} = F_l(u_n, q_i, t); \\ \phi_r(u_n, q_i) = 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

де $i = 1, 2, \dots, k$; $n = 1, 2, \dots, n$; $l = 1, 2, \dots, s$; $r = s + 1, \dots, n$.

F_l, ϕ_r - відомі функціональні залежності. Збуджувальні параметри q_i - випадкові величини, в загальному випадку корельовані. До вигляду (2.11) вдається звести більшість моделей попередніми перетвореннями: зниженням порядку похідних, розв'язком диференціальних рівнянь відносно похідних, заміною обмежень типу нерівностей, рівністю, зведенням випадкових функцій до системи випадкових величин.

Іноді, наприклад при визначенні надійності конструкції в умовах вібрацій, доцільно зберегти подання збуджувальних дій у вигляді випадкових процесів і скористатися як моделлю передаточною функцією із застосуванням перетворення Фур'є (див. п. 1.8).

Розглянемо модель

$$\frac{du}{dt} = F(u, q_i) \quad (2.12)$$

припустивши, що система має тільки один параметр стану u .

Універсальним методом знаходження закону розподілу $f(u)$ параметра стану за відомими законами розподілу $f_i(q_i)$ збуджень, що придатний практично для будь-яких математичних моделей, є метод статистичного моделювання (метод статистичних випробувань, або метод Монте-Карло).

Теоретичною основою методу статистичного моделювання є граничні теореми теорії ймовірностей.

Суть статистичного моделювання [9,14] полягає у тому, що залежність (2.12) параметра стану від збуджень реалізується багато разів, кожного разу при нових випадкових значеннях q_i . Набуті випадкові значення параметра стану піддаються статистичній обробці подібно результатам натурних випробувань об'єкта. Інакше кажучи, на

математичній моделі, як аналогу даного об'єкта, багато разів «програється» стохастичний процес функціонування. Кожна операція задання шляхом випадкового вибору значень збуджувальних параметрів q_i , розв'язок рівняння (2.12) і знаходження випадкової реалізації параметра $u(t)$, що відповідає цим збудженням, називається спробою.

Статистичне моделювання ґрунтується на формуванні послідовності випадкових чисел, що підлягають заданому закону розподілу, причому початковим є, як правило, рівномірний розподіл в інтервалі $[0,1]$.

Для отримання випадкових чисел використовують генератори випадкових чисел та алгоритми формування псевдовипадкових чисел на ПК. Так, у системі комп'ютерної математики Mathcad існує ряд вбудованих функцій, що дозволяють набувати значення випадкових величин за тим або іншим законом розподілу. Наприклад, функція $\text{norm}(m,n,s)$ дасть вектор m випадкових чисел, що мають нормальний закон розподілу з математичним сподіванням n і середньоквадратичним відхиленням s , $\text{rnd}(x)$ – функція генерації випадкових чисел з рівномірним розподілом в інтервалі $[0,x]$ і т.д.

За допомогою випадкових чисел r_i , рівномірно розподілених в інтервалі $[0,1]$, достатньо просто моделюють випадкові події. Нехай $P(A)$ - задана ймовірність деякої випадкової події A . Появі події A ставиться у відповідність потрапляння випадкового числа r_i на відрізок числової осі від 0 до $P(A)$. Вважається, що подія A має місце, якщо $r_i \leq P(A)$. При моделюванні декількох випадкових подій A_1, A_2, A_3, \dots випадкові числа $r_i, r_{i+1}, r_{i+2}, \dots$ послідовності порівнюються аналогічно до ймовірності кожної з подій.

Реалізація x_i деякої випадкової величини X , що має математичне сподівання m_x і середнє квадратичне відхилення S_x , формується при моделюванні у вигляді

$$x_i = m_x + \xi_i S_x,$$

де ξ_i - випадкове число, що дозволяє відтворити в серії проб заданий закон розподілу випадкової величини X ; інакше кажучи, ξ_i є реалізацією випадкової величини ξ , що підлягає тому самому заданому закону розподілу, але з нульовим математичним сподіванням й одиничною дисперсією.

На практиці, як правило, вимагається моделювати випадкові величини з відмінними від рівномірного законами розподілу. Перетворення початкового рівномірного в інтервалі $[0,1]$ розподілу в заданий із щільністю $f(x)$ можна здійснити різними методами.

Метод нелінійного перетворення, оберненого функції розподілу, ґрунтується на властивості інтегральної функції розподілу, що полягає у тому, що величина

$$r = \int_{-\infty}^{x_*} f(x) dx \quad (2.13)$$

розподілена рівномірно від 0 до 1. Розв'язок рівняння (2.13) відносно x дає залежність, що перетворює послідовність рівномірно розподілених випадкових чисел r_i у послідовність випадкових чисел x_i , розподілених згідно із законом $f(x)$. Наприклад, якщо $f(x)$ - щільність експоненціального розподілу, то

$$x_i = -\frac{1}{\lambda} \ln r_i.$$

Аналогічно можна моделювати розподіл Релея:

$$x_i = \sigma \sqrt{-2 \ln r_i}.$$

Не завжди вдається одержати розв'язок рівняння (2.13) в елементарних функціях. Іноді для моделювання випадкових величин використовуються специфічні властивості законів розподілу. Так, моделювання нормального розподілу ґрунтується на центральній граничній теоремі, згідно з якою сума досить великого числа n випадкових величин, рівномірно розподілених від 0 до 1, має розподіл, близький до нормального, з математичним сподіванням $n/2$ і дисперсією $n/12$. Виконавши деякі перетворення, можна довести, що нормальну випадкову величину X з параметрами m_x та S_x можна «розіграти» за формулою

$$X = S_x \sqrt{\frac{12}{n}} \left(\sum_{i=1}^n r_i - 0,5n \right) + m_x.$$

«Розігрування» системи незалежних випадкових величин зводиться до «розіграшу» кожної з випадкових величин окремо. Так, за допомогою відповідних лінійних перетворень для двох незалежних нормальних величин X_1, X_2 з довільними параметрами m_{x_1}, S_{x_1} та m_{x_2}, S_{x_2} справедливі такі формули:

$$X_1 = S_{x_1} \sqrt{-2 \ln r_1} \cos 2\pi r_2 + m_{x_1},$$

$$X_2 = S_{x_2} \sqrt{-2 \ln r_1} \sin 2\pi r_2 + m_{x_2},$$

де r_1, r_2 - два незалежних екземпляри випадкового числа від 0 до 1.

Перетворення нормально розподіленої випадкової величини X з математичним сподіванням m_x і дисперсією D_x у нормально розподілену випадкову величину Y з параметрами m_y і S_x^2 :

$$Y = m_y + (X - m_x)(S_y / S_x).$$

Для деяких видів задач важливо вміти моделювати n -вимірний випадковий вектор \mathbf{z} параметрів стану об'єкта, тобто систему n корельованих випадкових величин Z_1, Z_2, \dots, Z_n . Для цієї мети найпоширенішим є моделювання в рамках кореляційної теорії методом лінійного перетворення, суть якого полягає в такому. Замінімо вектор \mathbf{z} із корельованими складовими вектором \mathbf{x} із некорельованим центрованим складовими так, що

$$\left. \begin{aligned} Z_1 - m_{z_1} &= X_1; \\ Z_2 - m_{z_2} &= a_{21}X_1 + X_2; \\ Z_3 - m_{z_3} &= a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + X_3; \\ &\dots\dots\dots \\ Z_n - m_{z_n} &= a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \dots + a_{n,n-1}X_{n-1} + X_n \end{aligned} \right\}. \quad (2.14)$$

Елементи a_{ij} матриці перетворення і дисперсії D_x знайдемо за заданими математичними сподіваннями m_{z_i} і кореляційною матрицею $\|K_{ij}\|$ вектора \mathbf{z} з умови некорельованості випадкових величин X_i :

$$M[X_i \cdot X_j] = 0 \text{ при } i \neq j; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.15)$$

Знаходячи послідовно математичні сподівання добутків першої рівності (2.14) на другу, першої на третю, другої на третю і т.д., а також математичні сподівання квадратів рівності (2.14) і використовуючи умову (2.15), одержуємо залежності для визначення коефіцієнтів a_{ij} і дисперсій D_{x_i} :

$$D_{x1} = K_{11}; \quad a_{21} = \frac{K_{21}}{D_{x1}}; \quad D_{x2} = K_{22} - a_{21}^2 D_{x1};$$

$$a_{31} = \frac{K_{31}}{D_{x1}}; \quad a_{32} = \frac{K_{32} - a_{21}a_{31}D_{x1}}{D_{x2}}; \quad \dots,$$

або в загальному вигляді:

$$\left. \begin{aligned} a_{i1} &= \frac{K_{i1}}{D_{x1}}, \quad i = 2, \dots, n; \\ a_{ij} &= \left(\frac{1}{D_{xj}} \right) \left(K_{ij} - \sum_{r=1}^{j-1} a_{ir} a_{jr} D_{xr} \right), \quad j = 2, \dots, i-1; \\ D_{xi} &= K_{ii} - \sum_{r=1}^{i-1} a_{jr}^2 D_{xr}, \quad i = 2, \dots, n. \end{aligned} \right\}.$$

Таким чином, моделювання випадкового вектора \mathbf{z} зводиться до

моделювання некорельованих центрованих випадкових величин X_i з дисперсіями D_{x_i} і виконання перетворення (2.14).

Випадковий процес $Z(t)$ моделюють аналогічно багатовимірному випадковому вектору, розглядаючи фіксовані перерізи як корельовані випадкові величини. При цьому для стаціонарного випадкового процесу найпростішим є розкладання в ряд Фур'є, в якому роль координатних функцій виконують тригонометричні функції. Докладніші відомості про техніку статистичного моделювання див. у [14,29].

Статистичне моделювання – універсальний метод, широко використовуваний у розрахунках надійності. Проте він має один недолік – у процесі моделювання не видно, як впливають збудження на вихідні параметри моделі.

Тому разом із статистичним моделюванням на практиці часто застосовують різні наближені методи, що ґрунтуються на розкладанні інтеграла рівняння (2.12) у степеневий або тригонометричний ряд за випадковими збуджувальними параметрами X_i , а в простих випадках – метод лінеаризації. Ці методи застосовні, якщо не вимагається знайти закон розподілу параметра стану, а достатньо визначити його моменти (математичне сподівання, дисперсію) за відомими моментами збуджувальних параметрів.

Розглянемо метод лінеаризації (метод малих збуджень), ідея якого полягає в апроксимації нелінійного в загальному випадку розв'язку (2.12) лінійним, статистично еквівалентним початкової залежності. Метод ґрунтується на допущенні малості випадкових відхилень збуджувальних параметрів q_i від їх математичних сподівань m_{q_i} . Він зручний, якщо залежність параметра стану u від збуджувальних параметрів q_i має явний однозначний аналітичний вираз

$$U = \varphi(Q_i \quad i=2, \dots, k) \quad (2.16)$$

при відомих законах розподілу випадкових величин Q_i .

Розкладемо функцію (2.16) у ряд Тейлора в околі точки $(m_{q_1}, m_{q_2}, \dots, m_{q_k})$

$$U \cong \varphi(m_{q_1} \quad m_{q_n} + \sum_{i=1}^n (q_i - m_{q_i}) \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \Big|_{q=m} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (q_i - m_{q_i}) (q_j - m_{q_j}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{q=m} + O(q) \quad (2.17)$$

де $O(\alpha)$ – залишковий член. Індекс « m » при частинних похідних свідчить про те, що їх обчислюють у точці $(m_{q_1}, m_{q_2}, \dots, m_{q_k})$. Узявши математичне сподівання виразу (2.17), отримаємо

$$m_U = \varphi(m) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{q=m} + O(q) .$$

Залишаючи два члени ряду (2.17), отримаємо вираз для дисперсії

$$D_U \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \right)_{q=m}^2 D_{q_i} + 2 \sum_{i < j} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \Big|_{q=m} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_j} \Big|_{q=m} \right) K_{ij} S_{q_i} S_{q_j} . \quad (2.18)$$

Позначення $i < j$ свідчить про те, що підсумовування поширюється на всі можливі парні поєднання величин Q_i і Q_j . Похідні $\partial \varphi / \partial q_i$ є коефіцієнтами впливу збуджень Q_i на параметр стану U .

Для випадку, коли випадкові аргументи q_i є некорельованими, можна записати

$$m_U \approx \varphi(m) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n D_{q_i} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_i^2} \Big|_{q=m} \quad . D_U \approx \sum_{i=1}^n D_{q_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \Big|_{q=m} \right)^2 \quad (2.19)$$

Якщо дисперсії аргументів D_i можна вважати малими, то

$$m_U \approx \varphi(m_{q_i}) .$$

За врахування трьох членів розкладання матимемо

$$D_U = \sum_{i=1}^n D_{q_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \Big|_{q=m} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_i^2} \Big|_{q=m} \right) D_{q_i}^2 + \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{q=m} \right) D_{q_i} D_{q_j} . \quad (2.20)$$

Приклад. Оцінити методом лінеаризації числові характеристики коефіцієнта запасу міцності n , що дорівнює відношенню несучої здатності R та діючого навантаження F . Середні значення R і F відповідно дорівнюють $m_R = 4 \cdot 10^3 \text{ Н}$ і $m_F = 2 \cdot 10^3 \text{ Н}$; коефіцієнти варіації $v_R = 0,12$ і $v_F = 0,15$.

Середнє значення коефіцієнта запасу міцності

$$m_n = \frac{m_r}{m_F} = \frac{4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3} = 2 .$$

Середнє квадратичне відхилення функції $n = R / F$

$$S_n = \sqrt{\left(\frac{\partial n}{\partial R} \right)_{m_R}^2 S_R^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial F} \right)_{m_F}^2 S_F^2} = \sqrt{\frac{S_R^2}{m_R^2} + \frac{S_F^2 m_R^2}{m_F^4}} .$$

Ураховуючи, що $v_R = S_R / m_R$, $v_F = S_F / m_F$, отримуємо значення середнього квадратичного відхилення коефіцієнта запасу

$$S_n = m_n \sqrt{v_R^2 + v_F^2} = 2 \sqrt{0,12^2 + 0,15^2} = 0,384 .$$

Для спрощення потрібно по можливості так вибрати збудження, щоб на підставі яких-небудь фізичних міркувань їх можна було вважати

незалежними. Виразами, аналогічними (2.20), можна подати коефіцієнт варіації v_z або граничне відхилення Δz параметра стану, використовуючи відповідно коефіцієнти варіації v_{x_i} або граничні відхилення Δx_i збуджувальних параметрів.

Під час проектування, як правило, бувають відомі розрахункові (середні) значення \bar{x}_i і можливі граничні відхилення Δx_i (допуски) збуджувальних параметрів. При інженерних розрахунках замість математичних сподівань m_{x_i} підставляють середні значення \bar{x}_i , а середні квадратичні відхилення знаходять за формулою

$$S_{x_i} = \frac{\Delta x_i}{k_\gamma}, \quad (2.21)$$

де k_γ - число середніх квадратичних відхилень, що відповідає ймовірності γ , з якою випадкові відхилення, що перевищують Δx_i , вважають практично неможливими. Наприклад, значенню $k_\gamma = 3$ при нормальному розподілі відповідає $\gamma = 0.9973$. Для інших значень ймовірності значення k_γ беруть із таблиці

P	0,9	0,95	0,98	0,99	0,995	0,999
k	3,29	3,92	4,66	5,16	5,62	6,38

При визначенні механічних характеристик матеріалів указують середні значення і середні квадратичні відхилення або коефіцієнти варіації. За відсутності таких даних коефіцієнт варіації границі витривалості можна обирати в середньому 0,03...0,04 для покращених чи нормалізованих сталей та 0,05...0,07 для сталей з термічно зміцненою поверхнею.

2.3. Імовірність неруйнування для випадку, коли характеристики міцності матеріалу – детерміновані величини

Для пружних систем максимальні розрахункові напруження в небезпечному перерізі у загальному вигляді можна подати так

$$\sigma = \frac{Q}{A}, \quad (2.22)$$

де Q – навантаження, A - функція, що визначається геометричними параметрами конструкції. Конкретний вигляд (2.22) отримують при розв'язанні детермінованої задачі напружено-деформованого стану елемента. У курсі опору матеріалів Q - внутрішні силові фактори, A -

геометрична характеристика поперечного перерізу (при розтягуванні-стисканні та зрізі це площа поперечного перерізу, при скрутці та згинанні – відповідні моменти опору).

Якщо у (2.22) випадковим є навантаження з відомою щільністю розподілу $f(q)$, то закон розподілу максимальних напружень можна визначити за формулою (1.7)

$$g(\sigma) = f(\sigma a) a. \quad (2.23)$$

При такому перетворенні закони розподілу навантаження і напруження збігаються, причому змінюються лише параметри цих законів.

Якщо на конструкцію діє одночасно декілька випадкових навантажень q_i інтенсивністю c_i , то Q являтиме собою лінійну комбінацію цих випадкових величин:

$$Q = \sum c_i q_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

У загальному випадку щільність імовірності $f(q)$ також знаходиться за формулою (1.8):

$$f(q) = \frac{1}{c_1} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int f[(q - \sum_{i=2}^n c_i q_i) / c_1, q_2, \dots, q_n] dq_2 \dots dq_n, \quad (2.24)$$

де $f(q_1, \dots, q_n)$ – сумісна щільність розподілу випадкових величин q_i . У випадку некорельованості параметрів навантаження остання формула набере вигляду

$$f(q) = \frac{1}{c_1} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int f_1[(q - \sum_{i=2}^n c_i q_i) / c_1,] f_2(q_2) \dots f_n(q_n) dq_2 \dots dq_n, \quad (2.25)$$

де $f_i(q_i)$ – щільність імовірності випадкової величини q_i .

В останньому випадку можна скористатися принципом незалежності дії сил і записати

$$\sigma = \sum c_i \sigma_i,$$

де щільність імовірності випадкових величин σ_i також може бути визначена за формулою (1.8).

Розглянемо випадок, коли, крім навантаження, випадковими є і геометричні параметри конструкції. Виходячи з фізичного змісту параметрів, можна припустити, що Q і A – випадкові некорельовані величини. Тоді сумісну щільність розподілу можна подати у вигляді

$$f(q, a) = f_1(q) f_2(a),$$

де $f_2(a)$ – щільність імовірності величини A .

Тоді за формулою (1.9) закон розподілу максимальних напружень матиме вигляд

$$f(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} a f_1(\sigma a) f_2(a) da. \quad (2.26)$$

Тобто маємо задачу визначення надійності однопараметричної системи, параметр якості якої (напруження) є випадковою величиною з відомою щільністю ймовірності. За відомою щільністю розподілу ймовірність неперевищення заданого рівня σ_* визначатиметься за формулою

$$P = \int_{-\infty}^{\sigma_*} f(\sigma) d\sigma = F(\sigma_*). \quad (2.27)$$

Для більшості практичних задач геометричний параметр A є степеневою функцією характерного розміру перерізу. Крім того зазвичай припускають, що розмір перерізу - це випадкова величина з нормальним законом розподілу. Так, при розтягуванні-стисканні $A = \alpha d^2$, при скруті та згинанні $A = \alpha d^3$, де α - стале число, а d - характерний розмір перерізу.

Для розтягування-стискання за формулою (1.7) знаходимо

$$\begin{aligned} g(a) &= f(\sqrt{a/\alpha}) \frac{1}{2\sqrt{\alpha a}} + f(-\sqrt{a/\alpha}) \frac{1}{2\sqrt{\alpha a}} = \\ &= \frac{1}{2S_d \sqrt{2\pi\alpha a}} \left\{ \exp\left[-\frac{(\sqrt{a/\alpha} - m_d)^2}{2S_d^2}\right] + \exp\left[-\frac{(\sqrt{a/\alpha} + m_d)^2}{2S_d^2}\right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

де m_d і S_d - математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення випадкової величини d . Перші два моменти розподілу дорівнюють

$$m_A = \alpha m_d^2 (1 + \nu_d^2), \quad D_A = 4\alpha^2 S_d^2 m_d^2 (1 + \nu_d^2 / 2), \quad (2.29)$$

де $\nu_d = \frac{S_d}{m_d}$.

Для згинання та скруту за формулою (1.7) отримаємо

$$g(a) = \frac{a^{-\frac{2}{3}}}{3\sqrt{2\pi}S_0} \exp\left[-\frac{(a^{\frac{1}{3}} - m_0)^2}{2S_0^2}\right], \quad (2.30)$$

де $m_0 = m_d \alpha^{\frac{1}{3}}$, $S_0 = S_d \alpha^{\frac{1}{3}}$.

Математичне сподівання дорівнюватиме

$$m_A = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}S_0} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(a^{\frac{1}{3}} - m_0)^2}{2S_0^2}\right] a^{-\frac{2}{3}} da.$$

Зробимо заміну $x = a^{\frac{1}{3}}$, тоді $dx = \frac{1}{3} a^{-\frac{2}{3}} da$, а

$$m_A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_0} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \exp\left[-\frac{(x-m_0)^2}{2S_0^2}\right] dx.$$

Зробимо ще одну заміну $t = (x-m_0)\sqrt{2}S_0$. Тоді

$$m_A = \frac{(\sqrt{2}S_0)^3}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (t+c)^3 e^{-t^2} dt,$$

де $c = m_0/\sqrt{2}S_0$. Враховуючи те, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2} dt = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} t^S e^{-t^2} dt = \frac{S-1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} t^{S-2} e^{-t^2} dt,$$

остаточно отримаємо

$$m_A = \alpha m_d^3 (1 + 3v_d^2).$$

Використовуючи аналогічні заміни змінних у відповідних інтегралах, можна отримати

$$M[A^2] = \alpha^2 m_d^6 (1 + 15v_d^2 + 45v_d^4 + 15v_d^6).$$

Тоді

$$D_A = M[A^2] - m_A^2 = 9\alpha^2 D_d m_d^4 (1 + 4v_d^2 + 5v_d^4/3). \quad (2.31)$$

Аналогічно для $A = \alpha d^4$ можна отримати

$$g(a) = \frac{a^{\frac{3}{4}}}{4\sqrt{2\pi}S_0} \left\{ \exp\left[-\frac{(a^{\frac{1}{4}} - m_0)^2}{2S^2}\right] + \exp\left[-\frac{(a^{\frac{1}{4}} + m_0)^2}{2S^2}\right] \right\},$$

де $m_0 = m_d \alpha^{1/4}$, $S_0 = S_d \alpha^{1/4}$.

Перші два моменти цього розподілу дорівнюватимуть

$$m_A = \alpha m_d^4 (1 + 6v_d^2 + 3v_d^4), \quad (2.32)$$

$$D_A = 16\alpha^2 D_d m_d^6 (1 + 10,5v_d^2 + 24v_d^4 + 6v_d^6).$$

У випадку, коли закон розподілу величини A невідомий, то її перші два моменти можна знайти наближено, розкладаючи функцію у ряд Тейлора.

У загальному випадку $A = f(d) = \alpha d^n$. Якщо скористатися розкладанням вихідної функції у ряд, то за формулами (2.19) матимемо

$$m_A \approx f(m_d) = \alpha m_d^n, \quad D_A \approx S_d^2 [f'(m_d)]^2 = n^2 \alpha^2 S_d^2 m_d^{2n-2}. \quad (2.33)$$

Якщо взяти три члени ряду, то

$$\begin{aligned}
 m_A &= \alpha m_d^n [1 + 0.5n(n-1)v_d^2], \\
 D_A &= n^2 \alpha^2 S_d^2 m_d^{2n-2} [1 + 0.5(n-1)^2 v_d^2].
 \end{aligned}
 \tag{2.34}$$

Під час проектування систем і конструкцій трапляються випадки, коли закони розподілу навантажень і геометричних характеристик невідомі, але задані їх перші моменти. У цьому випадку ймовірнісні характеристики напруження можна визначити наближено також шляхом розкладання виразу (2.22) у ряд Тейлора. Так, за формулами (2.19), (2.20) отримаємо

$$\begin{aligned}
 m_\sigma &= \frac{m_q}{m_A} (1 + v_A^2), \\
 S_\sigma^2 &= \frac{m_q^2}{m_A^2} (v_q^2 + v_A^2), \\
 v_\sigma &= \frac{\sqrt{v_q^2 + v_A^2}}{(1 + v_A^2)},
 \end{aligned}
 \tag{2.35}$$

де v_A, v_q, v_σ - коефіцієнти варіації відповідно параметра A , навантаження і напруження.

Формули (2.35) можна також використовувати й у тому разі, коли розподіли випадкових величин, що визначають напруження, відомі, але інтеграл (2.26) не має аналітичного розв'язку.

У тому випадку, коли виконується розрахунок на жорсткість, безвідмовність роботи елемента виражається як імовірність неперевиконання переміщенням деякого заданого рівня, переміщення подають у вигляді

$$u = \frac{Q}{L}, \tag{2.36}$$

де параметр L визначається з розв'язання детермінованої задачі. Так для, розтягування-стискання $L = \beta EA/l$; для скруту $L = \beta GI_k/l$; для згинання $L = \beta EI_x/l^2$. Виходячи з математичної подібності (2.22) і (2.36), імовірнісні характеристики переміщень визначаються за тією самою методикою, що і напружень, якщо фізичні характеристики матеріалів можна вважати детермінованими величинами.

2.3.1. Розтягнення-стиснення стрижнів сталого поперечного перерізу

Розглянемо використання викладеної вище методики розрахунку ймовірнісних характеристик напружень на прикладі круглого стрижня вагою $P = 20$ кН, діаметром $d = 0,02$ м та границею пропорційності

$\sigma_n=200$ МПа, який розтягується випадковою силою з відомим математичним сподіванням $m_F=22$ кН і дисперсією $D_F=19,4$ (кН)². Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи стрижня у межах пропорційності, якщо сила має логарифмічно нормальний закон розподілу.

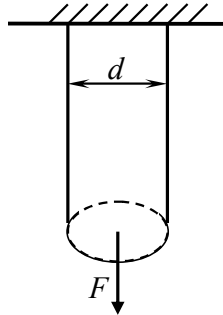


Рисунок 2.3

Напруження у стрижні при розтягненні визначається за формулою

$$\sigma = \frac{F + P}{A},$$

де для випадку круглого поперечного перерізу площа поперечного перерізу $A = \frac{\pi d^2}{4} = 3,14 \cdot 10^{-4}$ м². Закон розподілу напруження також буде логарифмічно нормальним із такими параметрами:

$$m_\sigma = \frac{m_F + P}{A} = 133.75 \text{ МН},$$

$$D_\sigma = \frac{D_F}{A^2}, \quad \nu_\sigma = \frac{S_\sigma}{m_\sigma} = \nu_F = 0,2.$$

За даними таблиці А1 знаходимо параметри розподілу випадкової величини $z = \ln \sigma$:

$$m_\sigma = e^{(m_z + 0,5S_z^2)}, \quad S_\sigma^2 = e^{(2m_z + S_z^2)}(e^{S_z^2} - 1), \quad \nu_\sigma = (e^{S_z^2} - 1)^{\frac{1}{2}},$$

звідки знаходимо

$$D_z = \ln(1 + \nu_\sigma^2) = \ln(1,04) = 0,039, \quad S_z = 0,198,$$

$$m_z = \ln m_\sigma - \frac{S_z^2}{2} = 11,837.$$

Отже, ймовірність безвідмовної роботи у межах пропорційності матеріалу за формулою (2.27) дорівнюватиме

$$P_{\text{неруйн}} = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{\ln \sigma_n - m_z}{S_z}\right).$$

Оскільки

$$\frac{\ln \sigma_n - m_z}{S_z} = \frac{\ln 200000 - 11,837}{0,198} = 1,864,$$

то за даними таблиці АЗ знаходимо

$$P_{неруйн} = 0,5 + \Phi(1,864) = 0,969.$$

Якщо діаметр стрижня також розглядати як випадкову величину, що розподілена за нормальним законом з відомим коефіцієнтом варіації, наприклад $v_d = 0,05$, то ймовірнісні характеристики площі знайдемо за формулою (2.29):

$$m_A = \frac{3,14 \cdot 2^2 \cdot 10^{-4}}{4} (1 + 0,0025) = 3,15 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2,$$

$$v_A = 2v_d \frac{(1 + 0,5v_d^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 + v_d^2)} = 0,0998.$$

У цьому випадку середнє значення та коефіцієнт варіації напруження можна знайти за формулою (2.35):

$$m_\sigma = 42 \frac{1 + 0,0998^2}{3,14 \cdot 10^{-4}} = 135091 \text{ кПа},$$

$$v_\sigma = \frac{\sqrt{0,2^2 + 0,0998^2}}{1 + 0,0998^2} = 0,221.$$

Якщо для напруження взяти логарифмічно нормальний розподіл, то його параметри дорівнюватимуть

$$S_z^2 = \ln(1 + 0,221^2) = 0,048,$$

$$m_z = \ln 135091 - 0,5 \cdot 0,048 = 11,79.$$

Ймовірність неруйнування дорівнюватиме

$$P_{неруйн} = 0,5 + \Phi(t) = 0,971,$$

де

$$t = \frac{\ln 200000 - 11,79}{0,219} = 1,9.$$

Розглянемо також випадок, коли сталевий стрижень із площею поперечного перерізу $A = 2 \text{ см}^2$ розтягується силою F і знаходиться у заданому температурному полі (рис.2.4) [2]. Сила та температура нагрівання розподілені за нормальним законом з такими параметрами: $m_F = 30 \text{ кН}$, $S_F = 6 \text{ кН}$, $m_t = 40^0$, $S_t = 8^0$. Необхідно знайти ймовірність безвідмовної роботи стрижня у межах пропорційності $\sigma_{п} = 200 \text{ МПа}$, якщо зазор між лівим кінцем стрижня та стінкою дорівнює $\Delta = 0,5 \text{ мм}$.

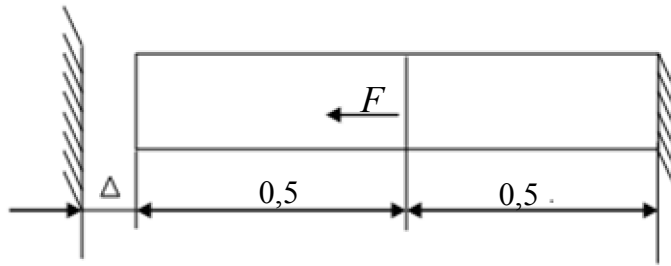


Рисунок 2.4

Загальне подовження стрижня знаходимо за формулами опору матеріалів:

$$U = \Delta l_t + \Delta l_F = \alpha l t + \frac{Fl}{2EA},$$

де за спеціальними таблицями, наприклад з [19], беремо коефіцієнт лінійного розширення для сталі $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$. Кожне з цих подовжень також матиме нормальний закон розподілу, тому і загальне подовження буде розподілене за нормальним законом з такими параметрами:

$$m_u = \alpha l m_t + \frac{m_F l}{2EA} =$$

$$= 12 \cdot 10^{-6} \cdot 0.9 \cdot 40 + 30 \cdot 10^3 \cdot 0.9 / 2 \cdot 2.1 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 5.93 \cdot 10^{-4} \text{ м},$$

$$D_u = \alpha^2 l^2 D_t + \frac{l^2 D_F}{(2EA)^2} = 1.16 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2,$$

$$S_u = \sqrt{D_u} = 1.077 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Робота стрижня (рис. 2.4) залежить від того, закритється зазор між стрижнем та стінкою чи ні. Знайдемо ймовірність того, що зазор не закритється:

$$P_1 = \int_{-\infty}^{\Delta} f(u) du = 0.5 + \Phi\left(\frac{\Delta - m_u}{S_u}\right) = 0.5 + \Phi(-0.851) = 0.197.$$

Тоді ймовірність закриття зазору дорівнюватиме

$$P_2 = 1 - P_1 = 0.803.$$

У будь-якому разі напруження у стрижні розподілятиметься за нормальним законом, але параметри його будуть різними залежно від того, закрится зазор чи ні. Якщо зазор не закритий:

$$\sigma_1 = \frac{F}{A}, m_{\sigma_1} = \frac{m_F}{A} = \frac{30 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-4}} = 150 \text{ МПа},$$

$$S_{\sigma_1} = \frac{S_F}{A} = 30 \text{ МПа}.$$

Якщо зазор закритий, то діюче напруження залежатиме від реакції опори, яка дорівнює

$$R = \frac{(U - \Delta)EA}{l}.$$

У цьому випадку найбільше напруження у стрижні матиме вигляд

$$\sigma_2 = \frac{F - R}{A} = \frac{F}{A} - E \frac{U - \Delta}{l}.$$

Математичне сподівання та дисперсія випадкової величини σ_2 визначатимуться за формулами

$$m_{\sigma_2} = m_{\sigma_1} - E \frac{m_u - \Delta}{l} = 150 \cdot 10^6 - 2.1 \cdot 10^{11} \frac{5.27 \cdot 10^{-4} - 5 \cdot 10^{-4}}{0.8} = 143.7 \text{ МПа},$$

$$D_{\sigma_2} = D_{\sigma_1} + D_u E^2 / l^2 = 30 \cdot 10^6 + 9.16 \cdot 10^{-9} (2.11 \cdot 10^{11})^2 / 0.8^2 = 503.5 \text{ (МПа)}^2$$

Щільності розподілу напруження σ_1 і σ_2 тепер розглядатимемо як умовні щільності ймовірності, оскільки вони зв'язані умовою перекриття чи неперекриття зазору. За формулою повної ймовірності щільність імовірності найбільших напружень у стрижні визначатиметься за формулою

$$f(\sigma) = P_1 f(\sigma_1) + P_2 f(\sigma_2) = \frac{P_1}{\sqrt{2\pi} S_{\sigma_1}} \exp\left[-\frac{(\sigma - m_{\sigma_1})^2}{2S_{\sigma_1}^2}\right] + \frac{P_2}{\sqrt{2\pi} S_{\sigma_2}} \exp\left[-\frac{(\sigma - m_{\sigma_2})^2}{2S_{\sigma_2}^2}\right]. \quad (2.37)$$

Імовірність неруйнування у межах пропорційності дорівнюватиме

$$P = P_1(0.5 + \Phi(t_1)) + P_2(0.5 + \Phi(t_2)),$$

$$\text{де } t_1 = \frac{(200 - 150) \cdot 10^6}{30 \cdot 10^6} = 1,667, \quad t_2 = \frac{(200 - 143.7) \cdot 10^6}{\sqrt{503.5} \cdot 10^6} = 2,509.$$

З урахуванням знайдених вище значень для P_1 і P_2 за таблицею А1 знаходимо шукану ймовірність неруйнування стрижня для заданих умов:

$$P = 0,197 \cdot 0,9522 + 0,803 \cdot 0,993 = 0,985.$$

2.3.2. Скрут стрижнів сталого перерізу

Розглянемо випадок скруту сталевго вала діаметром $d=0,1$ м, коли момент скруту є випадковою величиною, що має експоненціальний закон розподілу з математичним сподіванням $m_M=12000$ Нм і дисперсією $D_M=7,5 \cdot 10^6$ (Нм)². Необхідно визначити ймовірність неруйнування вала з умов неперевикнення напруженням $\tau_\ell=100$ МПа і відносним кутом скруту – $\theta_\ell=0,02$ рад/м.

Дотичне напруження та відносна кутова деформація при скруті визначаються за відомими з курсу опору матеріалів [19] формулами:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p}, \quad \theta = \frac{M_k}{GJ_p},$$

де $W_p = 0,2d^3$; $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа, $J_p = 0,1 \cdot d^4$.

Вони також підлягатимуть експоненціальному закону розподілу з такими параметрами:

$$m_\tau = \frac{m_F}{W_p} = \frac{12000}{0,2(0,1)^3} = 60 \text{ МПа}, \quad m_\theta = \frac{12000}{8 \cdot 10^{10}(0,1)^5} = 0,015 \text{ рад/м},$$

$$\nu_\tau = \nu_\theta = \frac{\sqrt{D_F}}{m_F} = \nu_F = \frac{\sqrt{7,5 \cdot 10^6}}{12000} = 0,228,$$

$S_\tau = \nu_\tau m_\tau = 0,228 \cdot 60 \cdot 10^6 = 13,68 \cdot 10^6$ Па, $S_\theta = \nu_\theta m_\theta = 3,42 \cdot 10^{-3}$ рад/м.

Використовуючи таблицю А1, знайдемо параметри експоненціального закону для напруження:

$$b = \frac{1}{S_\tau}; \quad a = m_\tau - S_\tau.$$

Ймовірність неперевикнення граничного напруження дорівнюватиме

$$\begin{aligned} P_\tau &= F(\tau_\ell) = 1 - \exp[-b(\tau_\ell - a)] = \\ &= 1 - \exp\left[-\frac{1}{1,368 \cdot 10^7} (10^8 - 6 \cdot 10^7 + 1,368 \cdot 10^7)\right] = 0,98. \end{aligned}$$

Аналогічно $P_\theta = 1 - \exp\left[-\frac{1}{3,42 \cdot 10^{-3}} (0,02 - 0,015 + 3,42 \cdot 10^{-3})\right] = 0,915$.

Отже, надійність вала становить $-H = P_\theta = 0,915$.

Якщо діаметр вала також є випадковою величиною з нормальним законом розподілу з математичним сподіванням, що дорівнює номінальному значенню, і середнім квадратичним відхиленням $S_d = 0,006$ м, то ймовірнісні характеристики моментів опору та жорсткості знайдемо за формулою (2.34):

$$m_w = 0,2 \cdot (0,1)^3 (1 + 0,5 \cdot 3(3-1)0,06^2) = 2,022 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3,$$

$$D_w = 3^2 \cdot 0,2^2 \cdot (6 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 0,1^4 [1 + 0,5 \cdot 2^2 \cdot 0,06^2] = 1,305 \cdot 10^{-9},$$

$$m_{J_p} = 0,8 \cdot 10^{10} \cdot 0,1^4 (1 + 0,5 \cdot 4(4-1)0,06^2) = 8,173 \cdot 10^5,$$

$$D_{J_p} = 4^2 (0,1 \cdot 8 \cdot 10^{10})^2 (6 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 0,1^6 [1 + 0,5 \cdot 3^2 \cdot 0,06^2] = 3,746 \cdot 10^{10}.$$

$$\nu_w = \frac{\sqrt{D_w}}{m_w} = \frac{\sqrt{3.263 \cdot 10^{-10}}}{2.022 \cdot 10^{-4}} = 0.179, \quad \nu_{J_p} = \frac{\sqrt{3.746 \cdot 10^{10}}}{8.173 \cdot 10^5} = 0.237.$$

Імовірнісні характеристики напруження та відносної кутової деформації знайдемо за формулами (2.35):

$$m_\tau = \frac{m_F}{m_w} (1 + \nu_w^2) = \frac{12000}{2.022 \cdot 10^{-4}} (1 + 0.179^2) = 61.241 \text{ МПа},$$

$$D_\tau = \frac{m_F^2}{m_w^2} (\nu_F^2 + \nu_w^2) = \frac{12000^2}{(2.022 \cdot 10^{-4})^2} (0.179^2 + 0.228^2) = 295.943 \text{ (МПа)}^2,$$

$$m_\theta = \frac{m_F}{m_{J_p}} (1 + \nu_{J_p}^2) = \frac{12000}{8.173 \cdot 10^5} (1 + 0.237^2) = 0.016 \text{ рад/м},$$

$$D_\theta = \frac{12000^2}{(8.173 \cdot 10^5)^2} (0.228^2 + 0.237^2) = 2.332 \cdot 10^{-5} \text{ (рад/м)}^2.$$

Якщо вважати, що напруження та кутова деформація також мають експоненціальний закон розподілу, то формули для визначення ймовірності неперевикнення граничного напруження та кута відповідно матимуть вигляд

$$P_\tau = 1 - \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2.959 \cdot 10^{14}}} \left(100 \cdot 10^6 - 61.241 \cdot 10^6 + \sqrt{2.959 \cdot 10^{14}}\right)\right) = 0.961,$$

$$P_\theta = 1 - \exp\left[-\frac{1}{\sqrt{2.332 \cdot 10^{-5}}} \left(0.02 - 0.016 + \sqrt{2.332 \cdot 10^{-5}}\right)\right] = 0,839.$$

Надійність вала за критерієм міцності у цьому випадку дорівнюватиме $H = 0,839$.

2.3.3. Вигин балки

Розглянемо випадок вигину консольної балки зосередженою силою F , прикладеною на її вільному кінці, якщо $l=1,5$ м. Зовнішня сила та момент опору є випадковими величинами, що підлягають гамма-розподілу з такими параметрами:

$$m_F = 30 \text{ кН}; \quad \nu_F = 0,2; \quad m_W = 110 \text{ см}^3 = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ м}; \quad \nu_W = 0,1.$$

Необхідно визначити ймовірність неруйнування балки, якщо $\sigma_m = 240$ МПа.

Максимальне значення напруження у балці визначається за відомими з курсу опору матеріалів формулами

$$\sigma_{\max} = \frac{Fl}{2W} = \frac{F}{A},$$

$$\text{де } W = \frac{bh^2}{6}.$$

За даними таблиці А1 знаходимо параметри розподілу сили:

$$a_F = v_F^{-2} - 1 = 24, \quad b_F = m_F \cdot v_F^2 = 30 \cdot 10^3 \cdot 0,2^2 = 1,2 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

Параметри випадкової величини A дорівнюватимуть

$$a_A = v_A^{-2} - 1 = v_W^{-2} - 1 = 99;$$

$$b_A = m_A v_A^2 = 2m_W v_W^2 / l = 2 \cdot 1,1 \cdot 10^{-4} \cdot 0,1^2 / 1,5 = 1,467 \cdot 10^{-6}.$$

Щільність імовірності зовнішньої сили та параметра A мають вигляд

$$f(F) = \frac{1}{b_F \Gamma(a_F)} (F/b_F)^{a_F-1} e^{-F/b_F}, \quad f(A) = \frac{1}{b_A \Gamma(a_A)} (A/b_A)^{a_A-1} e^{-A/b_A}.$$

За формулою (2.26) знаходимо щільність імовірності напруження:

$$\begin{aligned} f(\sigma) &= \frac{b_F^{-a_F} b_A^{-a_A}}{\Gamma(a_F) \Gamma(a_A)} \sigma^{a_F-1} \int_0^\infty A^{a_F+a_A-1} \exp(-A\sigma/b_F - A/b_A) dA = \\ &= \frac{b_F^{-a_F} b_A^{-a_A}}{\Gamma(a_F) \Gamma(a_A)} \Gamma(a_F + a_A) \sigma^{a_F-1} \cdot \lambda^{-a_F-a_A}, \end{aligned}$$

де $\lambda = (b_A \sigma + b_F) / b_F b_A$. Враховуючи те, що $\frac{\Gamma(a_F) \Gamma(a_A)}{\Gamma(a_F + a_A)} = B(a_F, a_A)$ -

повна бета-функція, отримаємо

$$f(\sigma) = \frac{b_F^{a_A} b_A^{a_F}}{B(a_F, a_A)} \cdot \frac{\sigma^{a_F-1}}{(b_A \sigma + b_F)^{a_F+a_A}}.$$

Якщо ввести заміну змінних $c = b_A / b_F$, $t = c\sigma$, то ймовірність неруйнування за формулою (2.27) дорівнюватиме

$$P_{\text{неруйн}} = \frac{1}{B(a_F, a_A)} \int_0^d t^{a_F-1} (1+t)^{-a_F-a_A} dt,$$

$$\text{де } d = \sigma_T \frac{b_A}{b_F} = 240 \cdot 10^6 \cdot \frac{1,467 \cdot 10^{-6}}{1,2 \cdot 10^3} = 0,293.$$

Вводячи нову змінну $x = t/(1+t)$, отримаємо

$$P_{\text{неруйн}} = \frac{1}{B(a_F, a_A)} \int_0^C x^{a_F-1} (1-x)^{a_A-1} dx, \quad (2.38)$$

$$\text{де } C = \frac{d}{1+d} = 0,227.$$

Знаходячи значення (2.38) чисельними методами (наприклад у програмі Mathcad), отримуємо таке значення ймовірності неруйнування

$$P_{\text{неруйн}} = 0,817.$$

Тобто ймовірність того, що балка витримає таке навантаження, становить лише 81,7 %.

2.3.4. Позацентрове розтягнення-стиснення

При позацентровому прикладанні зовнішнього навантаження напруження в довільній точці перерізу визначається за формулою [19]:

$$\sigma = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{Y_F}{i_X^2} y + \frac{X_F}{i_Y^2} x \right), \quad (2.39)$$

де A – площа перерізу; Y_F , X_F – координати точки прикладання сили F ;

$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$, $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$ – радіуси інерції. У загальному випадку не тільки

сила, але і координати її прикладання є випадковими функціями. У такій постановці задача знаходження закону розподілу напруження є досить важкою з математичної точки зору. Крім того, закони розподілу координат прикладання сили, як правило, невідомі. Тому у першому наближенні цю задачу можна розв'язувати так. Спочатку визначається закон розподілу напруження для детермінованих значень координат прикладання сили за формулою (1.7). При визначенні параметрів цього розподілу враховують випадкову зміну координат точки прикладання сили шляхом розкладання виразу (2.39) у ряд Тейлора. Так, за формулою (2.11) з урахуванням двох членів розкладання отримаємо

$$m_\sigma = \frac{m_F}{A} \left(1 + \frac{m_Y}{i_X^2} y + \frac{m_X}{i_Y^2} x \right), \quad (2.40)$$

$$D_\sigma = \frac{D_F}{A^2} \left(1 + \frac{m_Y}{i_X^2} y + \frac{m_X}{i_Y^2} x \right)^2 + D_Y \left(\frac{m_F}{A i_X^2} y \right)^2 + D_X \left(\frac{m_F}{A i_Y^2} x \right)^2,$$

де m_x , m_y , D_x , D_y – математичні сподівання та дисперсії відповідних координат прикладання сили F . За відомими двома моментами, використовуючи формули (2.35), можна знайти параметри будь-якого розподілу.

Приклад. Бетонний стрижень поперечного перерізу 15x15 см стискається силою F , що прикладена зі зміщенням відносно однієї з головних осей на величину $d=3$ см. Визначити ймовірність неруйнування стрижня, якщо сила F має нормальний розподіл з математичним сподіванням $m_F=70$ кН і дисперсією $D_F=35$ (кН)².

Діюче напруження визначаємо за формулою

$$\sigma = \frac{F}{A} \pm \frac{M}{W} = \frac{F}{A} \pm \frac{Fd}{W} = \frac{F}{A} \left(1 \pm \frac{Ad}{W} \right), \quad (2.41)$$

де момент опору $W = \frac{bh^2}{6}$. Напруження також матиме нормальний закон розподілу з такими параметрами для розтягування:

$$m_p = \frac{m_F}{A} \left(1 - \frac{Ad}{W}\right) = \frac{70 \cdot 10^3}{0.15^2} \left(1 - \frac{6 \cdot 0.02}{0.15}\right) = 3.11 \cdot 10^6 (1 - 0.8) = 0.622 \text{ МПа};$$

$$S_p = \nu_F m_p = \frac{\sqrt{35 \cdot 10^6}}{50 \cdot 10^3} 0.44 = 0.118 \cdot 0.622 = 0,073 \text{ МПа};$$

і для стиснення:

$$m_{cm} = 3.11 \cdot 10^6 1.8 = 5.6 \text{ МПа}, \quad S_{cm} = \nu_F m_{cm} = 0.118 \cdot 5.6 = 0,661 \text{ МПа}.$$

З таблиці А2 беремо границю міцності бетону на розтягування $\sigma_p = 0.7 \text{ МПа}$ і на стиснення $\sigma_{cm} = 9 \text{ МПа}$.

Імовірність неруйнування стрижня визначимо за формулою (2.27):

$$P_{\text{неруйн}} = \int_{-\infty}^{\sigma^*} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\sigma - m_\sigma)^2}{2S_\sigma^2}\right) d\sigma = 0.5 + \Phi(t).$$

Аргумент функції Лапласа для напружень розтягнення та стиснення відповідно дорівнюватиме

$$t_p = \left(\frac{\sigma_p - m_p}{S_p}\right) = \frac{0,7 - 0,622}{0.072} = 1.083, \quad t_{cm} = \left(\frac{9 - 5.6}{0.661}\right) = 5.144.$$

За таблицею А3 знаходимо

$$P_p = 0.861, \quad P_{cm} = 0.99999997.$$

Тобто надійність стрижня дорівнює $P_p = 0.861$ і визначається напруженнями розтягнення.

Визначимо ймовірність неруйнування для випадку, коли зміщення навантаження також є випадковою величиною з математичним сподіванням $m_d = 3 \text{ см}$ і коефіцієнтом варіації $\nu_d = 0,1$. Тепер другий член у круглих дужках (2.41) також буде випадковою величиною з такими параметрами:

$$m = \frac{A}{W} m_d = \frac{6 \cdot 0.03}{0.15} = 1.2, \quad S = \nu_d \cdot m = 0.1 \cdot 1.2 = 0,12.$$

Імовірнісні характеристики напружень розтягнення знайдемо шляхом розкладання (2.41) у ряд Тейлора:

$$m_p = \frac{m_F}{A} (1 - m) = \frac{70 \cdot 10^3}{0.15^2} (1 - 1.2) = 0,62 \text{ МПа},$$

$$D_p = \frac{D_F}{A} (1 - m)^2 + \left(\frac{Sm_F}{A}\right)^2, \quad S_p = 0.374.$$

Тоді

$$t_p = \frac{0,7-0,62}{0,374} = 0,214,$$

$$P_{\text{неруйн}} = 0,5 + \Phi(t_p) = 0,536.$$

2.4. Імовірність неруйнування для випадку, коли несуча здатність - випадкова величина

Знайдемо ймовірність неруйнування для випадку, коли несуча здатність конструкції також є випадковою. У загальному випадку несуча здатність конструкції R і діючі на неї навантаження Q являють собою композицію множини параметрів, зміна яких як у часі, так і при переході від одного зразка виробу до іншого має далеко не регулярний ймовірнісний характер. Нехай несуча здатність R є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом з параметрами m_R і S_R , діючі навантаження також візьмемо розподіленим за нормальним законом з параметрами m_Q і S_Q . Руйнування настає тоді, коли Q перевищить R , інакше кажучи, коли виконується умова $Q > R$, або

$$Z = R - Q < 0. \quad (2.42)$$

Різниця випадкових величин R і Q також буде випадковою величиною:

$$m_Z = m_R - m_Q,$$

$$S_Z^2 = S_R^2 + S_Q^2 - 2K_{RQ}. \quad (2.43)$$

Кореляційний момент, що входить в останню рівність для незалежних випадкових величин, перетворюється в нуль. Оскільки граничне і робоче напруження практично незалежні, то $S_Z = \sqrt{S_R^2 + S_Q^2}$.

Величину, обернену коефіцієнту варіації v_z випадкової величини Z згідно з підходом А.Р. Ржаніцина до визначення коефіцієнта запасу, називають характеристикою безпеки [22]:

$$u_p = \frac{1}{v_Z} = \frac{m_Z}{S_Z} = \frac{m_R - m_Q}{\sqrt{S_R^2 + S_Q^2}}. \quad (2.44)$$

Характеристикою безпеки u_p є квантиль, знаючи який, за таблицями нормального розподілу (табл. А.5) можна визначити ймовірність неруйнування P , що є шуканим показником надійності для виробу за даного поєднання несучої здатності й навантаження. Застосовуючи останню формулу та виведені з неї залежності, необхідно

несучу здатність виражати в одних і тих самих фізичних величинах, що мають, природно, одну й ту саму розмірність.

На рис. 2.5 показаний характер зміни ймовірності неруйнування P залежно від u_p .

З графіка випливає, що при $u_p > 2$ незначне збільшення надійності вимагає значного збільшення різниці між несучою здатністю і навантаженням.

Увівши коефіцієнти варіації навантаження $v_Q = \frac{S_Q}{m_Q}$ і несучої здатності $v_R = \frac{S_R}{m_R}$, формулу (2.44) можна записати у вигляді

$$u_p = \frac{k_y - 1}{\sqrt{v_r^2 k_y^2 + v_q^2}}, \quad (2.45)$$

де $k_y = \frac{m_R}{m_Q}$ - умовний коефіцієнт запасу.

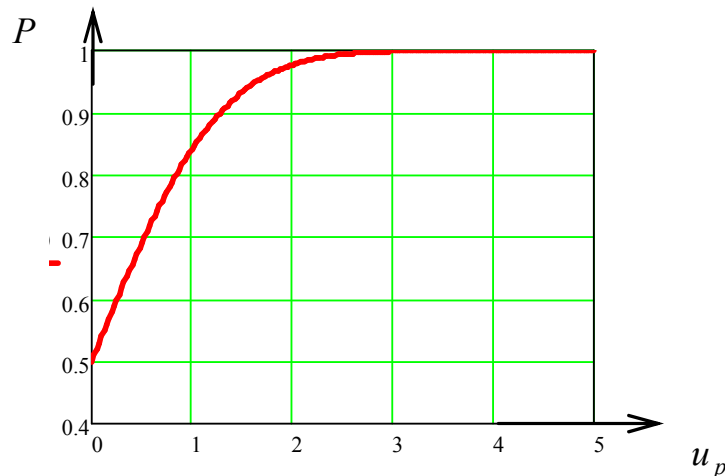


Рисунок 2.5 – Залежність надійності від квантиля u_p

Запаси за середніми значеннями більше практично вживаних запасів міцності, при визначенні яких використовують найменші значення руйнівних напружень і найбільші значення діючих напружень.

Розв'язавши останню формулу відносно k_y , одержимо квадратне рівняння відносно k_y :

$$k_y^2 (u_p^2 v_r^2 - 1) + 2k_y + u_p^2 v_q^2 - 1 = 0,$$

розв'язок якого дає вираз для коефіцієнта запасу, що забезпечує отримання заданого показника надійності P :

$$k_y = \frac{1 + \sqrt{1 - (u_p^2 v_q^2 - 1)(u_p^2 v_r^2 - 1)}}{1 - u_p^2 v_r^2}.$$

Не при всіх значеннях v_r, v_q виходять дійсні значення k_y .

3 умови

$$1 - (u_p^2 v_q^2 - 1)(u_p^2 v_r^2 - 1) > 0$$

одержимо

$$u_p^2 (u_p^2 v_q^2 v_r^2 - v_q^2 - v_r^2) > 0.$$

Тобто повинна виконуватися нерівність

$$u_p < \sqrt{\frac{1}{v_q^2} + \frac{1}{v_r^2}}. \quad (2.46)$$

Якщо ця умова не виконується, то задана ймовірність не може бути отримана ніякою зміною коефіцієнта запасу. Наприклад, якщо $v_r = v_q = 0.5$, то максимально можлива ймовірність не перевищить 0,9976, а при $v_r = v_q = 1$ - не вище 0,92. З формули (2.45) видно, що при $k_y \rightarrow \infty$, $u_p = 1/v_r$, а при $k_y = 1$, $u_p = 0$. Диференціюючи формулу (2.45), знайдемо

$$\frac{du_p}{dk_y} = \frac{v_q^2 + v_r^2 k_y}{(v_q^2 + v_r^2 k_y^2)^{3/2}} > 0.$$

Отже, при збільшенні k_y від одиниці до нескінченності u_p монотонно збільшується від нуля до $1/v_r$.

В окремому випадку нульової мінливості навантаження (іноді береться в розрахунках при статичному навантаженні) k_y залежить тільки від v_r :

$$k_y = \frac{1}{1 - u_p v_r}, \quad (2.47)$$

а при нульовій мінливості міцності ($v_r = 0$)

$$k_y = 1 + u_p v_q. \quad (2.48)$$

За цією формулою призначають режими навантаження виробу при експериментальному визначенні показника надійності конструкції, для забезпечення гарантованого навантаження, виключивши вплив на режим навантаження варіації навантаження, пов'язаного, зокрема, з похибкою її відтворення у стендових умовах.

Якщо значення варіацій невеликі, то добутком їх квадратів на u_p^2 можна знехтувати в порівнянні з одиницею, тоді одержимо наближену формулу

$$k_y = 1 + u_p \sqrt{v_q^2 + v_r^2}. \quad (2.49)$$

Поняття «несуча здатність» достатньо широке, під яким найчастіше мають на увазі властивості деталі на міцність. При вібрації міцність лімітується, як правило, втомною міцністю.

Приклад 1. Визначити ймовірність неруйнування розтягнутого стрижня з п.2.3.1, якщо для границі пропорційності також узяти нормальний закон розподілу з математичним сподіванням $m_R = 200$ МПа та коефіцієнтом варіації $v_R = 0.1$.

Ймовірність неруйнування визначиться формулою (2.45). Підставляючи значення параметрів, отримаємо

$$u_p = \frac{m_R - m_Q}{\sqrt{S_R^2 + S_Q^2}} = \frac{200 \cdot 10^6 - 135 \cdot 10^6}{\sqrt{0.1^2 \cdot (200 \cdot 10^6)^2 + 0.221^2 \cdot (135 \cdot 10^6)^2}} = 1,81.$$

За таблицею А5 знаходимо ймовірність неруйнування:

$$P_{\text{неруйн}} = 0,965.$$

Приклад 2. Визначити ймовірність неруйнування трубопроводу діаметром $d = 50 \pm 0.3$ мм, що має номінальну товщину стінки $\delta_{\text{ном}} = 1,5$ мм, виконаного зі сталі Х18Н10Т і навантаженого внутрішнім надмірним тиском $p = 3 \cdot 10^7$ Па з допуском $\pm 15\%$.

Для визначення надійності скористаємося формулою (2.45), за якою визначимо квантиль u_p для заданих умов навантаження трубопроводу та характеристик його несучої здатності. При цьому розглянемо руйнування у випадку раптового перевищення навантаженням несучої здатності труби.

Припустимо, що границя міцності σ_s , товщина стінки δ і навантаження p розподілені за нормальним законом, тоді граничні відхилення дорівнюють трьом середнім квадратичним відхиленням, тобто

$$S_d = \frac{\Delta d}{3} = \frac{0.3}{3} = 0.1 \text{ мм}; \quad S_p = \frac{\Delta p}{3} = \frac{0.15 \cdot 3 \cdot 10^7}{3} = 0.15 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

За математичні сподівання діаметра d і тиску p візьмемо номінальні значення цих параметрів. З табл. А.7,8 знаходимо математичні сподівання для матеріалу трубопроводу: $m_\sigma = 63.73 \cdot 9.81 \cdot 10^6$ Па і $m_\delta = 1.54$ мм; коефіцієнти варіації границі міцності і товщини $v_\sigma = 5.65\%$; $v_\delta = 3.38\%$. Визначимо коефіцієнт

варіації діаметра $v_d = \sigma_d / m_d = 0.1 / 50 = 0.002 = 0.2\%$.

Оскільки навантаженням є робочий тиск, візьмо за несучу здатність руйнівний тиск, який, як відомо з теорії безмоментних оболонок, в даному випадку визначають виразом $R = 2\sigma_g \delta / d$.

Використовуючи формулу (2.19) з урахуванням малого значення варіації діаметра, знаходимо математичне сподівання несучої здатності:

$$m_R = \frac{2m_\sigma m_\delta}{m_d} = \frac{2 \cdot 63.73 \cdot 1.5}{50} 9.81 \cdot 10^6 = 3.75 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2.$$

Тоді умовний коефіцієнт запасу

$$k_y = \frac{3.75 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^7} = 1.25.$$

Для визначення коефіцієнта варіації несучої здатності, знайдемо дисперсію за формулою (2.20):

$$D_R = \left(\frac{2m_\sigma}{m_d}\right)^2 D_\delta + \left(\frac{2m_\delta}{m_d}\right)^2 D_\sigma + \left(\frac{2m_\sigma m_\delta}{m_d^2}\right)^2 D_d.$$

Тоді коефіцієнт варіації дорівнюватиме

$$v_R = \sqrt{v_\sigma^2 + v_\delta^2 + v_d^2} = \sqrt{5.65^2 + 3.38^2 + 0.2^2} = 6.59\%, v_R = 0.0659.$$

У даному прикладі діаметр можна вважати не випадковою величиною, оскільки його відносний розкид істотно менший за розкид границі міцності і товщини.

Коефіцієнт варіації навантаження

$$v_q = \frac{S_p}{m_p} = \frac{0.15 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^7} = 0.05.$$

Знаючи коефіцієнти варіації, за формулою (2.45) знаходимо квантиль:

$$u_p = \frac{k_y - 1}{\sqrt{v_p^2 k_y^2 + v_q^2}} = \frac{1.25 - 1}{\sqrt{0.05^2 1.25^2 + 0.0659^2}} = 2.753.$$

За таблицею А.5 знаходимо, що ймовірність неруйнування становить $P = 0,9972$.

Задача. Визначити ймовірність неруйнування лопаток робочого колеса насоса, якщо відомо, що середнє значення змінних напружень $m_\sigma = 10$ кгс/мм² і середнє квадратичне відхилення $S_\sigma = 2$ кгс/мм² (за даними тензометрування); середнє значення границі витривалості $m_{\sigma-1} = 20$ кгс/мм² і середнє квадратичне відхилення $S_{\sigma-1} = 3$ кгс/мм² (за даними випробувань на витривалість).

При розрахунку ймовірності руйнування за формулою (2.45)

припускають, що статистичні характеристики граничних напружень $m_{\sigma^*}, S_{\sigma^*}$ і діючих напружень m_{σ}, S_{σ} належать до генеральної сукупності (вибірки нескінченно великих розмірів).

Насправді названі величини визначають за вибіркою (обсягом випробувань), що містить скінченне число зразків.

Якщо при визначенні діючих напружень використані результати n_1 випробувань, то для визначення цих параметрів можна користуватися такими наближеними значеннями (оцінками):

$$\left. \begin{aligned} m_{\sigma_{n1}} &= \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \sigma_i; \\ S_{\sigma_{n1}} &= \left\{ \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} (\sigma_i - m_{\sigma_{n1}})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\}. \quad (2.50)$$

Відповідно для граничних напружень (n_2 – число випробувань)

$$\left. \begin{aligned} m_{\sigma_{n2}^*} &= \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} \sigma_{*j}^*; \\ S_{\sigma_{n2}^*} &= \left\{ \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} (\sigma_{*j}^* - m_{\sigma_{n2}^*})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\}. \quad (2.51)$$

Оцінимо приблизно найбільше значення ймовірності руйнування. Очевидно, що воно реалізується при мінімальній різниці середніх значень і максимальній величині середнього квадратичного відхилення випадкових величин діючих та граничних напружень. При розрахунках на міцність і вібрацію недостатньо визначити тільки чисельне значення тих або інших параметрів, а вимагається визначити ще й точність і надійність цих параметрів. Тобто необхідно знати, до яких помилок може призвести заміна параметра його точковою оцінкою і з яким ступенем упевненості можна спадіватися, що ці помилки «не вийдуть» за відомі межі. Для визначення точності й надійності оцінки параметра в математичній статистиці використовують поняття довірчого інтервалу і довірчої ймовірності.

Не наводячи розв'язку задачі про побудову довірчого інтервалу [6], використовуватимемо з довірчою ймовірністю p_d такі оцінки:

$$\left. \begin{aligned} m_{\sigma_{\min}^*} &= m_{\sigma_{n2}^*} - t(n_2, p_d) \frac{S_{\sigma_{n2}^*}}{\sqrt{n_2}}; \\ m_{\sigma_{\max}} &= m_{\sigma_{n1}} - t(n_1, p_d) \frac{S_{\sigma_{n1}}}{\sqrt{n_1}}. \end{aligned} \right\}, \quad (2.52)$$

де величина $t(n_2, p_\delta)$ для нормального закону розподілу (таблиця А.4) визначає число середніх квадратичних відхилень, яке потрібно відкласти вправо і вліво від центра розсіювання для того, щоб імовірність потрапляння в одержану ділянку дорівнювала p_δ .

Тоді з рівності (2.44) одержимо наближену оцінку

$$u_p = \frac{m_{\sigma_{*min}} - m_{\sigma_{max}}}{\sqrt{S_{\sigma_{*max}}^2 + S_{\sigma_{max}}^2}}, \quad (2.53)$$

Значення ймовірності руйнування, обчислені за середніми значеннями і з урахуванням розсіювання експериментальних даних, як це буде показано нижче, істотно розходяться між собою. У практичних розрахунках потрібно вказувати, за яких умов набуто розрахункове значення ймовірності руйнування.

2.5. Зв'язок між коефіцієнтом запасу та ймовірністю неруйнування

Якщо навантаження є одиничною випадковою за величиною дією, а механічні характеристики матеріалу також є випадковими, то за міру міцності елемента конструкції доцільно взяти ймовірність виконання умови статичної міцності. Цю ймовірність можна визначити так. Нехай $f(\sigma)$ і $f(\sigma_*)$ - щільність розподілу ймовірності діючих і небезпечних для матеріалу конструкції напружень відповідно. Тоді ймовірність того, що діючі напруження перевищать небезпечний рівень, виражається так (рис.2.6):

$$P\{\sigma > \sigma_*\} = \int_0^\infty f(\sigma_*) \left\{ \int_{\sigma_*}^\infty f(\sigma) d\sigma \right\} d\sigma_*.$$

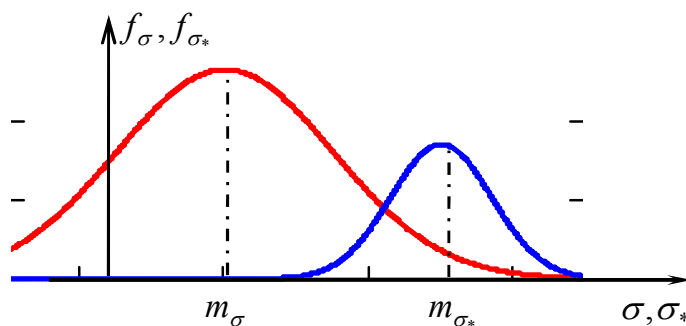


Рисунок 2.6 – Криві щільності розподілу робочих напружень (σ) і граничних напружень (σ_{lim})
Імовірність неперевикнення небезпечного рівня дорівнюватиме

$$H = 1 - P\{\sigma > \sigma_*\}. \quad (2.54)$$

Якщо щільність розподілу діючих і небезпечних напружень підлягає нормальному розподілу, то ймовірність неруйнування конструкції визначається за формулою (2.44), яку можна записати так:

$$P_{\text{неруйн}} = \frac{1}{2} + \Phi \left[\frac{m_{\sigma_*} - m_{\sigma}}{\sqrt{D_{\sigma_*} + D_{\sigma}}} \right], \quad (2.55)$$

де m_{σ_*} , m_{σ} , D_{σ} , D_{σ_*} - середні значення та дисперсії діючих і небезпечних для матеріалу елементів конструкцій напружень;

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ - функція Лапласа, значення якої подані у таблиці А3.

Між ймовірністю руйнування і коефіцієнтом запасу міцності, що відіграє у даний час роль загальноприйнятої в машинобудуванні міри надійності за міцністю, є лише деяка відповідність. Визначимо коефіцієнт запасу міцності як відношення середніх значень небезпечних для матеріалу конструкції напружень і діючих напружень, тобто $n = k_y$, тоді надійність конструкції можна визначити за формулою

$$P_{\text{неруйн}} = \frac{1}{2} + \Phi \left(\frac{n-1}{\sqrt{\nu_1^2 + n^2 \nu_2^2}} \right), \quad (2.56)$$

де $\nu_1^2 = D_{\sigma} / m_{\sigma}^2$, $\nu_2^2 = D_{\sigma_*} / m_{\sigma_*}^2$ - коефіцієнти варіації діючих та небезпечних напружень.

З останнього співвідношення випливає, що між ймовірністю руйнування і коефіцієнтом запасу міцності немає однозначної відповідності. При одному і тому самому коефіцієнті запасу залежно від коефіцієнтів варіації діючих і небезпечних для матеріалу конструкцій напружень отримуємо різні значення ймовірності руйнування, тобто приходимо до різних оцінок надійності конструкції. Звідси випливає, що коефіцієнт запасу міцності як відношення середніх значень небезпечних для матеріалу конструкції напружень і діючих напружень не може, взагалі кажучи, бути прийнятий як єдина міра надійності конструкцій на міцність. Проте якщо коефіцієнт запасу міцності взяти як $n = \sigma_* / \sigma$, то при випадкових значеннях σ_* , σ величина n також буде випадковою, але, як це буде показано нижче, вже так само, як і міра надійності, що визначається за формулою (2.54), однозначно визначатиме надійність конструкції.

Приклад. В елементі двигуна діє напруження, що має нормальний

закон розподілу з математичним сподіванням $m_\sigma = 350$ МПа і середнім квадратичним відхиленням $S_\sigma = 40$ МПа. Через вплив температури та інших факторів міцність матеріалу також є випадковою величиною з нормальним розподілом із параметрами $m_{\sigma^*} = 820$ МПа і $S_{\sigma^*} = 80$ МПа.

Обчислимо коефіцієнт запасу елемента:

$$n = \frac{820}{350} = 2.34.$$

Коефіцієнти варіації діючого та граничного напруження відповідно дорівнюватимуть

$$\nu_1 = \frac{S_\sigma}{m_\sigma} = \frac{40}{350} = 0.114, \quad \nu_2 = \frac{80}{820} = 0.098.$$

Для визначення ймовірності безвідмовної роботи цього елемента скористаємося формулою (2.55):

$$P_{\text{неруйн}} = \frac{1}{2} + \Phi \left(\frac{2.34 - 1}{\sqrt{(0.114^2 + 2.34^2 \cdot 0.098^2)}} \right) = \frac{1}{2} + \Phi(5.23) = 0.9999999.$$

Припустимо, що погана термічна обробка та значні коливання температури викликали збільшення середнього квадратичного відхилення міцності до 150 МПа. У цьому випадку коефіцієнт запасу залишається таким самим, а ймовірність безвідмовної роботи змінюється, оскільки $\nu_2 = 0.183$:

$$P_{\text{неруйн}} = \frac{1}{2} + \Phi \left(\frac{2.34 - 1}{\sqrt{(0.114^2 + 2.34^2 \cdot 0.183^2)}} \right) = \frac{1}{2} + \Phi(3.024) = 0.9987.$$

У разі, коли елемент конструкції має початкову тріщину, його надійність також визначають співвідношенням (2.54), де діючі й небезпечні напруження замінюють на відповідні коефіцієнти інтенсивностей напружень.

Якщо скористатися наближеним поданням функції Лапласа, то

$$P_{\text{неруйн}} = 1 - \frac{\nu_M}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\nu_M^2}} \left(1 - \nu_M^2 + 3\nu_M^4 - \dots \right), \quad (2.57)$$

де $\nu_M = \frac{\sqrt{S_{\sigma^*}^2 + S_\sigma^2}}{m_{\sigma^*} - m_\sigma}$. У цьому випадку похибка виявляється не вище

останнього використаного при обчисленнях члена ряду.

Знайдемо зв'язок між коефіцієнтом запасу та ймовірністю неруйнування для випадку, коли функції розподілу діючих та граничних напружень невідомі, але відомі два перші моменти цих розподілів. Коефіцієнт запасу визначимо так:

$$n = \frac{\sigma_*}{\sigma}. \quad (2.59)$$

Скористаємося нерівністю Чебишева [15]:

$$P(|n - a| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{M[(n - a)^2]}{\varepsilon^2},$$

або

$$P(a - \varepsilon \leq n \leq a + \varepsilon) \geq 1 - \frac{M[(n - a)^2]}{\varepsilon^2}.$$

Візьмемо $a = k \frac{m_{\sigma_*}}{m_{\sigma}} = km_n$, тоді

$$\begin{aligned} M[(n - a)^2] &= M[(n - km_n)^2] = M[n^2] - 2kM[nm_n] + k^2M[m_n^2] = \\ &= M[n^2] + m_n^2(k^2 - 2k). \end{aligned}$$

За формулою (2.19)

$$M[n^2] \approx m_n^2 + D_n = m_n^2 \left(1 + \frac{S_n^2}{m_n^2} \right) = m_n^2 (1 + \nu_n^2). \quad (2.60)$$

Тобто

$$M[(n - a)^2] = m_n^2 (\nu_n^2 + 1 - 2k + k^2) = m_n^2 (\nu_n^2 + (1 - k)^2).$$

Нехай $a - \varepsilon = 1$, тоді $\varepsilon^2 = (a - 1)^2 = (km_n - 1)^2$, а нерівність Чебишева можна записати у вигляді

$$P(1 \leq n \leq 2km_n - 1) \geq 1 - \frac{m_n^2 [\nu_n^2 + (1 - k)^2]}{(km_n - 1)^2}.$$

З умови неперевикнення небезпечного рівня $P_{\text{неруйн}} = P(n \geq 1)$ визначимо нижню межу неруйнування:

$$P_{\text{неруйн}} \geq 1 - \frac{m_n^2 [\nu_n^2 + (1 - k)^2]}{(km_n - 1)^2}. \quad (2.61)$$

Максимальне значення $P_{\text{неруйн}}$ для заданих перших моментів розподілу напруження та міцності знайдемо з умови мінімуму (2.61):

$$-\frac{2m_n^2(1 - k)}{(km_n - 1)^2} - \frac{2m_n^3[\nu_n^2 + (1 - k)^2]}{(km_n - 1)^3} = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння, знаходимо критичне значення k_* :

$$k_* = \frac{m_n(\nu_n^2 + 1) - 1}{m_n - 1}. \quad (2.62)$$

Друга похідна (2.62) при $k = k_*$ є додатною, а це означає, що в точці $k = k_*$ другий член набуває свого мінімуму. Підставляючи (2.62) у (2.67), отримуємо максимальне значення $P_{неруйн}$:

$$P_{неруйн} \geq 1 - \frac{m_n^2 v_n^2}{m_n^2 v_n^2 + (m_n - 1)^2}, \quad (2.63)$$

або

$$m_n \geq \left[1 - v_n \sqrt{P_{неруйн} / (1 - P_{неруйн})} \right]^{-1}. \quad (2.64)$$

Для визначення m_n і v_n скористаємося розкладанням у ряд Тейлора функції $n = \sigma_* / \sigma$:

$$m_n = \frac{m_{\sigma_*}}{m_\sigma} + \frac{m_{\sigma_*}}{m_\sigma^3} D_\sigma^2 = \frac{m_{\sigma_*}}{m_\sigma} (1 + v_\sigma^2). \quad (2.65)$$

Крім того,

$$\begin{aligned} M[n^2] &= M[\sigma_*^2] M[\sigma^{-2}], \\ M[\sigma^{-2}] &\approx m_\sigma^{-2} + \frac{1}{2} 6 D_\sigma m_\sigma^{-4} = m_\sigma^{-2} (1 + 3v_\sigma^2), \\ M[\sigma_*^2] &\approx m_{\sigma_*}^2 + D_{\sigma_*} = m_{\sigma_*}^2 (1 + v_{\sigma_*}^2). \end{aligned}$$

Отже,

$$M[n^2] = m_\sigma^{-2} (1 + 3v_\sigma^2) m_{\sigma_*}^2 (1 + v_{\sigma_*}^2) \approx m_\sigma^{-2} m_{\sigma_*}^2 (1 + 3v_\sigma^2).$$

За формулою (2.60), з урахуванням отриманих вище виразів, отримуємо

$$m_n^2 + D_n \approx m_\sigma^{-2} m_{\sigma_*}^2 (1 + v_{\sigma_*}^2) (1 + 3v_\sigma^2).$$

Поділивши на m_n^2 з урахуванням (2.60), отримуємо

$$1 + v_n^2 = \frac{(1 + v_{\sigma_*}^2)(1 + 3v_\sigma^2)}{(1 + v_\sigma^2)^2}.$$

Нехтуючи членами вище другого ступеня v_σ , v_{σ_*} матимемо

$$v_n \approx \frac{\sqrt{v_{\sigma_*}^2 + v_\sigma^2}}{1 + v_\sigma^2}. \quad (2.66)$$

Підставляючи (2.65) та (2.66) у (2.62), знаходимо

$$m_* = 1 + \frac{m_{\sigma_*} (v_{\sigma_*}^2 + v_\sigma^2)}{(1 + v_\sigma^2) [m_{\sigma_*} (1 + v_\sigma^2) - m_\sigma]}.$$

Підставляючи значення m_n та v_n у формулу (2.63), отримуємо вираз для межі неруйнування через відомі два перших моменти розподілу напружень та міцності:

$$P_{\text{неруйн}} \geq 1 - \frac{m_{\sigma_*}^2 (v_{\sigma_*}^2 + v_{\sigma}^2)}{m_{\sigma_*}^2 (v_{\sigma_*}^2 + v_{\sigma}^2) + [m_{\sigma_*} (1 + v_{\sigma}^2) - m_{\sigma}]^2}. \quad (2.67)$$

Використовуючи формули (2.64) і (2.65) матимемо

$$\frac{m_{\sigma_*}}{m_{\sigma}} \geq \left[1 + v_{\sigma}^2 - \sqrt{(v_{\sigma_*}^2 + v_{\sigma}^2) P_{\text{неруйн}} / (1 - P_{\text{неруйн}})} \right]^{-1}. \quad (2.68)$$

За формулами (2.66) і (2.68) можна побудувати розрахункові номограми, які можуть бути використані для оцінки надійності на етапі проектування та аналізу залежності надійності від коефіцієнтів запасу та коефіцієнтів варіації напружень та міцності.

Приклад. Напруження та границя міцності для елемента мають нормальний закон розподілу з математичними сподіваннями $m_{\sigma_*} = 240$ МПа, $m_{\sigma} = 160$ МПа та середніми квадратичними відхиленнями $S_{\sigma_*} = 24$ МПа, $S_{\sigma} = 16$ МПа. Необхідно знайти ймовірність неруйнування цього елемента. За даними задачі коефіцієнти варіації напруження та міцності відповідно дорівнюватимуть $v_{\sigma_*} = v_{\sigma} = 0,1$. За формулою (2.67) знаходимо нижню межу $H \geq 0,855$. Розрахунок за точною формулою (2.56) дає значення $H = 0,997$.

Потрібно відзначити, що ймовірність руйнування як характеристика надійності за міцністю правильно відображає якісні особливості задачі: вона зростає при зменшенні запасу міцності й збільшенні розсіяння навантажень і механічних властивостей матеріалу. Проте її використання як нормативної характеристики для визначення відмов відповідальних конструкцій (руйнувань з важкими наслідками) обмежене:

а) значення ймовірності руйнування залежить від «хвостів» розподілів, які навіть за вибіркою великого обсягу ($n > 100$) визначаються дуже неточно (похибка може становити декілька порядків). У зв'язку з цим розрахункова ймовірність руйнування має умовний характер. Реальне значення має тільки порівняння елементів виконаних і знов проєктованих конструкцій, що відбувається у порівнюваних умовах;

б) при розрахунку допускається можливість аварії (катастрофи), це створює ускладнення психологічного характеру.

Розглянута статистична модель придатна для відмов з обмеженими наслідками, для яких допустиме використання ймовірності руйнування $P_{\text{руйн}} > 1 \cdot 10^{-3}$.

Більш обґрунтоване використання як нормативних характеристик, особливо для відмов за міцністю з важкими наслідками, статистичних запасів міцності.

2.6. Статистичні запаси міцності

У практичних розрахунках запас міцності беруть у вигляді

$$n = \frac{(\sigma_{руйн})_{\min}}{(\sigma_{\max})_{\max}} = \frac{\eta_{\min}}{\xi_{\max}}. \quad (2.69)$$

Використовують нижні значення для границь міцності і границь витривалості за довідковими даними або механічними випробуваннями.

При визначенні максимального напруження в небезпечній точці деталі σ_{\max} враховують найнесприятливіші умови навантаження та інші чинники, що призводять до зростання напружень. Проте достовірність оцінки $\sigma_{руйн}$ і σ_{\max} не зазначається, це ускладнює зіставлення надійності за величиною запасу міцності.

Найпростіший і практично придатніший метод визначення статистичних запасів міцності полягає в такому [3]. Мінімальні характеристики міцності й максимальні значення напружень встановлюють відповідно до нормованого рівня значущості й довірчої ймовірності:

$$n(q, P_{\delta}) = \frac{\eta_{\min}(q_{\eta}, P_{\delta\eta})}{\xi_{\max}(q_{\xi}, P_{\delta\xi})}, \quad (2.70)$$

де $q_{\eta}, q_{\xi}, P_{\delta\eta}, P_{\delta\xi}$ – рівні значущості і довірна ймовірність, з якою визначають (експериментально) руйнівне напруження і максимальне діюче напруження. У практичних розрахунках можна взяти наближені співвідношення

$$q = q_{\eta} = q_{\xi}; \quad (2.71)$$

$$P_{\delta} = P_{\delta\eta} = P_{\delta\xi}. \quad (2.72)$$

Статистичні запаси міцності, як і звичайні запаси міцності, мають умовне значення. Вони служать критеріями порівняння надійності новостворюваних виробів із виробами, що задовільно працюють в експлуатації.

Основна перевага статистичного запасу міцності в порівнянні зі звичайними (детермінованими) запасами полягає у тому, що зіставлення приводиться до однакових умов (за обсягом використовуваної інформації) щодо розсіяння механічних властивостей матеріалу і діючих напружень.

Якщо руйнівне та діюче напруження розподілені за нормальним законом, то можна взяти

$$n(q, P_{\delta}) = \frac{m_{\eta_{n_1}} - K_{\eta}(n_1, q, P_{\delta})S_{\eta_{n_1}}}{m_{\xi_{n_2}} - K_{\xi}(n_2, q, P_{\delta})S_{\xi_{n_2}}}, \quad (2.73)$$

де $m_{\eta_{n_1}}$ – середнє значення $\sigma_{руйін}$; n_1 – число випробувань (обсяг вибірки), на підставі якого визначено значення $m_{\eta_{n_1}}$; $S_{\eta_{n_1}}$ – середнє квадратичне відхилення для вибірки обсягом n_1 ; $m_{\xi_{n_2}}$ і $S_{\eta_{n_2}}$ – середнє значення і середнє квадратичне відхилення, одержане для діючого напруження в небезпечній точці при n_2 випробуваннях (див. формули (2.50) і (2.51)); $K_{\eta}(n_1, q, P_d)$ і $K_{\xi}(n_2, q, P_d)$ – односторонні толерантні коефіцієнти.

Експериментальне дослідження діючих напружень шляхом тензометрування часто застосовують під час визначення змінних напружень (вали, лопатки і т. п.). В інших випадках вивчають експериментально умови навантаження (зусилля, температури та ін.), оцінюють імовірність появи максимальних навантажень і т.п.

Приклад. Потрібно визначити (при рівні значущості $q = 0,01$ і довірчої ймовірності $P_d = 0,99$) запас міцності лопатки компресора, для якої середнє значення границі витривалості, одержане в шести випробуваннях ($n_1=6$), становило $m_{\eta_{n_1}} = 42$ кгс/мм², а середнє квадратичне відхилення $S_{\eta_{n_1}} = 2$ кгс/мм². Середнє значення змінних напружень при тензометруванні 10 лопаток ($n_2 = 10$) $m_{\xi_{n_2}} = 6$ кгс/мм², а середнє квадратичне відхилення $S_{\xi_{n_2}} = 1,5$ кгс/мм².

Розв'язання. Мінімальне значення границі витривалості

$$\eta_{\min} = m_{\eta_{n_1}} - K_{\eta}(n_1, q, P_d) S_{\eta_{n_1}}.$$

При $n_1=6$, $q=0,01$ і $P_d = 0,99$ за таблицею значень толерантних коефіцієнтів (таблиця А.6), знаходимо

$$K_{\eta}(6; 0,01; 0,99) = 5,00$$

і тоді

$$\eta_{\min} = 42 - 5 \cdot 2 = 32 \text{ кгс/мм}^2.$$

Максимальне значення змінних напружень

$$\xi_{\max} = m_{\xi_{n_2}} + K_{\xi}(n_2, q, P_d) S_{\xi_{n_2}}.$$

При $n_2=10$, $q=0,01$, $P_d = 0,99$ за таблицею значень толерантних коефіцієнтів знаходимо

$$K_{\xi}(10; 0,01; 0,99) = 4,06$$

$$\xi_{\max} = 6 + 4,06 \cdot 1,5 = 12,09 \text{ кгс/мм}^2.$$

Запас втомної міцності

$$n(0,01; 0,99) = \frac{32}{12,09} = 2,65.$$

Нормальний закон розподілу підвищує небезпеку великих відхилень і часто доцільніше використовувати усічені розподіли.

Ураховуючи, що розрахунки ймовірності мають порівняльний характер, рекомендується для одноманітності використовувати наближені толерантні коефіцієнти.

2.7. Ймовірність неруйнування елементів при різних законах розподілу діючих та граничних напружень

Визначимо ймовірність неруйнування елементів для найбільш уживаних поєднань законів розподілу діючих та граничних напружень.

1. Діючі та граничні напруження розподілені за нормальним законом. У цьому випадку ймовірність безвідмовної роботи визначається за формулою (2.45) або (2.55).

2. Діючі напруження та міцність розподілені за логарифмічно нормальним законом. Введемо випадкову величину $y = \frac{\sigma_*}{\sigma}$, тоді логарифм цієї величини $\ln y = \ln \sigma_* - \ln \sigma$ матиме нормальний розподіл. У цьому випадку ймовірність неруйнування визначиться за формулою

$$P_{\text{неруйн}} = \frac{1}{2} + \Phi \left(\frac{m_{\ln \sigma_*} - m_{\ln \sigma}}{\sqrt{D_{\ln \sigma_*} + D_{\ln \sigma}}} \right) = \frac{1}{2} + \Phi(t), \quad (2.74)$$

де

$$t = \frac{\ln \frac{m_{\sigma_*}}{m_{\sigma}} - \ln \left(\frac{1 + v_{\sigma_*}^2}{1 + v_{\sigma}^2} \right)^{\frac{1}{2}}}{\ln [1 + v_{\sigma_*}^2] (1 + v_{\sigma}^2)}. \quad (2.75)$$

З останнього рівняння можна знайти зв'язок між коефіцієнтом запасу за середніми значеннями $n = m_R / m_S$ і гаусовим рівнем надійності t

$$n = \sqrt{\frac{1 + v_{\sigma_*}^2}{1 + v_{\sigma}^2}} \exp \left(t \left\{ \ln \left[(1 + v_{\sigma_*}^2) (1 + v_{\sigma}^2) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \right) \quad (2.76)$$

3. Діючі та граничні напруження підлягають гамма-розподілу з параметрами α_1, β_1 - для напруження та α_2, β_2 - для міцності. Ймовірність неруйнування визначатиметься за формулою [2,15]:

$$P = \frac{B_{\delta}(\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1)}{B(\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1)} = I_{\delta}(\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1), \quad (2.77)$$

де $B(a, c) = \int_0^{\infty} t^{a-1} (1+t)^{-(a+c)} dt$, $\delta = \beta_2 / (\beta_1 + \beta_2)$, $B_\delta(\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1)$ - неповна

бета-функція; $B(\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + 1)\Gamma(\alpha_2 + 1)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 2)}$ - повна бета-функція.

Для розрахунку функції $I_\delta(a, c)$ існують спеціальні таблиці, але у випадку, коли розрахунок на міцність проводиться за допомогою ПК, використання табульованих функцій є недоречним. Тому наведемо прийнятну за точністю апроксимацію цієї функції. Якщо $(a + c - 1)(1 - \delta) \geq 0.8$, то $I_\delta(a, c) = 0.5 + \Phi(y)$, де $\Phi(y)$ - функція Лапласа, значення якої наведені в таблиці А1, $y = 3 \frac{[\omega_1(1 - 1/9c) - \omega_2(1 - 1/9a)]}{\sqrt{\omega_1^2/c + \omega_2^2/a}}$,

$$\omega_1 = (c\delta)^{1/3}, \quad \omega_2 = [a(1 - \delta)]^{1/3}.$$

Розглянемо три практично важливих випадки. Якщо $\alpha = 0$, то гамма-розподіл переходить у експоненціальний для якого: $b = 1/\beta$.

а) Якщо $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, то діючі та граничні напруження мають експоненціальний розподіл. Тоді ймовірність безвідмовної роботи можна знайти за формулою

$$P = \Gamma(2)\delta / \Gamma(1)\Gamma(1) = \delta = \frac{b_1}{b_1 + b_2}. \quad (2.78)$$

б) Якщо $\alpha_1 = 0$, то напруження має експоненціальний розподіл, а міцність – гамма-розподіл, у цьому випадку

$$P = 1 - (1 - \delta)^{\alpha_2 + 1} = 1 - (1 + b\beta_2)^{-\alpha_2 - 1}, \quad (2.79)$$

$$\text{де } b = \frac{1}{\beta_1}.$$

в) Якщо $\alpha_2 = 0$, то напруження підлягає гамма-розподілу, а міцність – експоненціальному розподілу. Тоді

$$P = (b\beta_1)^{-\alpha_1 - 1}, \quad (2.80)$$

$$\text{де } b = \frac{1}{\beta_2}.$$

4. Діючі та граничні напруження розподілені за законом Вейбула з параметрами: $\alpha_1, \beta_1, \gamma$ - для напруження та α_2, β_2, R_0 - для міцності. Ймовірність неруйнування дорівнює

$$P = 1 - \int_0^{\infty} \exp\left\{-\left[(Ky^{1/\beta_2} + C)^{\beta_1} + y\right]\right\} dy, \quad (2.81)$$

$$\text{де } K = \frac{\alpha_2^{1/\beta_2}}{\alpha_1^{1/\beta_1}}, \quad C = \frac{(R_0 - \gamma)}{\alpha_1^{1/\beta_1}}.$$

Для спрощення розрахунків можна ввести такі позначення:

$$\Gamma_i = \Gamma(1 + 1/\beta_i), \quad \Gamma_i^* = \sqrt{\Gamma(1 + 2/\beta_i) - \Gamma_i^2}, \quad i = 1, 2. \quad (2.82)$$

Тоді

$$K = \frac{S_{\sigma^*}}{S_{\sigma}} \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma_2^*} = \frac{n \nu_{\sigma^*}}{\nu_{\sigma}} \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma_2^*}, \quad C = \frac{(R_0 - \gamma)\Gamma_1^*}{S_{\sigma}}.$$

Вираз (2.81) можна проінтегрувати за квадратурною формулою Лагера.

а) Розглянемо випадок, коли $R_0 = \gamma = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta$. Тоді

$$K = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{1/\beta}, \quad C = 0 \quad \text{і за формулою (2.81) отримаємо}$$

$$P = 1 - \int_0^{\infty} \exp \left[- \left(y \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + y \right) \right] dy = 1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Якщо $\beta = 1$, то обидва напруження мають експоненціальний закон розподілу з параметром $b = \frac{1}{\alpha}$. У цьому випадку

$$P = \frac{b_1}{b_1 + b_2}, \quad (2.83)$$

що збігається з виразом (2.78).

Якщо $\beta = 2$, то обидва напруження розподілені за законом Релея з параметром $a^2 = \frac{\alpha}{2}$, а ймовірність неруйнування визначається за формулою

$$P = \frac{a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}. \quad (2.84)$$

б) Якщо напруження має експоненціальний розподіл з параметрами $\beta_1 = 1, \alpha_1 = 1/b, \gamma \neq 0$, а міцність – Релея з параметрами $\beta_2 = 2, \alpha_2 = 2a^2, R_0 = 0$, то $K = ab\sqrt{2}$, $C = -\gamma b$ і з (2.81) випливає, що ймовірність неруйнування дорівнює [15]:

$$P = 1 - \int_0^{\infty} \exp \left[- (K\sqrt{y} - \gamma b + y) \right] dy = 1 - e^{\gamma b} \int_0^{\infty} \exp \left(- \frac{K}{\sqrt{2}} t - \frac{t^2}{2} \right) t dt.$$

Для $ab \gg 3/2$:

$$P = 1 - \frac{e^{\gamma b}}{a^2 b^2}. \quad (2.85)$$

в) Напруження підлягає експоненціальному розподілу, а міцність – Вейбула. У цьому випадку

$$K = bd^{1/\beta}, \quad C = (R_0 - \gamma)b;$$

$$P = 1 - e^{-c} \int_0^{\infty} \exp(-ay^{1/\beta} - y) dy. \quad (2.86)$$

г) Напруження розподілене за законом Релея з параметрами $\beta_1 = 2$, $\alpha_1 = 2a^2$, $\gamma = 0$, а міцність – за законом Вейбула. Тоді

$$K = \frac{bd^{1/\beta}}{a\sqrt{2}}, \quad C = \frac{R_0}{a\sqrt{2}},$$

$$P = 1 - \int_0^{\infty} \exp\left[-\left(Ky^{1/\beta} + C\right)^2 - y\right] dy. \quad (2.87)$$

д) Напруження підлягає розподілу Вейбула, а міцність – Релея з параметрами $\beta_2 = 2, \alpha_1 = 2a^2, R_0 = 0$. У цьому випадку

$$K = \frac{a\sqrt{2}}{\alpha^{1/\beta}}, \quad C = -\frac{\gamma}{\alpha^{1/\beta}},$$

$$P = 1 - \int_0^{\infty} \exp\left[-\left(K\sqrt{y} + C\right)^\beta - y\right] dy. \quad (2.88)$$

5. Напруження розподілене за нормальним законом, а граничні напруження за законом Вейбула. Тоді ймовірність неруйнування дорівнює

$$P = 0.5 + \Phi(t_0) + J, \quad (2.89)$$

$$\text{де } t_0 = \frac{R_0 - m_\sigma}{S_\sigma}, \quad K = \frac{\alpha^{1/\beta}}{S_\sigma} = \frac{S_{\sigma^*}}{S_\sigma \Gamma^*} = \frac{m_{\sigma^*}}{m_\sigma} \frac{v_{\sigma^*}}{v_\sigma \Gamma^*},$$

$$J = \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left[-y^\beta - \frac{1}{2}(Ky + t_0)^2\right] dy.$$

Значення інтеграла J розраховують чисельними методами. Його значення для широкого діапазону значень параметрів β , t_0 , K наведені в роботі [15].

Якщо замінити місцями закони розподілу для граничних та діючих напружень, отримаємо

$$P = 0.5 - \Phi(t_0) - J, \quad (2.90)$$

$$\text{де } K = \frac{\alpha^{1/\beta}}{S_{\sigma^*}} = \frac{S_\sigma}{S_{\sigma^*} \Gamma^*}, \quad t_0 = \frac{\gamma - m_R}{S_{\sigma^*}}.$$

Нехай $\beta = 2$, $R_0 = 0$, $\gamma = 0$, $\alpha = 2a^2$, тоді розподіл Вейбула перетворюється на розподіл Релея. Ймовірність неруйнування визначатиметься за формулою

$$P = 0.5 + \Phi\left(-\frac{1}{\nu_\sigma}\right) + \frac{1}{\lambda} \left[0.5 - \Phi\left(-\frac{1}{\nu_\sigma \lambda}\right) \right] \exp\left(-\frac{\pi m_\sigma^2}{4 m_{\sigma^*}^2 \lambda^2}\right), \quad (2.91)$$

$$\text{де } \lambda = \sqrt{1 + \frac{\pi m_\sigma^2 \nu_\sigma^2}{2 m_{\sigma^*}^2}}.$$

Якщо в останній формулі коефіцієнт варіації діючих напружень не перевищує 0.3, то

$$P = 1 - \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{\pi m_\sigma^2}{4 m_{\sigma^*}^2 \lambda^2}\right). \quad (2.92)$$

6. Для випадку, коли напруження розподілені за нормальним розподілом, а граничні напруження – за гамма-розподілом імовірність неруйнування може бути знайдена за формулою

$$P = C_1 \int_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{4}(x + 2\bar{\delta}_\sigma - b)^2\right] U(a, b - x) dx, \quad (2.93)$$

$$\text{де } C_1 = \frac{\bar{\delta}_\sigma^{\alpha+1}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\bar{\delta}_\sigma^2}{2}\right), \quad \bar{\delta}_\sigma = \frac{S_\sigma}{\beta}, \quad b = \bar{\delta}_\sigma - \frac{m_\sigma}{S_\sigma}, \quad a = \alpha + 1/2,$$

$U(a, z)$ – функція параболічного циліндра.

Значення інтеграла (2.93) знаходять чисельними методами з використанням таблиць функції параболічного циліндра.

Інтеграл (2.93) можна взяти наближено, якщо врахувати, що параметр a набуває великих значень, а x залишається обмеженим через від'ємну степінь експоненти. Для цих випадків для функції $U(a, x)$ можна використовувати таку формулу

$$U(a, b - x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{a+1}{2} + \frac{1}{4}}} \exp[\sqrt{a}(x - b)] \Gamma\left(\frac{a}{2} + \frac{3}{4}\right).$$

7. Якщо напруження розподілені за законом Релея, а міцність підлягає гамма-розподілу, то ймовірність неруйнування дорівнює

$$P = 1 - \left(\frac{a}{\beta}\right)^{\alpha+1} \exp\left(-\frac{a^2}{4\beta^2}\right) U\left(0.5 + \alpha, \frac{a}{\beta}\right). \quad (2.94)$$

Приклад. Діюче напруження в деталі є випадковою величиною з математичним сподіванням $m_\sigma = 160$ МПа і середнім квадратичним відхиленням $S_\sigma = 24$ МПа. Граничні напруження для матеріалу цієї

деталі також є випадковою величиною з математичним сподіванням $m_{\sigma^*} = 240$ МПа і середнім квадратичним відхиленням $S_{\sigma^*} = 24$ МПа. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи для випадку, якщо: а) обидва напруження підлягають гамма-розподілу; б) напруження має нормальний закон розподілу, а граничні напруження – закон Вейбула ($R_0 = 0$).

За даними таблиці А1 визначимо параметри розподілу діючих та граничних напружень для випадку а):

$$\alpha_1 = (v_{\sigma}^{-2} - 1) = (0,15^{-2} - 1) = 43,444; \quad \beta_1 = v_{\sigma}^2 m_{\sigma} = 0,15^2 \cdot 160 = 3,6;$$

$$\alpha_2 = (0,01^{-2} - 1) = 99; \quad \beta_2 = 0,01 \cdot 240 = 2,4.$$

Ймовірність неруйнування визначаємо за формулою (2.77), де

$$\delta = \frac{2,4}{2,4 + 3,6} = 0,4, \quad a = \alpha_1 + 1 = 44,444, \quad c = \alpha_2 + 1 = 100.$$

Оскільки $(a + c - 1)(1 - \delta) \geq 0,8$ і $a + c > 6$, то

$$I_{\delta}(a, c) = \Phi(y),$$

де $\omega_1 = (c\delta)^{\frac{1}{3}} = 3,42$, $\omega_2 = [a(1 - \delta)]^{\frac{1}{3}} = 2,9876$ (див. пояснення до формули (2.77)). Тоді

$$y = \frac{3[\omega_1(1 - 1/9b) - \omega_2(1 - 1/9a)]}{\sqrt{\omega_1^2/b + \omega_2^2/a}} = 2,3234,$$

а ймовірність неруйнування дорівнює

$$P = I_{\delta}(a, c) = 0,5 + \Phi(2,3234) = 0,9898.$$

Для випадку б) визначимо параметри закону Вейбула за формулами таблиці А1:

$$1 + 0,1^2 = \frac{\Gamma(1 + 2/b)}{\Gamma^2(1 + 1/b)}.$$

З останньої рівності підбором знаходимо $b = 12$. Тоді

$$a = \left[\frac{240}{\Gamma(1 + 1/12)} \right]^{12} = e^{60,28}.$$

Ймовірність неруйнування знаходимо за формулою (2.89), де

$$t_0 = -\frac{160}{24} = -6,6667, \quad K = \frac{e^{\frac{66,28}{12}}}{24} = 10,436.$$

Після чисельного інтегрування за формулою (2.89) отримуємо ймовірність неруйнування, яка дорівнює

$$P = 0,985.$$

Задача. За даними попереднього прикладу визначити ймовірність неруйнування елемента, якщо: а) діюче та граничне напруження

розподілені за законом Вейбула; б) діюче напруження розподілене за нормальним законом, а граничне підлягає гамма-розподілу.

2.8. Проектування елементів машин та конструкцій заданої надійності

Завершуючим етапом у розрахунках на міцність (а також жорсткість, довговічність та стійкість) елементів конструкцій при випадкових впливах є порівняння розрахованої надійності з її нормативним значенням. Якщо надійність дорівнює або перевищує нормативну, то розрахунок вважають закінченим. Інакше необхідно змінювати розміри, або, якщо це дозволяють умови задачі матеріал, і проводити перерахунок доти, поки надійність конструкції не стане прийнятною. Під час проектування елементів машин та конструкцій надійність, як правило, є відомою величиною, тому задача зводиться до знаходження таких геометричних параметрів чи матеріалів цих елементів, що задовольняють потрібну надійність.

Нехай на елемент конструкції діє випадкове навантаження за відомим законом розподілу $f(q)$. Закон розподілу розрахункових напружень визначається за формулою (2.23) або (2.24). Розглядаючи надійність елемента як імовірність неперевищення напруженнями заданого рівня, за формулами (2.27) або (2.55) отримаємо рівняння, що зв'язує надійність із шуканою характеристикою A :

$$H = \varphi_n(a_1, a_2, \dots, a_n, A), \quad (2.95)$$

де a_i – задані на етапі проектування параметри законів розподілу навантаження, граничного напруження та геометричних характеристик елемента.

Прирівнюючи надійність заданому значенню, визначаємо параметр A з рівняння

$$A = \varphi_A(a_1, a_2, \dots, a_n, H_*) \quad (2.96)$$

У деяких випадках із рівняння (2.95) неможливо в явному вигляді знайти A . У цих випадках для визначення A доцільно використовувати графічний метод. Задаючи значення A_i , з рівняння (2.95) знаходять відповідні значення надійності H_i , за якими будують графік. За цим графіком знаходять значення A , що відповідає заданій надійності. Якщо A є геометричним параметром, то за його значенням легко знайти розміри поперечного перерізу при будь-якому виді деформацій.

Аналогічно розв'язується задача проектування елементів конструкцій заданої надійності за жорсткістю та стійкістю. При проектуванні на задану стійкість надійність розглядають як імовірність

того, що діюче узагальнене навантаження не перевищить заданого значення $q_{кр}$.

Якщо при розрахунках враховується випадковий розкид геометричних розмірів перерізу, то замість заданої надійності H_* необхідно використовувати величину H_*/P_δ .

Використовуючи наведені в п.2.8 вирази для визначення ймовірності неруйнування для різних законів розподілу діючих та граничних напружень, знайдемо співвідношення, що зв'язують задану надійність із геометричною характеристикою перерізу для найбільш уживаних поєднань законів розподілу.

1. Якщо навантаження та несуча здатність розподілені за нормальним законом, то з формул (2.55) маємо

$$P_{неруйн} = 0,5 + \Phi(t),$$

$$\text{де } t = \frac{Am_R - m_q}{\sqrt{A^2 S_R^2 + S_q^2}}.$$

Враховуючи те, що $m_\sigma = m_q / A, v_\sigma = v_q$, і розв'язуючи це рівняння відносно A , знаходимо, що

$$A = \frac{m_q}{m_R} \cdot \frac{1 + t \sqrt{v_q^2 + v_R^2 - (t \cdot v_R v_q)^2}}{1 - t^2 v_R^2}. \quad (2.97)$$

2. Навантаження та несуча здатність розподілені за логарифмічно нормальним законом. Аналогічно п.1 отримуємо

$$A = \frac{m_q}{m_R} \cdot \frac{\sqrt{1 + v_R^2} \exp\left\{t \sqrt{\ln[(1 + v_R^2)(1 + v_q^2)]}\right\}}{\sqrt{1 + v_q^2}}. \quad (2.98)$$

3. Навантаження та несуча здатність мають гамма-розподіл. У цьому випадку з формули (2.77) випливає, що

$$H_* = I_\delta(\alpha_q + 1, \alpha_R + 1),$$

$$\text{де } \delta = \frac{\beta_R}{\beta_R + \beta_q / A}.$$

Для функції $I_x(a, b)$ справедливе таке співвідношення:

$$I_x(a, b) = 1 - I_{1-x}(b, a).$$

З урахуванням цього, отримаємо

$$I_x(\alpha_R + 1, \alpha_q + 1) = 1 - H_*,$$

де $x = 1 - \delta = \frac{\beta_q}{\beta_q + A\beta_R}$. Тоді можлива апроксимація оберненої функції

$$x = \frac{\alpha_R + 1}{\alpha_R + 1 + (\alpha_q + 1)e^{2\omega}}, \quad (2.99)$$

де $\omega = \frac{t\sqrt{h + \lambda}}{h - (a_q - a_R)(\lambda + 5/6 - 2/3h)}$;

$$a_q = \frac{1}{2\alpha_q + 1}; \quad a_R = \frac{1}{2\alpha_R + 1}; \quad h = \frac{2}{a_q + a_R}, \quad \lambda = \frac{t^2 - 3}{6}.$$

Тут t - квантиль нормального розподілу, що у цьому випадку визначається за формулою

$$t = \gamma - \frac{a_0 + a_1\gamma}{1 + b_1\gamma + b_2\gamma^2}; \quad \gamma = \sqrt{\ln[(1 - H_*)^{-2}]}$$

$$a_0 = 2,3057; \quad a_1 = 0,2706; \quad b_1 = 0,9923; \quad b_2 = 0,0448.$$

Тоді A дорівнюватиме

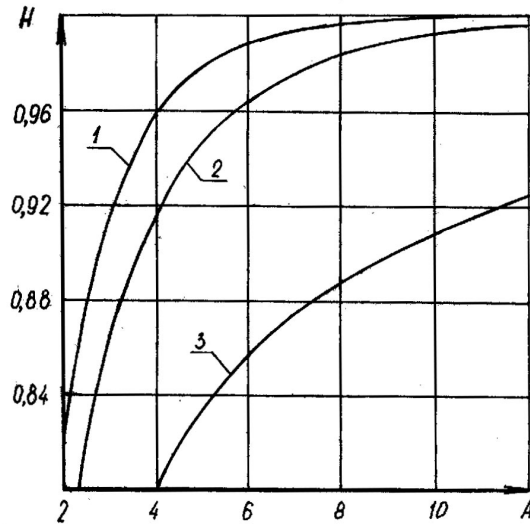
$$A = (1 - x) \frac{\beta_q}{\beta_R x}. \quad (2.100)$$

4. Якщо навантаження та несуча здатність розподілені за законом Вейбула, то надійність конструкції визначається за формулою (2.81), де

$$A = K \frac{\alpha_q^{1/\beta_q}}{\alpha_R^{1/\beta_R}}, \quad C = \frac{AR_0 - \gamma}{\alpha_q^{1/\beta_R}}, \quad \gamma = q_0. \quad (2.101)$$

Далі для визначення параметра A чисельними методами знаходять значення інтеграла і будують графік залежності надійності від A . З цього графіка за заданим значенням надійності визначають значення геометричної характеристики, що забезпечує таку надійність.

На рис. 2.7 наведено графік залежності $H=f(A)$ при $C=0$ та різних значеннях $\lambda = \beta_q/\beta_R$.



1. - $\lambda=0,25$; 2. - $\lambda=0,25$; 3. - $\lambda=0,25$.

Рисунок 2.7 – Графік залежності $H=f(A)$ для випадку, коли навантаження та несуча здатність розподілені за законом Вейбула

5. Якщо навантаження розподілене за нормальним законом, а несуча здатність – за законом Вейбула, то надійність визначається за формулою (2.89), де

$$K = A \frac{\alpha^{1/\beta}}{S_q}; \quad t_0 = \frac{AR_0 - m_q}{S_q}. \quad (2.102)$$

Змінюючи місцями закони розподілу навантаження та несучої здатності, надійність визначимо за формулою (2.90), де

$$K = \frac{\alpha_q^{1/\beta_q}}{AS_R}, \quad t_0 = \frac{q_0 / A - m_R}{S_R}. \quad (2.103)$$

Значення параметра A , що забезпечує задану надійність, у цьому випадку також знаходимо графічним методом. Розглянемо два практично важливих випадки.

а) Якщо навантаження розподілене за законом Релея, а несуча здатність за законом Вейбула, то надійність визначається за формулою

$$H = 1 - (1 + n)^{-1/2} \exp[-n/2\nu_R^2(1 + n)], \quad (2.104)$$

де $n = \frac{\pi\sigma_R^2 K^2}{2m_q^2}$.

б) Якщо навантаження має експоненціальний закон розподілу, то надійність з урахуванням (2.90) може бути визначена за такою формулою:

$$H = 0.5 - \Phi(\lambda) - [0.5 - \Phi(\lambda + n)] \exp(n\lambda + n/2), \quad (2.105)$$

де $\lambda = \frac{q_0/K - m_R}{S_R}$, $n = b_q \sigma_R K$.

6. Якщо навантаження розподілене за нормальним законом, а несуча здатність має гамма-розподіл, то надійність визначається за формулою (2.93), де $\bar{\delta}_\sigma = \frac{S_q}{A\beta}$. При великих значеннях α , що входить до формули (2.93), можна використати формулу

$$H = \Phi(t) \exp(T - \lambda),$$

де $t = (2\sqrt{\alpha_R + 0,5} - \nu_q^{-1} - n) / \sqrt{2}$, $T = n^2 / 2 - 2n\sqrt{\alpha_R + 0,5} + \alpha_R + 1$,

$$\lambda = 0,5(\alpha_R + 1) \ln[(\alpha_R + 2) / n^2], \quad n = S_q / A\beta_R. \quad (2.106)$$

Якщо поміняти місцями закони розподілу навантаження та несучої здатності, то у співвідношеннях (2.106) α_R замінюється на α_q , а ν_q на ν_R ,

а $n = A \frac{S_R}{\beta_q}$.

У першу чергу розглянемо приклад проектування машин та елементів, геометричні параметри яких мають виробничі допуски.

Приклад 1. Необхідно визначити діаметр круглого стрижня з надійністю 0,99990, що розтягується нормально розподіленою випадковою силою з такими параметрами: $m_p = 17800$ Н, $S_p = 445$ Н. Границя міцності є також нормально розподіленою величиною з параметрами $m_{\sigma_*} = 690$ МПа, $S_{\sigma_*} = 34,5$ МПа.

Нормальне напруження у довільному перерізі стрижня визначається за формулою

$$\sigma = \frac{P}{A},$$

де $A = \pi r^2$. Використовуючи розкладання у ряд Тейлора, за формулами (2.19) знаходимо $m_A = \pi M[r^2] = \pi(m_r^2 + D_r)$, $D_A = 4\pi^2 D_r m_r^2$. Якщо допуск для радіуса круглого поперечного перерізу можна виразити як частку δ від радіуса r , то за правилом трьох сигм знаходимо: $3S_r = \delta m_r$, тобто

$$S_r = \frac{\delta}{3} m_r \quad (\text{в інших випадках можна скористатися формулою (2.21)}).$$

За формулами (2.19, 2.20) знаходимо параметри закону розподілу діючого напруження:

$$m_{\sigma} = \frac{m_p}{m_A} = \frac{m_p}{\pi(m_r^2 + D_r)},$$

$$D_{\sigma} = \frac{D_p}{m_A^2} + D_A \left(\frac{m_p}{m_A} \right)^2 = \frac{D_p(m_r^2 + D_r)^2 + 4D_r m_r^2 m_p^2}{\pi^2(m_r^2 + D_r)^4}.$$

Підставимо отримані значення m_{σ} і D_{σ} у формулу (2.44). Враховуючи вищезнайдені вирази для m_r і D_r , отримаємо

$$u_p = \frac{m_{\sigma^*} - \frac{m_p}{\pi m_r^2 (1 + \gamma^2)}}{\sqrt{D_{\sigma^*}^2 + \left(\frac{D_p}{\pi^2 m_r^4 (1 + \gamma^2)^2} + \frac{4\delta^2 m_p^2}{\pi^2 m_r^4 (1 + \gamma^2)^4} \right)^2}}, \quad (2.107)$$

де $\gamma = 1/3$. За заданою надійністю $H = 0,9999$ за даними таблиці А5 знаходимо значення $u_p = 3,719$. Якщо взяти $\delta = 0.015$, то після перетворень та скорочень рівняння (2.107) матиме вигляд

$$144.63m_r^4 - 24.6m_r^2 + 1 = 0.$$

Це рівняння має два невід'ємних кореня: $m_{r,1} = 2.6$ мм і $m_{r,2} = 3.21$ мм. Перший корінь приводить до ймовірності 0,0001 (тобто характеризує ненадійність елемента), а другий корінь дає задану ймовірність неруйнування 0,9999.

Приклад 2. У небезпечному перерізі круглого вала виникає крутний момент, що розподілений за законом Вейбула з параметрами $m_M = 12$ кНм, $\nu_M = 0,228$. Визначити діаметра вала з надійністю $H_* = 0,98$, якщо граничне напруження також має розподіл Вейбулла з середнім значенням $m_{\sigma^*} = 150$ МПа і коефіцієнтом варіації $\nu_{\sigma^*} = 0,12$.

Дотичне напруження визначаємо за формулою

$$\tau_{\max} = q = \frac{M_k}{W_p},$$

де $W_p = 0.2d^3$. Воно також матиме закон розподілу Вейбула з такими параметрами:

$$m_q = \frac{m_M}{W_p} = \frac{12 \cdot 10^3}{0.2A}, \quad k_q = k_M = 0,228.$$

Закон Вейбула при $x_0 = 0$ має вигляд

$$f(q) = \frac{\beta_q}{\alpha_q} q^{\beta_q-1} \exp\left(-\frac{q^{\beta_q}}{\alpha_q}\right), \quad q > 0.$$

Параметри цього розподілу знаходимо зі співвідношення (див. табл. А1):

$$1 + \nu_q^2 = \Gamma(1 + 2/\beta_q) / \Gamma^2(1 + 1/\beta_q); \quad \alpha_q = [m_q / \Gamma(1 + 1/\beta_q)]^{\beta_q}.$$

Через коефіцієнт варіації підбором знаходимо $\beta_q = 5$.

Тоді

$$\alpha_q = \left(\frac{6 \cdot 10^4}{A\Gamma(1.2)}\right)^5 = \left(\frac{6.535 \cdot 10^5}{A}\right)^5.$$

Аналогічно знаходимо параметри розподілу міцності. За формулами (2.101) матимемо

$$\beta_R = 10, \quad \alpha_R = 157,67^{10}.$$

Надійність визначається за формулою (2.81). У нашому випадку $C=0$ (закон Вейбула є двопараметричним), а графік залежності $H = f(K)$ наведено на рис. 2.8. При заданому значенні $H = 0.98$ з графіка отримуємо $K = 9.71$, тоді

$$A = W_p = K \frac{\alpha_R^{1/\beta_R}}{\alpha_q^{1/\beta_q}} = 9.71 \cdot 157.67 / 6.535 \cdot 10^5 = 2.343 \cdot 10^{-3},$$

звідси $d = \sqrt[3]{A} = 0.133 \text{ м}$.

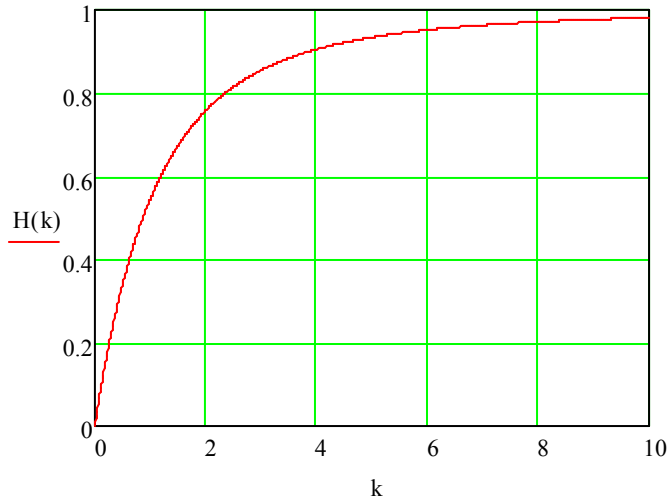


Рисунок 2.8 - Залежність $H = f(K)$ для законів Вейбула

Приклад 3 Визначити діаметр розтягнутого стрижня з надійністю 0,99, якщо навантаження розподілене за нормальним законом з параметрами $m_q = 44 \text{ кН}$ і $S_q = 8,8 \text{ кН}$. Граничне напруження підлягає закону Вейбула з параметрами $m_R = 200 \text{ МПа}$ та $\nu_R = 0,2$.

Як і в попередньому прикладі, знаходимо параметри розподілу Вейбула за формулами таблиці А1. При $\nu_R = 0,2$, підбором отримуємо $\beta_R = 5$, а отже,

$$\alpha_R = \left(\frac{2 \cdot 10^5}{\Gamma(1,2)} \right)^5 = (217824,6)^5.$$

Надійність визначається за формулами (2.89) і (2.102):

$$H = 0.5 + \Phi(t_0) + J,$$

$$\text{де } t_0 = -\frac{44}{8,8} = -5, \quad K = A \frac{\alpha^{1/\beta}}{S_q}, \quad J = \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp\left[-y^\beta - (Ky + t_0)^2 / 2\right] dy.$$

Чисельними методами будемо залежність $H = f(K)$ для $\beta=5$ і $t_0=-5$. Графік цієї залежності наведено на рис. 2.9. З графіка при $H=0,99$ знаходимо $K=13,45$. Отже,

$$A = K \frac{S_q}{\alpha^{1/\beta}} = 13,5 \cdot 8,8 / 217824,6 = 5,454 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Звідси знаходимо шуканий діаметр $d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 0,026 \text{ м}$.

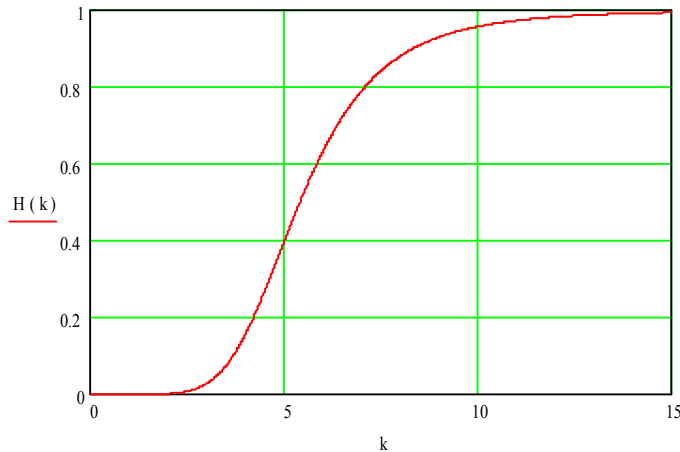


Рисунок 2.9 – Залежність $H = f(K)$ для поєднання нормального закону та закону Вейбула

Для порівняння можна навести такі дані. При детермінованому граничному напруженні $d=0,202 \text{ м}$, а при нормальному законі $d=0,241 \text{ м}$.

Задача. В умовах прикладу 2 визначити діаметр вала, якщо граничне напруження має гамма-розподіл з коефіцієнтом варіації 0,1.

Розділ 3

Випадкові коливання механічних систем

У цьому розділі методи теорії випадкових процесів використовуються під час дослідження коливань механічних систем. Найбільш повно ці питання викладені у роботах В.В. Болотіна [4], В.А. Світлицького [24]. Результати досліджень випадкових коливань використовуються під час розв'язання задач, в яких необхідно оцінити надійність і ресурс елементів машин та конструкцій.

3.1. Вільні коливання

3.1.1. Вільні коливання систем з одним ступенем вільності

При розрахунках будь-яка реальна коливальна система, незалежно від її фізичної природи, може бути апроксимована моделлю зі скінченною кількістю ступенів вільності. Наприклад, показану на рис.3.1 механічну систему у першому наближенні можна розглядати як систему з одним ступенем вільності, але лише в тому випадку, якщо маса стрижня (пружного елемента) значно менша за масу вантажу m , а маса m є точковою. Така ідеалізація для значної кількості задач є допустимою, оскільки дозволяє одержати інформацію про рух системи з достатньою для практики точністю.



Рисунок 3.1 – Пружний елемент з одним ступенем вільності

Перехідні режими в механічних системах викликаються початковими відхиленнями від положення рівноваги або від усталеного режиму руху і зовнішніми збудженнями, які в класичній теорії коливань прийнято вважати детермінованими. За реальних же умов здійснити рух з абсолютно точними значеннями початкових умов неможливо, оскільки завжди трапляється розкид початкових даних. Тому рух відрізняється від розрахованого, отже, виникає необхідність в оцінці ймовірності можливих відхилень руху від розрахункового. Задача визначення ймовірнісних характеристик руху при вільних коливаннях, викликаних

випадковими відхиленнями початкових даних, є найпростішою, для розв'язання якої потрібно знати лінійні перетворення випадкових функцій [6,24].

Розглянемо рівняння вільних коливань лінійної системи з одним ступенем вільності з урахуванням сили опору, пропорційної швидкості (рис. 3.1):

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3.1)$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t),$$

де $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - n^2}$.

Після визначення довільних сталих C_1 і C_2 з урахуванням початкових умов при $t = 0$ $x = x_0$ і $\dot{x} = \dot{x}_0$ одержимо

$$x = e^{-nt} \left(x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{\omega} \sin \omega t \right)$$

або

$$x = e^{-nt} \left[x_0 \left(\cos \omega t + \frac{n}{\omega} \sin \omega t \right) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t \right].$$

Диференціюючи (3.2), знайдемо вираз для швидкості й прискорення маси m :

$$\dot{x} = x_0 \dot{f}_1 + \dot{x}_0 \dot{f}_2;$$

$$\ddot{x} = x_0 \ddot{f}_1 + \dot{x}_0 \ddot{f}_2,$$

де $f_1 = e^{-nt} \left(\cos \omega t + \frac{n}{\omega} \sin \omega t \right)$; $f_2 = \frac{1}{\omega} e^{-nt} \sin \omega t$.

Розв'язок рівняння (3.1) лінійно залежить від початкових даних, які є випадковими величинами, як правило, з відомими ймовірнісними характеристиками (математичними сподіваннями $m_{x_0}, m_{\dot{x}_0}$, дисперсіями $D_{x_0}, D_{\dot{x}_0}$ і кореляційним моментом $K_{x_0 \dot{x}_0}$).

Для розв'язання сформульованої задачі необхідно знайти ймовірнісні характеристики розв'язку, тобто $m_x(t)$, $D_x(t)$ і кореляційну функцію $K_x(t, t')$. Скориставшись основною властивістю математичного сподівання суми випадкових функцій, одержимо

$$m_x(t) = M[X] = m_{x_0} e^{-nt} \left(\cos \omega t + \frac{n}{\omega} \sin \omega t \right) + \frac{m_{\dot{x}_0}}{\omega} e^{-nt} \sin \omega t. \quad (3.2)$$

Кореляційна функція

$$K_x = M[X(t)X(t_1)] = D_{x_0} e^{-n(t+t_1)} \left(\cos \alpha t + \frac{n}{\omega} \sin \alpha t \right) \left(\cos \alpha t_1 + \frac{n}{\omega} \sin \alpha t_1 \right) + \\ + \frac{1}{\omega} K_{x_0 \dot{x}_0} \left[e^{-n(t+t_1)} \left(\cos \alpha t + \frac{n}{\omega} \sin \alpha t \right) \sin \alpha t_1 + e^{-n(t+t_1)} \left(\cos \alpha t_1 + \frac{n}{\omega} \sin \alpha t_1 \right) \sin \alpha t \right] + \\ + \frac{D_{\dot{x}_0}}{\omega^2} \sin \alpha t \sin \alpha t_1 e^{-n(t+t_1)}.$$

Дисперсію прогинання одержимо з останнього виразу, якщо візьмемо

$$t_1 = t: D_x(t) = D_{x_0} f_1^2 + 2K_{x_0 \dot{x}_0} f_1 f_2 + D_{\dot{x}_0} f_2^2. \quad (3.3)$$

Для некорельованих початкових даних ($K_{x_0 \dot{x}_0} = 0$):

$$D_x(t) = D_{x_0} f_1^2 + D_{\dot{x}_0} f_2^2.$$

Аналогічний вигляд мають вирази для математичного сподівання і кореляційної функції першої похідної розв'язку

$$m_{\dot{x}} = m_{x_0} \dot{f}_1 + m_{\dot{x}_0} \dot{f}_2;$$

$$K_{\dot{x}}(t, t_1) = K_{x_0 \dot{x}_0} [\dot{f}_1(t) \dot{f}_2(t_1) + \dot{f}_1(t_1) \dot{f}_2(t)] + D_{\dot{x}_0} \dot{f}_2(t) \dot{f}_2(t_1).$$

Розглянемо застосування отриманих формул для практичних задач. Повернемося до схеми рис.3.1 (пружний елемент приладу). Для нормальної роботи приладу необхідно, щоб максимальні нормальні напруження при можливих випадкових коливаннях не перевищували границі текучості матеріалу пружного елемента, тобто

$$\max(\sigma) \leq \frac{\sigma_T}{n_T},$$

де σ_T - границя текучості; n_T - коефіцієнт запасу по границі текучості.

Максимальне нормальне напруження σ_{\max} пов'язане з прогином x співвідношенням

$$\sigma_{\max} = \frac{3EJ_y}{l^2 W_y} x,$$

де E - модуль пружності матеріалу; J_y, W_y - момент інерції і момент опору перерізу стрижня відповідно.

Математичне сподівання напруження

$$m_{\sigma_{\max}} = a m_x(t)$$

і дисперсія

$$D_{\sigma_{\max}} = a^2 D_x(t),$$

де $a = \frac{3EJ_y}{l^2 W_y}$, а $m_x(t)$ і $D_x(t)$ визначаються за формулами (3.2), (3.3).

Вважаючи, що в кожен момент часу для $\sigma_{\max}(t)$ має місце

нормальний розподіл, для визначення максимального напруження $\max(\sigma_{\max})$ скористаємося правилом трьох сигм, а саме:

$$\max(\sigma_{\max}) = m_{\sigma_{\max}} + 3\sqrt{D_{\sigma_{\max}}},$$

або

$$\max(\sigma_{\max}) = am_y(t) + 3a\sigma_x(t).$$

Оскільки максимальне напруження залежить від часу, то потрібно визначити таке значення t_* , при якому $\max(\sigma_{\max})$ набуває максимального значення в часі. Після визначення t_* одержимо остаточну умову, виконання якої гарантує (з імовірністю 0,997) нормальну роботу пружного елемента:

$$\max(\sigma_{\max}) = am_x(t_*) + 3a\sigma_x(t_*) \leq \frac{\sigma_T}{n_T}.$$

До вільних коливань можна віднести рух системи після припинення дії короткочасного випадкового імпульсу (час дії якого менше періоду власних коливань).

3.1.2. Вільні коливання систем з двома ступенями вільності

Розглянуті вище системи з одним ступенем вільності є найпростішими задачами теорії коливань. Реальні конструкції лише в окремих випадках або наближено можна розглядати як системи з одним ступенем вільності. Так, наприклад, уточненням схеми рис. 3.1 є система з двома ступенями вільності (рис. 3.2), де враховується не тільки рух центра мас диска A , але й динаміка його обертання відносно центра мас. Вводячи тепер вже дві координати (y - зміщення центра мас і φ - кут повороту відносно центра мас) і використовуючи принцип Даламбера, отримаємо такі два рівняння руху:

$$\begin{aligned} y &= \delta_{11}(-m\ddot{y}) + \delta_{12}(-J_o\ddot{\varphi}); \\ \varphi &= \delta_{21}(-m\ddot{y}) + \delta_{22}(-J_o\ddot{\varphi}), \end{aligned} \quad (3.4)$$

де $\delta_{11} = \frac{l^3}{3EJ_x}$; $\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{l^3}{2EJ_x}$; $\delta_{22} = \frac{l}{EJ_x}$ - коефіцієнти податливості, а

J_o - момент інерції диска відносно центральної осі, перпендикулярної до площини креслення .

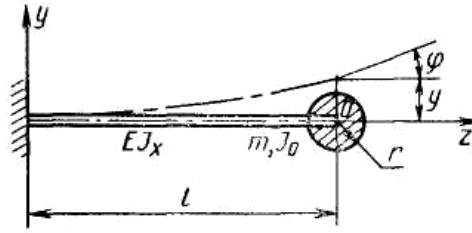


Рисунок 3.2 – Система з двома ступенями вільності

Коефіцієнти δ_{ij} визначають за методами, викладеними в курсах «Опір матеріалів», наприклад, у книзі [19].

Систему рівнянь (3.4) можна подати у такому вигляді:

$$a_{11}\ddot{y} + y + a_{12}\ddot{\vartheta} = 0;$$

$$a_{21}\ddot{y} + a_{22}\ddot{\vartheta} + \vartheta = 0.$$

Беручи розв'язок цієї системи у вигляді

$$y = Y \sin(pt + \varphi);$$

$$\vartheta = \theta \sin(pt + \varphi),$$

отримаємо систему

$$(1 - a_{11}p^2)Y - a_{12}p^2\theta = 0,$$

$$(1 - a_{22}p^2)\theta - a_{21}p^2Y = 0.$$

Для того щоб ця система мала розв'язки, відмінні від нуля, необхідно, щоб її визначник дорівнював нулю:

$$\begin{vmatrix} (1 - a_{11}p^2) & -a_{12}p^2 \\ -a_{21}p^2 & (1 - a_{22}p^2) \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначника, отримуємо рівняння відносно частоти коливань p

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})p^4 - (a_{22} + a_{11})p^2 + 1 = 0.$$

Звідси знаходимо

$$p_{1,2}^2 = \frac{a_{22} + a_{11} \pm \sqrt{(a_{22} + a_{11})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}.$$

Або після перетворень

$$p_{1,2}^2 = \frac{a_{22} + a_{11} \pm \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}.$$

Позначимо $r_1 = \frac{y_{01}}{\varphi_{01}} = \frac{p_1^2 a_{12}}{1 - a_{11}p_1^2}$; $r_2 = \frac{y_{02}}{\varphi_{02}} = \frac{p_2^2 a_{12}}{1 - a_{11}p_2^2}$.

Тоді загальний розв'язок системи рівнянь можна записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} y &= r_1(C_1 \cos p_1 t + C_2 \sin p_1 t) + r_2(C_3 \cos p_2 t + C_4 \sin p_2 t), \\ \varphi &= C_1 \cos p_1 t + C_2 \sin p_1 t + C_3 \cos p_2 t + C_4 \sin p_2 t. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Сталі C_1, \dots, C_4 визначаються заданими початковими умовами при $t = 0$, з яких отримуємо систему

$$\begin{aligned} r_1 C_1 + r_2 C_3 &= y_0; & r_1 p_1 C_2 + r_2 p_2 C_4 &= \dot{y}_0; \\ C_1 + C_3 &= \mathcal{G}_0 & p_1 C_2 + p_2 C_4 &= \dot{\mathcal{G}}_0. \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned} C_1 &= \mathcal{G}_0 - y_0 \frac{1 - r_1}{r_2 - r_1}; & C_2 &= \frac{\dot{\mathcal{G}}_0}{p_1} - \frac{\dot{y}_0 - r_1 \dot{\mathcal{G}}_0}{p_1(r_2 - r_1)}; \\ C_3 &= y_0 \frac{1 - r_1}{r_2 - r_1}; & C_4 &= \frac{\dot{y}_0 - r_1 \dot{\mathcal{G}}_0}{p_2(r_2 - r_1)}. \end{aligned}$$

Математичне сподівання розв'язку

$$m_y = M[r_1(C_1 \cos p_1 t + C_2 \sin p_1 t) + r_2(C_3 \cos p_2 t + C_4 \sin p_2 t)]. \quad (3.6)$$

Оскільки r_1, r_2 та p_1, p_2 визначаються геометричними та фізичними характеристиками системи, які надалі вважатимемо невинуватими, то останній вираз можна переписати так:

$$\begin{aligned} m_y &= r_1(M[C_1] \cos p_1 t + M[C_2] \sin p_1 t) + r_2(M[C_3] \cos p_2 t + M[C_4] \sin p_2 t) = \\ &= r_1(m_{c1} \cos p_1 t + m_{c2} \sin p_1 t) + r_2(m_{c3} \cos p_2 t + m_{c4} \sin p_2 t). \end{aligned}$$

Аналогічно знаходимо математичне сподівання для другої координати:

$$m_\varphi = M[C_1] \cos p_1 t + M[C_2] \sin p_1 t + M[C_3] \cos p_2 t + M[C_4] \sin p_2 t.$$

Оскільки математичні сподівання розв'язків системи рівнянь є функціями часу, то самі функції $y(t)$ і $\varphi(t)$ є нестационарними випадковими функціями.

Математичні сподівання сталих m_{c1}, \dots, m_{c4} , як і в попередньому випадку системи з одним ступенем вільності, є випадковими величинами, оскільки визначаються випадковими початковими даними. Так, наприклад, математичне сподівання

$$m_{c1} = M\left[\mathcal{G}_0 - y_0 \frac{1 - r_1}{r_2 - r_1}\right] = m_{\mathcal{G}0} - m_{y0} \frac{1 - r_1}{r_2 - r_1}.$$

Центрована функція розв'язку $y(t)$ дорівнює

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{y}(t) = & r_1((C_1 - m_{c1})\cos p_1t + (C_2 - m_{c2})\sin p_1t) + \\ & + r_2((C_3 - m_{c3})\cos p_2t + (C_4 - m_{c4})\sin p_2t). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ураховуючи те, що $C_i - m_{ci} = \overset{\circ}{C}_i$, дисперсія розв'язку визначиться формулою

$$\begin{aligned} D_y(t) = M \left[\overset{\circ}{y}^2(t) \right] = & r_1 M \left[\overset{\circ}{C}_1^2 \right] \cos^2 p_1t + r_1 M \left[\overset{\circ}{C}_2^2 \right] \sin^2 p_1t + \\ & + r_2 M \left[\overset{\circ}{C}_3^2 \right] \cos^2 p_2t + r_2 M \left[\overset{\circ}{C}_4^2 \right] \sin^2 p_2t + 2r_1 M \left[\overset{\circ}{C}_1 \overset{\circ}{C}_2 \right] \cos p_1t \sin p_1t + \\ & + 2r_1 r_2 M \left[\overset{\circ}{C}_1 \overset{\circ}{C}_3 \right] \cos p_1t \cos p_2t + 2r_1 r_2 M \left[\overset{\circ}{C}_1 \overset{\circ}{C}_4 \right] \cos p_1t \sin p_2t + \\ & + 2r_1 r_2 M \left[\overset{\circ}{C}_2 \overset{\circ}{C}_3 \right] \sin p_1t \cos p_1t + 2r_1 r_2 M \left[\overset{\circ}{C}_2 \overset{\circ}{C}_4 \right] \sin p_1t \sin p_2t + \\ & + 2r_2 M \left[\overset{\circ}{C}_3 \overset{\circ}{C}_4 \right] \cos p_2t \sin p_2t. \end{aligned}$$

Оскільки $M \left[\overset{\circ}{C}_i^2 \right] = D_{ci}$ і $M \left[\overset{\circ}{C}_i \overset{\circ}{C}_j \right] = K_{C_i C_j}$ при $i \neq j$, останній

вираз подамо у такому вигляді:

$$\begin{aligned} D_y(t) = & r_1 D_{c1} \cos^2 p_1t + r_1 D_{c2} \sin^2 p_1t + \\ & + r_2 D_{c3} \cos^2 p_2t + r_2 D_{c4} \sin^2 p_2t + 2r_1 K_{C_1 C_2} \cos p_1t \sin p_1t + \\ & + 2r_1 r_2 K_{C_1 C_3} \cos p_1t \cos p_2t + 2r_1 r_2 K_{C_1 C_4} \cos p_1t \sin p_2t + \\ & + 2r_1 r_2 K_{C_2 C_3} \sin p_1t \cos p_1t + 2r_1 r_2 K_{C_2 C_4} \sin p_1t \sin p_2t + \\ & + 2r_2 K_{C_3 C_4} \cos p_2t \sin p_2t. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Використовуючи формулу для кореляційної функції (1.3), матимемо

$$\begin{aligned}
K_y(t, t') = & r_1^2 D_{C_1} \cos p_1 t \cos p_1 t' + r_1^2 K_{C_1 C_2} (\cos p_1 t \sin p_1 t' + \sin p_1 t \cos p_1 t') + \\
& + r_1 r_2 K_{C_1 C_3} (\cos p_1 t \cos p_2 t' + \cos p_2 t \cos p_1 t') + \\
& + r_1 r_2 K_{C_1 C_4} (\cos p_1 t \sin p_2 t' + \sin p_2 t \cos p_1 t') + r_1 r_2 K_{C_2 C_3} (\sin p_1 t \cos p_2 t' + \cos p_2 t \sin p_1 t') + \\
& + r_1 r_2 K_{C_1 C_4} (\sin p_1 t \sin p_2 t' + \sin p_2 t \sin p_1 t') + \\
& + r_2^2 K_{C_2 C_4} (\cos p_2 t \sin p_2 t' + \sin p_2 t \cos p_2 t') + r_1^2 D_{C_2} \sin p_1 t \sin p_2 t' + \\
& + r_2^2 D_{C_3} \cos p_2 t \cos p_2 t' + r_2^2 D_{C_4} \sin p_2 t \sin p_2 t'.
\end{aligned}$$

У випадку, коли коефіцієнти C_1, \dots, C_4 є некорельованими випадковими величинами ($K_{C_i C_j} = 0$, $i, j = 1, \dots, 4$, $i \neq j$), вираз для кореляційної функції суттєво спроститься:

$$\begin{aligned}
K_y(t, t') = & r_1^2 D_{C_1} \cos p_1 t \cos p_1 t' + r_1^2 D_{C_2} \sin p_1 t \sin p_2 t' + \\
& + r_2^2 D_{C_3} \cos p_2 t \cos p_2 t' + r_2^2 D_{C_4} \sin p_2 t \sin p_2 t'.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Якщо $m_{g_0} = m_{y_0} = m_{g_0} = m_{y_0} = 0$, а дисперсії $D_{C_1} = D_{C_2} = D_1$ і $D_{C_3} = D_{C_4} = D_2$, то математичні сподівання розв'язків дорівнюватимуть нулю, а кореляційна функція залежатиме тільки від одного аргументу $t - t'$:

$$K_y(t, t') = r_1^2 D_1 \cos p_1(t - t') + r_2^2 D_2 \cos p_2(t - t') = K_y(\tau).$$

Тобто у цьому разі випадкова функція $y(t)$ є стаціонарною і, знаючи кореляційну функцію $K_y(\tau)$, за формою Вінера-Хінчина (1.51) можна визначити її спектральну щільність.

Взаємна кореляційна функція розв'язків за формулою (1.10) дорівнюватиме

$$\begin{aligned}
K_{y,g}(t, t') = & r_1 D_{C_1} \cos p_1 t \cos p_1 t' + r_1 K_{C_1 C_2} (\cos p_1 t \sin p_1 t' + \sin p_1 t \cos p_1 t') + \\
& + K_{C_1 C_3} (r_1 \cos p_1 t \cos p_2 t' + r_2 \cos p_2 t \cos p_1 t') + \\
& + K_{C_1 C_4} (r_1 \cos p_1 t \sin p_2 t' + r_2 \sin p_2 t \cos p_1 t') + \\
& + r_1 D_{C_2} \sin p_1 t \sin p_1 t' + K_{C_2 C_3} (r_1 \sin p_1 t \cos p_2 t' + r_2 \cos p_2 t \sin p_1 t') + \\
& + K_{C_2 C_4} (r_1 \sin p_1 t \sin p_2 t' + r_2 \sin p_2 t \sin p_1 t') + r_2 D_{C_3} \cos p_2 t \cos p_2 t' + \\
& + r_2 K_{C_3 C_4} (\cos p_2 t \sin p_2 t' + \sin p_2 t \cos p_2 t') + r_2 D_{C_4} \sin p_2 t \sin p_2 t'.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Якщо C_1, \dots, C_4 є некорельованими випадковими величинами, то взаємна кореляційна функція розв'язків набирає вигляду

$$\begin{aligned}
K_{y,g}(t, t') = & r_1 D_{C_1} \cos p_1 t \cos p_1 t' + r_1 D_{C_2} \sin p_1 t \sin p_1 t' + \\
& + r_2 D_{C_3} \cos p_2 t \cos p_2 t' + r_1 D_{C_4} \sin p_2 t \sin p_2 t'.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Приклад. Розглянемо систему з двома ступенями вільності без

урахування сил опору (рис. 3.3).

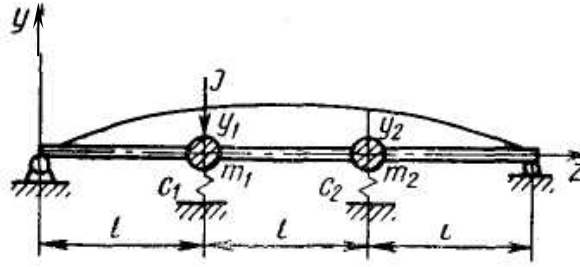


Рисунок 3.3 – Система з двома ступенями вільності

На масу m_1 при $t=0$ раптово подіяв випадковий короткочасний імпульс J (з відомими m_J та D_J), після закінчення дії якого маса m_1 одержала випадкову швидкість y_{10} . Потрібно знайти математичне сподівання і дисперсію зміщення маси m_1 у довільний момент часу, тобто вимагається знайти $m_{y_1}(t)$ і $D_{y_1}(t)$. Скориставшись методом сил, одержимо такі рівняння руху:

$$\begin{aligned} y_1 &= \delta_{11}(-m_1\ddot{y}_1 - c_1y_1) + \delta_{12}(-m_2\ddot{y}_2 - c_2y_2); \\ y_2 &= \delta_{21}(-m_1\ddot{y}_1 - c_1y_1) + \delta_{22}(-m_2\ddot{y}_2 - c_2y_2), \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{y}_1 + a_{12}\ddot{y}_2 + b_{11}y_1 + b_{12}y_2 &= 0; \\ a_{21}\ddot{y}_1 + a_{22}\ddot{y}_2 + b_{21}y_1 + b_{22}y_2 &= 0, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} a_{11} &= \delta_{11}m_1; & a_{12} &= \delta_{12}m_2; & a_{21} &= \delta_{21}m_1; & a_{22} &= \delta_{22}m_2; \\ b_{11} &= 1 + \delta_{11}c_1; & b_{12} &= \delta_{12}c_2; & b_{21} &= \delta_{21}c_1; & b_{22} &= 1 + \delta_{22}c_2. \end{aligned}$$

Систему рівнянь руху можна звести до системи рівнянь першого порядку, проте в даному окремому випадку розв'язок можна одержати відразу для вихідної системи. Вважаючи

$$y_1 = A_1 \cos pt; \quad y_2 = A_2 \cos pt,$$

або

$$y_1 = B_1 \sin pt; \quad y_2 = B_2 \sin pt,$$

із системи рівнянь руху одержимо

$$\begin{aligned} (b_{11} - a_{11}p^2)A_1 + (b_{12} - a_{12}p^2)A_2 &= 0, \\ (b_{12} - a_{21}p^2)A_1 + (b_{22} - a_{22}p^2)A_2 &= 0. \end{aligned}$$

Визначивши корені p_1 і p_2 , знаходимо коефіцієнти розподілу

$$r_1 = \frac{A_{21}}{A_{11}} = -\frac{b_{12} - a_{12}p_1^2}{b_{11} - a_{11}p_1^2},$$

$$r_2 = \frac{A_{22}}{A_{12}} = -\frac{b_{12} - a_{12}p_2^2}{b_{11} - a_{11}p_2^2}.$$

Остаточно розв'язок системи рівнянь руху має вигляд

$$y_1 = A_1 r_1 \cos p_1 t + B_1 r_1 \sin p_1 t + A_2 r_2 \cos p_2 t + B_2 r_2 \sin p_2 t,$$

$$y_2 = A_1 \cos p_1 t + B_1 \sin p_1 t + A_2 \cos p_2 t + B_2 \sin p_2 t,$$

Оскільки при $t=0$ $y_1 = y_2 = \dot{y}_2 = 0$, а $\dot{y}_1 = \dot{y}_{10}$, то після визначення довільних сталих A_i, B_i одержимо

$$y_1 = \frac{r_1 \dot{y}_{10} \sin p_1 t}{p_1 (r_2 - r_1)} - \frac{r_2 \dot{y}_{10} \sin p_2 t}{p_2 (r_2 - r_1)}.$$

Математичне сподівання і дисперсія y_1 відповідно дорівнюють

$$m_{y_1}(t) = \left[\frac{r_1 \sin p_1 t}{p_1 (r_2 - r_1)} - \frac{r_2 \sin p_2 t}{p_2 (r_2 - r_1)} \right] m_{\dot{y}_{10}};$$

$$D_{y_1}(t) = \left[\frac{r_1 \sin p_1 t}{p_1 (r_2 - r_1)} - \frac{r_2 \sin p_2 t}{p_2 (r_2 - r_1)} \right]^2 D_{\dot{y}_{10}}.$$

$m_{\dot{y}_{10}}$ і $D_{\dot{y}_{10}}$, що входять в останні вирази, пов'язані з імовірнісними характеристиками випадкового імпульсу співвідношеннями

$$m_{\dot{y}_{10}} = \frac{m_J}{m_I}; \quad D_{\dot{y}_{10}} = \frac{D_J}{m_I^2}.$$

3.2. Визначення ймовірнісних характеристик частот вільних загасаючих коливань

Розглянемо коливання системи з одним ступенем вільності, у якій інерційні, жорсткісні характеристики та характеристики опору є випадковими величинами A, B, C . Рівняння вільних коливань такої системи має вигляд

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = 0.$$

Беручи розв'язок у вигляді $x = x_0 e^{\lambda t}$ і підставляючи його в рівняння коливань, одержимо

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0,$$

звідки $\lambda_{1,2} = -\frac{B}{2A} \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$. Коливання можливі тільки якщо

розв'язок цього рівняння має комплексні корені. При цьому дійсна частина кореня характеризуватиме зміну амплітуди в часі, а уявна – частоту коливання. Тобто розв'язок початкового рівняння можна подати у вигляді

$$X = e^{-\frac{B}{2A}t} (L \cos \omega t + N \sin \omega t).$$

Не ставлячи за мету дати аналіз випадкового процесу $X(t)$ в цілому, проведемо аналіз імовірнісних характеристик частоти вільних загасаючих коливань, яка є відомою функцією заданих випадкових величин

$$\Omega = \sqrt{\frac{C}{A} - \frac{B^2}{4A^2}}. \quad (3.12)$$

Для знаходження закону розподілу ймовірності значень величини Ω потрібно знати багатовимірний (сумісний) розподіл системи випадкових величин A, B, C . Позначимо відповідну щільність імовірності функцією $f(a, b, c)$. Припускаючи, що випадкові величини A, B, C є незалежними, можна записати

$$f(a, b, c) = \varphi(a)\phi(b)\chi(c).$$

Тоді інтегральна функція розподілу для Ω (функція ймовірності того, що Ω набуде значення, менше від ω) матиме вигляд

$$F(\omega) = \iiint_{(S)_{abc}} f(a, b, c) da db dc = \iiint \varphi(a)\phi(b)\chi(c) da db dc,$$

де область інтегрування $(S)_{abc}$ визначається нерівністю

$$\sqrt{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}} < \omega.$$

Співвідношення для Ω можна розв'язати відносно одного з параметрів, наприклад відносно C :

$$C = A \left(\Omega^2 + \frac{B^2}{4A^2} \right).$$

Оскільки C є однозначною функцією Ω в області можливих значень C , то заміною системи змінних a, b, c на систему a, b, ω інтеграл у виразі для функції розподілу зводиться до потрібного інтеграла з відомими межами інтегрування:

$$F(\omega) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \int_{a_1}^{a_2} f \left[a, b, a \left(\omega^2 + \frac{b^2}{4a^2} \right) \right] \left| \frac{\partial \Phi(a, b, \omega)}{\partial \omega} da db \right|, \quad (3.13)$$

де $\Phi(a, b, \omega) = c = a \left(\omega^2 + \frac{b^2}{4a^2} \right)$.

Використовуючи незалежність даних величин, а також останній вираз для функції розподілу (3.13), одержимо

$$F(\omega) = 2 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega d\omega \int_{a_1}^{a_2} \varphi(a) a da \int_{b_1}^{b_2} \phi(b) \chi \left[a \left(\omega^2 + \frac{b^2}{4a^2} \right) \right] db.$$

Щільність імовірності $f(\omega)$ визначається диференціюванням $F(\omega)$ за ω :

$$f(\omega) = \frac{dF(\omega)}{d\omega} = 2\omega \int_{a_1}^{a_2} a \varphi(a) da \int_{b_1}^{b_2} \phi(b) \chi \left[a \left(\omega^2 + \frac{b^2}{4a^2} \right) \right] db \text{ при } \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2, \quad (3.14)$$

$$f(\omega) = 0 \text{ при } \omega < \omega_1 \text{ і } \omega > \omega_2.$$

При фіксованому значенні параметра A (практично розрахунковий інерційний коефіцієнт, як правило, відповідає натурі в набагато більшому ступені, ніж пружний або коефіцієнт опору), який дорівнює, наприклад, номінальному $A \equiv a_n$, за функцію розподілу величини A потрібно взяти δ - функцію (одиничну імпульсну функцію):

$$\varphi(a) = \delta(a - a_n).$$

Щільність імовірності власної частоти при цьому буде дорівнювати

$$f(\omega) = 2a_n \omega \int \phi(b) \chi \left[a_n \left(\omega^2 + \frac{b^2}{4a_n^2} \right) \right] db \text{ при } \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2. \quad (3.15)$$

Якщо впливом сил опору на частоту можна знехтувати, то остання формула спрощується, набуваючи вигляду

$$f(\omega) = 2a_n \omega \chi(a_n \omega^2) \text{ при } \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2.$$

За знайденим законом розподілу ймовірності власної частоти легко визначити її числові характеристики. Математичне сподівання

$$M[\Omega] = m_\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega f(\omega) d\omega \quad (3.16)$$

і дисперсія

$$D(\Omega) = D_\omega = M[(\Omega - m_\omega)^2] = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega^2 f(\omega) d\omega - m_\omega^2. \quad (3.17)$$

Розсіювання ймовірних значень частоти щодо її середнього значення m_ω більш наочно характеризується середньоквадратичним відхиленням

$$S_\omega = \sqrt{D_\omega}.$$

Приклад. Потрібно знайти закон розподілу ймовірності та числові характеристики частоти вільних коливань вібратора (рис. 3.4), інерційні та демпфірувальні параметри A і B якого мають номінальні значення, а характеристики жорсткості C підлягають розподілу Пірсона типу II:

$$f(x) = (\gamma^2 - x^2)^n,$$

для якого $n > 1$, а інтервал зміни випадкової величини дорівнює 2γ :

$$-\gamma \leq x \leq \gamma.$$

Зробимо заміну змінних $x = c - c_n$ і, обмежуючись випадком $n = 2$, задамо функцію щільності ймовірності жорсткості у вигляді

$$\chi(c) = \alpha [\gamma^2 - (c - c_n)^2]^2 \text{ при } c_n - \gamma \leq c \leq c_n + \gamma, \quad 0 < \gamma \leq c_n.$$

Нормувальний множник α визначається з умови

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi(c) dc = \int_{c_n - \gamma}^{c_n + \gamma} \chi(c) dc = 1.$$

Остаточно маємо

$$\chi(c) = \frac{15}{16\gamma^5} [\gamma^2 - (c - c_n)^2]^2.$$

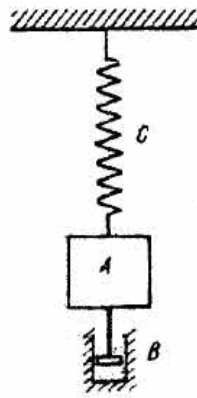


Рисунок 3.4

З парності функції $\chi(c)$ щодо величини $(c - c_n)$ (або інакше, із симетрії кривої $\chi(c)$ відносно прямої $c = c_n$) випливає, що середнє значення параметра C збігається з його номінальним значенням.

Дійсно,

$$m_c = \int_{c_n - \gamma}^{c_n + \gamma} c \chi(c) dc = \frac{15}{16\gamma^5} \int_{-\gamma}^{\gamma} (x + c_n) (\gamma^2 - x^2)^2 dx = c_n.$$

Дисперсія параметра C

$$D_c = \int_{c_H - \gamma}^{c_H + \gamma} (c - m_c)^2 \chi(c) dc = \frac{15}{16\gamma^5} \int_{-\gamma}^{\gamma} x^2 (\gamma^2 - x^2)^2 dx = \frac{\gamma^2}{7}.$$

Середнє квадратичне відхилення $S_c = 0,378\gamma$.

На рис. 3.5 графік функції розподілу $\chi(c)$ показаний у відносних змінних $\zeta = \frac{c}{c_H}$ при межі розсіювання $\gamma = 0,5c_H$. Для такої величини

$D_c = 0,0357c_H^2$; $S_c = 0,189c_H$. На тому самому рисунку показана крива нормального (гаусівського) розподілу з такими самими середнім значенням і дисперсією:

$$\chi_N(c) = \frac{1}{S_c \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(c - m_c)^2}{2S_c^2}\right) = \frac{5,294}{c_H \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right),$$

де $\eta = \frac{c - c_H}{S_c} = 5,294(\zeta - 1)$.

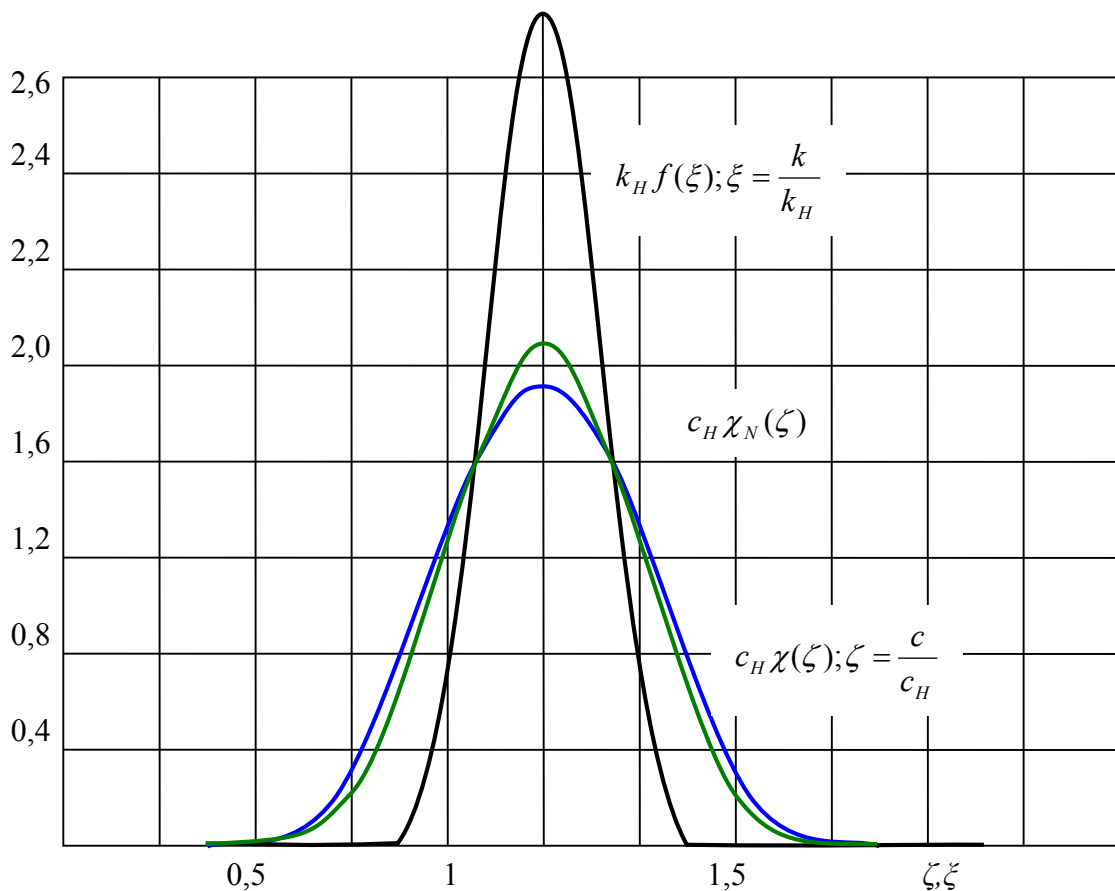


Рисунок 3.5

Із графіка бачимо, що вказані криві розходяться несильно; при

цьому перша крива краще відображає фізичні умови задачі (відсутність нескінченних значень C). Збіг між обома кривими в середній частині можна полішити шляхом правильного вибору показника n щільності ймовірності.

У виробничій статистиці для параметрів якості виробу, що мають двосторонні допуски, як правило, застосовують нормальний розподіл. Для істотно позитивних величин нормальний розподіл взагалі неприйнятний. Проте часто при побудові функції розподілу можна покласти в основу нормальну функцію, модифікувавши її відповідно фізичними умовами статистичної задачі.

Для цієї мети, у разі кінцевого інтервалу зміни випадкової величини, вважаємо, у багатьох випадках можна використовувати яку-небудь із кривих Пірсона першого і другого типів, що забезпечує достатнє наближення до досліджуваного розподілу і просту обчислень.

Знайдемо щільність ймовірності власної частоти вібратора, що відповідає знайденому розподілу параметра c .

Беручи до уваги, що $\varphi(a) = \delta(a - a_n)$ і $\phi(b) = \delta(b - b_n)$, одержимо

$$f(\omega) = \frac{15}{8} \frac{a_n}{\gamma^5} \omega [\gamma^2 - a_n^2 (\omega^2 - \omega_n^2)]^2 \text{ при } \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2,$$

$$\text{де } \omega_n = \sqrt{\frac{c_n}{a_n} - \frac{b_n^2}{4a_n^2}}; \omega_1 = \sqrt{\frac{c_n - \gamma}{a_n} - \frac{b_n^2}{4a_n^2}}; \omega_2 = \sqrt{\frac{c_n + \gamma}{a_n} - \frac{b_n^2}{4a_n^2}}.$$

Середнє значення власної частоти

$$m_\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega f(\omega) d\omega = -\frac{a_n^2}{\gamma^3} \omega_n^2 (\omega_2^5 - \omega_1^5) - \frac{a_n^2}{\gamma^3} (\omega_2^5 + \omega_1^5) + \frac{11}{7} \frac{a_n^3}{\gamma^3} (\omega_2^7 - \omega_1^7) + \\ + \frac{8}{21} \frac{a_n^5}{\gamma^5} \omega_n^2 (\omega_2^9 - \omega_1^9) - \frac{24}{77} \frac{a_n^5}{\gamma^5} \omega_n^2 (\omega_2^{11} - \omega_1^{11}).$$

Дисперсія власної частоти

$$D_\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega^2 f(\omega) d\omega - m_\omega^2 = \frac{15}{8} \left(\frac{\omega_2^2 + \omega_1^2}{10} - \frac{a_n}{\gamma} \frac{\omega_2^4 + \omega_1^4}{4} - \frac{a_n^3}{\gamma^3} \frac{\omega_2^6 - \omega_1^6}{3} + \frac{a_n^3}{\gamma^3} \frac{\omega_2^8 - \omega_1^8}{4} \right) - m_\omega^2.$$

Для випадку $b_n = 0$; $\gamma = 0.5c_n$ і, отже, $\omega_1^2 = 0.5\omega_n^2$; $\omega_2^2 = \frac{3}{2}\omega_n^2$; $\frac{\gamma}{a_n} = \frac{\omega_n^2}{2}$

вказані величини набудуть значення

$$m_\omega = 0.9955\omega_n; D_\omega = 0.009\omega_n^2.$$

Середнє квадратичне відхилення $S_\omega = 0.095\omega_n$.

Таким чином, при порівняно великому розкиді значень коефіцієнта жорсткості (інтервал розкиду дорівнює номінальному значенню)

середнє значення частоти дуже мало відрізняється від номінального, а середнє квадратичне відхилення частоти майже вдвічі менше середнього квадратичного відхилення жорсткості. Проте було б поспішним з цього робити висновок, що з великим ступенем імовірності можна чекати знаходження частоти у вузькій смузі біля номінального значення. Визначимо ймовірність P_2 того, що частота буде розміщуватись в інтервалі

$$(1 - \nu)\omega_n \leq \omega \leq (1 + \nu)\omega_n.$$

Маємо

$$P_{2\nu} = \int_{(1-\nu)\omega_n}^{(1+\nu)\omega_n} f(\omega) d\omega.$$

Використовуючи цю формулу, потрібно порівняти величини $(1 - \nu)\omega_n$ і $(1 + \nu)\omega_n$ з межами зміни частоти ω_1 і ω_2 відповідно.

Для даного випадку $\gamma = 0,5c_n$, $b_n = 0$ шукана ймовірність дорівнює:

при $\nu = 0,05$ (10% інтервал) $P_{2\nu} = 0,365$;

$\nu = 0,10$ (20% інтервал) $P_{2\nu} = 0,673$;

$\nu = 0,20$ (40% інтервал) $P_{2\nu} = 0,975$.

Ймовірність $P_{2\nu}$ при нормальному розподілі жорсткісних характеристик вібратора визначається за формулою

$$P_{2\nu} = \int_{c'}^{c''} \frac{1}{S_c \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(c - m_c)^2}{2S_c^2}\right) dc,$$

де (для $b_n = 0$):

$$c' = a_n(1 - \nu)^2 \omega_n^2; \quad c'' = a_n(1 + \nu)^2 \omega_n^2.$$

Заміною змінної $\eta = \frac{c - m_c}{S_c} = \frac{c - c_n}{S_c}$ інтеграл зводиться до вигляду

$$P_{2\nu} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\eta'}^{\eta''} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) d\eta = \Phi(\eta'') - \Phi(\eta'),$$

де $\Phi(\eta)$ - значення функції Лапласа (таблиця А.3). Підрахунок за цією формулою дає:

при $\nu = 0,05$ - $P_{2\nu} = 0,403$;

$\nu = 0,10$ - $P_{2\nu} = 0,730$;

$\nu = 0,20$ - $P_{2\nu} = 0,861$.

Таким чином, і цей розподіл не забезпечує досить великої ймовірності знаходження частоти у вузькій смузі. Отже, одержану дисперсію $D_\omega = 0,0090\omega_n^2$ потрібно визнати за значну.

У деяких випадках дуже важко знайти щільність розподілу функції випадкових величин через неможливість визначити обернену функцію ψ . Крім того, іноді під час проектування відома інформація тільки про декілька перших моментів випадкових аргументів. У цих випадках під час розв'язання інженерних задач перші моменти досліджуваної випадкової функції можна визначити приблизно методом лінеаризації (шляхом розкладання функції в ряд Тейлора навколо математичного сподівання аргументу). Цей метод висвітлений у п. 2.2

3.3. Вимушені стаціонарні випадкові коливання

Розглянемо вимушені коливання лінійної системи з одним ступенем вільності зі сталими коефіцієнтами, що описується диференціальним рівнянням другого порядку

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + \omega_0^2 y = f(t), \quad (3.18)$$

де $f(t)$ - стаціонарна випадкова сила.

Якщо однорідне рівняння (3.18) має асимптотичні стійкі розв'язки, то при стаціонарному навантаженні після перехідного процесу система переходить у режим стаціонарних коливань.

Визначення ймовірнісних характеристик вихідного процесу в цьому випадку простіше за все провести методом спектральних зображень. Якщо зовнішнє навантаження нецентрована функція, то рівняння (3.18) розв'язуємо окремо для математичного сподівання за нульових початкових умов:

$$m_{\ddot{y}} + 2nm_{\dot{y}} + \omega_0^2 m_y = m_f. \quad (3.19)$$

Надалі вважатимемо силу $f(t)$ стаціонарною центрованою випадковою функцією. В цьому випадку ймовірнісні характеристики розв'язку визначаються за формулою (1.74).

Частотна характеристика системи має вигляд

$$W(i\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 + 2ni\omega + (i\omega)^2} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ni\omega}.$$

Тоді за формулою (1.74) отримуємо спектральну щільність виходу:

$$S_y(\omega) = \frac{S_f(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2n\omega)^2}.$$

Практичний інтерес має випадок дії білого шуму на розглянуту динамічну систему.

У цьому випадку

$$S_y(\omega) = \left[\frac{S_f(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} \right] = \frac{S_0}{2\pi(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\varepsilon)(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\varepsilon)}. \quad (3.20)$$

Дисперсія процесу за формулою (1.76) дорівнюватиме

$$D_y = \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} = \frac{S_0}{4n\omega_0^2}. \quad (3.21)$$

Якщо дисипація в системі є незначною, то для дисперсії на виході може бути отримана наближена формула, справедлива для довільної функції $S_f(\omega)$, що змінюється повільно. Дійсно, при $n \ll \omega_0$ спектральна щільність (3.20) набирає великих значень, як це було показано раніше, лише в малому околі частот $\pm\omega_0$. Якщо в цих інтервалах функція $S_f(\omega)$ змінюється повільно, то можна застосувати теорему про середнє

$$D_y = 2S_f(\omega_0) \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} \frac{d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}.$$

Вираз під інтегралом має малі значення поза межами інтегрування, тому область інтегрування можна знову взяти від 0 до ∞ .

Остаточно отримуємо

$$D_y \approx \frac{S_f(\omega_0)}{4n\omega_0^2}. \quad (3.22)$$

Формула (3.22) відрізняється від (3.21) тим, що в неї входить значення спектральної щільності $S_f(\omega)$ при ω_0 . Це можна пояснити так: оскільки вихідний процес вузькосмуговий і основна частина енергії процесу зосереджена у вузькій частині спектра, що лежить поблизу частоти ω_0 , система реагує лише на ті частини спектра зовнішньої дії, які близькі до власної частоти ω_0 . Порівнюючи формули (3.22) і (3.21), можна зробити важливий висновок: при малій дисипації в системі ($n \ll \omega_0$) і такій спектральній щільності входу $S_f(\omega)$, що змінюється повільно, зовнішній вплив може бути замінений білим шумом, спектральна щільність якого дорівнює спектральній щільності вхідного процесу при власній частоті системи $S_0 = 2\pi S_f(\omega_0)$.

Розглянемо випадок, коли зовнішня дія є квазігармонічним випадковим процесом зі спектральною щільністю

$$S_f(\omega) = D_f \delta(\omega - \omega_1),$$

де ω_1 - основна частота процесу [20].

Згідно з формулами (1.66) та (1.67) вирази для кореляційної функції і спектральної щільності процесу на виході матимуть вигляд

$$K_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D_f \delta(\omega - \omega_1) e^{i\omega\tau} d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2n\omega)^2}, \quad (3.23)$$

$$S_y(\omega) = \frac{D_f \delta(\omega - \omega_1)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2n\omega)^2}.$$

З теорії випадкових функцій відомо, що отриманій спектральній щільності відповідає така кореляційна функція:

$$K_y(\tau) = D_y \cos \omega_1 \tau.$$

Дисперсія процесу $y(t)$ визначається відповідно за формулою (1.76):

$$D_y = D_f \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\omega - \omega_1) d\omega_1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2n\omega)^2} = \frac{D_f}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2n\omega)^2}. \quad (3.24)$$

Виходячи з того, що перетворення Фур'є, за допомогою яких отримано зв'язок між спектральною щільністю і кореляційною функцією випадкового процесу, є лінійним перетворенням, то, очевидно, що при додаванні випадкових функцій із заданими спектральними функціями сумарному коливанню

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \dots$$

відповідає спектральна щільність, що є сумою відповідних спектральних щільностей складових цього коливання

$$S_x(\omega) = S_{x_1}(\omega) + S_{x_2}(\omega) + \dots \quad (3.25)$$

Хід дослідження вимушених коливань систем зі скінченим числом ступенів вільності при стаціонарних навантаженнях суттєво не відрізнятиметься від поданого вище. Розглянемо це на прикладі системи з двома ступенями вільності.

Приклад. Рівняння руху системи, показаної на рис. 3.6, у загальному вигляді можна подати у вигляді

$$\delta_{11} m_1 \ddot{y}_1 + \delta_{12} m_2 \ddot{y}_2 + \alpha_1 \delta_{11} \dot{y}_1 + \alpha_2 \delta_{12} \dot{y}_2 + y_1 = \delta_{11} f_1 + \delta_{12} f_2;$$

$$\delta_{12} m_1 \ddot{y}_1 + \delta_{22} m_2 \ddot{y}_2 + \alpha_1 \delta_{21} \dot{y}_1 + \alpha_2 \delta_{22} \dot{y}_2 + y_2 = \delta_{21} f_1 + \delta_{22} f_2.$$

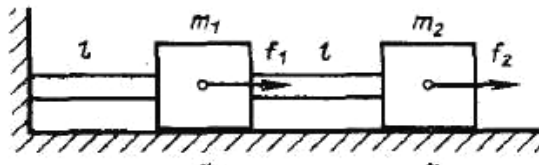


Рисунок 3.6 – Розрахункова схема поздовжніх коливань системи з двома ступенями вільності

Спектральні щільності $S_{f_1}(\omega)$ і $S_{f_2}(\omega)$ випадкових стаціонарних сил, які діють на систему, відомі. Для визначення спектральної

щільності виходу S_{y_1}, S_{y_2} необхідно отримати вирази для передаточних функцій.

Розв'язок системи рівнянь шукаємо у вигляді

$$y_1 = y_{10}e^{i\omega t}, \quad y_2 = y_{20}e^{i\omega t}, \quad f_1 = F_1e^{i\omega t}, \quad f_2 = F_2e^{i\omega t}.$$

Для визначення y_{10}, y_{20} отримуємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} (1 + \alpha_1\delta_{11}i\omega - \omega^2 m_1\delta_{11})y_{10} + (\alpha_2\delta_{12}i\omega - \delta_{12}m_2\omega^2)y_{20} &= \delta_{11}F_1 + \delta_{12}F_2, \\ (\alpha_1\delta_{21}i\omega - \delta_{21}m_1\omega^2)y_{10} + (1 + \alpha_2\delta_{22}i\omega - \delta_{22}m_2\omega^2)y_{20} &= \delta_{21}F_1 + \delta_{22}F_2, \end{aligned}$$

з якої знаходимо

$$\begin{aligned} y_{10} &= W_{11}(\omega)F_1 + W_{12}(\omega)F_2, \\ y_{20} &= W_{21}(\omega)F_1 + W_{22}(\omega)F_2, \end{aligned}$$

де $W_{ij} = \frac{A_{ij}}{\Delta}$,

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} \delta_{11} & (i\omega\alpha_2 - m_2\omega^2)\delta_{12} \\ \delta_{21} & (1 + \alpha_2\delta_{22}i\omega - \delta_{22}m_2\omega^2) \end{vmatrix}, & A_{12} &= \begin{vmatrix} \delta_{12} & (i\omega\alpha_2 - m_2\omega^2)\delta_{12} \\ \delta_{22} & (1 + \alpha_2\delta_{22}i\omega - \delta_{22}m_2\omega^2) \end{vmatrix}, \\ A_{21} &= \begin{vmatrix} (1 + \alpha_1\delta_{11}i\omega - \delta_{11}m_1\omega^2) & \delta_{11} \\ (i\omega\alpha_1 - m_1\omega^2)\delta_{21} & \delta_{21} \end{vmatrix}, & A_{22} &= \begin{vmatrix} (1 + \alpha_1\delta_{11}i\omega - \delta_{11}m_1\omega^2) & \delta_{12} \\ (i\omega\alpha_1 - m_1\omega^2)\delta_{21} & \delta_{22} \end{vmatrix}, \\ \Delta &= \begin{vmatrix} (1 + \alpha_1\delta_{11}i\omega - \omega^2 m_1\delta_{11}) & (\alpha_2\delta_{12}i\omega - \delta_{12}m_2\omega^2) \\ (\alpha_1\delta_{21}i\omega - \delta_{21}m_1\omega^2) & (1 + \alpha_2\delta_{22}i\omega - \delta_{22}m_2\omega^2) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Тоді спектральна щільність розв'язків з урахуванням (1.74) та (3.25) матиме вигляд

$$S_{y_1}(\omega) = W_{11}W_{11}^*S_{f_1}(\omega) + W_{12}W_{12}^*S_{f_2}(\omega),$$

$$S_{y_2}(\omega) = W_{21}W_{21}^*S_{f_1}(\omega) + W_{22}W_{22}^*S_{f_2}(\omega).$$

Для визначення дисперсії розв'язків використовуємо формулу (1.76):

$$D_{y_1}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{11}W_{11}^*S_{f_1}(\omega)d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{12}W_{12}^*S_{f_2}(\omega)d\omega,$$

$$D_{y_2}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{21}W_{21}^*S_{f_1}(\omega)d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{22}W_{22}^*S_{f_2}(\omega)d\omega.$$

Задача. На масу m_1 (рис. 3.7) діє стаціонарна випадкова сила з нульовим математичним сподіванням і спектральною щільністю $S_{f_1} = 2D_{f_1}\alpha/(\alpha^2 + \omega^2)$. Визначити максимально можливе переміщення y_1 маси m_1 .

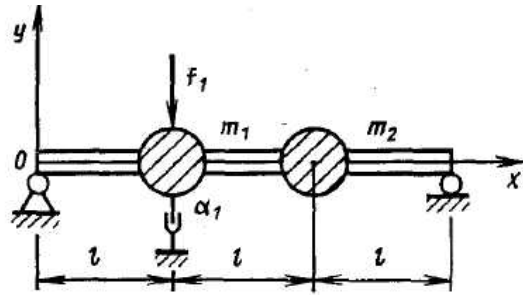


Рисунок 3.7 – Розрахункова схема згинальних коливань системи з двома ступенями вільності

3.4. Вимушені нестационарні випадкові коливання систем з одним ступенем вільності

Розглянемо спочатку лінійне диференціальне рівняння першого порядку

$$\dot{Y} + kY = X(t), \quad (3.26)$$

де $X(t)$ - випадкова функція, для якої відомі $m_x(t)$ і $K_x(t, t')$.

Рівняння (3.26) описує фізичний процес, що змінюється в часі. Розглянемо, наприклад, працюючий двигун, показаний схематично на рис. 3.8. У сталому режимі роботи момент двигуна $M_q(Y)$ врівноважується моментом опору $M_c(\omega)$, що залежить від кутової швидкості ω , і моментом навантаження M_H .

Випадкова зміна моменту навантаження на ΔM_H приведе до зміни кутової швидкості на $\Delta\omega$ і до появи моменту сил інерції, який дорівнює $J \frac{d\Delta\omega}{dt}$. Рівняння збудженого руху маховика (J - приведений до осі вала момент інерції деталей, що обертаються) має вигляд

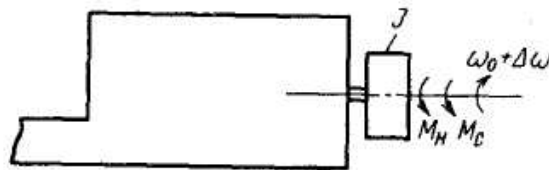


Рисунок 3.8 - Схема двигуна

$$J \frac{d\Delta\omega}{dt} = \Delta M_H - \Delta M_c, \quad (3.27)$$

де ΔM_c - зміна моменту опору.

При малих відхиленнях від стаціонарного режиму роботи маємо

$$\Delta M_c = k \Delta\omega.$$

Тоді рівняння (3.27) набирає вигляду, аналогічного рівнянню (3.26),

$$\frac{d\Delta\omega}{dt} + \frac{k}{J}\Delta\omega = \frac{\Delta M_H}{J}, \quad (3.28)$$

тобто одержуємо диференціальне рівняння першого порядку.

Загальний розв'язок рівняння (3.28) при довільній правій частині візьмемо у такому вигляді:

$$y = ce^{-kt} + \int_0^t e^{-k(t-\varepsilon)} X(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (3.29)$$

При $t=0$; $y(0) = y_0$, тому $c = y_0$. Початкове значення y може бути як не випадковим, так і випадковим.

Розглянемо випадок, коли початкове значення y_0 випадкове, причому випадкова величина Y_0 і випадкова функція $X(t)$ незалежні. Вважаємо, що ймовірнісні характеристики Y_0 відомі й дорівнюють m_0 і D_0 .

Математичне сподівання y

$$m_y = M[Y_0 e^{-kt}] + \int_0^t M[e^{-k(t-\varepsilon)} X(\varepsilon)] d\varepsilon = m_0 e^{-kt} + \int_0^t e^{-k(t-\varepsilon)} m_x(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (3.30)$$

Кореляційна функція

$$K_y(t, t') = M \left[\left\{ \overset{\circ}{Y}_0 e^{-kt} + \int_0^t e^{-k(t-\varepsilon)} \overset{\circ}{X}(\varepsilon) d\varepsilon \right\} * \left\{ \overset{\circ}{Y}_0 e^{-kt'} + \int_0^{t'} e^{-k(t'-\varepsilon_1)} \overset{\circ}{X}(\varepsilon_1) d\varepsilon_1 \right\} \right], \quad (3.31)$$

де $\overset{\circ}{Y}$ і $\overset{\circ}{X}$ - центровані випадкові величини.

Оскільки $\overset{\circ}{Y}_0$ і $\overset{\circ}{X}(t)$ незалежні, то після перетворень одержуємо

$$K_y(t, t') = D_0 e^{-k(t+t')} + \int_0^t \int_0^{t'} e^{-k(t-\varepsilon)} e^{-k(t'-\varepsilon_1)} K_x(\varepsilon, \varepsilon_1) d\varepsilon d\varepsilon_1. \quad (3.32)$$

Для отримання дисперсії розв'язку (3.29) потрібно після інтегрування у виразі (3.32) припустити $t' = t$.

Знайдемо кореляційну функцію і дисперсію розв'язку рівняння (3.28), якщо ΔM_H випадкова функція з нульовим математичним сподіванням і сталою дисперсією D_H . При $t=0$ та $\Delta\omega=0$. Після перетворень одержимо

$$K_{\Delta\omega}(t, t') = \frac{D_H}{k^2} (e^{-kt} - 1)(e^{-kt'} - 1);$$

$$D_{\Delta\omega}(t) = \frac{D_H}{k^2} (e^{-kt} - 1)^2.$$

Розглянемо лінійне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і випадковою правою частиною:

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = X(t). \quad (3.33)$$

Загальний розв'язок рівняння (3.33) можна подати у вигляді

$$y = c_1 f_{11}(t) + c_2 f_{12}(t) + \int_0^t K_{11}(t, \tau) X(\tau) d\tau, \quad (3.34)$$

де

$$K_{11}(t, \tau) = \frac{f_{11}(t)f_{22}(\tau) - f_{12}(t)f_{21}(\tau)}{\Delta},$$

тут

$$\Delta = f_{11}(\tau)f_{22}(\tau) - f_{12}(\tau)f_{21}(\tau).$$

Вираз для похідної y за часом матиме вигляд

$$\dot{y} = c_1 \dot{f}_{11} + c_2 \dot{f}_{12} + \int_0^t \frac{\partial K(t, \tau)}{\partial t} X(\tau) d\tau. \quad (3.35)$$

Довільні сталі визначимо з початкових умов:

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0 = c_1 f_{11}(0) + c_2 f_{12}(0); \\ \dot{y}(0) &= \dot{y}_0 = c_1 \dot{f}_{11}(0) + c_2 \dot{f}_{12}(0). \end{aligned} \quad (3.36)$$

З (3.36) одержимо

$$\begin{aligned} c_1 &= \alpha_{11} y_0 + \alpha_{12} \dot{y}_0; \\ c_2 &= \alpha_{21} y_0 + \alpha_{22} \dot{y}_0. \end{aligned}$$

Вираз для y набуває вигляду

$$y = y_0 f_1(t) + \dot{y}_0 f_2(t) + \int_0^t K_{11}(t, \tau) X(\tau) d\tau, \quad (3.37)$$

де

$$\begin{aligned} f_1 &= \alpha_{11} f_{11}(t) + \alpha_{21} f_{12}(t); \\ f_2 &= \alpha_{12} f_{11}(t) + \alpha_{22} f_{12}(t). \end{aligned}$$

При визначенні ймовірнісних характеристик y можна скористатися результатами п.3.1.

Вважаючи початкові дані y_0, \dot{y}_0 і збудження $X(t)$ незалежними випадковими величинами, ймовірнісні характеристики яких відомі, знайдемо математичне сподівання

$$m_y = m_{y_0} f_1 + m_{\dot{y}_0} f_2 + \int_0^t K_{11}(t, \tau) m_x(\tau) d\tau \quad (3.38)$$

і кореляційну функцію

$$\begin{aligned} K_y = M[Y_0(t), Y_0(t')] &= f_1(t)f_1(t')D_{y_0} + f_2(t)f_2(t')D_{\dot{y}_0} + \\ &+ \int_0^t \int_0^{t'} K_{11}(t, \tau) k(t', \tau_1) K_x(\tau, \tau_1) d\tau_1 d\tau. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Вважаючи $t' = t$, визначимо дисперсію розв'язку (3.37).

Співвідношення (3.30), (3.32), (3.38) і (3.39) дають можливість одержати ймовірнісні характеристики розв'язку (виходу) при відомих ймовірнісних характеристиках збуджень (входу) і початкових даних.

У загальному випадку ймовірнісні характеристики розв'язку диференціального рівняння з нестационарною правою частиною

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y(t) = f(t) \quad (3.40)$$

або

$$Ly(t) = f(t) \quad (3.41)$$

шукатимемо методом спектральних зображень.

Унаслідок лінійності рівняння (3.40) і стаціонарності похідних від стаціонарних функцій праву частину цього рівняння подамо у вигляді:

$$f(t) = x(t)\varphi(t),$$

де $x(t)$ - стаціонарна функція, а $\varphi(t)$ - невинипадкова функція часу.

Замінімо функцію $x(t)$ її спектральним розкладанням за формулою (1.71):

$$x(t) = m_x + \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (3.42)$$

тоді права частина рівняння (3.40) набере вигляду

$$f(t) = m_x \varphi(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{i\omega t} F(i\omega) d\omega. \quad (3.43)$$

Частинний розв'язок рівняння (3.40), що відповідає функції $f(t)$ у вигляді (3.43), можна подати у такому вигляді:

$$y_1(t) = m_y + \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t, \omega) F(i\omega) d\omega, \quad (3.44)$$

де m_y - математичне сподівання, а функція $\psi(t, \omega)$ - частинний розв'язок рівняння, правою частиною якого є невинипадкова функція, і знаходиться з рівняння

$$L\psi(t, \omega) = \varphi(t) e^{i\omega t}. \quad (3.45)$$

Для простоти обчислень припустимо, що початкові умови $y_0, y_0', \dots, y_0^{n-1}$ - задані (невинипадкові) числа. Тоді можна вважати, що початкові умови задовольняються при визначенні розв'язку однорідного рівняння, тому розв'язок рівняння (3.45) можна шукати за нульових початкових умов.

Аналітичний розв'язок рівняння (3.45) досить просто знаходиться у двох випадках:

1. $\varphi(t) = t^m, m = 0, 1, 2, \dots$

$$2. \varphi(t) = e^{kt}, k = 0, 1, 2, \dots$$

У першому випадку частинний розв'язок рівняння (3.45) доцільно подати у вигляді полінома, помноженого на $e^{i\omega t}$:

$$\psi(\omega, t) = (c_0 t^m + c_1 t^{m-1} + \dots + c_m) e^{i\omega t}. \quad (3.46)$$

Коефіцієнти c_0, c_1, \dots, c_m визначаються з рівняння (3.45) шляхом підстановки прийнятого розв'язку і прирівнювання коефіцієнтів при відповідних ступенях t . Розв'язок у вигляді (3.46) не задовольняє нульові початкові умови [25], тому запишемо його інакше:

$$\psi(\omega, t) = (c_0 t^m + c_1 t^{m-1} + \dots + c_m) e^{i\omega t} + \sum_{j=1}^n l_j e^{\lambda_j t} = C_m(\omega, t) + \sum_{j=1}^n l_j e^{\lambda_j t},$$

де коефіцієнти багаточлена $C_m(\omega, t)$ визначаються через коефіцієнти рівняння і, отже, є функціями частоти ω , а λ_j - корені характеристичного рівняння

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Сталі l_j можуть бути визначені через коефіцієнти полінома $C_m(\omega, t)$, якщо скористатися початковими умовами, і в загальному випадку також є функціями частоти ω .

На підставі (3.44) спектральне розкладання частинного розв'язку початкового диференціального рівняння матиме вигляд

$$y_1(t) = m_y + \int_{-\infty}^{\infty} \left(C_m(\omega, t) + \sum_{j=1}^n l_j e^{\lambda_j t} \right) F(i\omega) d\omega, \quad (3.47)$$

що дозволяє просто обчислити кореляційну функцію $K_{y_1}(t, t')$. Для стійких коливань систем (коли час t більше часу перехідного процесу) частинні інтеграли однорідного рівняння можна вважати такими, що дорівнюють нулю, тоді суму в (3.47) можна відкинути.

Скористаємося умовою ортогональності функції $F(i\omega) d\omega$ (1.63):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M \left[F(i\omega) d\omega F^*(i\omega_1) d\omega_1 \right] = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega. \quad (3.48)$$

Тоді кореляційна функція одновимірному процесу дорівнюватиме

$$\begin{aligned} K_{y_1}(t, t') &= M \left[\left(y_1(t) - m_{y_1}(t) \right) \left(y_1^*(t') - m_{y_1}^*(t') \right) \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega, t) \psi^*(\omega, t') e^{i\omega(t'-t)} S(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Для визначення дисперсії отримаємо таку формулу

$$D[y_1(t)] = K_{y_1}(t, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega, t) \psi^*(\omega, t) S(\omega) d\omega. \quad (3.50)$$

Аналогічно виходить вираз для кореляційної функції, якщо права частина початкового рівняння є добутком показникової функції e^{kt} на стаціонарну функцію часу. Частинний розв'язок (3.45) у цьому випадку шукається у вигляді

$$\psi(\omega, t) = A(\omega)e^{(k+i\omega)t} + \sum_{j=1}^n l_j e^{\lambda_j t}, \quad (3.51)$$

де

$$A(\omega) = \frac{1}{(k+i\omega)^n + a_1(k+i\omega)^{n-1} + \dots + a_n},$$

а коефіцієнти l_j визначаються з нульових початкових умов.

Обмежуючись і тут розглядом досить великих значень часу (у цьому випадку розв'язок однорідного рівняння можна відкинути), отримуємо спектральне розкладання для частинного розв'язку у вигляді

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(k+i\omega)t}}{Q_n(k+i\omega)} F(i\omega) d\omega + m_{y_1}, \quad (3.52)$$

де $Q_n(k+i\omega)$ - поліном, що виходить з оператора L шляхом формальної заміни операції диференціювання на $(k+i\omega)$.

Кореляційна функція в цьому випадку матиме вигляд

$$K_{y_1}(t, t') = e^{kt'+k^*t} \int \frac{e^{i\omega(t'-t)}}{|Q_n(k+i\omega)|^2} S(\omega) d\omega. \quad (3.53)$$

Якщо $k = ik_1$ (чисто уявне), множник перед інтегралом перетворюється на $e^{ik_1(t'-t)}$ і кореляційна функція залежить тільки від різниці моментів часу, тобто в цьому випадку вона буде стаціонарною, а частинний розв'язок матиме спектральну щільність, що визначається за такою формулою:

$$S_{y_1}(\omega) = \frac{S_f(\omega - k_1)}{|Q_n(i\omega_*)|^2}. \quad (3.54)$$

При розгляді рівняння (3.40) початкові умови вважалися не випадковими. Якщо ж вони є випадковими величинами, то хід розв'язання задачі не змінюється, але замість формули (3.44) розв'язок матиме вигляд

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega, t) F(i\omega) d\omega + \sum_{j=1}^n l_j e^{\lambda_j t} + m_{y_1}(t), \quad (3.55)$$

у якому $\sum_{j=1}^n l_j e^{\lambda_j t}$ - розв'язок однорідного рівняння, що відповідає (3.40)

за заданих (випадкових) початкових умов.

Як приклад знову розглянемо коливальну систему (3.1). Нехай при $t < 0$ система знаходиться у спокої, а при $t = 0$ на неї починає діяти випадкове навантаження із заданою спектральною щільністю S_f .

Рівняння коливань у цьому випадку

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2n \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = f(t). \quad (3.56)$$

Рівняння (3.45) матиме вигляд

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} + 2n \frac{d\psi}{dt} + \omega_0^2 \psi = e^{i\omega t} \quad (3.57)$$

і повинне задовольняти нульові початкові умови.

Частинний розв'язок рівняння (3.57) візьмемо у вигляді

$$\psi(\omega, t) = c_0 e^{i\omega t}.$$

Підставляючи цей розв'язок у (3.35), отримаємо вираз для c_0 :

$$c_0 = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2n\omega}.$$

Загальний розв'язок рівняння (3.57) має вигляд

$$\psi(\omega, t) = C_1 e^{-(n-ip)t} + C_2 e^{-(n+ip)t} + \frac{e^{i\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i2n\omega)} (\omega_0^2 - \omega^2 + i2n\omega),$$

де $p = \sqrt{n^2 - \omega_0^2}$. Задовольняючи початкові умови, визначимо значення сталих

$$C_1 = -\frac{n + i(\omega + p)}{2ip(\omega_0^2 - \omega^2 + 2ni\omega)}, \quad C_2 = \frac{n + i(\omega - p)}{2ip(\omega_0^2 - \omega^2 + 2ni\omega)}.$$

Використовуючи формули Ейлера, отримаємо

$$\psi(\omega, t) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ni\omega} \left[e^{i\omega t} - e^{-nt} \left(\cos p t + \frac{n + i\omega}{p} \sin p t \right) \right]. \quad (3.58)$$

Беручи далі, що зовнішня дія є білим шумом зі сталою спектральною щільністю S_0 , і підставляючи її у вираз (3.49) шляхом інтегрування за теоремою вирахувань, отримаємо

$$K_y(t, t') = \frac{S_0}{4n\omega_0^2} \left\{ e^{-n|t-t'|} \left[\cos p(t' - t) + \frac{n}{p} \sin p|t' - t| \right] - e^{-n(t+t')} \left[\cos p(t + t') + \frac{n}{p} \sin p(t + t') \right] \right\}. \quad (3.59)$$

3.5. Вимушені нестационарні випадкові коливання систем зі скінченним числом ступенів вільності

Метод спектральних зображень легко узагальнюється для систем з довільним числом ступенів вільності.

Нехай система диференціальних рівнянь руху системи зі скінченним числом ступенів вільності зведена до канонічної форми:

$$\frac{dY_j(t)}{dt} + \sum_{m=1}^n a_{jm} Y_m(t) = X_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.60)$$

де a_{jm} - сталі коефіцієнти, в яких перший індекс вказує номер рівняння, до якого він належить, а другий індекс вказує невідому функцію, для якої він є коефіцієнтом. Розглянемо випадок, коли випадкові функції $X_j(t)$ є стаціонарними та стаціонарно зв'язаними з відомими математичними сподіваннями, кореляційними функціями та взаємними кореляційними функціями. Початкові умови вважатимемо такими, що дорівнюють нулю.

Для визначення математичних сподівань розв'язків цієї системи використаємо рівняння

$$\frac{dm_{y_j}(t)}{dt} + \sum_{m=1}^n a_{jm} m_{y_m}(t) = m_{x_j}(t), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

розв'язок якого можна отримати відомими методами розв'язання систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Надалі візьмемо $m_{y_j} = 0$ і $m_{x_j} = 0$.

Як і під час дослідження одного диференціального рівняння з нестационарною правою частиною випадкові функції $X_i(t)$ подамо у вигляді

$$X_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F_j(i\omega) d\omega. \quad (3.61)$$

Покладемо всі випадкові функції $X_j(t)$ такими, що дорівнюють нулю, крім однієї $X_k(t)$, яку замінимо функцією $e^{i\omega t}$ [25]. Для знаходження частинного розв'язку $\psi_{jk}(\omega, t)$ отримаємо систему

$$\frac{d\psi_{jk}(\omega, t)}{dt} + \sum_{m=1}^n a_{jm} \psi_{mk}(\omega, t) = e^{i\omega t} \delta_{jk}, \quad (3.62)$$

де $\delta_{jk} = 1$ при $j = k$ та $\delta_{jk} = 0$ при $j \neq k$.

Частинний розв'язок системи (3.62) можна взяти у вигляді

$$\psi_{1jk}(\omega, t) = A_{jk} e^{i\omega t}, \quad (3.63)$$

де A_{jk} - сталі, а не функції часу. Підставляючи (3.63) в систему (3.62), отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$i\omega A_{jk} + \sum_{m=1}^n a_{jm} A_{mk} = \delta_{jk}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.64)$$

Якщо розглядаються стійкі коливання системи (при цьому характеристичне рівняння цієї системи не може мати чисто уявних коренів), то розв'язок системи (3.64) можна подати у вигляді

$$A_{jk} = \frac{\Delta_{kj}}{\Delta},$$

де Δ - визначник системи (3.64)

$$\Delta = \begin{vmatrix} i\omega + a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & i\omega + a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & i\omega + a_{nn} \end{vmatrix},$$

а Δ_{kj} - алгебраїчне доповнення цього визначника, що відповідає елементу, який знаходиться на перетині k -го рядка та j -го стовпця. Тоді частинний розв'язок системи (3.62)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{jk}(\omega, t) F_k(i\omega) d\omega, \quad k, j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.65)$$

Шукані випадкові функції $Y_j(t)$, що є розв'язками вихідної системи, отримаємо, підсумовуючи за індексом k усі вирази вигляду (3.65):

$$Y_j(t) = \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{jk}(\omega, t) F_k(i\omega) d\omega, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Використовуючи формулу для кореляційної функції комплексних функцій (1.27), з урахуванням ортогональності функцій $F_j(i\omega)$, отримаємо

$$\begin{aligned} K_{Y_j}(t, t') &= \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{jk}(\omega, t) \psi_{jk}^*(\omega, t') S_{x_k}(\omega) d\omega + \\ &+ \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{jk}(\omega, t) \psi_{lk}^*(\omega, t') S_{x_k}(\omega) d\omega, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Взаємні кореляційні функції знайдемо за формулою

$$\begin{aligned} K_{Y_k Y_m}(t, t') &= \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{jk}(\omega, t) \psi_{mk}^*(\omega, t') S_{x_k}(\omega) d\omega + \\ &+ \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{jk}(\omega, t) \psi_{ml}^*(\omega, t') S_{x_k}(\omega) d\omega, \quad j, m = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Ураховуючи формулу (3.63), для кореляційних функцій отримаємо таку функцію:

$$K_{y_j}(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t'-t)} \left(\sum_{k=1}^n |A_{jk}(\omega)|^2 S_{x_j}(\omega) + \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ k \neq l}}^n A_{jk}^*(\omega) A_{jl}(\omega) S_{x_k x_l}(\omega) \right) d\omega, (3.68)$$

а для взаємних кореляційних функцій

$$K_{y_k y_j}(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t'-t)} \left(\sum_{k=1}^n A_{jk}(\omega) A_{mk}(\omega) S_{x_k}(\omega) + \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ k \neq l}}^n A_{jk}(\omega) A_{ml}(\omega) S_{x_k x_l}(\omega) \right) d\omega. (3.69)$$

Спектральні щільності розв'язків визначатимуться за формулами

$$S_{y_k}(\omega) = \sum_{k=1}^n |A_{jk}(\omega)|^2 S_{x_k}(\omega) + \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ k \neq l}}^n A_{jk}^*(\omega) A_{jl}(\omega) S_{x_k x_l}(\omega), (3.70)$$

$$S_{y_k y_m}(\omega) = \sum_{k=1}^n A_{jk}^*(\omega) A_{mk}(\omega) S_{x_k}(\omega) + \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ k \neq l}}^n A_{jk}^*(\omega) A_{ml}(\omega) S_{x_k x_l}(\omega).$$

Тобто ймовірнісні характеристики розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь знаходяться тими самими методами, що й ймовірнісні характеристики розв'язку одного рівняння зі сталими коефіцієнтами.

3.6. Ймовірнісні розрахунки нелінійних систем

На сьогодні в теорії нелінійних механічних систем центральне місце займають проблеми, пов'язані з аналізом і синтезом систем з урахуванням випадкових процесів. Велике практичне значення цих задач полягає у тому, що реальна робота механічних систем відбувається в умовах дії випадкових збуджень, які можуть негативно впливати на роботу системи. Можливі негативні ефекти від дії випадкових збуджень необхідно враховувати під час конструювання і вибирати такі параметри системи, при яких негативний вплив випадкових збуджень на процес був би мінімальним.

Широке коло задач становлять динамічні системи зі скінченним числом ступенів вільності з нелінійними поновлювальними та дисипативними силами при випадкових зовнішніх діях. До них, зокрема, відносять системи віброзахисту та амортизації з нелінійними характеристиками. У реальних умовах експлуатації більшість таких систем випробовує дії випадкового характеру. Випадкові динамічні процеси виникають практично у всіх транспортних засобах (літальні апарати, наземний транспорт, морські судна); випадкову природу мають сейсмічні й акустичні дії. Випадкові процеси супроводжують

технологічні операції виготовлення конструкцій, наприклад, при обробці різанням виникають випадкові автоколивання.

Зупинимося стисло на основних методах, які використовуються зараз під час імовірнісного дослідження нелінійних систем. Точний розв'язок нелінійних рівнянь статистичної динаміки принципово можливий методами теорії Марківських процесів. Проте застосування методів теорії Марківських процесів у конкретних інженерних задачах дотепер обмежене через обчислювальні труднощі під час розв'язання рівнянь у частинних похідних. Точні розв'язання рівнянь Колмогорова одержані лише для простих випадків [10].

Аналіз руху нелінійних систем при випадкових діях супроводжується значними труднощами вже на найпершому етапі отримання рівнянь для характеристик імовірності виходу, оскільки для нелінійних рівнянь диференціальні оператори з оператором усереднення переставляти не можна.

3.6.1. Метод малого параметра

У п. 3.3 були розглянуті випадкові процеси в лінійних системах, які є окремим випадком більш загальних систем - нелінійних. На рис. 3.9 а показана система з одним ступенем вільності, у якого пружна характеристика пружини (рис. 3.9 б) є нелінійною функцією зміщення x . Опір $F_2(\dot{x})$ (тертя між масою m і напрямною) також може нелінійно залежати від швидкості руху \dot{x} .

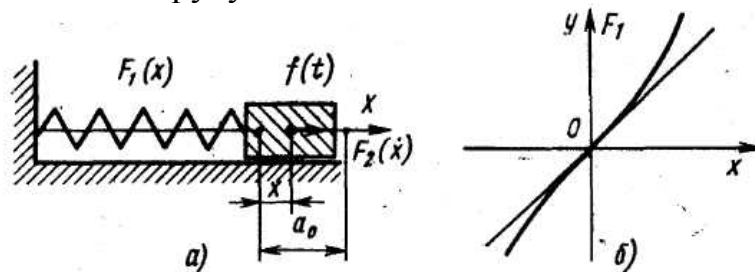


Рисунок 3.9 – Нелінійна система:

а) – розрахункова схема; б) – пружна характеристика

Рівняння вимушених коливань маси m має вигляд

$$m\ddot{x} + F(x, \dot{x}) = f(t),$$

де $F(x, \dot{x}) = F_1(x) + F_2(\dot{x})$.

У кожному випадку має місце конкретна явна залежність функцій F_1 і F_2 від x і \dot{x} відповідно.

У багатьох прикладних і теоретичних дослідженнях для розв'язання нелінійних стохастичних задач застосовують наближені

методи. Пояснимо сказане на простому прикладі (рис. 3.9 б). Нехай рух системи описується диференціальним рівнянням

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + f(x) = f_1(t), \quad (3.71)$$

де x - узагальнена координата; f_1 - випадкова сила; ε - коефіцієнт демпфування; $f(x)$ - нелінійна детермінована функція, наприклад поновлювальна сила.

Розглянемо випадок, коли

$$f(x) = \omega_0^2 x + \beta x^3, \quad (3.72)$$

де ω_0 - частота коливань; β - невикладковий параметр. У цьому випадку рівняння (3.71) називається рівнянням Дуффінга.

Якщо ліву і праву частини рівняння (3.71) усереднити за множиною реалізацій (цей метод називається методом моментних функцій) [11], то вийде співвідношення, яке містить математичне сподівання процесу m_x і момент третього порядку:

$$\frac{d^2 m_x}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dm_x}{dt} + \omega_0 m_x + \beta M[x^3] = M[f_1]. \quad (3.73)$$

Унаслідок операції усереднення виходить одне рівняння з двома невідомими m_x і $M[x^3]$. Аналогічне рівняння для моменту третього порядку $M[x^3]$ міститиме моментну функцію п'ятого порядку $M[x^5]$ і змішаний момент вхідного й вихідного процесів $M[f_1 x^2]$. У результаті виходить нескінченна система рівнянь, що не розділяються.

У більшості прикладних досліджень для замикання рівнянь використовують прийоми, аналогічні відомим методам детерміністичної теорії нелінійних коливань, як, наприклад, при використанні методу малого параметра, коли розв'язок задачі шукають у вигляді ряду за ступенями малого параметра:

$$x = x_0 + \beta x_1 + \beta^2 x_2 + \dots \quad (3.74)$$

Нелінійні функції, що входять у рівняння руху, також подають у вигляді степеневих рядів, що дозволяє одержати рекурентну систему рівнянь щодо функцій x_j . Для даного прикладу після підстановки розв'язку (3.74) у співвідношення (3.73) і прирівнювання коефіцієнтів при однакових ступенях β одержимо

$$\begin{aligned} L_0(x_0) &= f; \\ L_0(x_1) &= -x_0^3; \\ L_0(x_2) &= -3x_0^2 x_1; \\ &\dots; \\ &\dots, \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\text{де } L_0 = \frac{d^2}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{d}{dt} + \omega_0^2 .$$

Ліві частини системи (3.75) лінійні щодо невідомих функцій x_i , праві частини кожного подальшого рівняння виражаються через функції, які задовольняють попередні рівняння. Враховуючи рекурентну структуру системи (3.75), можна використовувати послідовний алгоритм обчислення статистичних характеристик членів ряду (3.74).

3.6.2. Метод статистичної лінеаризації

Для дослідження коливань нелінійних систем при випадковій дії часто використовують метод статистичної лінеаризації. Задача статистичної лінеаризації полягає в заміні нелінійної випадкової функції $F(x, \dot{x})$ лінійною, тобто

$$F(x, \dot{x}) \approx F_* = a_1 + a_2 x_0 + a_3 \dot{x}_0, \quad (3.76)$$

де x_0 і \dot{x}_0 - центровані випадкові функції; a_i - коефіцієнти, що визначаються з умови мінімуму моменту другого порядку випадкової функції

$$\Delta F = F(x, \dot{x}) - F_* .$$

Вважаючи, що мають місце стаціонарні нелінійні коливання, знайдемо момент другого порядку від випадкової функції (3.72):

$$M[(\Delta F)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [F(x, \dot{x}) - a_1 - a_2 x_0 - a_3 \dot{x}_0]^2 f(x, \dot{x}) dx d\dot{x}, \quad (3.77)$$

де $f(x, \dot{x})$ - сумісна щільність розподілу ймовірності випадкових стаціонарних функцій.

Введення у формулу (3.77) сумісної щільності ймовірності $f(x, \dot{x})$ є найслабкішим місцем методу статистичної лінеаризації, оскільки ця функція невідома. Тому доводиться ввести припущення, що функція близька до двовимірного нормального закону розподілу незалежних випадкових функцій, тобто вважати

$$f(x, \dot{x}) = \frac{1}{2\pi S_x S_{\dot{x}}} \exp\left(-\frac{(x - m_x)^2}{2S_x^2} - \frac{(\dot{x} - m_{\dot{x}})^2}{2S_{\dot{x}}^2}\right).$$

Для стаціонарного процесу $m_{\dot{x}} = 0$. Довільні параметри a_1, a_2, a_3 знайдемо з умови

$$\frac{\partial M(\Delta F)}{\partial a_i} = 0, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.78)$$

Після перетворення із співвідношень (3.78) одержимо

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int F(x, \dot{x}) f(x, \dot{x}) dx d\dot{x}; \\ a_2 &= \frac{1}{S_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int F(x, \dot{x}) (x - m_x) f(x, \dot{x}) dx d\dot{x}; \\ a_3 &= \frac{1}{S_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int F(x, \dot{x}) \dot{x} f(x, \dot{x}) dx d\dot{x}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Після інтеграції одержимо залежності a_i від m_x , S_x і $S_{\dot{x}}$:

$$a_i = a_i(m_x, S_x, S_{\dot{x}}).$$

У результаті операції усереднення одержуємо рівняння

$$\ddot{x}_0 + \frac{a_1}{m} \dot{x}_0 + \frac{a_2}{m} x_0 = \frac{1}{m} f_0(t) + \frac{m_f - a_i}{m}. \quad (3.80)$$

Оскільки x_0 і f_0 - центровані випадкові функції, то, взявши математичне сподівання від обох частин рівняння (3.80), одержимо

$$m_f - a_i = 0,$$

тому залишається рівняння

$$\ddot{x}_0 + \frac{a_3}{m} \dot{x}_0 + \frac{a_2}{m} x_0 = \frac{1}{m} f_0(t).$$

Знаходимо спектральну щільність розв'язку

$$S_x(\omega) = |W(i\omega)|^2 S_f(\omega), \quad (3.81)$$

а потім дисперсії розв'язку D_x і $D_{\dot{x}}$:

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(i\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega; \\ D_{\dot{x}} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(i\omega)|^2 \omega^2 S_f(\omega) d\omega, \end{aligned} \quad (3.82)$$

де $W(i\omega)$ - передаточна функція системи.

У результаті одержуємо три рівняння (3.81), (3.82) для визначення трьох невідомих m_x , S_x і $S_{\dot{x}}$ залежно від m_f і S_f .

Метод статистичної лінеаризації дає наближений розв'язок задач динаміки нелінійних систем, що є справедливим, якщо нелінійні члени у лівій частині рівняння (3.71) є малими, а вихідний процес наближений до нормального. Такі обмеження суттєво зменшують інформацію про випадковий процес та дозволяють отримати лише наближені значення ймовірнісних характеристик розв'язку. Для випадку, коли нелінійності не можна розглядати як малі, а також при аналізі нестационарних процесів використовують теорію двовимірних Марківських процесів.

На перший погляд запропоноване узагальнення детерміністичних методів на стохастичні нелінійні задачі є цілком природним, проте це не зовсім так. Як у методі малого параметра, так і в методі статистичної лінеаризації рівняння (3.75) і (3.76), одержані в результаті перетворень, по суті, не мають принципових переваг у порівнянні з початковим рівнянням (3.71). Насправді, після усереднення системи (3.75) в правих частинах рівнянь, починаючи з другого, з'являються моменти третього і вищого порядків. У співвідношеннях для моментів другого порядку, починаючи з $M[x^2]$, також міститимуться вищі моментні функції $M[x_0^3 x_1]$, $M[x_0^2]$ і т.д. Те саме ми маємо і в методі статистичної лінеаризації, в якому момент $M[x^4]$ або $M[x^6]$ входить через коефіцієнт еквівалентності. Отже, рівняння щодо моментних функцій залишаються незамкнутими. Щоб позбавитися цього недоліку, вводиться гіпотеза про нормальність або квазінормальність невідомих випадкових функцій, що входять у співвідношення (3.71). При цьому моменти вищого порядку виражаються через моментні функції другого порядку і математичне сподівання процесу.

Ефективним методом дослідження нелінійних стохастичних задач є метод статистичних випробувань (метод Монте-Карло). Цей метод використовує початкові рівняння (лінійні або нелінійні), на вхід яких подають випадкові реалізації збуджень, для кожної з яких одержують розв'язок початкового рівняння. Ці розв'язки статистично обробляються і виводять закони розподілу величин або характеристики ймовірності. Для відтворення і введення вхідних випадкових збуджень використовуються реальні записи або датчики (генератори) випадкових чисел. Основною перевагою методу статистичних випробувань є універсальність і простота. Метод може бути застосований до будь-яких нелінійних систем, причому принципова складність методу не залежить від складності досліджуваної задачі. Метод статистичних випробувань висвітлений у [14].

Приклад 1. Потрібно знайти ймовірнісні характеристики зміщення маси m , якщо на систему діє стаціонарна випадкова сила типу нормального білого шуму $f(t)$ (див. рис. 3.9).

Рух системи опишемо рівнянням

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = \frac{1}{m}(f_0 + m_f),$$

де n, ω_0, μ - невідомі параметри системи; f_0 - центрований процес зовнішніх впливів; m_f - його середнє значення.

При $\mu = 0$ рівняння руху системи стає лінійним і його розв'язок був би нормальним стаціонарним процесом. При $\mu \neq 0$ розв'язок цього рівняння не є нормальним процесом, але при малих μ можна

припустити, що він мало відрізняється від нормального, що дає можливість скористатися формулами (3.79) для визначення коефіцієнтів. Після обчислення інтегралів отримаємо

$$a_1 = \mu m_x (m_x^2 + 3S_x^2);$$

$$a_2 = 3\mu (m_x^2 + S_x^2);$$

$$a_3 = 2n.$$

Лінеаризоване рівняння має вигляд

$$\ddot{x}_0 + 2n\dot{x}_0 + \omega_0^2(x_0 + m_x) + a_2 x_0 + a_1 = \frac{1}{m}(f_0 + m_f).$$

З останнього рівняння одержуємо

$$\omega_0^2 m_x + a_1 = \frac{m_f}{m}.$$

Скориставшись одержаним виразом для a_1 , отримаємо перше рівняння, що пов'язує m_f з m_x і S_x :

$$\mu m_x (m_x^2 + 3S_x^2) = \frac{m_f}{m} - \omega_0^2 m_x.$$

Після виділення з лінеаризованого рівняння постійних складових одержимо рівняння відносно центрованих випадкових функцій:

$$\ddot{x}_0 + 2n\dot{x}_0 + (\omega_0^2 + a_2)x_0 = \frac{f_0}{m}.$$

Спектральні щільності виходу (x_0, \dot{x}_0) за формулами (1.74) і (1.77) зв'язані співвідношенням

$$S_x(\omega) = \frac{S_0}{m^2 |(i\omega)^2 + 2ni\omega + \omega_0^2 + a_2|^2};$$

$$S_{\dot{x}}(\omega) = \frac{S_0 \omega^2}{m^2 |(i\omega)^2 + 2ni\omega + \omega_0^2 + a_2|^2}.$$

Друге і третє рівняння одержимо з рівнянь (3.82).

Після перетворень одержуємо

$$D_x = \frac{S_0}{4nm^2 [\omega_0^2 + 3\mu(m_x^2 + D_x)]};$$

$$D_{\dot{x}} = \frac{S_0}{(4nm^2)}.$$

З останніх рівнянь визначаємо $m_x, S_x, S_{\dot{x}}$. В окремому випадку, коли $m_f = 0$, маємо $m_x = 0$, а:

$$D_x = -\frac{\omega_0^2}{6\mu} + \sqrt{\frac{\omega_0^4}{36\mu^2} + \frac{S_0}{12nm^2\mu}} = D_{x_0} \left(-1 + \sqrt{1 + 6\mu}\right) \frac{1}{3\mu_1} = D_{x_0} h_1,$$

де $D_{x_0} = \frac{1}{(2a\omega_0^2)}$ - дисперсія розв'язку при

$\mu = 0$; $a = 2\frac{nm^2}{S_0}$, $\mu_1 = \frac{\mu}{a\omega_0^4}$ - безрозмірний малий параметр.

Приклад 2. Розглянемо випадок (рис. 3.9 а), коли сила пружності $F_1(x) = Cx$, сила опору $F_2(\dot{x}) = \alpha_1 \dot{x}^2 \text{sign} \dot{x}$, $m_f = \text{const}$ і $S_f(\omega) = 2\alpha S_f / (\alpha^2 + \omega^2)$. Потрібно визначити математичне сподівання m_x і середнє квадратичне відхилення S_x випадкового зміщення маси m , вважаючи, що мають місце нормальні стаціонарні коливання.

Рівняння руху маси m має вигляд

$$\ddot{x} + n_1 \dot{x}^2 \text{sign} \dot{x} + \omega_0^2 x = f/m,$$

де $n_1 = \alpha_1 / m$.

Нелінійну силу опору $n_1 \dot{x}^2 \text{sign} \dot{x}$ замінимо лінійною вигляду

$$n_1 \dot{x}^2 \text{sign} \dot{x} = a_1 + a_3 \dot{x}_0.$$

Знайдемо a_1 і a_3 за формулами (3.79):

$$a_1 = 0; a_3 = S_{\dot{x}} 4n_1 / \sqrt{2\pi}; m_x = m_f / C.$$

У результаті одержимо лінійне рівняння відносно центрованого випадкового зміщення x_0 :

$$\ddot{x}_0 + a_3 \dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = f_0 / m.$$

Дисперсії x_0 і \dot{x}_0 відповідно дорівнюють

$$D_x = \frac{\sqrt{\pi} 2D_f \left(\alpha + \frac{4n_1}{\sqrt{2\pi}} S_{\dot{x}} \right)}{\sqrt{2}\omega_0^2 S_{\dot{x}} \left(\omega_0^2 + \frac{4n_1}{\sqrt{2\pi}} S_{\dot{x}} \alpha + \alpha^2 \right)};$$

$$D_{\dot{x}} = \frac{\sqrt{\pi} \alpha D_f}{\sqrt{2} S_{\dot{x}} \left(\omega_0^2 + \frac{4n_1}{\sqrt{2\pi}} S_{\dot{x}} \alpha + \alpha^2 \right)}.$$

З останнього виразу визначаємо $S_{\dot{x}}$, а потім - S_x .

3.7. Випадкові коливання систем з розподіленими параметрами

Розглянемо пружну систему з нескінченним числом ступенів вільності типу стрижня, пластини або оболонки під дією поверхневого випадкового навантаження. Рівняння коливань такої системи з урахуванням сил в'язкого тертя в операторній формі можна подати у вигляді

$$m \left[\frac{\partial^2 Y(\xi, t)}{\partial t^2} + 2n \frac{\partial Y(t)}{\partial t} \right] + LY(\xi, t) = X(\xi, t), \quad (3.83)$$

де L - у загальному випадку нелінійний диференціальний оператор координати; $Y(\xi, t)$ - переміщення системи в точці з координатою ξ у момент часу t ; m - маса елементарного об'єму; $2n$ - коефіцієнт в'язкого тертя; $X(\xi, t)$ - зовнішнє випадкове навантаження.

Для стрижньових систем, що роблять згинальні коливання:

$$LY(\xi, t) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[EJ \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} \right], \quad m = \rho A, \quad (3.84)$$

де EJ - згинальна жорсткість стрижня; ρ - густина; A - площа поперечного перерізу.

Для прямокутних пластин, що роблять згинальні коливання:

$$LY(\xi_1, \xi_2, t) = D \Delta^2 Y(\xi_1, \xi_2, t), \quad m = \rho h, \quad (3.85)$$

де $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ - циліндрична жорсткість;

$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial \xi_1^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial \xi_2^4}$; h - товщина пластинки.

Для циліндричних оболонок, що роблять вісесиметричні коливання:

$$LY(\xi_1, \xi_2, t) = \frac{D}{h} \Delta^2 \Delta^2 Y(\xi_1, \xi_2, t) + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 Y(\xi_1, \xi_2, t)}{\partial \xi_1^4}, \quad m = \rho h, \quad (3.86)$$

де h, R - товщина та радіус оболонки відповідно.

Для розв'язання задачі про випадкові коливання систем з розподіленими параметрами, які описуються операторним рівнянням (3.83), скористаємося методом розкладання за власними формами коливань [1,3]. Згідно з цим методом розв'язок рівняння (3.83) подамо у вигляді ряду

$$Y(\xi, t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) Y_i(\xi),$$

де $\alpha_i(t)$ - узагальнена координата, що задовольняє звичайне диференціальне рівняння

$$\ddot{\alpha}_i(t) + 2n\dot{\alpha}_i(t) + \omega_{0i}^2 \alpha_i(t) = \frac{f_i(t)}{M_i}, \quad (3.87)$$

яке описує коливання системи з одним ступенем вільності; $\omega_{0i} - i$ - а власна частота (парціальна частота); $f_i(t) = \int_s X(\xi, t) Y_i(\xi) d\xi$ - узагальнена сила; $Y_i(\xi)$ - власні форми незгасаючих коливань; $M_i = \int_s m_i(\xi) Y_i^2(\xi) d\xi$ - узагальнена маса.

Таким чином, розв'язок рівняння (3.83) звівся до дослідження n роздільних диференціальних рівнянь (3.87), для яких застосовні формули, одержані для системи з одним ступенем вільності.

Спочатку визначимо кореляційну функцію прогинання в деякій точці ξ :

$$\begin{aligned} K_y(t_1, t_2) &= M \left[\overset{o}{Y}(\xi, t_1) \overset{o}{Y}(\xi, t_2) \right] = M \left[\sum_{i=1}^n \overset{o}{\alpha}_i(t_1) Y_i(\xi) \sum_{j=1}^n \overset{o}{\alpha}_j(t_2) Y_j(\xi) \right] = \\ &= \sum_{i,j=1}^n Y_i(\xi) Y_j(\xi) M \left[\overset{o}{\alpha}_i(t_1) \overset{o}{\alpha}_j(t_2) \right] = \sum_{i,j=1}^n Y_i(\xi) Y_j(\xi) K_{\alpha_i \alpha_j}(t_1, t_2), \end{aligned} \quad (3.88)$$

де $K_{\alpha_i \alpha_j}(t_1, t_2)$ - кореляційний момент між узагальненими координатами α_i і α_j .

Нехтуючи взаємною кореляцією між узагальненими координатами, вираз (3.88) можна записати у вигляді

$$K_y(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n Y_i^2(\xi) K_{\alpha_i \alpha_i}(t_1, t_2). \quad (3.89)$$

Скористаємося виразом, одержаним раніше для кореляційної функції одномасової системи на основі методу спектральних зображень, і підставимо його у формулу (3.89):

$$K_y(\tau) = \sum_{i=1}^n Y_i^2(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{f_i}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + (2n_i \omega)^2}. \quad (3.90)$$

Якщо зовнішнє навантаження $X(\xi, t)$ можна подати у вигляді

$$X(\xi, t) = X_1(t) X_2(\xi),$$

де $X_1(t)$ - випадкова функція з відомими ймовірнісними характеристиками; $X_2(\xi)$ - детермінована функція просторової координати, то

$$f_i(t) = X_1(t) B_i, \quad (3.91)$$

де

$$B_i = \frac{\int X_2(\xi) Y_i(\xi) d\xi}{\int_s m_i(\xi) Y_i^2(\xi) d\xi}.$$

З урахуванням (3.91) вираз для кореляційної функції $f_i(t)$ буде

$$\begin{aligned} K_{f_i}(t_1, t_2) &= M \left[\overset{o}{f}_i(t_1) \overset{o}{f}_i(t_2) \right] = M \left[\overset{o}{X}_1(t_1) B_i \overset{o}{X}_2(t_2) B_i \right] = \\ &= B_i^2 M \left[\overset{o}{X}_1(t_1) \overset{o}{X}_1(t_2) \right] = B_i^2 K_{X_1}(t_1, t_2). \end{aligned} \quad (3.92)$$

Для одержаної кореляційної функції спектральна щільність $S_{f_i}(\omega)$ для стаціонарного процесу визначиться зі співвідношення

$$S_{f_i}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_{f_i}(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \frac{2B_i^2}{\pi} \int_0^{\infty} K_{X_1}(\tau) \cos \omega \tau d\tau = B_i^2 S_{X_1}(\omega). \quad (3.93)$$

Підставляючи (3.92) і (3.93) для кореляційної функції і спектральної щільності в (3.90), одержуємо

$$K_y(\tau) = \sum_{i=1}^n Y_i^2(\xi) B_i^2 \int_0^{\infty} \frac{S_{X_1}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega}{(\omega^2 - \omega_i^2)^2 + (2n_i\omega)^2}.$$

Оскільки рівняння (3.84) справедливе лише для малих прогинань стрижня, то наведені вище результати аналізу систем з розподіленими параметрами також будуть справедливі лише для випадку малих коливань.

Приклад. Розглянемо шарнірно обперту балку сталого поперечного перерізу, що знаходиться під дією випадкового навантаження $X(\xi, t) = X_1(t) X_2(\xi)$, у якого $X_1(t)$ – стаціонарна випадкова функція типу білого шуму інтенсивності S_0 , а $X_2(\xi)$ – детермінована функція

$$X_2(\xi) = C_1 \sin \frac{\pi\xi}{l} + C_2 \sin \frac{2\pi\xi}{l}.$$

Для шарнірної балки

$$Y_k(\xi) = \sin \frac{k\pi\xi}{l}; \quad \omega_k = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Відповідно до формули (3.91)

$$f_k(t) = X_1(t) \frac{\int_0^l \left(C_1 \sin \frac{\pi\xi}{l} + C_2 \sin \frac{2\pi\xi}{l} \right) \sin \frac{k\pi\xi}{l} d\xi}{\int_0^l \rho F \sin^2 \frac{k\pi\xi}{l} d\xi} = \begin{cases} X_1(t) \frac{C_k}{\rho F}, & k = 1, 2 \\ 0 & , k \neq 1, 2. \end{cases}$$

Рівняння (3.87) для узагальнених координат з урахуванням останнього співвідношення для правих частин запишемо у вигляді

$$\ddot{\alpha}_k(t) + 2n_k \dot{\alpha}_k(t) + \omega_{0i}^2 \alpha_k(t) = X_1(t) B_k, \quad (k=1,2) \quad B_k = C_k / \rho F.$$

Для кореляційної функції переміщень балки згідно із загальною формулою у разі білого шуму [20]

$$K_y(\tau) = \sum_{k=1}^2 \left(\sin \frac{k\pi\xi}{l} \frac{C_k}{\rho F} \right)^2 \frac{S_0}{4n_k \omega_{nk}^2} e^{-n_k|\tau|} \left(\cos \omega_{nk}\tau + \frac{n_k}{\omega_{nk}} \sin \omega_{nk}\tau \right).$$

Для визначення дисперсії необхідно в останній формулі взяти $\tau = 0$:

$$D_y = K_y(0) = \sum_{k=1}^2 \left(\sin \frac{k\pi\xi}{l} \frac{C_k}{\rho F} \right)^2 \frac{S_0}{4n_k \omega_{nk}^2}.$$

Як відомо з курсу опору матеріалів, нормальні напруження $\sigma(\xi, t)$ можна виразити через переміщення:

$$\sigma(\xi, t) = \frac{EJ}{W} \frac{d^2 Y(\xi, t)}{d\xi^2},$$

де W – момент опору.

Підставляючи в останню формулу вираз для $Y(\xi, t)$, одержимо

$$\sigma(\xi, t) = \left(\frac{EJ}{W} \right) \sum_{k=1}^2 \alpha_k(t) \frac{d^2 Y_k(\xi)}{d\xi^2} = \frac{EJ}{W} \sum_{k=1}^2 \alpha_k(t) \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{k\pi\xi}{l}.$$

Аналогічно, використовуючи вираз кореляційної функції прогинань, одержуємо вираз кореляційної функції нормальних напружень

$$K_\sigma(\tau) = \left(\frac{EJ}{W} \right)^2 \sum_{k=1}^2 \left(\frac{k\pi}{l} \right)^4 \sin^2 \frac{k\pi\xi}{l} \frac{C_k}{(\rho F)^2} \frac{S_0}{4n_k \omega_{kn}^2} e^{-n|\tau|} \left(\cos \omega_{nk}t + \frac{n_k}{\omega_{nk}} \sin \omega_{nk}|\tau| \right).$$

Дисперсія нормальних напружень

$$D_\sigma = K_\sigma(0) = \left(\frac{EJ}{W} \right)^2 \sum_{k=1}^2 \left(\frac{k\pi}{l} \right)^4 \sin^2 \frac{k\pi\xi}{l} \left(\frac{C_k}{\rho F} \right)^2 \frac{S_0}{4n_k \omega_{nk}^2}.$$

Розділ 4

Визначення міцності елементів конструкцій методами теорії викидів

4.1. Постановка завдання

Надійність механічних систем залежить від множини факторів, найбільш впливовими з яких є випадкові зовнішні навантаження, змінні властивості самої системи та її елементів, характер взаємодії елементів, конструктивні, технологічні та інші особливості.

У п. 2.3 сформульована загальна схема оцінки надійності систем. Згідно з цією схемою на першому етапі будується математична модель функціонування цієї системи, визначаються простори зовнішніх впливів Q та параметрів стану системи U . Вибір розрахункової моделі реальної системи включає також відповідну апроксимацію зовнішніх навантажень та їх імовірнісний опис. Другим етапом є визначення ймовірнісних характеристик вихідних параметрів. Ця задача зводиться до розв'язання рівняння (2.5). Третім етапом є вибір простору якості V та області допустимих станів Ω , в якій параметри якості повинні зберігатися у встановлених межах. Саме цей етап є одним із найважливіших при визначенні надійності систем. Цей вибір має проводитися з урахуванням техніко-економічних, експлуатаційних й інших нормативних вимог, тобто він є неоднозначним. Так, для консольного стрижня, що розтягується квазістатичною випадковою силою (див. п. 2.3.1), як параметр якості можна взяти внутрішню осьову силу $N(t)$, а умову неруйнування (умову міцності) можна подати у вигляді

$$-R < N(t) < R,$$

де R - деяке граничне значення осьової сили. При цьому простір якості буде одновимірним евклідовим простором, тобто прямою $-\infty < N < \infty$, а область допустимих станів Ω - відрізком цієї прямої. Ймовірність безвідмовної роботи - функція надійності - визначається як імовірність перебування елементів простору якості V в допустимій області Ω на заданому відрізку часу. Тобто функція надійності у цьому випадку визначиться за формулою

$$H(t) = P(-R < N(t) < R, \tau \in [0, t]).$$

Якщо область допустимих станів є несиметричною відносно початку координат, наприклад,

$$P_{кр} < N(t) < R,$$

де $P_{кр} = -\frac{\pi^2 EJ}{4l^2}$ - критичне значення стискальної сили для консольного стрижня, то функція надійності дорівнюватиме

$$H(t) = P\left(N_+(\tau) < R, N_-(\tau) > -\frac{\pi^2 EJ}{4l^2}, \tau \in [0, t]\right),$$

де $N_+(\tau)$ і $N_-(\tau)$ - точна верхня та нижня межі значень функції $N(\tau)$ на відрізку $[0, t]$.

У загальному випадку граничне значення сили залежить від часу, оскільки міцність конструкцій змінюється з часом під дією фізичних, хімічних та інших процесів. При цьому в конструкції може мати місце як зміцнення, так і зворотний процес, а міцність $R(t)$ може бути випадковим процесом.

Таким чином, межа області допустимих станів Ω , взагалі кажучи, є нестационарною і стохастичною. Але у більшості випадків параметри якості системи можна вибрати так, щоб межа області Ω була стационарною та детермінованою. Так, для розглянутого вище випадку розтягнення стрижня, якщо умова неруйнування має вигляд

$$R_1(t) < N(t) < R_2(t),$$

де $R_1(t)$ і $R_2(t)$ - випадкові функції часу, то, переходячи до нових змінних

$$r_1 = R_2(t) - N(t), r_2 = N(t) - R_1(t),$$

отримаємо умову неруйнування у вигляді

$$r_1 > 0, r_2 > 0.$$

Тобто від одновимірного простору якості ми перейшли до двовимірного, де область допустимих станів є першим квадрантом на площині r_1, r_2 .

Розглянемо інший приклад з визначення простору якості V та області допустимих значень Ω . Нехай вал сталого круглого перерізу навантажений квазістатичними згинальними моментами $M_x(t)$ і $M_y(t)$ та скрутним моментом $M_z(t)$. За умову якості візьмемо умову відсутності пластичних деформацій у вигляді

$$\sigma_{екв} < \sigma_{lim},$$

де $\sigma_{екв} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$ - еквівалентне напруження, $\sigma = \frac{\sqrt{M_{x\max}^2 + M_{y\max}^2}}{W}$ -

максимальне нормальне напруження, $\tau = \frac{M_{z\max}}{2W}$ - максимальне дотичне

напруження в небезпечному перерізі вала, σ_{lim} - граничне напруження.

Тобто область допустимих значень Ω у тривимірному просторі M_x, M_y, M_z визначається нерівністю

$$\sqrt{M_{x\max}^2 + M_{y\max}^2 + M_{z\max}^2} < M_{\lim},$$

де $M_{\lim} = \sigma_{\lim} W$ і є внутрішньою областю сфери радіуса M_{\lim} . Функція надійності у цьому випадку визначається за формулою

$$H(t) = P(M_+(\tau) < M_{\lim}, \tau \in [0, t]),$$

де $M_+(\tau) = \sqrt{M_x^2(\tau) + M_y^2(\tau) + M_z^2(\tau)}$ - точна верхня межа значень функції якості.

Якщо за параметр якості взяти зведений момент

$$M_r = \sqrt{M_{x\max}^2 + M_{y\max}^2 + M_{z\max}^2},$$

то простір якості V стає одновимірним. У цьому випадку область можливих значень M_r є напівпрямною ($0 \leq M < \infty$), а для функції надійності отримуємо таку формулу:

$$H(t) = P(M_{r+}(\tau) < M_{\lim}, \tau \in [0, t]).$$

Необхідно зазначити, що під час зміни простору якості з тривимірного на одновимірний функція надійності не зазнала змін.

Під час експлуатації системи її параметри якості повинні зберігати свої значення у встановлених межах протягом усього нормативного строку служби. Математично це відповідає знаходженню елементів якості v_i в допустимій області Ω простору якості V . Межа цієї області Γ , що відповідає настанню граничних станів у системі, називається граничною поверхнею. Тобто відмова інтерпретується як випадковий перетин траєкторією процесу $v(t)$ граничної поверхні Γ або як викид випадкового процесу за область допустимих станів Ω .

У розділі 2 наведено методику ймовірнісного розрахунку міцності конструкцій для однопараметричного випадку, коли параметр якості є детермінованою або випадковою величиною. Як зазначено вище у загальному випадку (особливо при розрахунках міцності в умовах вібрації) вектор якості є випадковим процесом. У цьому випадку розрахунок надійності можна проводити за допомогою теорії викидів випадкових функцій. Спочатку проведемо ймовірнісний аналіз вхідного випадкового процесу $X(t)$.

Для розв'язання цієї задачі введемо основні поняття, якими характеризуватимемо процес випадкових коливань $X(t)$ (рис. 4.1).

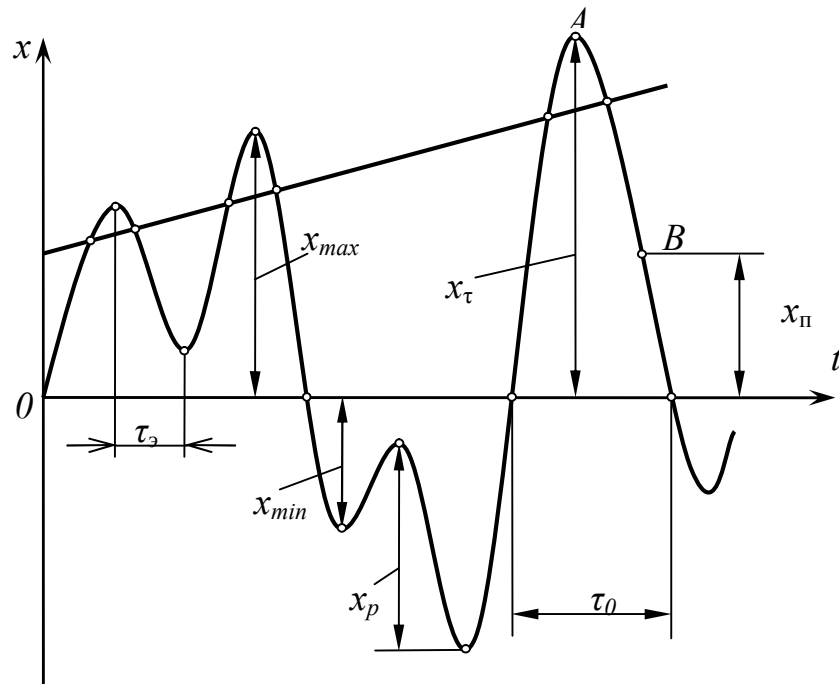


Рисунок 4.1 - Характерні значення випадкового процесу $X(t)$

1. Нулі процесу – це точки перетину з середнім (нульовим) рівнем.
2. Екстремуми процесу - точки, що відповідають екстремальним (максимальним та мінімальним) значенням процесу.
3. Абсолютним максимумом процесу називається точка, що відповідає найбільшому для даної реалізації максимуму процесу.
4. Інтервал часу між нулями - відрізок часу τ_0 між двома сусідніми нулями процесу.
5. Інтервал часу між екстремумами – відрізок часу τ_e , що відповідає двом сусіднім екстремумам процесу.
6. Екстремальним значенням процесу є відрізок x_{max} або x_{min} між нульовим рівнем та деяким екстремумом.
7. Значення абсолютного максимуму – це відрізок x_+ між нульовим рівнем та абсолютним максимумом процесу.

Наведемо деякі ймовірнісні характеристики для вказаних вище параметрів випадкових процесів, що становлять основні задачі аналізу випадкових коливань.

1. Розподіл числа нулів та екстремумів випадкового процесу заданої тривалості. Частковими характеристиками цих розподілів є середнє число нулів \bar{n}_0 та середнє число екстремумів \bar{n}_e , дисперсія числа нулів D_{n_0} та дисперсія числа екстремумів D_{n_e} за одиницю часу.

2. Розподіл числа викидів (перевищень заданого рівня) при заданій тривалості процесу. Частинними характеристиками цього розподілу є середнє число перевищень довільного рівня $x = \Pi$ та дисперсія числа цих перевищень.
3. Розподіл інтервалу часу між сусідніми нулями та екстремумами. Частинними характеристиками цих розподілів є середній інтервал часу між сусідніми нулями - $\bar{\tau}_0$ та екстремумами $\bar{\tau}_e$ та їх дисперсії.
4. Розподіл значень процесу, що відповідають його максимумам (мінімумам), – розподіл максимумів (мінімумів).
5. Розподіл значення процесу, що відповідає його абсолютному максимуму, – розподіл абсолютного максимуму процесу.
6. Сумісний розподіл декількох (у загальному випадку довільного числа таких, що йдуть один за одним) екстремумів.

Деякі з указаних вище задач на мають точного аналітичного розв'язання навіть для нормальних стаціонарних випадкових процесів, для них використовують наближені розв'язки.

При розрахунку міцності систем в умовах вібрації ймовірнісні характеристики переміщень визначаються за формулами попереднього розділу 3. Зв'язок між переміщеннями та напруженнями встановлюється за відомими з курсу опору матеріалів або теорії пружності співвідношеннями, що випливають із закону Гука та співвідношень Коші. Ймовірнісні характеристики розрахункового напруження у цьому випадку визначаються за допомогою формул лінійного перетворення.

Найбільший практичний інтерес при розрахунках надійності за міцністю та втомної довговічності мають розподіл абсолютного максимуму процесу та сумісний розподіл довільного числа екстремумів, що йдуть один за одним.

4.2. Викиди випадкового процесу за заданий рівень

Як раніше було зазначено, функція надійності системи визначається як імовірність перебування вектора якості $v(t)$ у допустимій області Ω на відрізок часу $[0, t]$:

$$H(t) = P(v(\tau) \in \Omega, \tau \in [0, t]).$$

Виходи реалізацій випадкових процесів за межі допустимих областей (особливо у випадках, коли вони є рідкісними подіями) називають викидами.

Тобто для визначення функції надійності системи необхідно визначити ймовірність випадкової події, що полягає у тому, що за відрізок часу $[0, t]$ не відбудеться жодного викиду випадкового вектора

$V(t)$ за межі області допустимих станів Ω у просторі якості (рис. 4.2). У загальному випадку розв'язок цієї задачі є досить складним [4]. Але для високонадійних систем, для яких викид за межі допустимої області є досить рідкісною подією, ймовірність викиду з достатньою для практичних розрахунків точністю може бути оцінена за допомогою середнього числа викидів на відрізку $[0, t]$.

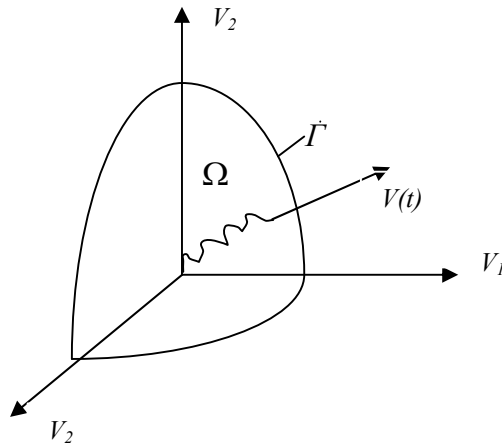


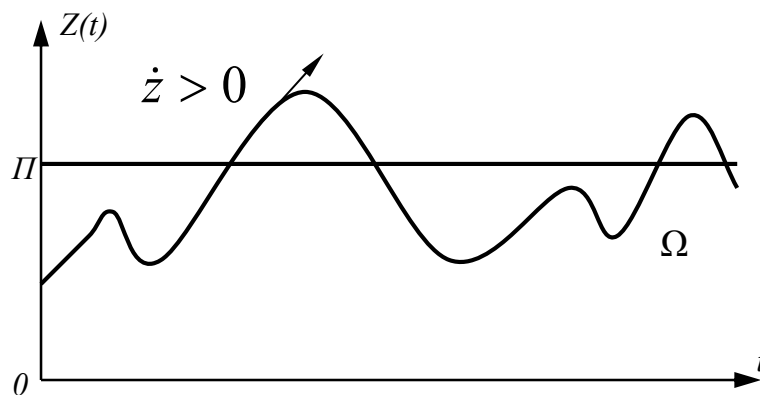
Рисунок 4.2

Розглянемо випадок, коли вектор параметрів $z(t)$, що характеризують працездатність об'єкта, складається з однієї компоненти, яка являє собою безперервний і диференційований випадковий процес із заданою сумісною щільністю ймовірності $f(z, \dot{z}, t)$ процесу $z(t)$ і його похідної $\dot{z}(t)$. Нехай область працездатних станів Ω задана нерівністю

$$\Omega: z(t) < \Pi, \quad (4.1)$$

де Π - деяка детермінована величина.

Перетини процесом $Z(t)$ рівня Π з додатною похідною називаються (рис. 4.3) позитивними, а з від'ємною – негативними.

Рисунок 4.3 - Перевищення процесом $Z(t)$ детермінованого рівня Π

Оскільки процес $Z(t)$ є випадковим, то і число позитивних $\gamma_+(t)$ і негативних $\gamma_-(t)$ перетинів за одиницю часу буде дискретною випадковою величиною.

Позначимо \bar{N}_+ - середнє число позитивних перетинів (викидів), а \bar{N}_- - середнє число негативних перетинів за час $[0, t]$.

Згідно з визначенням математичного сподівання дискретної випадкової величини за відрізок часу Δt

$$M[\gamma_+(II, \Delta t)] = \sum_{k=1}^{\infty} k P_k(II, \Delta t), \quad (4.2)$$

де k - набір різних значень випадкової величини $\gamma(t)$; $P_k(II, \Delta t)$ - ймовірність того, що на проміжку часу $[t, t + \Delta t]$ відбудеться $1, 2, \dots, k$ позитивних викидів.

Для достатньо малих Δt ймовірність того, що за цей час відбудеться два, три і т.д. позитивних перетинів заданого рівня буде величиною більш високого порядку малості, ніж ймовірність одного перетину. Тому середнє число позитивних перетинів за одиницю часу дорівнюватиме

$$\bar{\gamma}_+(II) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} = \frac{P_1(II, \Delta t)}{\Delta t}. \quad (4.3)$$

Тобто задача зводиться до визначення ймовірності випадкової події, яка полягає у тому, що за малий проміжок часу відбудеться один позитивний перетин рівня II . Виразимо середнє число позитивних викидів $\bar{N}_+(t)$ через задану щільність ймовірності $f(z, \dot{z}, t)$.

Ймовірність одного позитивного викиду $P_1(II, \Delta t)$ відповідно до рис. 4.4 можна подати як ймовірність випадкової події:

$$P_1(II, \Delta t) = P[II - \Delta z_1 < z(t) < II + \Delta z_2, \dot{z}(t) > 0; t \leq \tau \leq t + \Delta t].$$

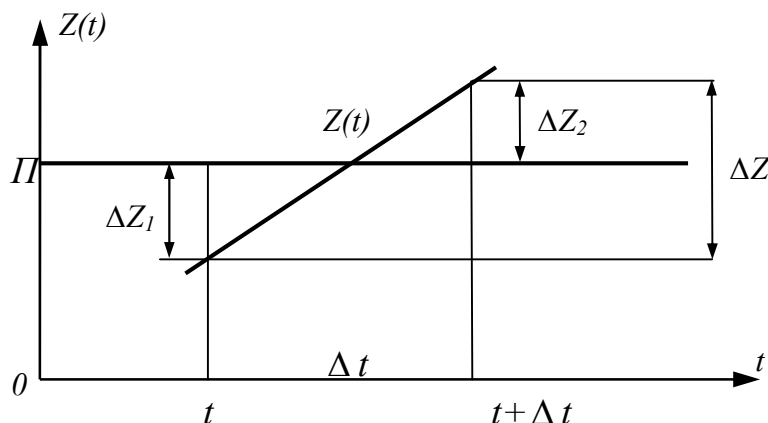


Рисунок 4.4 – До визначення ймовірності одного позитивного перетину

Скористаємося властивостями щільності $f(z, \dot{z}, t)$ для визначення ймовірності випадкової події:

$$P_1(\Pi, \Delta t) = \int_{\Pi - \Delta z_1}^{\Pi + \Delta z_2} \int_0^{\infty} f(z, \dot{z}, \tau) dz d\dot{z}. \quad (4.4)$$

Оскільки інтервал інтегрування за змінною z є малим, можна скористатися теоремою про середнє, згідно з якою

$$\int_{\Pi - \Delta z_1}^{\Pi + \Delta z_2} f(z, \dot{z}, \tau) dz \approx f(z = \Pi, \dot{z}, \tau) (\Pi + \Delta z_2 - \Pi + \Delta z_1) = f(z = \Pi, \dot{z}, \tau) (\Delta z_1 + \Delta z_2).$$

Суму в отриманому виразі можна подати як $\Delta z_1 + \Delta z_2 = \Delta z = \dot{z}(t) dt$, тоді остаточно формула (4.4) набере вигляду

$$P_1(\Pi, \Delta t) = \Delta t \int_0^{\infty} f(z = \Pi, \dot{z}, t) \dot{z} dz. \quad (4.5)$$

Підставляючи (4.5) у (4.3) і виконуючи граничний перехід, отримаємо

$$\bar{\gamma}_+(\Pi)(t) = \int_0^{\infty} f(z = \Pi, \dot{z}, \tau) \dot{z} dz. \quad (4.6)$$

Число перетинів за проміжки часу, що не перекриваються, мають властивість адитивності, тому середнє число позитивних перетинів зв'язане з середнім числом позитивних перетинів за одиницю часу співвідношенням

$$\bar{N}_+(\Pi, 0 \leq \tau \leq t) = \int_0^t \bar{\gamma}_+(\Pi, \tau) d\tau.$$

Підставляючи (4.6) в останню формулу, остаточно отримаємо середнє число позитивних перетинів за час $[0, t]$:

$$\bar{N}_+ = \int_0^t \int_0^{\infty} f(z = \Pi, \dot{z}, \tau) \dot{z} dz d\tau. \quad (4.7)$$

Аналогічно виводяться формули для середнього числа негативних перетинів:

$$\bar{N}_- = - \int_0^t \int_{-\infty}^0 f(z = \Pi, \dot{z}, \tau) \dot{z} dz d\tau. \quad (4.8)$$

Отримані формули мають найбільше використання для стаціонарних процесів, оскільки тільки для сталих у часі процесів середня тривалість викиду має наочне значення. Для стаціонарних процесів ці формули спрощуються, оскільки щільність розподілу ординат випадкового процесу і щільність розподілу ординати та похідної не залежать від часу. Тоді інтегрування за t у формулах

(4.7-4.8) зводиться до множення на t і відповідно для середнього числа викидів отримуємо формулу

$$\bar{N}_+ = t \int_0^{\infty} f(z = \Pi, \dot{z}) \dot{z} dz. \quad (4.9)$$

Загальне середнє число викидів $\bar{N} = \bar{N}_+ + \bar{N}_-$.

Середнє число викидів за одиницю часу для стаціонарного процесу дорівнює

$$\bar{\gamma} = \frac{\bar{N}}{t}. \quad (4.10)$$

Розглянемо випадок, коли $Z(t)$ являє собою нормальний стаціонарний випадковий процес. Як встановлено у п.1.7, щільність імовірності такого процесу може бути подана у вигляді

$$f(z, \dot{z}, t) = f_1(z) f_2(\dot{z}), \quad (4.11)$$

$$\text{де } f_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_z}} \exp\left[-\frac{(z - m_z)^2}{2D_z}\right], \quad f_2(\dot{z}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{\dot{z}}}} \exp\left[-\frac{\dot{z}^2}{2D_{\dot{z}}}\right].$$

Підставляючи (4.11) у формулу (4.9), отримуємо

$$\begin{aligned} \bar{N}_+ &= t f_1(z = \Pi) \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{\dot{z}}}} \exp\left[-\frac{\dot{z}^2}{2D_{\dot{z}}}\right] \dot{z} dz = -t f_1(z = \Pi) \sqrt{\frac{D_{\dot{z}}}{2\pi}} \exp\left[-\frac{\dot{z}^2}{2D_{\dot{z}}}\right]_0^{\infty} = \\ &= \frac{t}{2\pi} \sqrt{\frac{D_{\dot{z}}}{D_z}} \exp\left[-\frac{(\Pi - m_z)^2}{2D_z}\right]. \end{aligned}$$

Якщо скористатися поняттям ефективної частоти $\omega_e = \sqrt{D_{\dot{z}} / D_z}$, то остання формула набере вигляду

$$\bar{N}_+ = \frac{t \omega_e}{2\pi} \exp\left[-\frac{(\Pi - m_z)^2}{2D_z}\right]. \quad (4.12)$$

При $\Pi = m_z$ середнє число позитивних викидів буде

$$\bar{N}_+ = \frac{t \omega_e}{2\pi}.$$

Розв'язуючи останнє рівняння, отримуємо

$$\omega_e = 2\pi \frac{\bar{N}_+}{t}.$$

Звідси випливає, що ω_e можна розглядати як середню частоту позитивних перетинів рівня m_z за одиницю часу. Для вузькосмугового процесу ω_e практично збігається з несучою частотою (або власною частотою). Із співвідношення (4.8) аналогічно можна отримати формулу

для середнього числа негативних перетинів, коли $z(t)$ є стаціонарним нормальним випадковим процесом.

Порівнюючи формули (4.5) і (4.8), отримуємо, що для нормальних стаціонарних процесів $\bar{N}_+ = \bar{N}_-$, тобто $N = 2N_+$.

Визначимо середню тривалість викидів. Вважаючи, що через малість інтервалів dt ордината $z(t_j)$ процесу $Z(t)$ на будь-якому з інтервалів може бути або вище, або нижче рівня Π , введемо у розгляд випадкові величини Δ_j , кожна з яких дорівнює відповідному інтервалу dt_j (якщо $z(t_j) > \Pi$) або у протилежному разі - нулю. Тоді загальна тривалість t_Π знаходження процесу $Z(t)$ вище рівня Π становитиме

$$t_\Pi = \sum_{j=1}^n \Delta_j. \quad (4.13)$$

Для визначення середньої тривалості перебування t_Π випадкового процесу вище заданого рівня Π за час T знайдемо математичні сподівання обох частин рівності (4.13).

Застосовуючи теорему про математичне сподівання суми, знаходимо

$$\bar{t}_\Pi = \sum_{j=1}^n M[\Delta_j]. \quad (4.14)$$

Оскільки за визначенням випадкова величина Δ_j може набувати лише два значення (dt_j і 0), то її математичне сподівання дорівнюватиме добутку ймовірності $\int_{\Pi}^{\infty} f(z, t) dz$ перевищення рівня Π ординатою $z(t_j)$ на довжину інтервалу dt_j :

$$M[\Delta_j] = dt_j \int_{\Pi}^{\infty} f(z, t) dz.$$

Підставляючи останній вираз у (4.14) і переходячи до границі при $n \rightarrow \infty$, замість суми отримаємо інтеграл, а середній час перебування випадковим процесом за рівнем Π , що розрахований для проміжку часу $[0, t]$, визначатиметься за формулою

$$\bar{t}_\Pi = \int_0^t \int_{\Pi}^{\infty} f(z, \tau) dz d\tau.$$

Тоді середня тривалість викиду дорівнюватиме

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{t}_\Pi}{N_+} = \frac{\int_0^t \int_\Pi^\infty f(z, \tau) dz d\tau}{\int_0^t \int_0^\infty f(z = \Pi, \dot{z}, \tau) \dot{z} dz d\tau}. \quad (4.15)$$

Для стаціонарних випадкових процесів середня тривалість викиду дорівнюватиме

$$\bar{\tau} = \frac{\int_R^\infty f(z) dz}{\int_0^\infty f(z = \Pi, \dot{z}) \dot{z} dz}.$$

Використовуючи функцію розподілу (4.11) і середнє число викидів (4.12), отримаємо середню тривалість викиду для нормального стаціонарного випадкового процесу у вигляді

$$\bar{\tau} = \frac{2\pi}{\omega_e} \left[1 - \Phi \left(\frac{\Pi - m_z}{\sqrt{D_z}} \right) \right] \exp \left[\frac{(\Pi - m_z)^2}{2D_z} \right], \quad (4.16)$$

де $\Phi(x)$ - функція Лапласа (див. таблицю А3).

При дослідженні стаціонарних випадкових процесів, крім математичного сподівання m_z , визначається також кореляційна функція $K_z(\tau)$ або спектральна щільність $S_z(\omega)$. Тоді, використовуючи формулу для дисперсії стаціонарного випадкового процесу через її кореляційну функцію (1.67), а також отриманий вище вираз кореляційної функції похідної стаціонарного випадкового процесу $K_{\dot{z}}(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} K_z(\tau)$, вираз для ефективної частоти запишемо у вигляді

$$\omega_e = \sqrt{\frac{D_{\dot{z}}}{D_z}} = \sqrt{-\left[\frac{1}{K_z(\tau)} \frac{d^2 K_z(\tau)}{d\tau^2} \right]_{\tau=0}}.$$

Формули (4.12) і (4.16) наберуть вигляду

$$\bar{N}_+ = \frac{\omega_e t}{2\pi} \exp \left[-\frac{(\Pi - m_z)^2}{2K_z(0)} \right], \quad (4.17)$$

$$\bar{\tau} = \frac{2\pi}{\omega_e} \left[1 - \Phi \left(\frac{\Pi - m_z}{\sqrt{K_z(0)}} \right) \right] \exp \left[\frac{(\Pi - m_z)^2}{2K_z(0)} \right]. \quad (4.18)$$

Якщо скористатися зв'язком між кореляційною функцією та спектральною щільністю стаціонарного випадкового процесу (1.66), вираз для ефективної частоти набере вигляду

$$\omega_e = \left[\frac{\int_0^{\infty} \omega^2 S_z(\omega) d\omega}{\int_0^{\infty} S_z(\omega) d\omega} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.19)$$

Приклад 1. Визначити, скільки разів у середньому за час $T = 10$ хв нормальний стаціонарний випадковий процес $X(t)$ набуде нульових значень, якщо $m_x = 0$, а $K_x(\tau) = e^{-0.1|\tau|} \left(\cos 0.7\tau + \frac{1}{7} \sin 0.7|\tau| \right)$.

Число позитивних викидів за нульовий рівень для нормального стаціонарного процесу визначимо за формулою (4.9) з урахуванням того, що $\Pi = 0$ і $m_x = 0$. Отримуємо

$$N_+ = \frac{T}{2\pi} \omega_e,$$

де для нормального стаціонарного процесу

$$\omega_e = \sqrt{\frac{D_{\dot{x}}}{D_x}} = \sqrt{- \left[\frac{1}{K_x(\tau)} \frac{d^2 K_x(\tau)}{d\tau^2} \right]_{\tau=0}}.$$

Оскільки $K_x(\tau)_{\tau=0} = 1$, а $\frac{d^2 K_x(\tau)}{d\tau^2} = -(0.7^2 + 0.1^2) e^{-0.1|\tau|} \left(\cos 0.7\tau - \frac{1}{7} \sin 0.7|\tau| \right)$,

тобто $\left. \frac{d^2 K_x(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} = -(0.7^2 + 0.1^2) = -0.5$, отримуємо

$$N_+ = \frac{T}{2\pi} \sqrt{0.5} = \frac{10 \cdot 60}{2 \cdot 3.14} 0.707 = 67.52.$$

Оскільки для нормальних стаціонарних процесів $N = 2N_+$, то шукане середнє число викидів за нульовий рівень дорівнюватиме $N = 135$.

Приклад 2. Визначити середнє число перевищень кутом θ допустимого значення $\Pi = \theta_0 = \pm 5^\circ$ за час 10 хв та середню тривалість викиду, якщо кореляційна функція кута при нормальних стаціонарних коливаннях основної маси - $K_\theta(\tau) = D_\theta e^{-0.1|\tau|} \left(\cos 0.6\tau + \frac{1}{6} \sin 0.6\tau \right)$, а $m_\theta = 0$, $D_\theta = 4^\circ$.

Оскільки для нормальних стаціонарних процесів $N = 2N_+$, з урахуванням того, що $D_{\dot{\theta}} = K_{\dot{\theta}}(0) = -\frac{d^2 K_{\theta}}{dt^2} \Big|_{\tau=0} = D_{\theta}(0.1^2 + 0.6^2)$, за

формулою (4.12) отримуємо

$$N = \frac{10 \cdot 60 \sqrt{0.1^2 + 0.6^2}}{\pi} \exp\left(-\frac{\theta_0^2}{2D_{\theta}}\right) = \frac{600}{\pi} 0.61 \cdot 0.043 \approx 5.$$

Середню тривалість викиду визначимо за формулою (4.16), де $\omega_e = \sqrt{0.1^2 + 0.6^2} = 0.608$:

$$\bar{\tau} = \frac{\pi}{\omega_e} \exp\left(-\frac{\theta_0^2}{2D_{\theta}}\right) \left[1 - \Phi\left(\frac{\theta_0}{\sqrt{D_{\theta}}}\right)\right] = \frac{\pi}{0.608} 23.1(1 - 0.9948) \approx 0.7 \text{ с.}$$

Задача 1. Визначити середню тривалість викиду нормального випадкового процесу $X(t)$ за рівень $\Pi = 2$ см, якщо $m_x = -8$ см, а $K_x(\tau) = 100e^{-0.1|\tau|}(1 + 0.1|\tau|)$ см².

Задача 2. Визначити дисперсію першої похідної нормального стаціонарного процесу $X(t)$, якщо його дисперсія $D_x = 64$ см², а середнє число викидів за рівень $\Pi = m_x$ за одну секунду дорівнює 0,01.

4.3. Визначення ймовірності безвідмовної роботи високонадійних систем

Виведемо наближені формули для визначення функції надійності через середнє число позитивних перетинів заданого рівня за певний проміжок часу.

Для більшості реальних систем можна покласти $H(0) = 1$, тому спочатку визначимо ймовірність того, що на досліджуваному інтервалі часу відбудеться хоча б один викид. Оскільки $Q(t) + H(t) = 1$, то

$$Q(t) = 1 - H(t).$$

З одного боку, за теоремою додавання ймовірностей ймовірність хоча б одного викиду визначається як додатак ймовірностей подій, що полягають у тому, що за встановлений проміжок часу відбудеться один, два і т.д. викиди:

$$Q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(\Pi), \quad 0 \leq \tau \leq t,$$

де $Q_k(\Pi)$ - ймовірність випадкової події, що полягає у тому, що за час $\tau \in [0, t]$ відбудеться k позитивних перетинів рівня Π .

З іншого боку, середнє число позитивних перетинів заданого

рівня можна виразити так:

$$\bar{N}_+ = \sum_{k=1}^{\infty} kQ_k(\Pi).$$

Знайдемо різницю знайдених вище ймовірностей:

$$\bar{N}_+ - Q(t) = \sum_{k=2}^{\infty} (k-1)Q_k(\Pi).$$

Оскільки у правій частині останньої рівності стоїть невід'ємна величина, то

$$Q(t) \leq \bar{N}_+.$$

Тобто середнє число позитивних перетинів на відріжку часу $[0, t]$ дає для ймовірності відмови $Q(t)$ оцінку зверху.

У задачах надійності механічних систем середнє число викидів з області допустимих значень у межах встановленого часу експлуатації повинно бути малим:

$$\bar{N}_+ \ll 1, \tau \in [0, t]. \quad (4.20)$$

Для високонадійних систем імовірність двох, трьох і т.д. викидів набагато менша за ймовірність однократного викиду за умови виконання (4.20), тому можна покласти

$$Q(t) \approx \bar{N}_+. \quad (4.21)$$

Тоді для функції надійності отримуємо таку наближену формулу:

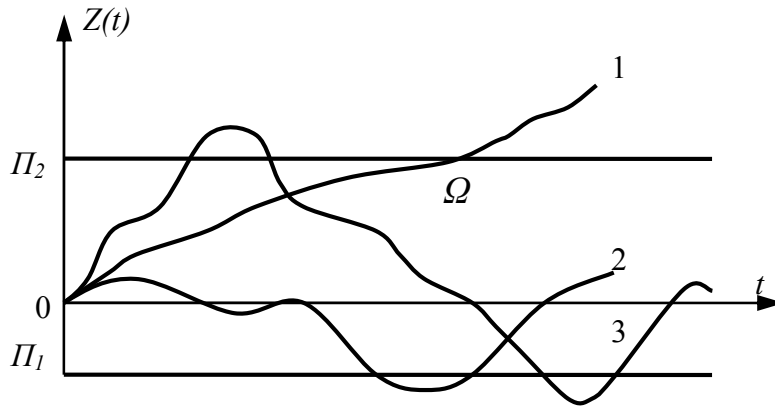
$$H(t) = 1 - \int_0^t \bar{\gamma}_+(\Pi, \tau) d\tau. \quad (4.22)$$

Формула (4.21) дає оцінку зверху для ймовірності рідкісних викидів, а формула (4.22) - оцінку знизу для функції надійності системи. Для високонадійних систем ці оцінки будуть досить близькими до точних значень, якщо випадковий процес $z(t)$ є сильно перемішаним. Прикладом такого процесу є ергодичний стаціонарний нормальний процес, для якого функція надійності може бути визначена за формулами (4.12) і (4.22):

$$H(t) = 1 - \frac{t}{2\pi} \sqrt{\frac{D_z}{D_z}} \exp\left[-\frac{(\Pi - m_z)^2}{2D_z}\right]. \quad (4.23)$$

Якщо область допустимих станів являє собою смугу, обмежену двома горизонтальними прямими $z = \Pi_1$ і $z = \Pi_2$ (рис. 4.4), то ймовірність безвідмовної роботи визначиться як ймовірність випадкової події, що полягає у тому, що на проміжку часу $[0, t]$ не відбудеться жодного позитивного викиду $Z(t)$ через рівень Π_2 або негативного викиду $z(t)$ через рівень Π_1 . За умови, що $Z(t)$ є нормальним стаціонарним випадковим процесом, ця ймовірність може бути визначена за формулою

$$H(t) \approx 1 - \frac{t\omega_e}{2\pi} \left\{ \exp\left[-\frac{(\Pi_2 - m_z)^2}{2D_z}\right] + \exp\left[-\frac{(\Pi_1 - m_z)^2}{2D_z}\right] \right\}. \quad (4.24)$$

Рисунок 4.4 – Область працездатних станів Ω

Існує й інший підхід до визначення надійності високонадійних систем, що ґрунтується на розподілі Пуассона. Згідно з розподілом Пуассона ймовірність настання k подій за час дослідження $[0, t]$ становить

$$P_k = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Явища, описані за допомогою цього закону, називаються пуассонівськими потоками подій.

Якщо позитивний перетин випадковим процесом $Z(t)$ заданого рівня $z = \Pi$ розглядати як подію у пуассонівському потоці, то функція надійності визначатиметься як ймовірність того, що за проміжок часу не відбудеться жодної події (тобто $k = 0$). При цьому замість параметра a потрібно підставити середнє число позитивних перетинів \bar{N}_+ . Тоді функцію надійності можна визначити за такою наближеною формулою

$$H(t) \approx \exp\left[-\int_0^t \bar{\gamma}_+(\Pi, \tau) d\tau\right]. \quad (4.25)$$

Для стаціонарних процесів

$$H(t) \approx \exp[-\bar{\gamma}_+(\Pi, \tau)t]. \quad (4.26)$$

За прийнятою в теорії надійності термінологією \bar{n}_+ можна розглядати як інтенсивність відмов.

Розглянемо методику визначення надійності системи для випадку, коли якість системи залежить від зліченної кількості параметрів, тобто простір якості є багатовимірним евклідовим простором.

Нехай Ω є однозв'язною областю у n -вимірному просторі якості,

що обмежена замкненою гладкою поверхнею Γ . Спочатку визначимо середнє число перетинів траєкторією $Z(t)$ межі Γ області допустимих значень Ω .

Як і для одновимірного випадку, вважатимемо, що сумісна щільність імовірності для випадкового вектора $Z(t)$ та його першої похідної відома. Під викидом розумітимемо перетин траєкторією $Z(t)$ поверхні Γ у напрямку зовнішньої нормалі до цієї поверхні.

Середнє число перетинів за одиницю часу позначимо через $\bar{\gamma}_+(\Gamma, t)$. Так само, як і для одновимірного випадку, визначимо ймовірність випадкової події, що полягає у тому, що достатньо малий проміжок часу Δt відбудеться лише один позитивний викид:

$$P_1(\Gamma, \Delta t) = P[z(\tau) \in \Delta\Omega, (\bar{n} \cdot \bar{z}) > 0; t \leq \tau \leq t + \Delta t],$$

де $\Delta\Omega$ - тонкий шар навколо поверхні Γ . Цю ймовірність виразимо через відому сумісну щільність імовірності $f(z, \dot{z}, t)$:

$$P_1(\Gamma, \Delta t) = \int_{(\bar{z} \cdot \bar{n}) > 0} d\dot{z} \int_{\Delta\Omega} f(z, \dot{z}, t) dz.$$

Якщо в останній формулі провести інтегрування по поверхні Γ , розбиваючи шар $\Delta\Omega$ на елементарні циліндри, основа яких дорівнює $d\Gamma$, а висота – нормальній складовій Δz_n прирощення вектора $Z(t)$ за час Δt , отримаємо

$$P_1(\Gamma, \Delta t) = \Delta t \int_{\Gamma} d\Gamma \int_{(\bar{z} \cdot \bar{n}) > 0} f(z, \dot{z}, t) \dot{z}_n dz + O(\Delta t),$$

де \dot{z}_n - нормальна складова похідної випадкового процесу.

Середня частота перетинів за час Δt становитиме

$$\bar{\gamma}_+(\Gamma, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{P_1(\Gamma, \Delta t)}{\Delta t} = \int_{\Gamma} d\Gamma \int_{(\bar{z} \cdot \bar{n}) > 0} f(z_\Gamma, \dot{z}, t) \dot{z}_n dz, \quad (4.27)$$

де z_Γ - значення випадкового вектора на поверхні Γ .

Формула (4.27) є узагальненням формули (4.5) на випадок багатомірного простору якості. Як показано у [4], формула (4.27) може бути використана і для кусково-гладких поверхонь, а також багатозв'язних та необмежених поверхонь.

Визначення функції надійності проводиться аналогічно одновимірному випадку. Тобто замість формули (4.22) для функції надійності отримуємо таку оцінку знизу:

$$H(t) \geq 1 - \int_0^t \bar{\gamma}_+(\Gamma, \tau) d\tau,$$

або

$$H(t) \approx 1 - \int_0^t \bar{\gamma}_+(\Gamma, \tau) d\tau. \quad (4.28)$$

Для відмов типу пуассонівського потоку отримуємо

$$H(t) \approx \exp\left[-\int_0^t \bar{\gamma}_+(\Gamma, \tau) d\tau\right]. \quad (4.29)$$

Розглянемо приклад використання отриманих формул для випадку, коли простір якості є двовимірним, а область допустимих значень описується прямокутником. Для двовимірного стаціонарного нормального випадкового процесу сумісна щільність ймовірності дорівнює

$$f(z, \dot{z}) = f_1(z_1, z_2) f_2(\dot{z}_1, \dot{z}_2), \quad (4.30)$$

де

$$f_1(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{D_{z_1}D_{z_2}(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{(z_1 - m_{z_1})^2}{D_{z_1}} - 2\rho \frac{(z_1 - m_{z_1})(z_2 - m_{z_2})}{\sqrt{D_{z_1}D_{z_2}}} + \frac{(z_2 - m_{z_2})^2}{D_{z_2}} \right] \right\}, \\ f_2(\dot{z}_1, \dot{z}_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{D_{\dot{z}_1}D_{\dot{z}_2}(1-r^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{\dot{z}_1^2}{D_{\dot{z}_1}} - 2r \frac{\dot{z}_1\dot{z}_2}{\sqrt{D_{\dot{z}_1}D_{\dot{z}_2}}} + \frac{\dot{z}_2^2}{D_{\dot{z}_2}} \right] \right\},$$

ρ, r - нормовані коефіцієнти кореляції відповідно складових процесу та похідних його складових.

Середнє число перетинів процесом $z(t)$ за формулою (4.27) дорівнюватиме

$$\bar{n}_+(\Gamma) = \int_{-\Pi_2}^{\Pi_2} dz_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\dot{z}_2 \int_0^{\infty} f(\Pi_1, z_2, \dot{z}_1, \dot{z}_2) \dot{z}_1 d\dot{z}_1 + \int_{-\Pi_2}^{\Pi_2} dz_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\dot{z}_2 \int_{-\infty}^0 f(-\Pi_1, z_2, \dot{z}_1, \dot{z}_2) |\dot{z}_1| d\dot{z}_1 + \\ + \int_{-\Pi_1}^{\Pi_1} dz_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\dot{z}_1 \int_0^{\infty} f(z_1, \Pi_2, \dot{z}_1, \dot{z}_2) \dot{z}_2 d\dot{z}_2 + \int_{-\Pi_1}^{\Pi_1} dz_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\dot{z}_1 \int_{-\infty}^0 f(z_1, -\Pi_2, \dot{z}_1, \dot{z}_2) |\dot{z}_2| d\dot{z}_2.$$

Використовуючи формулу (4.30), а також умову узгодженості

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\dot{z}_1, \dot{z}_2) d\dot{z}_2 = f(\dot{z}_1), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\dot{z}_1, \dot{z}_2) d\dot{z}_1 = f(\dot{z}_2),$$

отримуємо

$$\int_0^{\infty} f(\dot{z}_1) \dot{z}_1 d\dot{z}_1 = \sqrt{\frac{D_{\dot{z}_1}}{2\pi}}, \quad \int_0^{\infty} f(\dot{z}_2) \dot{z}_2 d\dot{z}_2 = \sqrt{\frac{D_{\dot{z}_2}}{2\pi}}.$$

Тобто формула (4.27) для середнього числа перетинів процесом заданої області набирає вигляду

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_+(\Gamma) = & \sqrt{\frac{D_{z1}}{2\pi}} \int_{-\Pi_2}^{\Pi_2} (f_1(\Pi_1, z_2) + f_1(-\Pi_1, z_2)) dz_2 + \\ & + \sqrt{\frac{D_{z2}}{2\pi}} \int_{-\Pi_1}^{\Pi_1} (f_1(z_1, \Pi_2) + f_1(z_1, -\Pi_2)) dz_1. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Інтегралі, що входять до формули (4.31), можна взяти так:

$$\begin{aligned} \int_{-\Pi_2}^{\Pi_2} f_1(\Pi_1, z_2) dz_2 = & \frac{1}{2\pi\sqrt{D_{z1}D_{z2}(1-\rho^2)}} \int_{-\Pi_2}^{\Pi_2} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(\Pi_1 - m_{z1})^2}{D_{z1}} - \right. \right. \\ & \left. \left. - 2\rho\frac{(\Pi_1 - m_{z1})(z_2 - m_{z2})}{\sqrt{D_{z1}D_{z2}}} + \frac{(z_2 - m_{z2})^2}{D_{z2}}\right]\right\} dz_2. \end{aligned}$$

Введемо нову змінну

$$U = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left(\frac{z_2 - m_{z2}}{\sqrt{D_{z2}}} - \rho \frac{\Pi_1 - m_{z1}}{\sqrt{D_{z1}}} \right),$$

тоді інтеграл набере вигляду

$$\int_{-\Pi_2}^{\Pi_2} f_1(\Pi_1, z_2) dz_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{D_{z1}}} \exp\left(-\frac{(\Pi_1 - m_{z1})^2}{2D_{z1}}\right) [\Phi(U_{2,1}) - \Phi(U_{-2,1})],$$

де $\Phi(U)$ - функція Лапласа.

Аналогічно знаходячи інші інтегралі, що входять до (4.31), отримаємо

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_+(\Gamma) = & \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D_{z1}}{D_{z1}}} \left\{ \exp\left(-\frac{(\Pi_1 - m_{z1})^2}{2D_{z1}}\right) [\Phi(U_{2,1}) - \Phi(U_{-2,1})] + \right. \\ & \left. + \exp\left(-\frac{(\Pi_1 + m_{z1})^2}{2D_{z1}}\right) [\Phi(U_{2,-1}) - \Phi(U_{-2,-1})] \right\} + \\ & + \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D_{z2}}{D_{z2}}} \left\{ \exp\left(-\frac{(\Pi_2 - m_{z2})^2}{2D_{z2}}\right) [\Phi(U_{1,2}) - \Phi(U_{-1,2})] + \right. \\ & \left. + \exp\left(-\frac{(\Pi_2 + m_{z2})^2}{2D_{z2}}\right) [\Phi(U_{1,-2}) - \Phi(U_{-1,-2})] \right\}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\text{де } U_{\pm j, \pm k} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left(\frac{\pm \Pi_j - m_{zj}}{\sqrt{D_{zj}}} - \rho \frac{\Pi_k - m_{zk}}{\sqrt{D_{zk}}} \right).$$

Для визначення функції надійності необхідно отриманий вираз (4.32) підставити у формулу (4.29).

Якщо компоненти випадкового процесу є центрованими та стохастично незалежними, тобто $m_{z_1} = m_{z_2} = \rho = 0$, то

$$\bar{\gamma}_+(T) = \frac{1}{\pi} \left\{ \sqrt{\frac{D_{z_1}}{D_{z_1}}} \exp\left(-\frac{\Pi_1^2}{2D_{z_1}}\right) \Phi\left(\frac{\Pi_2}{\sqrt{D_{z_2}}}\right) + \sqrt{\frac{D_{z_2}}{D_{z_2}}} \exp\left(-\frac{\Pi_2^2}{2D_{z_2}}\right) \Phi\left(\frac{\Pi_1}{\sqrt{D_{z_1}}}\right) \right\}. \quad (4.33)$$

Оскільки $\Phi(U_{2,1}) - \Phi(U_{-2,1}) \leq 1$, то для двовимірного стаціонарного нормального процесу середнє число позитивних перетинів межі Γ дорівнюватиме

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_+(T) \leq & \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D_{z_1}}{D_{z_1}}} \left\{ \exp\left(-\frac{(\Pi_1 - m_{z_1})^2}{2D_{z_1}}\right) + \exp\left(-\frac{(\Pi_1 + m_{z_1})^2}{2D_{z_1}}\right) \right\} + \\ & + \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D_{z_2}}{D_{z_2}}} \left\{ \exp\left(-\frac{(\Pi_2 - m_{z_2})^2}{2D_{z_2}}\right) + \exp\left(-\frac{(\Pi_2 + m_{z_2})^2}{2D_{z_2}}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

У правій частині останньої нерівності стоїть доданок середнього числа перетинів ліній $\pm \Pi_1$ і $\pm \Pi_2$, тобто додаток середнього числа викидів процесу за межі смуг $-\Pi_1 < z_1 < \Pi_1$ і $-\Pi_2 < z_2 < \Pi_2$ (рис. 4.6). Якщо викиди можна вважати рідкісними подіями, а кореляцією між компонентами $z_1(t)$ і $z_2(t)$ можна знехтувати, то права частина нерівності дає наближену оцінку числа викидів з області Ω :

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_+(T) \approx & \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D_{z_1}}{D_{z_1}}} \left\{ \exp\left(-\frac{(\Pi_1 - m_{z_1})^2}{2D_{z_1}}\right) + \exp\left(-\frac{(\Pi_1 + m_{z_1})^2}{2D_{z_1}}\right) \right\} + \\ & + \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D_{z_2}}{D_{z_2}}} \left\{ \exp\left(-\frac{(\Pi_2 - m_{z_2})^2}{2D_{z_2}}\right) + \exp\left(-\frac{(\Pi_2 + m_{z_2})^2}{2D_{z_2}}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Отримані формули (4.32) і (4.35) можна узагальнити і на випадок довільного числа вимірів [4].

Таким чином, якщо область працездатних станів є прямокутником з межами Π_i, Π_k ($i, k = 1, 2$) (рис. 4.6) ймовірність безвідмовної роботи визначиться як ймовірність випадкової події, що полягає у тому, що протягом проміжку часу $[0, t]$ не відбудеться жодного позитивного або негативного викиду відповідно за межі Π_i і Π_k . При цьому якщо $Z(t)$ - стаціонарний нормальний випадковий процес, то середнє число викидів визначається за формулою (4.32) або (4.35), а функція надійності - за формулою (4.28).

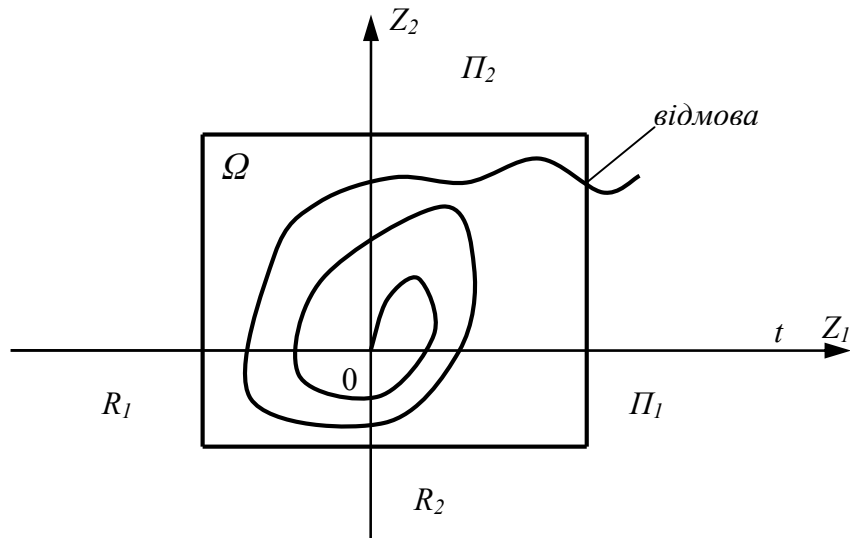


Рисунок 4.6 - Область працездатних станів у вигляді прямокутника

Оцінки (4.22), (4.25) і (4.28) для вузькосмугових процесів, що описують випадкові коливання з малою дисипацією, можуть виявитися неефективними, оскільки в таких системах імовірності двох, трьох і т.д. викидів можуть мати такий самий порядок, що й імовірність однократного викиду. Для таких систем за параметр якості беруть міру втомного пошкодження як квазімонотонний випадковий процес. Згідно з іншим підходом за параметр якості можна взяти обвідну. Тоді функція надійності визначиться за формулами (4.22) і (4.28), в які входить середнє число перетинів обвідної.

Для центрованого вузькосмугового нормального процесу сумісна щільність обвідної та її похідної може бути подана у вигляді [30]

$$f(v, \dot{v}) = f_1(v) f_2(\dot{v}),$$

де
$$f_1(v) = \frac{v}{D_v} \exp\left(-\frac{v^2}{2D_v}\right), \quad f_2(\dot{v}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{\dot{v}}}} \exp\left(-\frac{\dot{v}^2}{2D_{\dot{v}}}\right).$$

За формулами (4.9) і (4.10), отримаємо

$$\gamma(\Pi) = \frac{\bar{\omega}_e \Pi}{\sqrt{2\pi D_v}} \exp\left(-\frac{\Pi^2}{2D_v}\right),$$

де $\bar{\omega}_e^2 = \omega_e^2 - \theta^2$, θ - несуча частота процесу.

Приклад. Нехай математична модель об'єкта являє собою коливальну систему з одним ступенем вільності, що знаходиться під дією випадкового навантаження у вигляді нормального білого шуму з нульовим математичним сподіванням і спектральною щільністю

$S(\omega) = \frac{S_0}{2\pi}$. За $z(t)$ оберемо переміщення центра тяжіння. Система

буде працездатною, якщо переміщення центра тяжіння не перевищать за модулем гранично допустимого значення Π протягом заданого проміжку часу $[0, t]$, тобто $\Omega: |z(t)| < \Pi$. Імовірність безвідмовної роботи визначиться як імовірність випадкової події:

$$P(t) = P[|z(\tau)| < \Pi; 0 \leq \tau \leq t].$$

Розв'язання задачі статистичної динаміки для даного об'єкта наведене в п. 1.8. За умови високої надійності об'єкта ймовірність безвідмовної роботи визначимо за формулою (4.28), в якій ефективна частота ω_e дорівнює власній частоті системи ω_0 , і внаслідок того, що $m_x = 0$; $D_z = S_0 / 4n\omega_n^2$ і $z = -\Pi$:

$$P(t) = 1 - \frac{t\omega_0}{\pi} \exp\left[-\frac{2\Pi^2 n\omega_n^2}{S_0}\right].$$

Розглянемо випадок динамічного навантаження конструкції. Нехай під дією навантаження $X(t)$ як стаціонарного випадкового процесу з відомою спектральною щільністю $S_x(\omega)$ в конструкції виникає напруження $\sigma(t)$, що також є стаціонарним випадковим процесом. Знаючи передаточну функцію конструкції $W(i\omega)$, можна визначити спектральну щільність переміщення за залежністю (1.74). За формулами лінійного перетворення випадкових процесів неважко знайти ймовірнісні характеристики діючих напружень.

Під дією навантаження $X(t)$ у конструкції можуть мати місце два види відмов:

- крихке руйнування, або поява неприпустимих деформацій, як наслідок однократного викиду абсолютного максимуму напруження $\sigma(t)$ за рівень Π_1 при розтягуванні або за рівень Π_2 при стисненні (рис.4.3);

- втомне руйнування як результат накопичення пошкоджень під дією протягом тривалого часу T напруження $\sigma(t)$, за величиною, що явно не перевищує вказані рівні, але такого, що має знакозмінний циклічний характер.

Визначимо ймовірність P_1 відсутності викидів напруження. За прийнятою в теорії викидів методикою введемо в розгляд початкову надійність $P(0)$ як імовірність неруйнування в квазістатичній постановці в момент $t = 0$: $P(0) = 1$. Імовірності викидів максимального розтягувального напруження $\sigma_m^{(+)}$ за рівень Π_1 або стискального напруження $\sigma_m^{(-)}$ за рівень Π_2 можна визначити за формулами

$$Q_1 = P\{\sigma_m^{(+)} > \Pi_1\} = \int_{\Pi_1}^{\infty} f(\sigma_m) d\sigma_m;$$

$$Q_2 = P\{\sigma_m^{(-)} < \Pi_2\} = \int_{-\infty}^{\Pi_2} f(\sigma_m) d\sigma_m,$$
(4.36)

де $f(\sigma_m)$ - щільність розподілу максимумів амплітуди напруження як випадкового процесу $\sigma(t)$.

В останніх формулах ураховані всі викиди незалежно від їх тривалості. Насправді ж руйнування при імпульсному навантаженні відбувається лише у тому випадку, коли тривалість викиду τ перевищує критичну величину $\tau_{кр}$.

Позначимо через P_{τ_1} умовну ймовірність того, що $\tau > \tau_{кр}$, при викиді за рівень Π_1 і через P_{τ_2} - аналогічну ймовірність при викиді за рівень Π_2 .

Знайдемо ймовірність того, що тривалість викиду перевищить критичну. Дослідженнями [9] встановлено, що зі зростанням рівня, викиди за який означають відмову, тривалість викидів τ зменшується, а закон $f(\tau)$ її розподілення наближається до закону Релея:

$$f(\tau) = \frac{\tau}{S_\tau^2} e^{-\frac{\tau^2}{2S_\tau^2}}.$$

Параметр S_τ можна визначити за середньою тривалістю викиду $\bar{\tau}$, враховуючи, що для цього розподілу математичне сподівання

$$M[\tau] = \bar{\tau} = \sqrt{\frac{\pi}{12S_\tau^2}}.$$

Середня тривалість викиду $\bar{\tau}$ в загальному випадку визначається виразом (4.15), а у разі нормального стаціонарного процесу – виразом (4.16). При фіксованому значенні $\tau_{кр}$ шукана ймовірність дорівнюватиме

$$P_\tau = P(\tau > \tau_{кр}) = \int_{\tau_{кр}}^{\infty} f(\tau) d\tau = e^{-\frac{\pi\tau_{кр}^2}{4m_\tau^2}}.$$
(4.37)

При більш строгому підході потрібно врахувати, що через стохастичну природу опірності конструкції імпульсним навантаженням $\tau_{кр}$ є випадковою величиною.

Нехай відома щільність розподілу $f(\tau_{кр})$. Розіб'ємо область можливих значень $\tau_{кр}$ на n інтервалів. Уведемо в розгляд гіпотезу H_i , що полягає у тому, що значення $\tau_{кр}$ знаходиться в i -му інтервалі

$[\tau_{кр_i}; \tau_{кр_i} + d\tau_{кр}]$. Імовірність цієї гіпотези

$$P(H_i) = f(\tau_{кр_i})d\tau_{кр}.$$

Позначимо через $P(A/H_i)$ умовну ймовірність того, що $\tau > \tau_{кр_i}$ за умови, що має місце гіпотеза H_i . Імовірність $P(A/H_i)$ визначається виразом (4.37) із заміною в ньому $\tau_{кр}$ на $\tau_{кр_i}$. Використовуємо формулу повної імовірності

$$P_\tau = \sum_{i=1}^n P(A/H_i)P(H_i).$$

Вважаючи, що величина $d\tau_{кр}$ мала (число інтервалів вибране достатньо великим), і переходячи на цій підставі від підсумовування до інтегрування, одержимо

$$P_\tau = \int_0^\infty e^{-\frac{\pi\tau_{кр}^2}{4m_\tau^2}} f(\tau_{кр})d\tau_{кр}. \quad (4.38)$$

На практиці межі інтегрування можна замінити величинами $a > 0$ і $b < \infty$, виходячи з діапазону реальних значень $\tau_{кр}$.

Загальну ймовірність неруйнування $P(T)$ визначимо як добуток початкової надійності на умовну ймовірність відсутності викидів тривалістю, більшою за $\tau_{кр}$, на інтервалі $[0, T]$, обчислену за умови, що в початковий момент часу руйнування не настає, тобто

$$P(T) = P(0)\{1 - [1 - P_1(T)]P_\tau\}, \quad (4.39)$$

де $P_1(T)$ - імовірність відсутності викидів, визначувана при прийнятих допущеннях залежністю (4.25):

$$P_1 \approx \exp\left[-\int_0^T \int_0^\infty f(\Pi, \dot{z}, t)\dot{z}d\dot{z}dt\right],$$

а для нормального стаціонарного випадкового процесу – залежністю (4.23). При нормальному розподілі реалізацій можна одержати в кінцевому вигляді й для нестаціонарного процесу вираз середнього числа викидів за одиницю часу (див. п.4.6).

Імовірність P_{τ_1} і P_{τ_2} визначають за залежностями (4.37) або (4.38). Оскільки відмовою вважають викид за рівень Π_1 і Π_2 і ці випадкові події несумісні, то ймовірність відсутності викидів можна виразити так:

$$P_1 = 1 - (Q_1P_{\tau_1} + Q_2P_{\tau_2} - Q_1Q_2P_{\tau_1}P_{\tau_2}). \quad (4.40)$$

Обчислимо ймовірності Q_1 і Q_2 . Природно вважати викиди незалежними рідкісними випадковими подіями, використовуючи на цій підставі розподіл Пуассона. При цьому виразимо середнє число викидів за рівень Π через спектральну щільність $S_z(\omega)$. Припустимо, що $m_z = 0$

на тій підставі, що середнє напруження $m_z \neq 0$ можна віднести до статичних навантажень і в даному випадку виключити з розгляду.

Враховуючи, що дисперсія $D_z = S_z^2 = K_z(0) = \int_0^{\infty} S_z(\omega) d\omega$, при прийнятих

допущеннях імовірності Q_1 і Q_2 викидів відповідно за рівні Π_1 і Π_2 протягом часу T функціонування конструкції визначають за формулою (4.24). Далі, як і у попередньому випадку, ймовірність P_1 розраховують за залежністю (4.40).

Розрахунок втомної довговічності ґрунтується на знанні характеристик матеріалу на міцність, закономірностей накопичення втомних пошкоджень та параметрів процесу, що приймаються як характеристики циклів навантаження і не є предметом даного посібника.

4.4. Розподіл екстремумів випадкового процесу

Як зазначено вище, відмова конструкції при випадкових коливаннях може бути викликана виникненням втомної тріщини. При розв'язанні цієї задачі необхідно знати розподіл екстремумів випадкового процесу.

Нехай відома сумісна щільність імовірності процесу та його перших двох похідних $f(x, \dot{x}, \ddot{x}, t)$. Визначимо середнє число екстремумів процесу $X(t)$ за одиницю часу, що перевищують заданий рівень. За прийнятою в теорії викидів термінологією розрізнятимемо число максимумів $n_{max}(x = \Pi, t)$ та число мінімумів $n_{min}(x = \Pi, t)$, що перевищують цей рівень.

Розглянемо достатньо малий відрізок часу Δt . Враховуючи, що ймовірність знаходження двох та більшої кількості числа максимумів прямує до нуля, можемо записати

$$n_{max}(x = \Pi, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{P_1(x = \Pi, t)}{\Delta t} \right],$$

де $P_1(x = \Pi, t)$ – імовірність того, що в інтервалі Δt знаходиться лише один максимум, що перевищує рівень $x = \Pi$. Імовірність цієї події може бути знайдена так. Якщо випадковий процес $X(t)$ в деякому малому інтервалі часу $(t_0, t_0 + \Delta t)$ має максимум в інтервалі $(x_0 - \Delta x_0, x_0)$, то у другому малому інтервалі часу $(t_1, t_1 + \Delta t)$ буде знайдений мінімум в інтервалі значень $(x_1 - \Delta x_1, x_1)$, і далі у малому інтервалі часу $(t_2, t_2 + \Delta t)$ буде знайдений максимум в інтервалі значень $(x_2 - \Delta x_2, x_2)$ і так далі. Використовуючи достатню умову існування максимуму функції, ймовірність знаходження максимуму в довільно вибраному інтервалі часу Δt в інтервалі значень Δx може бути записана у вигляді

$$P_1(x = \Pi, t) = P(\Pi - \Delta x \leq x < \infty, -\Delta \dot{x} \leq \dot{x} < 0, \ddot{x} < 0) = \int_{\Pi - \Delta x}^{\infty} dx \int_{-\infty}^0 \ddot{x} \int_0^{-\Delta \dot{x}} f(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) d\dot{x}.$$

Застосовуючи теорему про середнє та враховуючи те, що $\Delta \dot{x} = \ddot{x} d\Delta t$, отримаємо

$$P_1(x = \Pi, \Delta t) = \Delta t \int_{\Pi}^{\infty} dx \int_{-\infty}^0 f(x, 0, \ddot{x}, t) \ddot{x} d\ddot{x}. \quad (4.41)$$

Тоді середнє число максимумів за одиницю часу, що перевищують заданий рівень, дорівнюватиме

$$\bar{n}_{\max}(x = \Pi, t) = \int_{\Pi}^{\infty} dx \int_{-\infty}^0 f(x, 0, \ddot{x}, t) |\ddot{x}| d\ddot{x}. \quad (4.42)$$

Спрямовуючи $\Pi \rightarrow -\infty$, знайдемо повне число максимумів за одиницю часу:

$$\bar{n}_{\max}(t) = \int_{-\infty}^0 \ddot{x} f(0, \ddot{x}, t) d\ddot{x}, \quad (4.43)$$

де $f(0, \ddot{x})$ - щільність імовірності першої та другої похідних процесу при $\dot{x} = 0$.

Для стаціонарних випадкових процесів середнє число максимумів за одиницю часу дорівнює

$$\bar{n}_{\max} = \int_{-\infty}^0 \ddot{x} f(0, \ddot{x}) d\ddot{x}. \quad (4.44)$$

Для таких процесів середнє число мінімумів за одиницю часу дорівнює

$$\bar{n}_{\min} = \int_0^{\infty} \ddot{x} f(0, \ddot{x}) d\ddot{x}. \quad (4.45)$$

За допомогою формул (4.42)-(4.45) можна знайти розподіл екстремумів випадкового процесу. За визначенням функція розподілу екстремумів випадкового процесу $F_{\max}(x = \Pi, t)$ є імовірність випадкової події, яка полягає у тому, що взятий навмання максимум виявиться меншим за рівень $x = \Pi$. Цю ймовірність знайдемо, відносячи середнє число максимумів, що не перевищують рівень $x = \Pi$, до повного середнього числа максимумів за одиницю часу:

$$F_{\max}(x = \Pi, t) = \frac{\bar{n}_{\max}(t) - \bar{n}_{\max}(x = \Pi, t)}{\bar{n}_{\max}(t)}.$$

Щільність імовірності максимумів $f_{\max}(x = \Pi, t)$ визначається диференціюванням функції розподілу за Π :

$$f_{\max}(x = \Pi, t) = -\frac{\bar{n}'_{\max}(x = \Pi, t)}{\bar{n}_{\max}(t)}. \quad (4.46)$$

Використовуючи формули (4.43) і (4.44) для стаціонарних процесів, отримуємо

$$f_{\max}(x = \Pi) = \frac{\int_0^0 \ddot{x} f(x, 0, \ddot{x}) d\ddot{x}}{\int_{-\infty}^0 \ddot{x} f(0, \ddot{x}) d\ddot{x}}. \quad (4.47)$$

Аналогічно можна визначити щільність імовірності мінімумів, що перевищують рівень Π :

$$f_{\min}(x = \Pi, t) = -\frac{\bar{n}'_{\min}(x = \Pi, t)}{\bar{n}_{\min}(t)}. \quad (4.48)$$

Для стаціонарних процесів

$$f_{\min}(x = \Pi) = \frac{\int_0^{\infty} \ddot{x} f(x, 0, \ddot{x}) d\ddot{x}}{\int_0^{\infty} \ddot{x} f(0, \ddot{x}) d\ddot{x}}. \quad (4.49)$$

Якщо випадковий процес $X(t)$ є вузькосмуговим, то майже всі його максимуми лежать вище математичного сподівання m_x . Тому середнє число максимумів, що перевищують рівень $\Pi > m_x$, буде наближено дорівнювати середньому числу позитивних перетинів цього рівня (див. п.4.2). Середнє число максимумів, що є нижчими за m_x , можна взяти такими, що дорівнюють нулю. З цих міркувань отримуємо таку наближену формулу, що може бути використана для розрахунків вузькосмугових процесів:

$$f_{\max}(x = \Pi, t) \approx \begin{cases} \frac{-\bar{n}'(x = \Pi, t)}{\bar{n}(m_x, t)}, & \Pi < m_x; \\ f_{\max}(x = \Pi, t) = 0, & \Pi \leq m_x. \end{cases} \quad (4.50)$$

Оскільки середнє числа перетинів визначається легше, ніж середнє числа максимумів, то остання формула має деякі переваги.

При визначенні характеристик надійності систем також використовують закон розподілу абсолютного максимуму випадкового процесу. Для цього розподілу за допомогою формул п.4.2 можна отримати таку формулу:

$$F_{\max}(x = \Pi, t) \approx \begin{cases} 0, & \Pi < x_0, \\ 1 - \bar{n}(x = \Pi, t), & \Pi > x_0. \end{cases} \quad (4.51)$$

Тобто задача визначення функції розподілу абсолютного максимуму зводиться до більш простої задачі про викиди випадкових

процесів. Її також можна звести до задачі знаходження розподілу інтервалу часу між нулями [11].

Наведемо також без виведення щільності ймовірності двох екстремумів та інтервалу часу між ними, а також щільність імовірності інтервалів часу між сусідніми нулями для стаціонарних процесів [11]:

$$f(x_1, x_2, \tau) = (\bar{n}_{\max})^{-1} \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} \ddot{x}_1 \ddot{x}_2 f(x_1, 0, \ddot{x}_1, x_2, 0, \ddot{x}_2, \tau) d\ddot{x}_1 d\ddot{x}_2, \quad (4.52)$$

$$f(\tau) = (\bar{n}_{\max})^{-1} \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} \ddot{x}_1 \ddot{x}_2 f(0, \ddot{x}_1, 0, \ddot{x}_2, \tau) d\ddot{x}_1 d\ddot{x}_2, \quad (4.53)$$

$$f(\tau) = (\bar{n}_0)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}_1 \dot{x}_2 f(0, \dot{x}_1, 0, \dot{x}_2, \tau) d\dot{x}_1 d\dot{x}_2. \quad (4.54)$$

Для розрахунку за формулами (4.52-4.54) необхідно побудувати функцію сумісного розподілу процесу та його першої похідної, а також першої та другої похідних у незбіжні моменти часу. Отримані при цьому формули будуть громіздкими. Аналіз цих формул показав [4], що для наближеної оцінки цих розподілів можна скористатися розподілом Релея:

$$F(\tau) = \frac{\tau}{D} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2D}\right), \quad (4.55)$$

де параметр розподілу D визначається за середніми значеннями інтервалу часу між викидами $\bar{\tau}$ або екстремумами $\bar{\tau}_e$:

$$D = \frac{2}{\pi \bar{\tau}}, \text{ або } D = \frac{2}{\pi \bar{\tau}_e},$$

де $\bar{\tau} = \frac{\pi}{\omega_e}$, $\bar{\tau}_e = \frac{\pi}{\omega_0}$.

4.5. Аналіз нормальних стаціонарних процесів

Якщо діючі напруження в конструкції можна вважати нормальним стаціонарним процесом, то його аналіз значно спрощується. Більшість важливих характеристик такого процесу можна отримати в аналітичному вигляді.

Розглянемо нормальний випадковий процес $X(t)$, у якого $m_x = 0$. Якщо ця умова не виконана, то при визначенні викидів та розподілу екстремумів достатньо рівень Π замінити на $\Pi - m_x$.

Для нормального стаціонарного процесу щільність його сумісного розподілу з двома першими похідними також буде нормальною. Для збіжних моментів часу цю щільність можна записати у такому вигляді:

$$f(x, \dot{x}, \ddot{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{|K|}} \exp \left[-\frac{1}{2|K|} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_{ij} x^{(i-1)} x^{(j-1)} \right], \quad (4.56)$$

де верхній індекс у дужках означає порядок похідної; $|K|$ - визначник матриці кореляційних моментів розміром 3×3 з елементами $K_{ij} = M[X^{(i-1)} X^{(j-1)}]$; A_{ij} - алгебраїчне доповнення елемента K_{ij} . Запишемо цю матрицю у вигляді

$$K = \begin{bmatrix} M[|X|^2] & M[X \cdot \dot{X}] & M[X \cdot \ddot{X}] \\ M[\dot{X} \cdot X] & M[|\dot{X}|^2] & M[\dot{X} \cdot \ddot{X}] \\ M[\ddot{X} \cdot X] & M[\ddot{X} \cdot \dot{X}] & M[|\ddot{X}|^2] \end{bmatrix}$$

За теоремою Вінера-Хінчина можемо записати

$$M[X^{(k)} X^{(l)}] = (-1)^k K_{(0)}^{(k+l)} = (-1)^k i^{k+l} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \omega^{k+l} d\omega, \quad (4.57)$$

де $K_{(0)}^{(j)} = \left. \frac{d^j K_x(\tau)}{d\tau^j} \right|_{\tau=0}$.

Тобто аналіз випадкових процесів можливий лише тоді, коли ці процеси є диференційованими достатню кількість разів.

Використовуючи введене раніше поняття ефективної частоти (4.19), отримаємо

$$M[X^2] = D_x, \quad M[\dot{X}^2] = \omega_e^2 D_x, \quad M[\dot{X} \cdot \ddot{X}] = M[X \cdot \dot{X}] = 0, \\ M[X \cdot \ddot{X}] = -\omega_e^2 D_x.$$

Як було зазначено вище для вузькосмугових процесів ефективна частота майже збігається з основною частотою, тому з урахуванням (4.57) кореляційна матриця для вузькосмугового процесу набере вигляду

$$K = \begin{bmatrix} D_x & 0 & -\omega_e^2 D_x \\ 0 & \omega_e^2 D_x & 0 \\ -\omega_e^2 D_x & 0 & \beta^2 \omega_e^4 D_x \end{bmatrix},$$

де $\beta = \frac{\omega_0}{\omega_e}$, $\omega_0 = \left[\frac{\int_0^\infty \omega^4 S_x(\omega) d\omega}{\int_0^\infty \omega^2 S_x(\omega) d\omega} \right]^{\frac{1}{2}}$ - колова частота процесу за

екстремумами.

Звідси випливає, що двовимірний процес $X(t)$ і $\ddot{X}(t)$ стохастично не зв'язаний з процесом $\dot{X}(t)$. Тобто можемо записати

$$f(x, \dot{x}, \ddot{x}) = f_1(x, \ddot{x}) f_2(\dot{x}). \quad (4.58)$$

Тоді сумісну щільність імовірності запишемо так:

•

$$f_1(x, \ddot{x}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{D_x D_{\ddot{x}}(1-r^2)}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x^2}{D_x} - \frac{2rx\ddot{x}}{\sqrt{D_x D_{\ddot{x}}}} + \frac{\ddot{x}^2}{D_{\ddot{x}}}\right)\right], \quad (4.59)$$

• де r - коефіцієнт кореляції між процесами $X(t)$ і $\ddot{X}(t)$, який можна виразити через параметр β :

$$r = -\frac{1}{\beta}.$$

Для вузькосмугового процесу, енергія якого зосереджена у частині спектра, що лежить біля основної частоти процесу ω_0 , параметр β близький до одиниці, тому для таких процесів $r \approx -1$. Зі збільшенням ширини спектра коефіцієнт кореляції спадає за модулем.

Визначимо щільність імовірності максимумів процесу $X(t)$. Для цього формулу (4.59) запишемо у вигляді

$$f_1(x, \ddot{x}) = \frac{(\beta^2 - 1)^{-1/2}}{2\pi\omega_e^2 D_x} \exp\left[-\frac{\beta^2 \omega_e^4 x^2 + 2\omega_e^2 x\ddot{x} + \ddot{x}^2}{2(\beta^2 - 1)\omega_e^4 D_x}\right]. \quad (4.60)$$

Підставляючи формулу (4.58) у формулу (4.47), отримаємо

$$f_{\max}(x = \Pi) = \frac{\int_0^0 f_1(x = \Pi, \ddot{x}) |\ddot{x}| d\ddot{x}}{\int_{-\infty}^0 f(\ddot{x}) |\ddot{x}| d\ddot{x}}, \quad (4.61)$$

де $f(\ddot{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_x} \beta \omega_e^2} \exp\left(-\frac{\ddot{x}^2}{2\beta^2 \omega_e^4 D_x}\right)$.

Інтеграл у чисельнику дроби (4.61) дорівнює [4]:

$$\frac{(\beta^2 - 1)^{-1/2}}{2\pi\omega_e^2 D_x} \exp\left(-\frac{\Pi^2}{2D_x}\right) J(\Pi),$$

де

$$J(\Pi) = \int_{-\infty}^0 \exp\left[-\frac{(\ddot{x} + \omega_e^2 \Pi)^2}{2(\beta^2 - 1)\omega_e^4 D_x}\right] |\ddot{x}| d\ddot{x}.$$

Цей інтеграл можна записати у вигляді

$$J = \sqrt{D_x(\beta^2 - 1)} \omega_e^4 \int_{-\infty}^{U_1} \left(\Pi - U \sqrt{D_x(\beta^2 - 1)}\right) e^{-\frac{U^2}{2}} dU,$$

де

$$U = \frac{\ddot{x} + \omega_e^2 \Pi}{\omega_e^2 \sqrt{D_x(\beta^2 - 1)}}, \quad U_1 = \frac{\Pi}{\sqrt{D_x(\beta^2 - 1)}}.$$

Оскільки

$$\int_{-\infty}^{u_1} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi} \Phi(u_1), \quad \int_{-\infty}^{u_1} u e^{-\frac{u^2}{2}} du = -e^{-\frac{u_1^2}{2}},$$

то

$$J = (\beta^2 - 1)\omega_e^4 D_x \left[\exp\left(-\frac{U_1^2}{2}\right) + U_1 \sqrt{2\pi} \Phi(U_1) \right]. \quad (4.62)$$

Знаменник формули (4.61) дорівнює

$$\int_{-\infty}^0 f(\ddot{x}) |\ddot{x}| d\ddot{x} = \frac{\beta \omega_y^2 S_x}{\sqrt{2\pi}}.$$

• З урахуванням отриманих значень чисельника та знаменника формула (4.61) набере вигляду

$$f_{\max}(\Pi) = \frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{\sqrt{2\pi D_x} \beta} \left[\exp\left(-\frac{\beta^2 U_1^2}{2}\right) + \sqrt{2\pi} U_1 \exp\left(-\frac{\Pi^2}{2D_x}\right) \Phi(U_1) \right].$$

(4.63)

• Як зазначено вище, для вузькосмугового процесу $\beta \approx 1$, тобто у цьому випадку перший доданок у (4.63) буде малим порівняно з другим, а для другого доданка можна покласти [4]:

$$\Phi(U_1) \approx \begin{cases} 1, & \Pi > 0, \\ 0, & \Pi \leq 0. \end{cases}$$

• Тобто для щільності ймовірності максимумів вузькосмугового процесу отримуємо розподіл Релея:

$$f_{\max}(\Pi) \approx \begin{cases} \frac{\Pi}{D_x} \exp\left(-\frac{\Pi^2}{2D_x}\right), & \Pi > 0. \\ 0, & \Pi \leq 0. \end{cases} \quad (4.64)$$

Розглянемо випадок, коли $\beta \gg 1$. Тоді у формулі (4.63) другий доданок буде малим порівняно з першим і для щільності ймовірності максимумів отримуємо нормальний розподіл:

$$f_{\max}(x_*) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi D_x}} \exp\left(-\frac{\Pi^2}{2D_x}\right). \quad (4.65)$$

Функція розподілу абсолютного максимуму визначається за формулою (4.51), якщо підставити туди формули для середнього числа викидів. Так, для детермінованого рівня за формулою (4.12) отримуємо

$$F_{\max}(\Pi, t) = \begin{cases} 1 - \frac{t\omega_e}{2\pi} \exp\left[-\frac{(\Pi - m_x)^2}{2D_x}\right], & \Pi \geq x_0 \\ 0, & \Pi < x_0. \end{cases} \quad (4.66)$$

де

$$x_0 = m_x + \sqrt{2D_x \ln \frac{t\omega_e}{2\pi}}. \quad (4.67)$$

4.6. Аналіз квазістаціонарних нормальних процесів

У тому випадку, коли реальні процеси навантаження відмінні від стаціонарного нормального процесу, їх аналіз також може бути проведений за допомогою стаціонарного нормального процесу. Так, більшість реальних процесів можуть бути описані такою математичною моделлю:

$$X(t) = X_0(t)X_1(t) + X_2(t), \quad (4.68)$$

де $X_0(t)$ - стаціонарний нормальний процес із відомою кореляційною функцією $K(\tau)$; $X_1(t)$, $X_2(t)$ - квазідетерміновані нестаціонарні процеси, що можуть бути задані у вигляді усічених степеневих або тригонометричних рядів із випадковими статистично незалежними або детермінованими коефіцієнтами [11]:

$$X_{1,2}(t) = \sum_{k=0}^n (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) \quad \text{або} \quad X_{1,2}(t) = \sum_{k=0}^n c_k t^k. \quad (4.69)$$

Надалі процеси $X_0(t), X_1(t), X_2(t)$ вважатимемо статистично незалежними з математичними сподіваннями, що дорівнюють нулю. У

цьому випадку кореляційна функція узагальненого процесу (4.68) матиме вигляд

$$K_x(t, t + \tau) = K(\tau)K_1(t, t + \tau) + K_2(t, t + \tau), \quad (4.70)$$

де

$$K_{1,2}(t, t + \tau) = M[X_{1,2}(t)X_{1,2}(t + \tau)]. \quad (4.71)$$

Поклавши $\tau = 0$, за формулою (1.67), отримаємо

$$D_x = K(0)D_{x_1} + D_{x_2}. \quad (4.72)$$

Взаємна кореляційна функція процесу $X(t)$ та його першої похідної дорівнюватиме

$$K_{x\dot{x}}(t, t + \tau) = K(\tau)K_{x_1\dot{x}_1}(t, t + \tau) + \dot{K}(\tau)K_1(t, t + \tau) + K_{x_2\dot{x}_2}(t, t + \tau), \quad (4.73)$$

де

$$K_{x_1,2,\dot{x}_1,2}(t, t + \tau) = M[X_{1,2}(t)\dot{X}_{1,2}(t + \tau)]. \quad (4.74)$$

Звідки при $\tau = 0$ отримаємо

$$K_{x\dot{x}} = K(0)K_{x_1\dot{x}_1} + K_{x_2\dot{x}_2}. \quad (4.75)$$

Аналогічно можна визначити й інші коефіцієнти кореляційної матриці процесу:

$$\begin{aligned} K_{x\ddot{x}} &= K_{(0)}K_{x_1\ddot{x}_1} + \ddot{K}_{(0)}K_{x_1x_1} + K_{x_2\ddot{x}_2}, \\ K_{\dot{x}\ddot{x}} &= K_{(0)}K_{\dot{x}_1\ddot{x}_2} - \ddot{K}_{(0)}K_{x_1x_1} + K_{\dot{x}_2\ddot{x}_2}, \\ K_{\ddot{x}\ddot{x}} &= K_{(0)}K_{\ddot{x}_1\ddot{x}_1} - \ddot{K}_{(0)}K_{x_1\dot{x}_1} + K_{\ddot{x}_2\ddot{x}_2}, \\ K_{\ddot{x}\ddot{x}} &= K_{(0)}K_{\ddot{x}_1\ddot{x}_1} + 2\ddot{K}_{(0)}K_{x_1\dot{x}_1} - 4\ddot{K}_{(0)}K_{\dot{x}_1\dot{x}_1} + K_{(0)}^{IV}K_{x_1x_1} + K_{\ddot{x}_2\ddot{x}_2}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

У подальшому аналізі скористаємося нормованими коефіцієнтами кореляції, оскільки, як показано у роботі [11], для реальних процесів навантаження нормовані коефіцієнти $r_{x\dot{x}}$ і $r_{\dot{x}\ddot{x}}$ будуть малими у порівнянні з одиницею і ними можна знехтувати, а коефіцієнт $r_{x\ddot{x}}$ можна вважати сталим і таким, що дорівнює коефіцієнту кореляції нормального процесу та його другої похідної.

Якщо всі складові процесу (4.68) можна вважати нормальними, то сумісна щільність його також підлягатиме нормальному закону розподілу. У цьому випадку можливо провести аналіз цього процесу подібно тому, як було зроблено вище для стаціонарного нормального процесу. Визначимо середнє число викидів випадкового процесу $X(t)$. Сумісна щільність імовірності

$$f(x, \dot{x}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{D_x D_x (1-r^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x-m_x)^2}{D_x} + \frac{2(x-m_x)(\dot{x}-m_{\dot{x}})}{\sqrt{D_x D_x}} + \frac{(\dot{x}-m_{\dot{x}})^2}{D_x} \right]\right\}. \quad (4.77)$$

Підставивши цей вираз у (4.7), отримаємо

$$\bar{N} = \frac{1}{2\pi\sqrt{D_x D_{\dot{x}}(1-r^2)}} \int_0^t \left\{ \exp\left[-\frac{(\Pi - m_x)^2}{2D_x}\right] \times \right. \\ \left. \times \int_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{2(1-r^2)} \left(\frac{\dot{x} - m_{\dot{x}}}{\sqrt{D_{\dot{x}}}} - r \frac{\Pi - m_x}{\sqrt{D_x}} \right)^2 \right] \dot{x} d\dot{x} \right\} d\tau.$$

Якщо покласти

$$U = \frac{1}{2(1-r^2)} \left(\frac{\dot{x} - m_{\dot{x}}}{\sqrt{D_{\dot{x}}}} - r \frac{\Pi - m_x}{\sqrt{D_x}} \right), \quad U_1 = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \left(\frac{m_{\dot{x}}}{\sqrt{D_{\dot{x}}}} + r \frac{\Pi - m_x}{\sqrt{D_x}} \right), \quad (4.78)$$

то середнє число викидів випадкового процесу через рівень Π можна записати так:

$$\bar{N} = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \left\{ \sqrt{\frac{D_{\dot{x}}}{D_x} (1-r^2)} \exp\left[-\frac{(\Pi - m_x)^2}{2D_x}\right] \int_{-U_1}^\infty (U + U_1) e^{-\frac{U^2}{2}} dU \right\} d\tau = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \sqrt{\frac{D_{\dot{x}}}{D_x} (1-r^2)} \exp\left[-\frac{(\Pi - m_x)^2}{2D_x}\right] \left[\exp\left(-\frac{U_1^2}{2}\right) + \sqrt{2\pi} U_1 \Phi(U_1) \right] d\tau. \quad (4.79)$$

Для випадкового процесу з нульовими математичними сподіваннями $m_x = m_{\dot{x}} = 0$ отримуємо

$$\bar{N} = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \sqrt{\frac{D_{\dot{x}}}{D_x}} \left\{ \sqrt{1-r^2} \exp\left[-\frac{\Pi^2}{2D_x(1-r^2)}\right] + \right. \\ \left. + \sqrt{2\pi} r \frac{\Pi}{\sqrt{D_x}} \exp\left[-\frac{\Pi^2}{2D_x}\right] \Phi\left(r \frac{\Pi}{\sqrt{D_x(1-r^2)}}\right) \right\} d\tau. \quad (4.80)$$

Останнє співвідношення можна використати для процесу випадкових коливань, математична модель якого є добутком стаціонарного нормального процесу $X_0(t)$ з нульовим математичним сподіванням та синусоїди:

$$X(t) = X_0(t) \sin \omega_0 t. \quad (4.81)$$

У цьому випадку

$$m_x = m_{\dot{x}} = 0, \quad D_x = D_{x_0} \sin^2 \omega_0 t, \\ r = \frac{\omega_0 \cos \omega_0 t}{\sqrt{\omega_0^2 \cos^2 \omega_0 t + \omega_e^2 \sin^2 \omega_0 t}},$$

де ω_e - ефективна частота процесу $X_0(t)$.

Безпосереднє використання отриманих співвідношень для визначення середнього числа викидів (4.80) приводить до інтегралів, точні значення яких можна отримати лише чисельними методами. На практиці для них використовують наближені оцінки. Для цього в процес (4.81) вводять випадкову фазу, що рівномірно розподілена в інтервалі від 0 до 2π , і змінюють у наведених вище формулах аргумент $\omega_0 t$ на $\omega_0 t + \varphi$. Після усереднення за φ отримуємо

$$r = 0, \quad D_x^2 = \frac{D_{x_0}^2}{2}, \quad D_{\dot{x}} = \frac{D_{\dot{x}_0} + \omega_0^2 \sigma_{x_0}^2}{2}.$$

Тоді середнє число викидів дорівнюватиме

$$\bar{n}(II, t) = t\bar{n}_0 \exp\left[-\frac{II^2}{D_x}\right], \quad (4.82)$$

де середня частота процесу

$$\bar{n}_0 = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_e^2}}{2\pi}. \quad (4.83)$$

Наведений вище метод наближеної оцінки числа викидів можна узагальнити і для випадку, коли гармонічна складова процесу описується тригонометричним рядом [11].

Для випадку, коли кореляція між процесом та його похідною відсутня, сумісна щільність процесу визначається формулами (4.58) і (4.59), а співвідношення (4.79) набуває вигляду

$$\bar{N} = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \exp\left[-\frac{(II - m_x)^2}{2D_x}\right] \left[\sqrt{\frac{D_x}{D_x}} \exp\left(-\frac{m_x^2}{2D_x}\right) + \sqrt{\frac{2\pi}{D_x}} m_x \left(1 + \Phi\left(\frac{m_x}{\sqrt{D_x}}\right)\right) \right] d\tau. \quad (4.84)$$

Це співвідношення можна використати при визначенні середнього числа викидів процесу, що є сумою стаціонарного процесу $X_0(t)$ та квазідетермінованої нестационарної функції, що задана у вигляді степеневого ряду з випадковими коефіцієнтами. Якщо, наприклад, $m_{x_1} = 0$, а $X_2(t)$ - довільний детермінований процес, то

$$D_x = D_{x_0} = const, \quad m_x = x_2(t), \quad D_{\dot{x}} = D_{\dot{x}_0} = const, \quad m_{\dot{x}} = \dot{x}_2(t).$$

Зокрема, якщо

$$X_2(t) = A \cos \omega t, \quad (4.85)$$

то, змінивши змінну інтегрування на $\theta = \omega t$ й інтегруючи у межах періоду гармонічних коливань, отримаємо середнє число викидів за рівень II і за період $T = 2\pi / \omega$:

$$\bar{N} = \frac{\omega_e}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\Pi}{\sqrt{D_x}} - a \cos\theta\right)^2\right] \times \\ \times \left[\exp(-0,5b^2 \sin^2 \theta) - b \sin\theta \sqrt{2\pi} \Phi(-b \sin\theta)\right] d\theta, \quad (4.86)$$

$$\bullet \quad \text{де } a = \frac{A}{\sqrt{D_x}}, \quad b = \frac{A\omega}{\sqrt{D_{\dot{x}}}}.$$

Інтеграл (4.86) можна точно взяти за допомогою спеціальних функцій [11]. Але отриманий таким способом результат буде дуже громіздким, тому на практиці зазвичай користуються чисельним інтегруванням.

Для отримання наближеної оцінки в основний процес (4.85) знову введемо випадкову фазу φ , рівномірно розподілену в інтервалі від 0 до 2π , й усереднимо результати. Отримаємо

$$m_x = 0, \quad m_{\dot{x}} = 0, \quad D_x = D_{x_0} + \frac{A^2}{2}, \quad D_{\dot{x}} = D_{\dot{x}_0} + \frac{A^2\omega^2}{2}, \quad r = 0.$$

Тоді за формулою (4.84)

$$\bar{N} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2D_{\dot{x}_0} + A^2\omega^2}{2D_{x_0} + A^2}} \exp\left(-\frac{\Pi^2}{2D_{x_0} + A^2}\right). \quad (4.87)$$

Формула (4.87) також може бути узагальнена на той випадок, коли процес $X_2(t)$ є тригонометричним рядом (4.69) [11].

Задачі про визначення середнього числа максимумів та закону розподілу максимумів, що необхідні при розрахунку надійності систем, розв'язуються аналогічно наведеній вище задачі про викиди. При використанні формул (4.42)- (4.45) отримання точних розв'язків стає ще більш складним, проте можна отримати наближені оцінки, як це показано в [11].

Таблиця А.1 - Основні закони розподілу та їх характеристики

Функція розподілу	Щільність розподілу	Параметри і моменти розподілу
Нормальний (гаусівський) закон		
$\frac{1}{S\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(z-m)^2}{2S^2}} dz$ $(-\infty < x < \infty)$	$\frac{1}{S\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2S^2}}$	$m_x = m,$ $S_x = S$
Логарифмічно нормальний закон		
$F(x) = \Phi \left[\frac{\ln x - m_z}{S_z} \right]$	$z = \ln x, f(x) = 0, x \leq 0$ $f(x) = \frac{1}{xS_z\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - m_z)^2}{2S_z^2}}, 0 < x < \infty$	$m_z, S_z - \text{математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення випадкової величини } z$ $m_x = e^{m_z + S_z^2/2},$ $S_x^2 = e^{(2m_z + S_z^2)} (e^{S_z^2} - 1),$ $v_x = S_x / m_x = (e^{S_z^2} - 1)^{1/2}$
Закон Релея		
$1 - e^{-\frac{x^2}{2S^2}}$ $(0 < x < \infty)$	$\frac{x}{S^2} e^{-\frac{x^2}{2S^2}}$	$S - \text{параметр розподілу;}$ $m_x = S\sqrt{0.5\pi}, S_x = S\sqrt{2 - 0.5\pi}$
Експоненціальний закон		
$F(x) = 1 - e^{-b(x-a)}, x \geq a$ $F(x) = 0, x < a.$	$f(x) = b \exp[-b(x-a)], x \geq a$ $f(x) = 0, x < a;$	$m_x = a + 1/b,$ $S_x^2 = \frac{1}{b^2}, v_x = \frac{1}{1+ab}$

Продовж. табл. А1

Функція розподілу	Щільність розподілу	Параметри і моменти розподілу
Рівномірний розподіл в інтервалі (a, b)		
$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b \\ 1, & x > b \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & x > b \end{cases}$	$m_x = 0.5(a+b),$ $S^2 = \frac{(b-a)^2}{12}, v_x = \frac{b-a}{\sqrt{3}(b+a)}$
Гамма-розподіл		
$F(x) = \frac{\gamma(a+1, x/b)}{\Gamma(a+1)},$ $\Gamma(a+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^a dt = a! - \text{гамма-функція}$ $\gamma(a+1, x) = \int_0^x e^{-t} t^a dt - \text{неповна гамма-функція, табульована Пірсоном,}$ $F(x) = 1 - \sum_{n=0}^a e^{-x/b} (x/b)^n / n! - \text{якщо } a - \text{ціле число}$	$f(x) = 0, x \leq 0,$ $f(x) = \frac{1}{b\Gamma(a+1)} \left(\frac{x}{b}\right)^a e^{-x/b},$ $0 \leq x < \infty, b > 0, a > -1$	$m_x = b(a+1); S_x^2 = b^2(a+1);$ $v_x = \frac{1}{\sqrt{a+1}}.$ <p>Якщо відомі два перших моменти величини x, то</p> $a = (v_x^{-2} - 1), b = v_x^2 m_x$
«Хі-квадрат» - розподіл		
$F(x) = P(x^2 < x) = \frac{\gamma(\lambda, \alpha x)}{\Gamma(\lambda)}$	$f(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x},$ $0 < x < \infty;$	$m_x = \frac{\lambda}{\alpha}, S_x^2 = \frac{\lambda}{\alpha^2},$ $v_x = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$

Продовж. табл.А1

Функція розподілу	Щільність розподілу	Параметри і моменти розподілу
Розподіл Вейбула		
$F(x) = 1 - e^{-\frac{(x-x_0)^b}{a}}, \quad x \geq x_0,$ <p>при $x_0=0, b=2, a=2d^2$ – перетворюється на розподіл Релея</p>	$f(x) = \frac{b}{a}(x-x_0)^{b-1} e^{-\frac{(x-x_0)^b}{a}}, \quad x \geq x_0,$ $f(x) = 0, \quad x < x_0$	<p>При $x_0 = 0$:</p> $m_x = a^{1/b} \Gamma(1 + 1/b),$ $S_x^2 = a^{2/b} [\Gamma(1 + 2/b) - \Gamma^2(1 + 1/b)].$ <p>Якщо відомі два перших моменти величини x, то</p> $1 + \nu_x^2 = \Gamma(1 + 2/b) / \Gamma^2(1 + 1/b);$ $a = [m_x / \Gamma(1 + 1/b)]^b$

Таблиця А.2 – Допустимі напруження для різних матеріалів

Матеріал	Допустимі напруження, МПа	
	На розтягування	На стиснення
Чавун сірий у відливках: СЧ 12-28 СЧ 15-32 СЧ 21-40 Сталь: Ст1 и Ст2 Ст3 Ст3 в мостах	20-50 25-40 35-55 140 160 140	70-110 90-150 160-200 140 160 140
Сталь вуглецева конструкційна в машинобудуванні	60-250	60-250
Сталь легована конструкційна в машинобудуванні	100-400 та вище	100-400 та вище
Дюралюміній	80-150	80-150
Латунь	70-940	70-140
Сосна вздовж волокон	7-10	10-12
Дуб уздовж волокон	9-13	13-15
Цегляна кладка	До 0,2	0,6-2,5
Бетон	0,1-0,7	1-9
Текстоліт	15-30	30-40

Таблиця А.3 – Значення $t(n, p_\delta)$

$n-1 \backslash p_\delta$	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
1	3,08	6,31	12,71	31,8	63,7	636,6
2	1,886	2,92	4,30	6,96	9,92	31,6
3	1,638	2,35	3,18	4,54	5,85	12,94
4	1,533	2,13	2,77	3,75	4,60	8,61
5	1,476	2,02	2,57	3,36	4,03	6,86
6	1,440	1,943	2,45	3,14	3,71	5,96
7	1,415	1,895	2,36	3,00	3,50	5,40
8	1,397	1,860	2,31	2,910	3,36	5,04
9	1,383	1,833	2,26	2,82	3,25	4,78
10	1,372	1,812	2,23	2,76	3,17	4,59
11	1,363	1,796	2,20	2,72	3,11	4,49
12	1,356	1,782	2,18	2,68	3,06	4,32
13	1,350	1,771	2,16	2,65	3,01	4,22
14	1,345	1,761	2,14	2,62	2,98	4,14
15	1,341	1,753	2,13	2,60	2,95	4,07
16	1,337	1,746	2,12	2,58	2,92	4,02
17	1,333	1,740	2,11	2,57	2,90	3,96
18	1,330	1,734	2,10	2,55	2,88	3,92
19	1,328	1,729	2,09	2,54	2,86	3,88
20	1,325	1,725	2,09	2,53	2,84	3,85
21	1,323	1,721	2,08	2,52	2,83	3,82
22	1,321	1,717	2,07	2,51	2,82	3,79
23	1,319	1,714	2,07	2,50	2,81	3,77
24	1,318	1,711	2,06	2,49	2,80	3,74
25	1,316	1,708	2,06	2,48	2,79	3,72
26	1,315	1,706	2,06	2,48	2,78	3,71
27	1,314	1,703	2,05	2,47	2,77	3,69
28	1,313	1,701	2,05	2,47	2,76	3,67
29	1,311	1,699	2,04	2,46	2,76	3,66
30	1,310	1,697	2,04	2,46	2,75	3,65
40	1,303	1,684	2,02	2,42	2,70	3,55
60	1,296	1,671	2,00	2,39	2,66	3,46
120	1,289	1,658	1,980	2,36	2,52	3,37
∞	1,282	1,645	1,960	2,33	2,58	3,29

Таблиця А.4 -Квантилі нормального розподілу

$$\Phi(u_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u_\alpha} e^{-t^2/2} dt = \alpha; \quad u_{1-\alpha} = -u_\alpha$$

α	u_α	α	u_α	α	u_α
0,50	0	0,72	0,583	0,93	1,476
0,51	0,025	0,73	0,613	0,94	1,555
0,52	0,050	0,74	0,643	0,95	1,645
0,53	0,075	0,75	0,674	0,96	1,751
0,54	0,100	0,76	0,706	0,97	1,881
0,55	0,126	0,77	0,739	0,975	1,960
0,56	0,151	0,78	0,772	0,980	2,054
0,57	0,176	0,79	0,806	0,990	2,326
0,58	0,202	0,80	0,842	0,991	2,366
0,59	0,228	0,81	0,878	0,992	2,409
0,60	0,253	0,82	0,915	0,993	2,457
0,61	0,279	0,83	0,954	0,994	2,512
0,62	0,305	0,84	0,994	0,995	2,576
0,63	0,332	0,85	1,036	0,996	2,652
0,64	0,358	0,86	1,080	0,997	2,748
0,65	0,385	0,87	1,126	0,9975	2,807
0,66	0,412	0,88	1,175	0,9980	2,878
0,67	0,440	0,89	1,227	0,9990	3,090
0,68	0,468	0,90	1,282	0,9995	3,291
0,69	0,496	0,91	1,341	0,9999	3,719
0,70	0,524	0,92	1,405		
0,71	0,553	0,925	1,440		

Таблиця А.5 – Толерантні множники для нормального розподілу

n	α									
	$p_\delta = 0.75$					$p_\delta = 0.90$				
	0,75	0,90	0,95	0,99	0,999	0,75	0,90	0,95	0,99	0,999
3	1,464	2,5001	3,152	4,396	5,805	2,602	4,258	5,310	7,340	9,651
4	1,256	2,134	2,680	3,726	4,910	1,972	3,189	3,957	5,437	7,128
5	1,152	1,961	2,463	3,421	4,507	1,698	2,742	3,400	4,666	6,112
6	1,087	1,860	2,336	3,243	4,273	1,540	2,494	3,091	4,242	5,556
7	1,043	1,791	2,250	3,126	4,118	1,435	2,333	2,894	3,972	5,201
8	1,010	1,740	2,10	3,042	4,008	1,360	2,219	2,755	3,783	4,955
9	0,984	1,702	2,141	2,977	3,924	1,302	2,133	2,649	3,641	4,772
10	0,964	1,671	2,103	2,927	3,858	1,257	2,065	2,568	3,532	4,629
11	0,947	1,646	2,073	2,885	3,804	1,219	2,012	2,503	3,444	4,515
12	0,933	1,624	2,048	2,851	3,760	1,188	1,966	2,448	3,371	4,420
13	0,919	1,606	2,026	2,822	3,722	1,162	1,928	2,403	3,310	4,341
14	0,909	1,591	2,007	2,796	3,690	1,139	1,895	2,363	3,257	4,274
15	0,899	1,577	1,991	2,776	3,661	1,119	1,866	2,329	3,212	4,215
16	0,891	1,566	1,977	2,756	3,637	1,101	1,842	2,299	3,172	4,164
17	0,883	1,554	1,964	2,739	3,615	1,085	1,820	2,272	3,136	4,118
18	0,876	1,544	1,951	2,723	3,595	1,071	1,800	2,249	3,106	4,078
19	0,870	1,536	1,942	2,710	3,577	1,058	1,781	2,228	3,078	4,041
20	0,865	1,528	1,933	2,697	3,561	1,046	1,765	2,208	3,052	4,009
21	0,859	1,520	1,923	2,686	3,545	1,035	1,750	2,190	3,028	3,979
22	0,854	1,514	1,916	2,675	3,532	1,025	1,736	2,174	3,007	3,952
23	0,849	1,508	1,907	2,665	3,520	1,016	1,724	2,159	2,987	3,927
24	0,845	1,502	1,901	2,656	3,509	1,007	1,712	2,145	2,969	3,904
25	0,842	1,496	1,895	2,647	3,497	0,999	1,702	2,132	2,952	3,882
30	0,825	1,475	1,869	2,613	3,454	0,966	1,657	2,080	2,884	3,794
35	0,812	1,458	1,849	2,588	3,421	0,942	1,623	2,041	2,833	3,730
40	0,803	1,445	1,834	2,568	3,395	0,923	1,598	2,010	2,793	3,679
45	0,795	1,435	1,821	2,552	3,375	0,908	1,577	1,986	2,762	3,638

50	0,788	1,426	1,811	2,538	2,358	0,894	1,560	1,965	2,735	3,604
----	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Продовж. табл. А.5

<i>n</i>	α									
	$p_{\delta} = 0.95$					$p_{\delta} = 0.99$				
	0,75	0,90	0,95	0,99	0,999	0,75	0,90	0,95	0,99	0,999
3	3,804	6,158	7,655	10,552	13,857					
4	2,619	4,163	5,145	7,042	9,215					
5	2,149	3,407	4,202	5,741	7,501					
6	1,859	3,006	3,707	5,062	6,612	2,849	4,408	5,409	7,334	9,540
7	1,732	2,755	3,399	4,641	6,061	2,490	3,856	4,736	6,411	8,348
8	1,617	2,582	3,188	4,353	5,686	2,252	3,496	4,287	5,811	7,566
9	1,532	2,454	3,031	4,143	5,414	2,085	3,242	3,971	5,389	7,014
10	1,465	2,355	2,911	3,981	5,203	1,954	3,048	3,739	5,075	6,603
11	1,411	2,275	2,815	3,852	5,036	1,854	2,897	3,557	4,828	6,284
12	1,355	2,210	2,736	3,747	4,900	1,771	2,773	3,410	4,663	6,032
13	1,329	2,155	2,670	3,659	4,787	1,702	2,677	3,290	4,472	5,826
14	1,296	2,108	2,614	3,585	4,690	1,645	2,592	3,189	4,366	5,651
15	1,268	2,068	2,566	3,520	4,607	1,596	2,521	3,102	4,224	5,507
16	1,242	2,032	2,523	3,463	4,534	1,553	2,458	3,028	4,124	5,374
17	1,220	2,001	2,486	3,415	4,471	1,514	2,405	2,962	4,038	5,268
18	1,200	1,974	2,453	3,370	4,415	1,481	2,357	2,906	3,961	5,167
19	1,183	1,949	2,423	3,331	4,364	1,450	2,315	2,855	3,893	5,078
20	1,167	1,926	2,396	3,295	4,319	1,424	2,275	2,807	3,832	5,003
21	1,152	1,905	2,371	3,262	4,276	1,397	2,241	2,768	3,776	4,932
22	1,138	1,887	2,350	3,233	4,238	1,376	2,208	2,729	3,727	4,866
23	1,126	1,869	2,329	3,206	4,204	1,355	2,179	2,693	3,680	4,806
24	1,114	1,853	2,309	3,181	4,171	1,336	2,154	2,663	3,638	4,755
25	1,103	1,838	2,292	3,158	4,143	1,319	2,129	2,632	3,601	4,706
30	1,059	1,778	2,220	3,064	4,022	1,249	2,029	2,516	3,446	4,508
35	1,025	1,732	2,166	2,994	3,934	1,195	1,957	2,431	3,334	4,364
40	0,999	1,697	2,126	2,941	3,866	1,154	1,902	2,365	3,250	4,255
45	0,978	1,669	2,092	2,897	3,811	1,122	1,857	2,313	3,181	4,168

50	0,961	1,646	2,065	2,863	3,766	1,096	1,821	2,296	3,124	4,096
----	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Таблиця А.6 - Статистичні характеристики міцності конструкційних матеріалів

Матеріал	$\delta_{ном}$, мм	σ_{ϵ}		σ_T	
		$m \cdot 1,02 \times 10^{-7}$, H/m^2	ν , %	$m \cdot 1,02 \times 10^{-7}$, H/m^2	ν , %
Ст.2	2,0 ÷ 3,0	37,94	9,02	29,60	12,50
Ст. 3	2,0 ÷ 2,5	43,25	7,58	33,03	11,18
Ст.3 СПС	2,0 ÷ 3,0	45,29	7,44	31,79	11,08
Ст.4СП	2,0 ÷ 2,5 ≥ 4,0	45,36	6,46	28,36	9,23
X18H9	0,8 ÷ 4,0	63,18	9,23	34,23	13,59
2X18H9	0,8	86,67	6,71	78,39	8,71
X18H10T	0,8 ÷ 4,0	63,73	5,65	33,49	13,77
	4,0 ÷ 6,0	64,32	11,58	35,91	14,48
25XГСА	< 4,0	58,68	7,60	41,96	12,50
	≥ 4,0	62,39	7,30	45,13	10,60
30XГСА	< 4,0	63,79	6,90	45,90	13,20
	≥ 4,0	65,96	7,10	48,52	10,50

Таблиця А.7 - Статистичні характеристики товщин листів

Матеріал	$\delta_{ном}$, мм	m мм	ν , %	n
Ст.2	0,5	0,523	6,66	385
	0,8	0,834	4,08	491
	1,0	1,035	5,64	1748
	1,5	1,536	4,11	1762
	2,5	2,552	3,37	49
	3,5	3,553	2,67	239
2X18H9	0,8	0,83	4,43	178
X18H10T	0,8	0,83	4,46	1355
	1,0	1,03	3,09	2691
	1,5	1,54	3,38	1788
	2,0	2,05	2,88	2350
	2,5	2,56	2,34	531
	3,0	3,16	3,35	5601
	3,5	3,64	3,27	175
	4,0	4,23	2,84	1154
25XГСА	5,0	4,94	2,49	393
	6,0	5,80	2,64	162
	1,0	1,03	3,92	204
	1,5	1,52	4,02	607
	2,0	2,04	3,40	1273
	2,5	2,52	3,62	2607
	3,0	3,04	3,22	1584
	3,5	3,50	4,08	361
4,0	4,04	3,40	879	
5,0	5,03	2,47	594	
6,0	5,84	3,41	34	

30ХГСА	1,0	1,03	4,91	884
	2,0	2,03	3,53	3355
	3,0	3,08	2,91	1386
	4,0	4,06	2,67	1033

Список використаної літератури

1. Бабаков И. М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1965. – 559 с
2. Бакиров Ж. Б. Вероятностные методы расчета элементов конструкций. Караганда: КарГТУ, 2001. - 180 с.
3. Биргер И. А. и др. Расчет на прочность деталей машин. – М.: Машиностроение, 1966. – 616 с.
4. Болотин В. В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. – М.: Стройиздат, 1971. – 255 с.
5. Болотин В. В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций. – М.: Машиностроение, 1984. – 312 с.
6. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. – М.: Глав. ред. физ-мат. литературы, 1969. – 576 с.
7. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1988. – 480 с.
8. Вибрации в технике: справочник: в 6 т. – М.: Машиностроение, 1981. – Т.6. Защита от вибрации и ударов/ под ред. К.В. Фролова. -1981. – 456 с.
9. Волков Л. И., Шишкевич А. М. Надежность летательных аппаратов: учеб. пособие. – М.: Высш. школа, 1975. – 296 с.
10. Волков С. Д. Статистическая теория прочности. – М.: Машгиз, 1960. -176 с.
11. Гусев А. С., Светлицкий В. А. Расчет конструкций при случайных воздействиях. – М.: Машиностроение, 1984. – 240 с.
12. Егер Дж. К. Упругость, прочность и текучесть. – М.: Гос. науч.-тех. изд-во машиностр. лит-ры, 1961. – 172 с.
13. Екимов В. В. Вероятностные методы в строительной механике корабля. – Л.: Судостроение, 1967. – 328 с.
14. Ермаков С. М., Михайлов Г. А. Курс статистического моделирования. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
15. Капур К., Ламберсон Л. Надежность и проектирование систем. – М.: Мир, 1980. – 608 с.
16. Когаев В. П., Махутов Н. А., Гусенков А. П. Расчеты деталей машин и конструкций на прочность и долговечность. – М.: Машиностроение, 1985 – 224 с.
17. Коненков Ю. К., Давтян М. Д. Случайные механические процессы в оборудовании машин. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
18. Львовский Е. Н. Статистические методы построения эмпирических формул: учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. шк, 1988. – 239 с.

19. Писаренко Г. С. Соппротивление материалов. – К.: Вища школа, 1973. – 672 с.
20. Прогнозирование ресурса, прочности и надежности элементов машиностроительных конструкций: учеб. пособие / В.А. Жовдак. – К.: УМК ВО, 1989. – 96 с.
21. Кайзер В. Д. Теория надежности в строительном проектировании. – М.: изд-во АСВ, 1998. – 304 с.
22. Ржаницын А. Р. Теория расчета строительных конструкций на надежность. – М. : Стройиздат, 1978. – 239 с.
23. Розанов Ю. А. Случайные процессы (краткий курс). – М.: Наука, 1971. – 288 с.
24. Светлицкий В. А. Случайные колебания механических систем. – М.: Машиностроение, 1976. – 216 с.
25. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций . - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1968.- 464 с.
26. Серенсен С. В., Когаев В. П., Шнейдерович Р. М. Несущая способность и расчет деталей машин на прочность: руководство и справочное пособие. – М.: Машиностроение, 1975. – 488 с.
27. Серенсен С. В., Тетельбаум И. М., Пригоровский Н. И. Динамическая прочность в машиностроении. – М.: Гос. науч.-тех. изд-во машиностроит. лит-ры, 1945. – 328 с.
28. Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. – М. : Наука, 1969. – 512с.
29. Соболев И. М. Численные методы Монте-Карло.- М.: Наука, 1973. – 324 с.
30. Тихонов В. И. Выбросы случайных процессов. – М.: Наука, 1970. – 392 с.
31. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. – М.: Наука, 1967. – 444 с.
32. Харкевич А. А. Спектры и анализ. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1962. – 236 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Абсолютний максимум процесу 177

Амплітудно-частотна характеристика динамічної системи 47

Взаємна кореляційна функція

- випадкового процесу 22
- комплексної випадкової функції 27

Викид через заданий рівень 159

Випадкова природа навантаження 54

Випадкове просторове поле 16

Випадкове просторово-часове поле 16

Випадковий процес (функція) 16

- вузькосмуговий 51
- квазістаціонарний нормальний
- комплексний 25
- стаціонарний 34
- стаціонарний за Хінчином 34
- центрований 20
- широкосмуговий 51

Високонадійна система 159

Вироджена система 11,59

Відмова 60

- типу пуассонівського потоку 169

Границя

- текучості 116

Дисперсія

- випадкової величини 8
- випадкової функції 20
- вихідного процесу
- комплексної випадкової величини 25
- комплексної випадкової функції 26

Довірчі межі ймовірності неруйнування 91

Еквівалентна ширина спектра випадкового процесу 50

Еквівалентне напруження 53

Ергодичний стаціонарний

випадковий процес 36

Ефективна частота процесу 163

- абсолютного максимуму випадкового процесу 177

- випадкової величини 6,7

- випадкового процесу 17

- екстремумів випадкового процесу 174

- Пуассона 168

Інтеграл Фур'є 41

Ймовірність

- безвідмовної роботи 60, 76

- за критерієм міцності 74

Ймовірнісні характеристики

- інтеграла випадкової функції 30
- похідної випадкової функції 29
- розв'язків лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь 134
- функції випадкового аргументу 15
- частоти вільних загасаючих коливань 123
- частоти вільних коливань вібратора 125
- шарнірно обертої балки під дією випадкового навантаження 32, 150

Ймовірність неруйнування 60

Ймовірність руйнування 98

- при вигині 83

- при позацентровому розтягненні-стисненні 84

- при розтягненні-стисненні 77, 80

- при скруті 81

Квантиль безпеки 86

Коефіцієнт варіації 8

Коефіцієнт запасу міцності 93

- умовний 87

Коефіцієнт кореляції 23,171

Коливання

- вільні випадкові 123
- вимушені нестаціонарні випадкові 134
- вимушені стаціонарні випадкові 130
- з випадковими початковими даними 114
- системи з розподіленими параметрами 150

Закон розподілу 6, 17

Кореляційний момент 10

Кореляційна функція 21

- комплексної випадкової функції 26
- нормована 23
- стаціонарної випадкової функції 34

Математичне сподівання

- випадкової величини 8
- випадкового процесу 19
- вихідного процесу 42
- комплексної випадкової величини 25
- комплексного випадкового процесу 26

Медіана 8

Метод

- лінеаризації (малих збуджень) 70
- малого параметра 144
- розкладання за власними формами коливань 151
- статистичної лінеаризації 146
- спектральних зображень 43
- статистичного моделювання (Монте-карло) 148

Мода 8

Моделювання випадкового вектора 69

Надійність конструкції 59

Невипадкова функція

випадкового аргументу 11

Несуча здатність системи 64

Нулі процесу 158

Оцінка

- дисперсії 28
- кореляційної функції 28
- математичного сподівання 28
- функції надійності 168

Передаточна функція динамічної системи 47

Переріз випадкового процесу 16

Перетворення

- Лапласа 9
- Фур'є 41

Кореляційна матриця 10

Початковий момент k -го порядку 7

Простір якості 61, 155

Пуассонівський потік подій 169

Реалізація випадкового процесу 16

Ряд Фур'є 38

Середнє

- квадратичне відхилення 20
- значення за часом 37
- максимумів, мінімумів 176
- число позитивних викидів 161, 173
- число негативних викидів 161

Середня тривалість викиду випадкового процесу 165

Спектр детерміністичної функції 38, 39

Спектральна функція випадкового процесу 43

Статистичний запас міцності 98

Умова

- ергодичності випадкової функції 37
- вузькосмугового процесу 51

Фазово-частотна характеристика динамічної системи 47

Формули Вінера-Хінчина 44

Функція

- розподілу випадкового процесу 17
- надійності 155
- характеристична 8

Шум білий 36

Щільність ймовірності

- випадкового процесу 18
- нормального стаціонарного процесу 163, 171, 179
- функції випадкового аргументу 14

Якобіан перетворення 14

