$$\Lambda^2 = \overline{N}^2 - \overline{M}^2 = -(\frac{\partial^2}{\partial a^2} + 2\frac{\partial}{\partial a} + e^{-2a}(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}))$$

$$O^2 = -(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}); \qquad M_3 = i\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Система на знаходження власних функцій операторів:

$$\Lambda^2\psi(a,r,\varphi) = \mu\psi(a,r,\varphi); \quad O^2\psi(a,r,\varphi) = \eta^2\psi(a,r,\varphi); \quad M_3\psi(a,r,\varphi) = m\psi(a,r,\varphi)$$

Орисферична система координат дозволяє розділити змінні у даній системі рівнянь на знаходження власних функцій. Враховуючи явний вигляд інваріантних операторів та формулу розділення змінних, отримали систему з трьох диференціальних рівнянь. Для розв'язання диференціального рівняння на знаходження власних значень та власних функцій оператора M_3 використані вже відомі дані для 3-вимірного моменту кількості руху. А для розв'язування диференціальних рівнянь на знаходження власних значень і власних функцій операторів O^2 і Λ^2 ми скористалися відомими функціями із теорії вищих трансцендентних функцій. Якщо у відомих рівняннях провести заміну змінної, то це дозволить зв'язати їх з отриманими для нашої системи рівнянь:

$$\Phi_3(\varphi) = e^{-im\varphi},$$

$$\Phi_2(\eta r) = \sum_{\rho=0}^{\infty}\frac{(-1)^\rho(\frac{\eta r}{2})^{2\rho+m}}{\rho!\,\Gamma(m+1+\rho)} + \sum_{\rho=0}^{\infty}\frac{(-1)^\rho(\frac{\eta r}{2})^{2\rho-m}}{\rho!\,\Gamma(-m+1+\rho)} = J_m(\eta r) + J_{-m}(\eta r)$$

$$, \Phi_1(b\eta) = \frac{\pi}{2\sin(\mu a)}[J_{-\mu}(b\eta) - J_\mu(b\eta)], \qquad b = e^{-a} \quad ,$$

Керівник І. І. Качурик д.ф.-м.н., проф. ГНПУ ім. О. Довженка

ВЛАСНІ ФУНКЦІЇ 4 – ВИМІРНОГО КВАНТОВОГО МОМЕНТУ КІЛЬКОСТІ РУХУ (МЕТОДИКА ОБЧИСЛЕННЯ В СИСТЕМІ КООРДИНАТ ЛОБАЧЕВСЬКОГО)

Милка О.Ю., магістрант ГНПУ

Сучасна квантова механіка народилась в 1925 році, коли Гейзенберг розробив матричну механіку, а Шредінгер запропонував хвильову механіку та своє рівняння. Згодом Янош фон Нейман довів, що обидва підходи є еквівалентними.

Проблема квантової механіки полягає в тому, що природа досліджуваного нею об'єкта невідома. В тому сенсі, що координати об'єкта, або просторовий розподіл імовірності його присутності, можуть бути визначені лише за наявності у нього певних властивостей (заряду, наприклад) та навколишніх умов (наявності електричного потенціалу).

Фізичними основами квантової механіки є: принцип невизначеності, який стверджує, що існують фундаментальні перешкоди для точного одночасного вимірювання двох або більшої кількості параметрів системи з довільною похибкою.

Квантова механіка мала великий успіх в поясненні багатьох феноменів з навколишнього середовища. Поведінка мікроскопічних частинок, які формують усі форми матерії електронів, протонів, нейтронів тощо — часто може бути задовільно пояснена лише методами квантової механіки...

Сучасні технології вже досягли того масштабу, де квантові ефекти стають важливими. Прикладами є лазери, транзистори, електронні мікроскопи, магніторезонансна томографія. Вивчення напівпровідників призвело до винаходу діода та транзистора, які є незамінними в сучасній електроніці.

Дана робота присвячена квантовому моменту кількості руху (момент імпульсу) та на комутуючим операторам які утворюють групу Лоренца.

На першому етапі даної роботи , було знайдено явний вигляд операторів L_1, L_2, L_3, та N_1, N_2, N_3 у системі координат Лобачевського, які мають наступний вигляд:

$$L_1 = -i\left(shb\frac{\partial}{\partial a} - chbthb\frac{\partial}{\partial b} \right)$$

$$N_1 = -i\frac{\partial}{\partial c}$$

$$L_2 = -i\left(tha\frac{chc}{chb}\frac{\partial}{\partial c} - chbshc\frac{\partial}{\partial a} + shbshctha\frac{\partial}{\partial b} \right)$$

$$N_2 = -i\left(chc\frac{\partial}{\partial b} - shcthb\frac{\partial}{\partial c} \right)$$

$$L_3 = -i\left(shc\frac{\partial}{\partial b} - chcthb\frac{\partial}{\partial c} \right)$$

$$N_3 = -i\left(chbchc\frac{\partial}{\partial a} - shbchctha\frac{\partial}{\partial b} - \frac{shc}{chb}tha\frac{\partial}{\partial c} \right)$$

і відповідно їх комутаційні співідношення, які можна записати у загальному вигляді наступним чином:

$$[L_i , L_j] = i \sum_k \varepsilon_{ijk} L_k$$

$$[\mathbf{L_i}, \mathbf{N_j}] = \mathbf{i} \sum_k \varepsilon_{ijk} N_k$$

$$[\mathbf{N_i}, \mathbf{N_j}] = -\mathbf{i} \sum_k \varepsilon_{ijk} L_k$$

Важливо зазначити що, оператори L_i є аналогами проекцій у декартовій системі координат, а от оператори N_j, відіграють зовсім іншу роль, вони утворюють повороти для операторів L_i, що можна помітити із комутаційних співвідношень.

На другому етапі ми знайшли оператор Казиміра (аналог оператора енергії у Декартовій системі координат), який в подальшому дав нам змогу знайти власні функції момента кількості руху у системі координат Лобачевського. Вигляд даного оператора подано нижче:

$$\vec{\Lambda}^2 = \vec{N}^2 - \vec{M}^2 = \frac{\partial^2}{\partial a^2} + 2tha\frac{\partial}{\partial a} + \frac{1}{ch^2 a}\left[\frac{\partial^2}{\partial b^2} + thb\frac{\partial}{\partial b} + \frac{1}{ch^2 b}\frac{\partial^2}{\partial c^2}\right]$$

Знаходження даних операторів в даній системі є досить важкою задачею, оскільки доводиться виконувати важкі математичні дії та працювати з дуже великими виразами.

В ході великих обчислень нами були знайдено всі три власні функції за допомогою який ми вже можемо говорити про характеристику системи та описувати певні її властивості. Саме власні функції відіграють важливу роль у квантовій механіці, бо за допомогою даних функцій можна вирішувати дуже складні і надважливі задачі. Дані функції мають наступний вигляд:

$$\psi(a) = (cha)^{-1} P_\eta^\mu(tha)$$

$$\psi(b) = (chb)^{-1/2} P_\eta^\mu(thb)$$

$$\psi(c) = e^{i\tau c}$$

Власні функції квантового моменту кількості руху дають змогу вирішувати наступні проблеми, можна вирішувати задачі які стосуються атома водню, також має широке застосування у релятивістській теорії розсіяння, дуже важливу роль грає у теорії зіткнень, тобто теоретично дає змогу описати те, що не можливо, або дуже важко перевірити на практиці. Для розуміння більш глибокої суті значення власних функцій моменту імпульсу, як приклад можна привести експерименти які проводяться на ВАК, але це є лише маленька частина того що намагаються отримати вчені.

Керівник: Качурик І. І., д. ф.-м.н., професор ГНПУ ім. О. Довженка