

ДИНАМИЧЕСКИЙ БИЛЬЯРД В ОДНОРОДНОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Ячменёв В.А.

Динамическую систему, описываемую уравнениями движения материальной точки с ударным выходом на одностороннюю связь, называется динамическим бильярдом. Частным случаем является классический кинематический бильярд, когда на материальную точку не действуют никакие силы и её траектория определяется только ударными выходами на связь, а отрезок траектории между двумя ударами есть прямолинейное движение с постоянной скоростью.

Здесь рассматривается плоское движение точечной массы в однородном поле тяготения внутри вертикально стоящего круга. Считаем, что удар абсолютно упругий. Эта модель эквивалентна другой модели: материальной точке, подвешенной в однородном поле тяготения на идеальной гибкой нерастяжимой нити с условием, что при выходе на связь происходит абсолютно упругий удар.

Тогда уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= -\vec{e}, \quad |\vec{r}| \leq 1, \\ \vec{V}_+ &= \vec{V}_- - 2(\vec{V}_- - \vec{U})\vec{U}, \\ \vec{r} &= \frac{\vec{R}}{l}; \quad \vec{V} = \frac{\vec{V}}{\sqrt{ql}}, \quad t = \sqrt{\frac{q}{j}}T, \end{aligned}$$

где \vec{R} и \vec{V} — соответственно радиус-вектор и скорость точечной массы, T — текущее (размерное) время, l — длина нити в натянутом состоянии, q — ускорение силы тяжести, \vec{e} — единичный вектор вертикального направления; \vec{V}_t , \vec{V}_- — безразмерные вектор-скорости до и после удара; $\vec{n} = -\vec{r}_*/|\vec{r}_*|$ — внутренняя нормаль к граничной окружности, взятая в точке удара.

Суть работы заключается в построении и исследовании периодических траекторий.