УДК 511.92

КВАДРАТЫ ЧИСЕЛ РЯДА ФИБОНАЧЧИ

С.И. Якушко
Сумский государственный университет
ул. Р.-Корсакова, 2, г.Сумы, 40007

Рассмотрены существующие формулы для вычисления чисел ряда Фибоначчи через сумму квадратов двух соседних чисел ряда Фибоначчи и через разность квадратов двух чисел Фибоначчи, номера которых отличаются на два. Предложена система из двух уравнений для вычисления чисел ряда Фибоначчи, начиная с третьего, при заданных первых двух числах.

ВВЕДЕНИЕ

Числовой ряд Фибоначчи - одна из наиболее удивительных числовых последовательностей, открытая в XIII веке итальянским математиком Фибоначчи.

Эти числа представляют собой бесконечный ряд, в котором каждое последующее число равно сумме двух предыдущих:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 377,\ 610,\ 987,\ \ldots \qquad (1)$$

Если обозначить i-ый член последовательности через F_i, тогда ее можно представить в виде:

$$F_i = F_{i\text{-}1} - F_{i\text{-}2} \qquad (2)$$

Такая формула называется рекурентной (от лат. *recurere* – возвращаться) [1].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Существует большое количество интересных свойств чисел ряда Фибоначчи, особенно это связано с суммой и разницей квадратов чисел Фибоначчи. Так, «сумма квадратов двух соседних чисел Фибоначчи всегда равна числу Фибоначчи». Эта зависимость описывается формулой [1]:

$$F_n^{\ 2} + (F_{n+1})^2 = F_{2n+1}\,, \qquad 3)$$

и «разность квадратов двух чисел Фибоначчи, номера которых отличаются на два, есть снова число Фибоначчи», описываемая формулой [2]:

$$F_{n+1}^{\ \ 2} - F_{n-1}^{\ \ 2} = F_{2n} \qquad (4)$$

Представим эти зависимости в виде системы формул для нахождения любого заданного числа ряда Фибоначчи.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Запишем ряд Фибоначчи в виде таблицы:

Таблица 1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
F_i	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	...

где i – номер числа ряда Фибоначчи;

F_i – число ряда Фибоначчи.

Представим, например, первые 17 чисел последовательности (1) в виде матрицы определенного вида. В этой матрице числа ряда Фибоначчи записаны по диагонали матрицы. В верхнем горизонтальном и левом вертикальном рядах матрицы записаны квадраты чисел ряда Фибоначчи, расположенные через один промежуток.

На пересечении этих чисел (в матрице выделено темным) мы получаем значения чисел ряда Фибоначчи, равное сумме квадратов этих чисел (см. рис. 1). Значит, полученная закономерность описывается формулой (3).

1		1^2		2^2		3^2		5^2		8^2		13^2		21^2		34^2
	1															
1^2		2														
			3													
1^2				5												
					8											
2^2						13										
							21									
3^2								34								
									55							
5^2										89						
											144					
8^2												233				
													377			
13^2														610		
															987	
21^2																1597

Рисунок 1 - Матричное представление нечетных чисел ряда Фибоначчи

Произведем анализ формулы (3) при различных значениях n = 1, 2, 3, 4, ... Для этого сведем исходные данные и результаты вычислений формулы (3) в таблицу 2:

Таблица 2

n	Сумма квадратов чисел, вычисленных по формуле (3)	Соответствующий номер числа Фибоначчи в таблице 1
1	$1^2 + 1^2 = 2$	3
2	$1^2 + 2^2 = 5$	5
3	$2^2 + 3^2 = 13$	7
4	$3^2 + 5^2 = 34$	9
5	$5^2 + 8^2 = 89$	11

и т.д.

Из таблицы 2 видно, что формула (3) описывает только нечетные числа ряда Фибоначчи.

Теперь представим первые 17 чисел последовательности (1) в виде матрицы другого вида. В отличие от предыдущей, в этой матрице квадраты чисел Фибоначчи в верхнем горизонтальном и левом вертикальном рядах матрицы сдвинуты на одно значение назад. На пересечении этих чисел (в матрице выделено темным) мы получаем значения чисел ряда Фибоначчи, равные разности квадратов этих чисел (см. рис. 2). Эта закономерность описывается формулой (4).

1			2^2		3^2		5^2		8^2		13		21^2		34^2	
	1															
		2														
$-(1)^2$			3													
				5												
$-(1)^2$					8											
						13										
$-(2)^2$							21									
								34								
$-(3)^2$									55							
										89						
$-(5)^2$											144					
												233				
$-(8)^2$													377			
														610		
$-(13)^2$															987	
																1597

Рисунок 2 - Матричное представление четных чисел ряда Фибоначчи

Произведем анализ формулы (4) при различных значениях n = 1, 2, 3, 4, ... Для этого сведем исходные данные и результаты вычислений по формуле (4) в таблицу 3:

Таблица 3

n	Сумма квадратов чисел, вычисленных по формуле (4)	Номер числа Фибоначчи в таблице 1
2	$1^2 - 0^2 = 1$	2
3	$2^2 - 1^2 = 3$	4
4	$3^2 - 1^2 = 8$	6
5	$5^2 - 2^2 = 21$	8
6	$8^2 - 3^2 = 55$	10
7	$13^2 - 5^2 = 144$	12

и т.д.

Из таблицы 3 следует, что формула (4) описывает только четный ряд чисел Фибоначчи.

Таким образом, обе указанные формулы (3) и (4) совместно описывают весь ряд чисел Фибоначчи. Их можно использовать для нахождения любого заданного числа ряда Фибоначчи:

- нечетные числа ряда Фибоначчи находятся по уравнению:

$$F_{i\ (неч)} = F_n^{\ 2} + (F_{n+1})^2 , \quad \text{где } i = 2n + 1 ; \tag{5}$$

- четные числа ряда Фибоначчи находятся по уравнению:

$$F_{i\ (чет)} = (F_{n+1})^2 - (F_{n-1})^2 , \quad \text{где } i = 2n , \tag{6}$$

где n – натуральный ряд чисел.

Произведем вычисление различных чисел ряда Фибоначчи с помощью полученной системы формул. Задаемся двумя первыми членами чисел Фибоначчи $F_1 = 1$ и $F_2 = 1$, поскольку «для однозначного построения последовательности формулы недостаточно, и необходимо указать дополнительные условия, например, задать несколько первых членов последовательности» [2].

При помощи формул (5) и (6) произведем вычисление некоторых членов ряда Фибоначчи, начиная с третьего.

Вычислим третий член ряда Фибоначчи - F_3, т.е. $i = 3$. Это нечетный член, поэтому в соответствии с формулой (5) $i = 2n + 1$. Тогда $3 = 2n + 1$, откуда $n = 1$.

$$F_3 = F_1^{\ 2} + (F_{1+1})^2 = 1^2 + 1^2 = 2 ,$$

что как видно из табл. 1, соответствует действительности.

Вычислим четвертый член ряда Фибоначчи - F_4, т.е. $i = 4$. Это четный член, поэтому в соответствии с формулой (6) $i = 2n$. Тогда $4 = 2n$, откуда $n = 2$.

$$F_4 = (F_{2+1})^2 - (F_{2-1})^2 = F_3^{\ 2} - F_1^{\ 2} = 2^2 - 1^2 = 3 ,$$

что как видно из табл. 1, соответствует действительности.

Вычислим пятый член ряда Фибоначчи - F_5, т.е. $i = 5$. Это нечетный член, поэтому в соответствии с формулой (5) $i = 2n + 1$. Тогда $5 = 2n + 1$, откуда $n = 2$.

$$F_5 = F_2^{\ 2} + (F_{2+1})^2 = F_2^{\ 2} + F_3^{\ 2} = 1^2 + 2^2 = 5 ,$$

что как видно из табл. 1, соответствует действительности.

ВЫВОДЫ

Предложено матричное выражение формул для вычисления нечетных чисел ряда Фибоначчи через сумму квадратов двух соседних чисел ряда Фибоначчи и четных чисел ряда Фибоначчи через разность квадратов двух чисел Фибоначчи, номера которых отличаются на два. Указанная зависимость представлена в виде системы формул для вычисления чисел ряда Фибоначчи, начиная с третьего числа, при заданных первых двух числах.

SUMMARY

SQUARE NUMBERS ROW FIBONACHCHI

Yakuchko S.I.

Sumy State University, R.-Korsakov street, 2, 40007

It Is Offered matrix expression molded for calculation uneven numbers row Fibonachchi through amount square two nearby numbers of the row Fibonachchi and even чисел of the row Fibonachchi through difference square two numbers Fibonachchi, which number differ on two.

The Specified dependency is presented in the manner of systems molded for calculation numbers row Fibonachchi, as from the third number, under given first two numbers.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стахов А., Слученкова А., Щербаков И. Код да Винчи и ряды Фибоначчи. – СПб.: Питер, 2006. – 320 с.
2. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. – М.:Наука, 1978 – 140 с.

Якушко С.И., доцент каф. “Процессы и оборудование хим. и нефтеперерабатывающих производств“

Поступила в редакцию 8 мая 2008 г.