

УДК 539.3

**ПРОЧНОСТЬ МНОГОСЛОЙНОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА С  
ДЕФЕКТАМИ СТРУКТУРЫ**

**С.М. Верещака**, *д-р техн. наук, доцент;*

**И.Т. Караш**, *аспирант,*

*Сумский государственный университет, г. Сумы*

*У роботі запропонована методика оцінки міцності тонкостінних конструкцій композиційних матеріалів, структура яких визначається набором різноорієнтованих односпрямованих армованих шарів. Був розглянутий багатошаровий порожнистий циліндр трансверсально-ізотропного матеріалу із заданою структурою армування. Було показано, що запропонована методика розрахунку несучої здатності багатошарових конструкцій дає досить задовільні результати, що добре узгоджуються з експериментальними даними.*

**Ключові слова:** *композиційний матеріал, пружні характеристики, напружений стан, багатошаровий циліндр, міцність.*

*В работе предложена методика оценки прочности тонкостенных конструкций из композиционных материалов, структура которых определяется набором разноориентированных однонаправленных армированных слоев. Рассмотрен многослойный полый цилиндр из трансверсально-изотропного материала с заданной структурой армирования. Показано, что предлагаемая методика расчета несущей способности многослойных конструкций дает удовлетворительные результаты, которые хорошо согласуются с экспериментальными данными.*

**Ключевые слова:** *композиционный материал, упругие характеристики, напряжённое состояние, многослойный цилиндр, прочность.*

**ВВЕДЕНИЕ**

Результаты исследований [1] указывают на то, что характерным повреждением слоистых композитов с продольно-поперечной и квазиизотропной укладкой слоев типа  $[0, 90]_S$ ,  $[0, 90, \pm 45]_S$  при растяжении является образование массива трещин в матрице слоев, ориентированных под углом к направлению действия нагрузки. Как правило, образование сетки трещин происходит задолго до разрушения конструкции в целом. При этом наблюдаются снижение жесткости композиционного материала, разрывы волокон, инициируемые трещинами в матрице, что, в свою очередь, снижает несущую способность и срок службы конструкций из слоистых материалов.

Известно, что прочность армированных слоистых материалов исследуется на основе двух подходов: структурного и феноменологического. Как отмечается в [2], современное состояние структурного подхода микромеханических теорий прочности таково, что не позволяет получить надежных количественных данных для оценки прочности композитов. Анализ тех или иных ограничений критериев прочности, а также описание процессов разрушения различных композиционных материалов содержится в фундаментальных работах [2, 3, 4].

Как уже отмечалось, концентрация межслойных нормальных и касательных напряжений вблизи трещин на границе смежных слоев инициирует расслоение в прилегающих областях. Прогнозирование момента начала расслоения осуществляется, как правило, путем определения всех компонент трехмерного напряженного состояния в рассматриваемой области слоистого композита и подстановкой полученных величин в соответствующие критерии прочности.

Таким образом, расслоение представляет собой наиболее опасный вид разрушения при прогнозировании несущей способности конструкций из композиционных материалов. Тем не менее, как это отмечено в ряде известных публикаций по этой проблеме [1], условия возникновения расслоения и связанный с этим процесс перераспределения напряжений исследованы недостаточно.

### 1. Напряженное состояние слоистых композитов с межслойными дефектами структуры материала

Высокая прочность в направлении армирования и низкая сопротивляемость поперечному сдвигу и поперечному отрыву являются характерными особенностями композиционных материалов слоистой структуры.

Однонаправленный слой является конструктивным элементом многослойных пластин и оболочек. Прочность композита как в процессе эксплуатации, так и в момент создания в значительной степени зависит от уровня нормальных напряжений в трансверсальном направлении и касательных напряжений межслоевого сдвига. Кроме того, прочность однонаправленного слоя в направлении армирования значительно выше его прочности в направлении, перпендикулярном направлению армирования.

Так, например, одноосное растяжение трехслойного материала с крайними слоями, армированными в направлении растяжения и со средним слоем, армированным в ортогональном направлении (рис. 1 а), рассмотрено в [2]. Каждый слой представляет собой однонаправленно армированный материал.

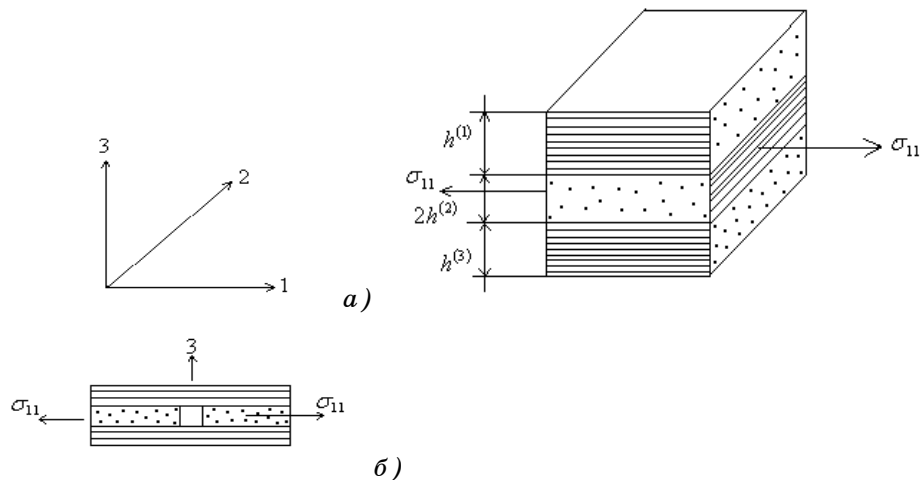


Рисунок 1 - Структура трехслойного композиционного материала

Считалось, что толщины внешних слоев одинаковы, т.е.  $h^{(1)} = h^{(3)}$ , и деформации  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$  для всех слоев одинаковы. В случае плоской

деформации, когда  $\varepsilon_{22} = 0$ , напряжения и деформации в слоях в направлении оси ОХ находим из условия равновесия

$$2(\sigma_{11}^{(1)} \bar{h}^{(1)} + \sigma_{11}^{(2)} \bar{h}^{(2)}) = \sigma_{11}$$

по следующим зависимостям:

$$\sigma_{11}^{(i)} = \frac{\sigma_{11} E_i^{(i)}}{2(E_1^{(1)} \bar{h}^{(1)} + E_2^{(2)} \bar{h}^{(2)})} \quad (i = 1, 2), \quad (1)$$

$$\varepsilon_{11}^{(i)} = \frac{\sigma_{11}}{2(E_1^{(1)} \bar{h}^{(1)} + E_2^{(2)} \bar{h}^{(2)})}, \quad \varepsilon_{22}^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (2)$$

Здесь  $E_1^{(1)}$ ,  $E_2^{(2)}$  – модули упругости однонаправленного материала соответственно в продольном и поперечном направлениях;

$\bar{h}^{(i)} = \frac{h^{(i)}}{2(h^{(1)} + h^{(2)})}$  ( $i = 1, 2$ ) – относительные толщины слоев.

Характерная особенность современных однонаправленных композиционных материалов – заметное различие жесткости таких материалов вдоль и поперек волокон армирования. Очевидным представляется вывод, что разрушение рассматриваемого материала (рис. 1 б) начинается со второго слоя. Как следует из формулы (1), разрушение этого слоя происходит при напряжениях  $\sigma_{11}$ , равных

$$\sigma_{11}^* = 2 \frac{\sigma_{22}^{(2)+}}{E_2^{(2)}} (E_1^{(1)} \bar{h}^{(1)} + E_2^{(2)} \bar{h}^{(2)}), \quad (3)$$

где  $\sigma_{22}^{(2)+}$  – предел прочности материала в поперечном направлении для среднего слоя при растяжении.

Решение рассматриваемой задачи [2] с учетом дополнительных напряжений, вызванных образованием трещин, определяется соотношениями:

$$\sigma_{11}^{(1)*} = \sigma_{11}^{(1)} + \sigma_{11}^{(2)} \frac{h^{(2)}}{h^{(1)}} e^{-k_1 x} \left( \frac{k_1}{k_2} \sin k_2 x + \cos k_2 x \right),$$

$$\sigma_{11}^{(2)*} = \sigma_{11}^{(2)} \left[ 1 - e^{-k_1 x} \left( \frac{k_1}{k_2} \sin k_2 x + \cos k_2 x \right) \right],$$

$$\sigma_{13}^{(1)*} = -\frac{h^{(2)}}{h^{(1)}} \left[ z - (h^{(1)} + h^{(2)}) \right] \frac{\sigma_{11}^{(2)}}{k_2} (k_1^2 + k_2^2) e^{-k_1 x} \sin k_2 x,$$

$$\sigma_{13}^{(2)*} = \frac{\sigma_{11}^{(2)}}{k_2} (k_1^2 + k_2^2) z \cdot e^{-k_1 x} \sin k_2 x,$$

$$\sigma_{33}^{(1)*} = \frac{h^{(2)}}{2h^{(1)}} \left[ z - (h^{(1)} + h^{(2)}) \right]^2 \frac{\sigma_{11}^{(2)}}{k_2} (k_1^2 + k_2^2) e^{-k_1 x} (k_1 \sin k_2 x - k_2 \cos k_2 x),$$

$$\sigma_{33}^{(2)*} = -\frac{\sigma_{11}^{(2)}}{2} \left[ z^2 - h^{(2)} (h^{(1)} + h^{(2)}) \right] \frac{k_1^2 + k_2^2}{2} e^{-k_1 x} (k_1 \sin k_2 x - k_2 \cos k_2 x). \quad (4)$$

Параметры  $k_1$  и  $k_2$  равны

$$k_{1,2} = \sqrt{0,5(b^2 \pm a^2)}, \quad (5)$$

где 
$$a^2 = \left[ \frac{h^{(2)3}}{3G_{23}^{(2)}} + \frac{h^{(2)2}h^{(1)}}{3G_{13}^{(1)}} - \frac{\nu_{13}}{E_2^{(2)}} \left( 2\frac{h^{(2)3}}{3} + h^{(1)}h^{(2)2} \right) + \frac{\nu_{12}}{3E_1^{(1)}} h^{(1)}h^{(2)2} \right] / A;$$

$$b^4 = 2h^{(2)2} \left( \frac{1}{E_2^{(2)}h^{(2)}} + \frac{1}{E_1^{(1)}h^{(1)}} \right) / A;$$

$$A = \frac{1}{2E_2} \left[ \frac{h^{(2)5}}{5} - \frac{2h^{(2)4}}{3} (h^{(1)} + h^{(2)}) + h^{(2)3} (h^{(1)} + h^{(2)})^2 + \frac{1}{5} h^{(1)3} h^{(2)2} \right].$$

При этом ось  $ox$  совпадёт с осью  $O1$ . Анализ выражений (4) – (5) показывает, что напряжения  $\sigma_{33}^{(2)*}$  и  $\sigma_{13}^{(2)*}$  быстро затухают при удалении от края трещины и когда  $x = 2\pi/k_2$  практически равны нулю. Аналогичный характер распределения имеют напряжения  $\sigma_{11}^{(2)*}$ , которые при  $x = 2\pi/k_2$  асимптотически приближаются к величине  $\sigma_{11}^{(2)}$ . При этом максимальные напряжения  $\sigma_{11}^{(2)*}$  возникают на расстоянии  $\pi/k_2$  от края трещины:

$$\max \sigma_{11}^{(2)*} = \sigma_{11}^{(2)} \left( 1 + e^{-\frac{\pi k_1}{k_2}} \right). \quad (6)$$

Следуя выводам [2], возможно дальнейшее растрескивание матрицы второго слоя, характер которого будет определяться соотношением пределов прочности слоя при растяжении поперек волокон, межслоевого сдвига и отрыва в направлении нормали. Для трехслойного материала, внешние слои которого имеют толщину  $h^{(1)} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ , а внутренний слой –  $2h^{(2)} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$  физико-механические характеристики трансверсально изотропного материала внешних слоев равны:

$$E_1^{(1)} = E_2^{(1)} = 1,5 \cdot 10^4 \text{ МПа},$$

$$G_{13}^{(1)} = G_{23}^{(1)} = 1,715 \cdot 10^3 \text{ МПа},$$

$$\nu_{13}^{(1)} = \nu_{23}^{(1)} = 0,242.$$

Материал клеевого среднего слоя считается изотропным:

$$E_1^{(2)} = E_2^{(2)} = E = 3,5 \cdot 10^3 \text{ МПа},$$

$$G = G_{13}^{(2)} = G_{23}^{(2)} = \frac{E}{2(1+\nu)} = 1,296 \cdot 10^3 \text{ МПа},$$

$$\nu_{13}^{(2)} = \nu_{22}^{(2)} = \nu = 0,35.$$

Считается, что предел прочности клеевого слоя приблизительно имеет величину:  $\sigma_{22}^{(2)+} = 25 \text{ МПа}$  – при растяжении,  $\sigma_{13}^{(2)-} = \sigma_{13}^{(2)+} = 16 \text{ МПа}$  – при поперечном сдвиге. Возможно несколько вариантов появления новых

трещин (рис. 2). Возникают трещины, которые параллельны начальной трещине, вызванные напряжениями  $\sigma_{11}^{(2)*}$ . Появляются дополнительные трещины на границе между слоями от действия поперечных касательных напряжений  $\sigma_{13}^{(2)*}$  и трещины на границе между слоями или внутри слоя от действия межслоевых нормальных напряжений  $\sigma_{33}^{(2)*}$ , а также трещины во втором слое, связанные с комбинацией действующих напряжений.

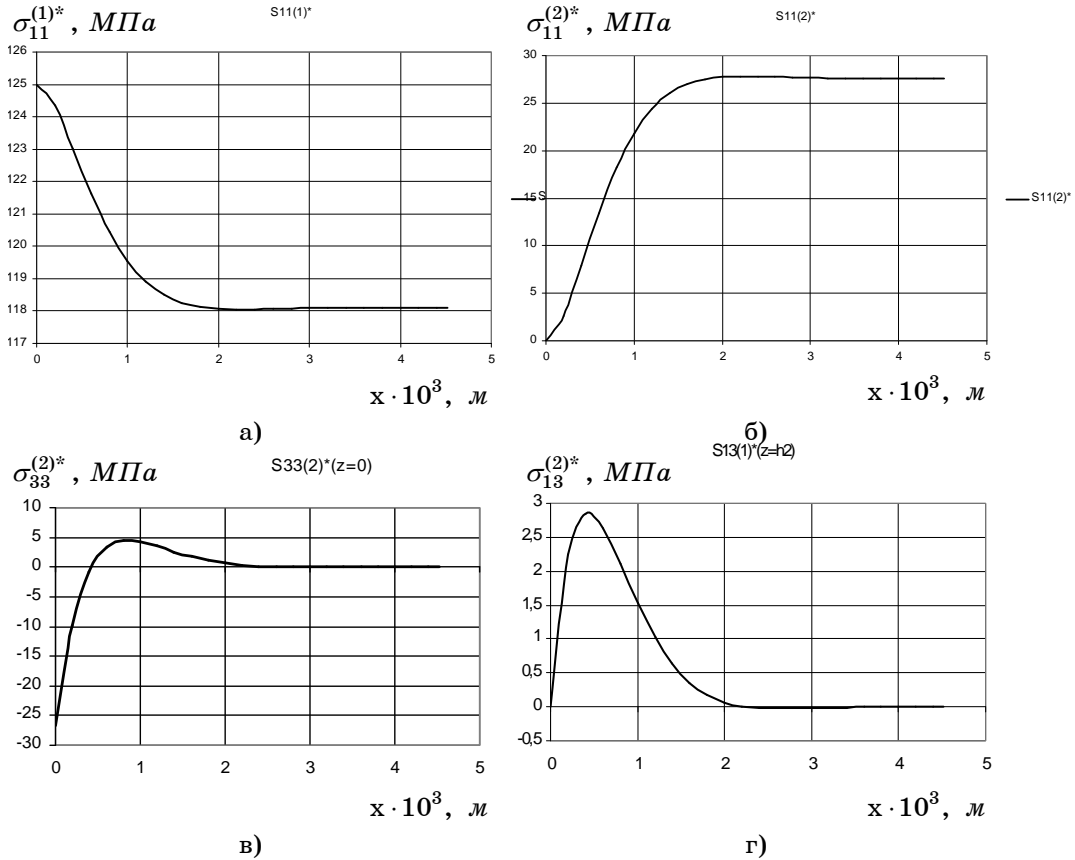


Рисунок 2 - Напряженное состояние в области трещины

Результаты многочисленных экспериментов позволяют утверждать, что при растяжении образцов, как правило, реализуется первый вариант образования трещин. При этом расстояние между трещинами согласно (1) равно  $x = \pi / k_2$ .

Напряженное состояние отдельного блока среднего слоя между соседними трещинами описывается при помощи следующих выражений:

$$\sigma_{11}^{(1)*} = \sigma_{11}^{(1)} + \frac{\sigma_{11}^{(2)} h^{(2)}}{h^{(1)} \operatorname{sh} \frac{\pi k_1}{2 k_2}} \left( \frac{k_1}{k_2} \operatorname{ch} k_1 x \cos k_2 x + \operatorname{sh} k_1 x \sin k_2 x \right),$$

$$\sigma_{11}^{(2)*} = \sigma_{11}^{(2)} \left[ 1 - \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi k_1}{2 k_2}} \left( \frac{k_1}{k_2} \operatorname{ch} k_1 x \cos k_2 x + \operatorname{sh} k_1 x \sin k_2 x \right) \right],$$

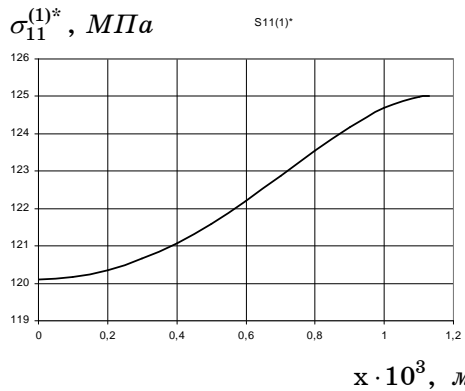
$$\sigma_{13}^{(1)*} = \frac{h^{(2)}}{h^{(1)}} [z - (h^{(1)} + h^{(2)})] \frac{\sigma_{11}^{(2)} (k_1^2 + k_2^2)}{k_2 sh \frac{\pi k_1}{2k_2}} sh k_1 x \cos k_2 x,$$

$$\sigma_{13}^{(2)*} = - \frac{\sigma_{11}^{(2)} (k_1^2 + k_2^2)}{k_2 sh \frac{\pi k_1}{2k_2}} z sh k_1 x \cos k_2 x,$$

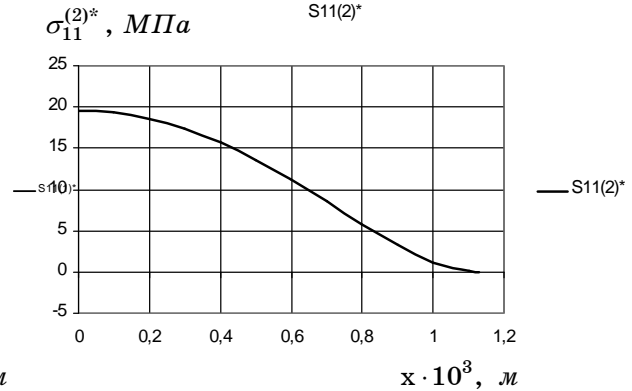
$$\sigma_{33}^{(1)*} = \frac{h^{(2)}}{2h^{(1)}} \sigma_{11}^{(2)} [z - (h^{(1)} + h^{(2)})]^2 \frac{(k_1^2 + k_2^2)}{k_2 sh \frac{\pi k_1}{2k_2}} (k_1 ch k_1 x \cos k_2 x - k_2 sh k_1 x \sin k_2 x),$$

$$\sigma_{33}^{(2)*} = - \frac{1}{2} \sigma_{11}^{(2)} [z^2 - h^{(2)} (h^{(1)} + h^{(2)})] \frac{(k_1^2 + k_2^2)}{k_2 sh \frac{\pi k_1}{2k_2}} (k_1 ch k_1 x \cos k_2 x - k_2 sh k_1 x \sin k_2 x). \quad (7)$$

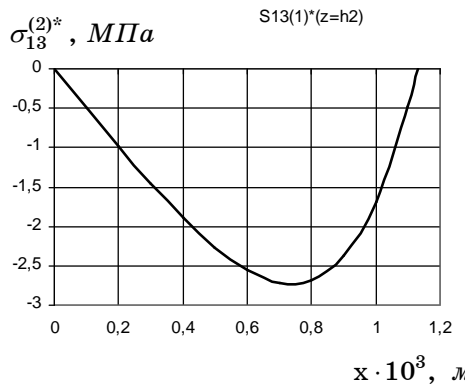
Анализ напряженного состояния блока трещин проводится на примере рассмотренного ранее трехслойного материала. Графики изменения напряжений  $\sigma_{11}^{(2)*}$ ,  $\sigma_{13}^{(2)*}$ ,  $\sigma_{33}^{(2)*}$  по длине блока представлены на рис. 3.



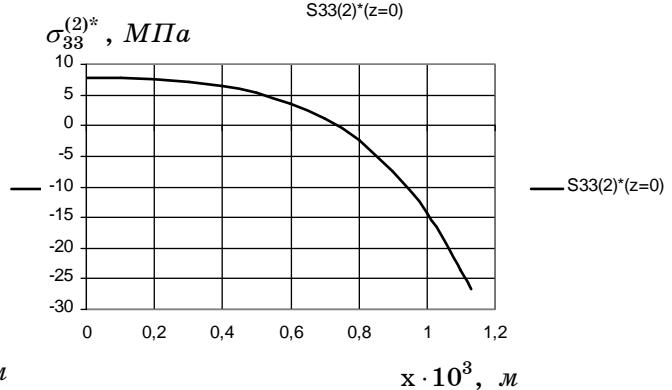
а)



б)



в)



з)

Рисунок 3 - Напряженное состояние отдельного блока среднего слоя длиной  $\pi / k_2$

Максимальное значение напряжения  $\sigma_{11}^{(2)*}$  имеет в центре блока при  $x=0$  (рис. 3б) и равно  $\sigma_{11}^{(2)*} = \sigma_{11}^{(2)} [1 - k_1 / (k_2 sh \frac{\pi k_1}{2k_2})] k_2 sh \frac{\pi k_1}{2k_2} = 19,6 \text{ МПа}$ .

При последующем нагружении вероятность трещинообразования по первому варианту по-прежнему остается высокой. Новые трещины будут делить слой на блоки, длина которых будет примерно равна  $0,5\pi / k_2$ .

На рис. 4 показаны графики напряжений  $\sigma_{11}^{(2)*}$ ,  $\sigma_{13}^{(2)*}$ ,  $\sigma_{33}^{(2)*}$  для блока длиной  $0,5\pi / k_2$ .

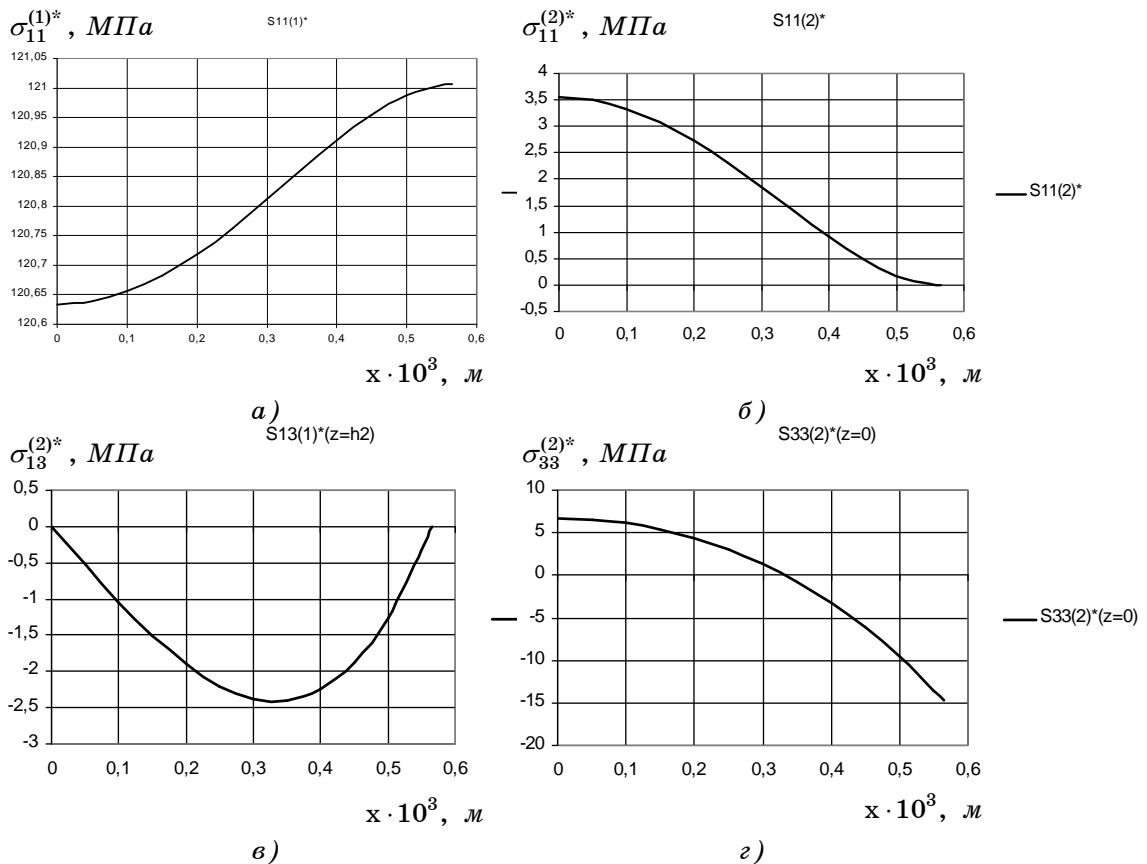


Рисунок 4 - Напряженное состояние отдельного блока среднего слоя длиной  $0,5\pi / k_2$

Сравнивая графики рис. 3 и рис. 4, следует отметить, что на первом этапе нагружения имеет место уменьшение среднего расстояния между трещинами практически при одном и том же значении  $\sigma_{11}^{(2)}$ . Среднее расстояние между трещинами составляет  $(2 - 2,5)h^{(2)}$ . Параллельно образованию новых трещин по первому варианту развивается процесс трещинообразования по второму, третьему и четвертому вариантам. В результате это приводит к образованию участков расслоения на границе внешнего и внутреннего слоев.

Акцентируя внимание на двух основных видах повреждения (трещины в матрице, располагающиеся по толщине слоя  $h^{(2)}$  параллельно

поперечным волокнам, и расслоения), необходимо помнить, что окончательной причиной разрушения слоистого композита является разрыв волокон.

Несмотря на многообразие подходов к исследованию физико-механических свойств композиционных материалов, оценка их точности и обоснованности осуществляется в результате сравнения теоретических данных с деформационными и прочностными характеристиками материала, полученными при испытаниях образцов в условиях одноосного нагружения. На диаграммах деформирования слоистого композита растрескивание и пластичность матрицы проявляются уменьшением наклона касательной, т.е. зависимость между напряжениями и деформациями становится нелинейной. Следуя терминологии, введенной в [2], слоистые композиты проявляют свойства структурной нелинейности, которые, в конечном счете, во многом и определяют несущую способность конструкции.

## 2. Модифицированный критерий прочности композита слоистой структуры с концентраторами напряжений на границе раздела слоев

Наиболее общая формулировка критерия прочности анизотропных тел имеет вид

$$\left(R_{ij}\sigma_{ij}\right)^{\alpha} + \left(R_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\right)^{\beta} + \left(R_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn}\right)^{\gamma} + \dots = 1 \quad (i, j, k, \dots = 1, 2, 3), \quad (8)$$

где  $R_{ij}$ ,  $R_{ijkl}$ ,  $R_{ijklmn}$  – матричные обозначения тензоров поверхности прочности второго, четвертого, шестого и последующих четных рангов.

В инженерной практике более удобным в плане практического применения оказался критерий прочности следующей тензорно-полиномиальной формы:

$$R_{ij}\sigma_{ij} + R_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} + R_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn} + \dots = 1 \quad (i, j, k, m, l, n = 1, 2, 3), \quad (9)$$

который легко получить из (8), принимая  $\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1$ . Большинство известных полиномиальных критериев прочности являются, как правило, частным случаем критерия (9).

Используя критерий прочности (9) в форме

$$R_{ij}\sigma_{ij} + R_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} + R_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn} = 1 \quad (i, j, k, m, l, n = 1, 2, 3), \quad (10)$$

можно рассмотреть условия разрушения слоистого композита в целом. Предположения о независимости пути нагружения, о линейно-упругом поведении материала и об отсутствии межслоевых взаимодействий позволили уменьшить число тензоров прочности в уравнении (10) для ортотропного композита при плоском напряженном состоянии до десяти. Критерий прочности слоистого композита (10) для практического применения оказался достаточно сложным, так как предполагает проведение сложных экспериментов для нахождения коэффициентов тензоров поверхности прочности.

В большинстве случаев разрушение слоистого композита начинается с разрушения одного слоя или связей между ними. Поэтому при построении предельных поверхностей считается, что разрушение локализовано в одном слое и критерий прочности следует составлять именно для этого слоя.



Аппроксимация предельной поверхности прочности ортотропного слоя полиномом второй степени рассмотрена в [5]. Уравнение (10) приводится к виду

$$R_{ij}\sigma_{ij} + R_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = 1 \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3), \quad (11)$$

где  $R_{ij}$ ,  $R_{ijkl}$  – тензоры поверхности прочности слоя второго и четвертого порядков.

В случае плоского напряженного состояния уравнение (11) изображает предельную поверхность (эллипсоид) в трехмерном пространстве напряжений

$$R_{11}\sigma_{11} + R_{22}\sigma_{22} + 2R_{12}\sigma_{12} + R_{1111}\sigma_{11}^2 + R_{2222}\sigma_{22}^2 + 4R_{1212}\sigma_{12}^2 + 2R_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22} + 4R_{1112}\sigma_{11}\sigma_{12} + 4R_{2212}\sigma_{22}\sigma_{12} = 1. \quad (12)$$

Коэффициенты уравнения (12) определяются с использованием экспериментально установленных предельных характеристик прочности  $\sigma_{ij}^+$ ,  $\sigma_{ij}^-$  ( $i, j = 1, 2$ ). Индекс „+” означает, что данная компонента – предельное напряжение при растяжении, индексом „-” обозначено предельное напряжение при сжатии. Для компонент тензоров поверхности прочности (12) в [5] предложены следующие соотношения:

$$R_{11} = \frac{\sigma_{11}^- - \sigma_{11}^+}{\sigma_{11}^- \sigma_{11}^+}, \quad R_{22} = \frac{\sigma_{22}^- - \sigma_{22}^+}{\sigma_{22}^- \sigma_{22}^+}, \quad R_{12} = \frac{\sigma_{12}^- - \sigma_{12}^+}{\sigma_{12}^- \sigma_{12}^+}, \quad R_{1111} = \frac{1}{\sigma_{11}^- \sigma_{11}^+},$$

$$R_{2222} = \frac{1}{\sigma_{22}^- \sigma_{22}^+}, \quad 4R_{1212} = \frac{1}{\sigma_{12}^- \sigma_{12}^+}, \quad 2R_{1122} = \frac{R_{11} - R_{22}}{\sigma_{12}^-} + R_{1111} + R_{2222} - \frac{1}{(\sigma_{12}^-)^2}. \quad (13)$$

В (12) – (13) тензоры прочности учитывают возможное различие характеристик прочности материала при растяжении и сжатии.

Следует отметить, что прочность материала не зависит от знака предельных значений касательных напряжений, т.е.  $\sigma_{12}^- = \sigma_{12}^+$ . Кроме того, для ортотропного материала в осях симметрии справедливо тождество  $R_{1112} = R_{2212} = 0$ . Имеющихся экспериментальных значений  $\sigma_{ij}^+$ ,  $\sigma_{ij}^-$  ( $i, j = 1, 2$ ) недостаточно для определения компонент тензоров прочности типа  $R_{1122}$ , поэтому возникает необходимость в проведении тщательно планируемых экспериментов для получения и обоснования эмпирических зависимостей  $R_{1122}$ .

Как правило, большая часть методов построения предельных поверхностей основана на представлении армированного материала как набора анизотропных слоев, что, в свою очередь, обуславливает изучение свойств отдельных слоев при нагружении. При помощи теории слоистых сред можно перейти от усредненных напряжений и деформаций композита к локальным напряжениям и деформациям в любом слое. Следует отметить, что, исключая единичные работы, во всех подходах не учитываются напряжения и деформации поперечного сдвига  $\sigma_{i3}^-$ ,  $\sigma_{i3}^+$  ( $i = 1, 2$ ) и трансверсального отрыва или сжатия  $\sigma_{33}^+$ ,  $\sigma_{33}^-$ .

Значительное различие предельных характеристик несущих слоев и свойств промежуточных межфазных слоев обуславливает выбор той или

иной модели дискретно-структурной теории пластин и оболочек. Становится очевидным, что расслоение следует рассматривать не как отдельный вид разрушения, а как фактор, определяющий вид дискретно-структурной модели многослойной конструкции.

Таким образом, для оценки степени влияния ослабленного межфазного контакта слоев критерий (12) следует записывать в модифицированном виде:

$$R_{11}\sigma_{11} + R_{22}\sigma_{22} + R_{33}\sigma_{33} + R_{1111}\sigma_{11}^2 + R_{2222}\sigma_{22}^2 + R_{3333}\sigma_{33}^2 + 4R_{1212}\sigma_{12}^2 + 4R_{1313}\sigma_{13}^2 + 4R_{2323}\sigma_{23}^2 + 2R_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22} + 2R_{1133}\sigma_{11}\sigma_{33} + 2R_{2233}\sigma_{22}\sigma_{33} = 1, \quad (14)$$

где к тензорам поверхности прочности (13) следует по аналогии добавить дополнительные компоненты:

$$R_{33} = \frac{\sigma_{33}^- - \sigma_{33}^+}{\sigma_{33}^- \sigma_{33}^+}, \quad R_{3333} = \frac{1}{\sigma_{33}^- \sigma_{33}^+}, \quad 4R_{1313} = \frac{1}{\sigma_{13}^- \sigma_{13}^+}, \quad 4R_{2323} = \frac{1}{\sigma_{23}^- \sigma_{23}^+},$$

$$2R_{1133} = \frac{R_{11} - R_{33}}{\sigma_{13}^-} + R_{1111} + R_{3333} - \frac{1}{(\sigma_{13}^-)^2},$$

$$2R_{2233} = \frac{R_{22} - R_{33}}{\sigma_{23}^-} + R_{2222} + R_{3333} - \frac{1}{(\sigma_{23}^-)^2}. \quad (15)$$

При этом считается, что межслойная прочность материала на сдвиг не зависит от знака поперечных касательных напряжений, т.е.  $\sigma_{13}^+ = \sigma_{13}^-$ ,  $\sigma_{23}^+ = \sigma_{23}^-$ .

Для использования модифицированного критерия (15) необходимо экспериментально определить предельные характеристики слоя на поперечный сдвиг и трансверсальное сжатие или отрыв.

### 3. Технические характеристики стеклопластика

В качестве примера расчета упругих характеристик перекрестно армированного материала рассматривается стеклопластик с продольно-поперечной схемой укладки 4 монослоев  $[(0^\circ / 90^\circ / 0^\circ / 90^\circ)]$ .

Матрица стеклопластика представляла собой полиэфирную ортофталевую смолу с пониженной эмиссией стирола Критик 2 – 446 РА (производство – Великобритания) и механическими характеристиками:  $E_m = 3400 \text{ МПа}$ ,  $G_m = 1215 \text{ МПа}$ ,  $\nu_m = 0,4$ . Армирующим элементом композиции является ткань сатиновой структуры стеклоткани TG 430 – С (100) (Латвия). Толщина ткани равна 0,4 мм. Плотность ткани по основе составляет 19 ниток/см, по утку – 11 ниток/см. Ткань получена путем переплетения алюмоборосиликатных ниток (Е стекло). Диаметр отдельно взятого волокна нити составляет  $6 \cdot 10^{-3}$  мм. Механические характеристики волокна:  $E_e = 74800 \text{ МПа}$ ,  $G_e = 31000 \text{ МПа}$ ,  $\nu_e = 0,2$ . Количество волокон в одной нитке достигает 800 шт. В [6] даны теоретические зависимости механических характеристик волокнистых материалов, которые на первом этапе нагружения хорошо согласуются с экспериментальными результатами. При дальнейшем нагружении образца начинается процесс расслоения в матрице, что в первую очередь

связано с различием физико-механических характеристик отдельных слоев материала на границе их раздела.

При этом считалось, что стеклопластик представляет собой трансверсально изотропный материал и состоит из 4 однонаправлено армированных 30 нитями/см слоев толщиной 0,4 мм. Количество нитей в слое определялось в результате расчетов и соответствовало экспериментальному значению модуля упругости  $E_{11}^9$ . Относительное объемное содержание арматуры слоя в направлении оси 3 принималось равным  $\psi_3^{(k)} = 0,01\psi_1^{(k)}$ .

Для определения технических постоянных стеклопластика предлагается следующая теоретико-экспериментальная методика. Вначале согласно ГОСТ 25.601 – 80 определяются модуль упругости и коэффициент Пуассона при растяжении образцов из стеклопластика. Проведенные механические испытания позволяют утверждать, что материал рассматриваемых пластинок можно классифицировать как трансверсально-изотропный.

На растяжение испытывались плоские образцы, которые вырезались из пластин в направлении главных осей ортотропии и имели следующие размеры:  $l = 200$  мм,  $b = 20,0 \pm 0,2$  мм,  $h = 2,0 \pm 0,2$  мм. Серия из пяти образцов испытывалась в сертифицированной лаборатории механических испытаний Национального технического университета Украины “КПИ”. При помощи универсальной испытательной машины TIRATEST – 2151 были получены механические характеристики образцов при растяжении (ГОСТ 25.601 – 80), сжатии (ГОСТ 25.602 – 80) и изгибе (ГОСТ 25.604 – 82).

По результатам измерений были получены усредненные значения напряжений и деформаций, а также доверительные интервалы на основе критерия Стьюдента с заданной вероятностью  $1 - \alpha = 0,95$ . При этом погрешность аппроксимации  $S$  экспериментальной прямой  $\varepsilon_1 = \sigma_{11} / E_1$  при растяжении стеклопластика и значения модулей упругости приведены в таблице 1. Остальные механические характеристики стеклопластика определялись интегрально для всего пакета слоев пластинок по методике [6].

Для определения предельных напряжений образцы исследуемой серии доводили до разрушения при испытании на растяжение (ГОСТ 25.601 – 80), сжатие (ГОСТ 25.602 – 80) и изгиб (ГОСТ 25.604 – 82). Считая, что определенные значения предельных напряжений представляют собой нормально распределенную генеральную совокупность параметров, в таблице 2 приведены доверительные интервалы среднего значения предельных напряжений  $\pm a_{\sigma_{cp}}$  при доверительной вероятности  $1 - \alpha = 0,95$ .

Таблица 1 - Экспериментально-теоретические значения упругих характеристик стеклопластиков

Номер серии	Результаты эксперимента		Экспериментально – теоретические значения			
	$E_{11}$ , МПа	$S$ , %	$E_{ii}$ , МПа	$G_{ij}$ , МПа	$\nu_{ij}$	$\nu_{ji}$
1	15000	0,97	$E_{11} = 15000$ $E_{22} = 15000$ $E_{33} = 7689$	$G_{12} = 2554$ $G_{13} = 2187$ $G_{23} = 2187$	$\nu_{12} = 0,12$ $\nu_{13} = 0,41$ $\nu_{23} = 0,41$	$\nu_{21} = 0,12$ $\nu_{31} = 0,21$ $\nu_{32} = 0,21$

Таблица 2 - Экспериментальные значения предельных напряжений стеклопластиков

Номер серии	$\sigma_{11}^+ = \sigma_{22}^+$ МПа	$\pm a_{\sigma_p}$ , МПа	$\sigma_{11}^- = \sigma_{22}^-$ МПа	$\pm a_{\sigma_p}$ , МПа	$\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0$ МПа	$\pm a_{\sigma_p}$ , МПа
1	200	7	180	8	160	4

Следует отметить, что разброс экспериментальных значений предельных разрушающих напряжений поперечного сдвига и обжатия достаточно большой, что в первую очередь связано с особенностью строения армированных пластиков, трудоемкостью и сложностью проведения эксперимента. Поэтому для проведения дальнейших исследований были приняты средние значения  $\sigma_{33}^- = 90 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{33}^+ = 16 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{13}^- = \sigma_{13}^+ = \sigma_{23}^- = \sigma_{23}^+ = 30 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{12}^- = \sigma_{12}^+ = 50 \text{ МПа}$  на основе экспериментальных данных, которые были приведены в работе [7] для стеклопластиков похожей структуры.

Сравнение результатов, представленных в таблице 1, с результатами работы [7] подтверждает корректность предлагаемой методики определения усредненных технических параметров многослойного композита. Исключение составили физико-механические характеристики трансверсального сдвига и обжатия –  $G_{13}$ ,  $G_{23}$ ,  $E_{33}$ ,  $\nu_{13}$ ,  $\nu_{23}$ . Проведенные численные исследования показали, что при малом значении  $\psi_3^{(k)}$  ( $\psi_3^{(k)} \leq 0,025$ ), по сравнению с плотностью укладки волокон в двух других направлениях, изменение этого параметра сказывается только на величинах модулей сдвига и обжатия в плоскостях  $\alpha_1 z$  и  $\alpha_2 z$  совсем незначительно.

#### 4. Пример расчета

Исследовалось напряженное состояние цилиндрических образцов из стеклопластика длиной 0,1–0,2 м, диаметром 0,09 м и толщиной 0,002 м. Цилиндры были выполнены из 4 слоев стеклоткани TG 430 – С (100). В качестве связующего использовалась полиэфирная ортофталевая смола с пониженной эмиссией стирола Cistic 2 – 446 PA.

Физико-механические характеристики исследуемых образцов из стеклопластика приведены в табл. 1 и 2. Нагружение оболочек внутренним давлением производилось воздухом при помощи специальной установки [8]. Теоретические и экспериментальные результаты получены для жестко закрепленных по торцам цилиндрических образцов в работе [8]. Определялись величины нормальных напряжений  $\sigma_z$ ,  $\sigma_\theta$  в продольном и окружном направлении соответственно, а также напряжения поперечного сдвига –  $\sigma_{rz}$ , при действии внутреннего гидростатического давления интенсивностью  $q$ .

Для оценки несущей способности рассматриваемой стеклопластиковой оболочки можно использовать модифицированный критерий прочности (14) и следующие значения пределов прочности материала  $\sigma_z^+ = \sigma_\theta^+ = 200 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_z^- = \sigma_\theta^- = 180 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_z^- = 90 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_z^+ = 16 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{\theta z}^- = \sigma_{\theta z}^+ = 50 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{rz}^- = \sigma_{rz}^+ = \sigma_{\theta z}^- = \sigma_{\theta z}^+ = 30 \text{ МПа}$ .

Отдельно следует отметить, что в случае безмоментного плоского напряженного состояния величина окружных напряжений работы [8], полученные по уточненной дискретно структурной теории многослойных

оболочек, достаточно точно совпадают с величиной окружных напряжений, полученных по формуле  $\sigma_{\theta} = qr/h$ . Основное отличие результатов наблюдается в области жестко заземленных торцов оболочки. Как показано в [8], на расстоянии толщины оболочки от его торца имеют место значительные касательные напряжения  $\sigma_{r,z}$ , что в сочетании с нормальными напряжениями  $\sigma_z$  приводит к разрушению оболочки.

Теоретическое значение величины интенсивности разрушающего давления получено на основе предложенного модифицированного полиномиального критерия прочности (14). При этом теоретические значения соответствующих напряжений [8] коррелируются при помощи аналитических зависимостей (3)–(7). Интенсивность найденного теоретически разрушающего давления составила  $q^* = 2,6 \text{ МПа}$ . Разрушение происходит в зоне закрепления цилиндра, что несколько ниже экспериментально полученного разрушающего давления  $q_{\text{э}}^* = 2,65 \text{ МПа}$ .

## ВЫВОД

В работе предложена методика оценки прочности тонкостенных конструкций из композиционных материалов, структура которых определяется набором разно ориентированных однонаправленных армированных слоев. Рассмотрен многослойный полый цилиндр из трансверсально-изотропного материала с заданной структурой армирования. Показано, что предлагаемая методика расчета несущей способности многослойных конструкций дает удовлетворительные результаты, которые хорошо согласуются с экспериментальными данными.

## SUMMARY

### STRENGTH OF MULTI-HOLLOW CYLINDER WITH STRUCTURAL DEFECTS

*S.M. Vereschaka, I.N. Karash,  
Sumy State University, Sumy*

*The paper proposed a method for assessing the strength of thin-walled structures made of composite materials which structure is determined by a set of differently oriented unidirectional reinforced layers. The layered hollow cylinder of transversely isotropic material with a given structure reinforcement was considered. It has been shown that the proposed method of calculating the bearing capacity of multilayer structures is satisfactory that's just good agreement with experimental data.*

**Key words:** *composite material, the elastic characteristics, stress, multi-layered cylinder, strength.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tsai Sw., Hahn Ht. Analysis of composite fracture // In: Inelastic behaviour of composite materials. – Vol. 13 /Ed. Carl T. Herakovich. N.-Y.: ASME, 1975. – VII. – 211 p.: – P. 73 - 96 /С. Цай, Х. Хан. Анализ разрушения композитов: пер. Неупругие свойства композитных материалов / под ред. К. Гераковича. – М.: Мир, 1978. – 295 с. – С. 104 – 139.
2. Алфутов Н.А. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов / Н.А. Алфутов, П.А. Зиновьев, Б.Г. Попов. – М.: Машиностроение, 1984. – 264 с.
3. Захаров В.В. Влияние трения на процесс расслоения разнородных материалов / В.В. Захаров, Л.В. Никитин // Механика композитных материалов. – 1983. – № 1. – С. 20 – 25.
4. Кристенсен Р. Введение в механику композитов / Р. Кристенсен. – М.: Мир, 1982. – 334 с.

5. Малмейстер А.К. Сопротивление полимерных и композитных материалов / А.К. Малмейстер, В.П. Тамуж, Г.А. Тетерс. – Рига: Зинатне, 1980. – 572 с.
6. Верещака С.М. Экспериментальные исследования многослойных цилиндров на действие внутреннего гидростатического давления / С.М. Верещака, Д.А. Жигилий // Вісник Сумського державного університету. Серія Технічні науки. – 2008. – №1. – С. 54 – 61.
7. Композиционные материалы: справочник /под ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.
8. Верещака С. Дискретно – структурна модель циліндра з міжфазними дефектами / С. Верещака // Машинознавство. – 2006. - №7. – С. 33 – 37.

*Поступила в редакцію 9 февреля 2011 г.*