

© Член-корреспондент АН СССР Э.И. ГРИГОЛЮК,
Ю.Д. КОВАЛЕВ, Л.А. ФИЛЬШТИНСКИЙ

ИЗГИБ СЛОЯ, ОСЛАБЛЕННОГО СКВОЗНЫМИ ТУННЕЛЬНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

Изгиб толстой плиты со сквозным прямоугольным разрезом рассматривался методом конечных элементов в [1]. В данной статье предлагается новый подход к решению пространственных задач теории упругости для конечного многосвязного цилиндра или слоя, заключающийся в сведении соответствующих задач к бесконечной системе одномерных сингулярных интегральных уравнений.

1. Рассмотрим упругий слой $-h \leq \bar{x}_3 \leq h$, $-\infty < x_1, x_2 < \infty$, ослабленный туннельными вдоль оси \bar{x}_3 полостями — разрезами, поперечные сечения которых представляют собой гладкие разомкнутые дуги L_j , $j = 1, 2, \dots, k$. Пусть на границах полостей действует поверхностная нагрузка X_ν^\pm ($X_\nu^+ = -X_\nu^- = X_\nu$, $\nu = 1, 2, 3$), основания слоя свободны от сил, а на бесконечности имеет место однородное поле изгиба и сдвига $\bar{\sigma}_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$. Предполагаем, что кривизна дуг и функции X_ν удовлетворяют условию Гёльдера на L_j и, кроме того, X_ν разлагаются в ряды Фурье по координате \bar{x}_3 на $[-h, h]$.

Ниже рассмотрим кососимметричную (относительно срединной плоскости слоя) задачу. Будем исходить из однородных решений А.И. Лурье [2]. Интегральные представления входящих в них бигармонической и метагармонических функций должны обеспечивать существование скачков перемещений, непрерывность вектора напряжения при переходе через L_j , $j = 1, 2, \dots, k$, и затухание перемещений и напряжений на бесконечности.

Положим (обозначения функций соответствуют статье [2])

$$\begin{aligned} \psi(x_1, x_2) &= \operatorname{Re} \int_L \left(p(\zeta) \frac{\partial G}{\partial \zeta} + p_*(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \nabla^2 G \right) d\zeta + \int_L q(\zeta) \nabla^2 G ds + \\ &+ \int_L q^*(\zeta) G ds, \quad \operatorname{Im} q^* = 0, \\ (1) \quad c_k(x_1, x_2) &= \int_L q_k(\zeta) K_0(\rho_k r) ds + \int_L \left(p_k(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} K_0(\rho_k r) d\zeta + \right. \\ &+ \left. p_k^*(\zeta) \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} K_0(\rho_k r) d\bar{\zeta} \right), \\ b_m(x_1, x_2) &= \int_L q_m^*(\zeta) K_0(\delta_m r) ds + 2 \operatorname{Re} \int_L R_m(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} K_0(\delta_m r) d\zeta, \\ \operatorname{Im} q_m^* &= 0, \quad G = r^2 \ln r, \quad r = |\zeta - z|, \quad L = \cup L_j, \quad \zeta = \xi_1 + i\xi_2 \in L, \quad z = x_1 + ix_2; \end{aligned}$$

здесь $K_n(x)$ — функция Макдональда; плотности $p(\zeta), \dots, R_m(\zeta)$ подлежат определению.

Выразим неизвестные плотности через скачки вектора перемещения на L . Для этого разложим все четные компоненты вектора перемещения, тензора напряже-

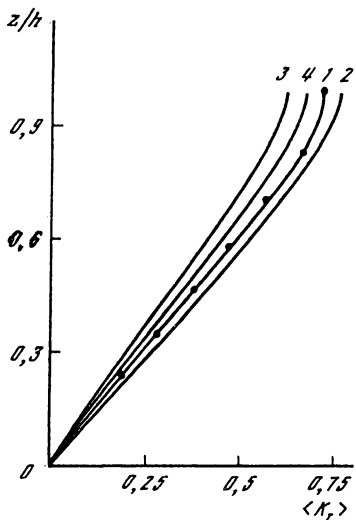


Рис. 1

ния и внешней нагрузки в ряды Фурье вида $U = \sum U^{(m)} \cos \delta_m x_3$, а все нечетные компоненты — в ряды вида $V = \sum V^{(m)} \sin \delta_m x_3$, $\delta_m = (2m + 1)\pi/2$, $x_3 = \bar{x}_3/h$.

Граничные условия имеют вид

$$(2) \quad \sigma_1^{(m)} - e^{2i\psi} \sigma_2^{(m)} = 2(X_1^{(m)} - iX_2^{(m)})e^{i\psi},$$

$$\operatorname{Re}(e^{i\psi} \sigma_3^{(m)}) = X_3^{(m)}, \quad m = 0, 1, \dots,$$

$$\sigma_1^{(m)} = \sigma_{11}^{(m)} + \sigma_{22}^{(m)},$$

$$\sigma_2^{(m)} = \sigma_{22}^{(m)} - \sigma_{11}^{(m)} + 2i\sigma_{12}^{(m)},$$

$$\sigma_3^{(m)} = \sigma_{13}^{(m)} - i\sigma_{23}^{(m)},$$

где ψ — угол между нормалью к контуру L и осью ox_1 .

Условия непрерывности вектора напряжения при переходе через разрез (в этом случае граничные равенства (2) достаточно будет выполнить на одном из берегов разреза) и требование существования разрывов вектора перемещения на L при-

водят к трем бесконечным системам линейных алгебраических уравнений, связывающих неизвестные плотности со скачками вектора перемещения. Можно показать, что эти системы однозначно разрешимы.

Подставляя выражения (1) в формулы для напряжений с учетом связей между плотностями и скачками перемещений на разрезах и раскладывая найденные выражения в ряды Фурье, приходим к интегральным представлениям коэффициентов Фурье $\sigma_{ij}^{(m)}$. Подставляя предельные значения этих величин в граничные условия (2), получаем бесконечную систему одномерных сингулярных интегральных уравнений, которую здесь не выписываем.

Структура этой системы такова, что все неизвестные "завязаны" в ее регулярной части, характеристическая же часть системы при каждом фиксированном $m = 0, 1, 2, \dots$ содержит ровно три неизвестных скачка "перемещения" $[u_1^{(m)}]$, $[u_2^{(m)}]$, $[u_3^{(m)}]$.

2. Для определения коэффициентов интенсивности напряжений K_I , K_{II} , K_{III} введем параметризацию контура L_j (ниже индекс j опускаем) $\xi = \xi(\beta)$, $\xi_0 = \xi(\beta_0)$, $-1 \leq \beta, \beta_0 \leq 1$. Соответственно этому положим

$$\frac{d[u_i^{(m)}]}{d\beta} = \frac{\Omega_i^{(m)}(\beta)}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad i = 1, 2, 3; \quad m = 0, 1, \dots$$

Используя эти зависимости, находим в результате асимптотического анализа интегральных представлений для напряжений

$$K_I^\mp - iK_{II}^\mp = -\frac{\mu\sigma}{\sigma + 1} \sqrt{\frac{\pi}{s'(\mp 1)}} \sum_{m=0}^{\infty} (\Omega_1^{(m)}(\mp 1) - i\Omega_2^{(m)}(\mp 1)) e^{i\psi(\mp 1)} \sin \delta_m x_3,$$

$$K_{III}^\mp = -\frac{\mu}{2} \sqrt{\frac{\pi}{s'(\mp 1)}} \sum_{m=0}^{\infty} \Omega_3^{(m)}(\mp 1) \cos \delta_m x_3, \quad s' = \frac{ds}{d\beta} > 0,$$

$$K_I = \sqrt{2\pi r} \sigma_n, \quad K_{II} = \sqrt{2\pi r} \sigma_{ns}, \quad K_{III} = \sqrt{2\pi r} \sigma_{n3};$$

здесь σ_n , σ_{ns} и σ_{n3} — нормальное и касательные напряжения на площадке за вершиной трещины, верхний знак соответствует вершине трещины $\beta = -1$.

3. В качестве примера рассмотрим слой, ослабленный туннельным параболическим разрезом $\xi_1 = p_1\beta$, $\xi_2 = p_2\beta^2$, $-1 \leq \beta \leq 1$, на поверхности которого действует нагрузка $X_1 = Nx_3 \cos \psi$, $X_2 = Nx_3 \sin \psi$, $X_3 = 0$, $N = \text{const}$. При численной реализации алгоритма система интегральных уравнений методом механических квадратур [3] сводится к линейной системе алгебраических уравнений, которая затем решается методом редукции. Приближение с номером N отвечает удерживанию первых $3N + 3$ вещественных уравнений и соответственно $3N + 3$ неизвестных $[u_1^{(m)}]$, $[u_2^{(m)}]$, $[u_3^{(m)}]$, $m = 0, 1, \dots, N$. Расчеты проводились при $N = 0, 1, 2, 3, 4$, причем третье приближение практически не уточняло результатов во всем интервале $|x_3| \leq 1$.

На рис. 1 приведены эпюры распределения относительного коэффициента интенсивности напряжений $\langle K_I \rangle = K_I(N\sqrt{\pi l})^{-1}$ по "толщинной" координате. Кривые 1, 2 построены для прямой трещины ($p_2 = 0$) при $h/l = 0,5$ и 1 соответственно; кривые 3, 4 – для параболической ($p_2 = 0,5$) при $h/l = 0,5$ и 1 соответственно. Точками нанесены результаты работы [1], полученные методом конечных элементов.

Отметим, что в силу быстрой сходимости построенной процедуры для получения верных результатов достаточно удерживать в системе интегральных уравнений 9–12 неизвестных, что фактически приводит к понижению размерности задачи на 2 единицы.

Сумский филиал
Харьковского политехнического
института

Поступило
12 IX 1990

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sundara Raja Iyengar K.I., Murthy M.V.V., Baru Rao M.N.* – Int. J. Solids and Struct., 1988, vol. 24, № 7, p. 683–703.
2. *Лурье А.И.* – ПММ, 1942, т. 6, вып. 2/3, с. 151–168.
3. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1986. 253 с.