

УДК 539.3

© 1998 г. Л.А. ФИЛЬШТИНСКИЙ

**АНТИПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ СОСТАВНОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО
ПРОСТРАНСТВА, ОСЛАБЛЕННОГО ТУННЕЛЬНЫМИ ТРЕЩИНАМИ**

Рассматривается кусочно-однородное пространство, составленное из двух непрерывно скрепленных между собой разнородных пьезоэлектрических полупространств и содержащее туннельные трещины. Предполагается, что на бесконечности имеют место однородные поля механического сдвига и электрической напряженности, а поверхности трещин свободны от нагрузки. Рассматриваются ситуации когда трещина находится в одной из фаз, подходит к границе раздела материалов, а также пересекает ее. Соответствующие граничные задачи электроупругости при помощи построенного ниже фундаментального решения сводятся к сингулярным интегральным уравнениям. Исследуются порядки степенных особенностей в напряжениях в особой точке линии раздела. Приводятся результаты расчетов коэффициента интенсивности напряжений в вершинах дефекта.

Задача о плоской деформации составной пьезокерамической среды, ослабленной трещинами в одной из фаз решена в [1].

1. Рассмотрим отнесенное к декартовым прямолинейным осям $x_1x_2x_3$ составное пространство, состоящее из двух непрерывно скрепленных вдоль плоскости $x_2 = 0$ различных пьезокерамических полупространств. Пусть в одном из полупространств (например, в верхнем) имеются туннельные вдоль оси x_3 трещины, поперечные сечения которых представляют собой простые разомкнутые дуги L_j ($j = 1, 2, \dots, M$). На бесконечности заданы равномерные поля вектора электрической напряженности $\langle E_1 \rangle$, $\langle E_2^{(1)} \rangle$, $\langle E_2^{(2)} \rangle$ и усилий сдвига $\langle \sigma_{13}^{(1)} \rangle$, $\langle \sigma_{13}^{(2)} \rangle$, $\langle \sigma_{23} \rangle$, а поверхности трещин свободны от сил. Будем считать, что трещины в недеформируемом состоянии представляют собой математические разрезы, кривизны контуров L_j удовлетворяют условию Гельдера и дуга $L_j = \phi$.

В этих условиях составное пространство находится в состоянии антиплоской деформации в плоскости x_1Ox_2 , описываемой соотношениями [2–4]:

материальные уравнения

$$\sigma_{i3} = c_{44}\partial_i u_3 - e_{15}E_i, \quad D_m = e_{15}\partial_m u_3 + \varepsilon_{11}E_m \quad (i, m = 1, 2) \quad (1.1)$$

уравнения равновесия

$$\partial_1 \sigma_{13} + \partial_2 \sigma_{23} = 0, \quad \partial_i = \partial / \partial x_i \quad (i = 1, 2) \quad (1.2)$$

уравнения электростатики

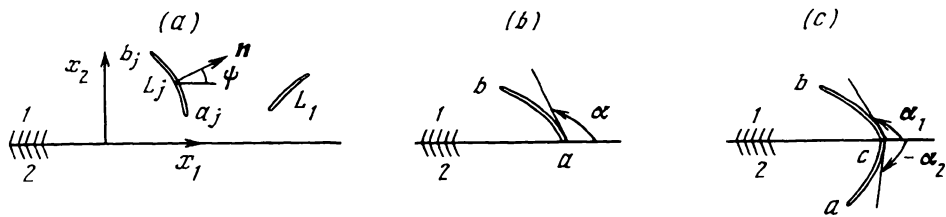
$$\partial_1 D_1 + \partial_2 D_2 = 0, \quad E_i = -\partial_i \phi \quad (i = 1, 2) \quad (1.3)$$

условия сопряжения полупространств на плоскости $x_2 = 0$:

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)}, \quad \sigma_{23}^{(1)} = \sigma_{23}^{(2)}, \quad E_1^{(1)} = E_1^{(2)}, \quad D_2^{(1)} = D_2^{(2)} \quad (1.4)$$

граничные условия на поверхностях трещин

$$\sigma_{n3}^{(1)} = 0, \quad E_s^+ = E_s^-, \quad D_n^+ = D_n^- \quad (1.5)$$



Фиг. 1

В (1.1)–(1.5) величины $u_3(x_1, x_2)$, $\sigma_{i3}(x_1, x_2)$, $E_m(x_1, x_2)$, $D_m(x_1, x_2)$ – упругие перемещения точек тела в направлении оси x_3 , компоненты тензора механических напряжений, векторов электрической напряженности и индукции соответственно; $c_{44} = c_{44}^E$, e_{15} и $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^s$ – модуль сдвига, измеряемый при постоянном электрическом поле, пьезомодуль и диэлектрическая проницаемость керамики, измеренная при постоянной деформации; $\varphi(x_1, x_2)$ – электростатический потенциал; σ_{n3} , D_n – нормальные компоненты тензора механического напряжения и вектора электрической индукции; E_s – касательная к L_j компонента вектора электрической напряженности; индексы 1 и 2 относятся к компонентам сопряженных электроупругих полей в верхнем и нижнем полупространствах соответственно; f^\pm – предельные значения функции f на левом и правом берегах L_j (фиг. 1, а).

Из соотношений (1.1)–(1.3) вытекает, что перемещение $u_3(x_1, x_2)$ и электрический потенциал $\varphi(x_1, x_2)$ – гармонические функции, поэтому имеют место следующие комплексные представления механических и электрических величин:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} - i\sigma_{23} &= \sum_{v=1}^2 d_{1v} F_v(z), & D_1 - iD_2 &= \sum_{v=1}^2 d_{2v} F_v(z), & z &= x_1 + ix_2 \\ E_1 - iE_2 &= -F_2(z), & u_3 &= \operatorname{Re} f_1(z), & \varphi &= \operatorname{Re} f_2(z), & F_v(z) &= df_v(z)/dz \\ P_1 &= \int_{AB} \sigma_{n3} ds = \operatorname{Im} \sum_{v=1}^2 d_{1v} f_v(z) \Big|_A^B, & P_2 &= \int_{AB} D_n ds = \operatorname{Im} \sum_{v=1}^2 d_{2v} f_v(z) \Big|_A^B \\ d_{11} &= c_{44}, & d_{12} &= d_{21} = e_{15}, & d_{22} &= -\varepsilon_{11} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь P_1 и P_2 – главный вектор сдвиговых усилий на дуге AB и поток вектора электрической индукции через AB соответственно.

Таким образом, все полевые величины выражаются через две аналитические функции комплексной переменной z .

2. Рассмотрим сначала однородное пьезокерамическое пространство и пусть вдоль шнура $x_1 = x_{10}$, $x_2 = x_{20}$, $-\infty < x_3 < \infty$ равномерно распределены сдвиговые усилия или электрические заряды интенсивностей p_1 и p_2 соответственно.

Аналитические функции, описывающие эту ситуацию, имеют вид

$$f_v(z) = A_v \ln(z - z_0), \quad z_0 = x_{10} + ix_{20} \quad (v = 1, 2) \quad (2.1)$$

Постоянные A_v определяются из условий однозначности перемещения u_3 и потенциала электрического поля φ , сохранения заряда и статического условия. С учетом соотношений (1.6) получаем

$$A_1 = \frac{p_1 \varepsilon_{11} + p_2 e_{15}}{2\pi(1 + \kappa^2) c_{44} \varepsilon_{11}}, \quad A_2 = \frac{p_1 e_{15} - p_2 c_{44}}{2\pi(1 + \kappa^2) c_{44} \varepsilon_{11}}, \quad \kappa^2 = \frac{e_{15}^2}{c_{44} \varepsilon_{11}} \quad (2.2)$$

Соотношения (2.1), (2.2) определяют фундаментальное решение для однородной пьезокерамической среды в условиях антиплоской деформации.

Пусть теперь сосредоточенные источники имеют место в составной пьезокерамической среде не содержащей трещин. Предположим для определенности, что $x_{20} > 0$. В этом случае комплексные потенциалы $F_v(z)$ будем разыскивать в виде

$$F_v^{(1)}(z) = \frac{A_v^{(1)}}{z - z_0} + \sum_{m=1}^2 \frac{\overline{\alpha_{v,m}^{(1)} A_m^{(1)}}}{z - z_0}, \quad \text{Im } z \geq 0 \quad (v = 1, 2) \quad (2.3)$$

$$F_v^{(2)}(z) = \sum_{m=1}^2 \frac{\alpha_{v+2,m}^{(1)} A_m^{(1)}}{z - z_0}, \quad \text{Im } z \leq 0, \quad \overline{z_0} = x_{10} - ix_{20}$$

Здесь член вне суммы определяет фундаментальное решение в однородной среде, остальные члены учитывают взаимное влияние разнородных полупространств. В соответствии с этим постоянные $A_v^{(1)}$ определяются формулами (2.2), в которых всем материальным константам необходимо приписать верхний индекс 1.

Константы $\alpha_{v,m}^{(1)}$ определяются из условий сопряжения (1.4), которые в комплексных переменных записываются так

$$\begin{aligned} \text{Re}[F_v(x)] = 0, \quad \text{Im} \sum_{v=1}^2 [d_{kv} F_v(x)] = 0, \quad x = x_1 \quad (k, v = 1, 2) \\ [f(x)] = f^{(1)}(x) - f^{(2)}(x) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Подставляя сюда функции (2.3) при $z = x$, находим

$$\begin{aligned} \alpha_{1,1}^{(1)} = \frac{1}{\Delta_1} [(1 - c_1)(1 + \varepsilon_1) + \kappa_1^2(1 - e_1^2)], \quad \alpha_{2,1}^{(1)} = \frac{e_{15}^{(1)}}{\varepsilon_{11}^{(1)}} \beta_{2,1}^{(1)} \\ \alpha_{1,2}^{(1)} = \frac{e_{15}^{(1)}}{c_{44}^{(1)}} \beta_{1,2}^{(1)} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\alpha_{2,2}^{(1)} = \frac{1}{\Delta_1} [(1 + c_1)(1 - \varepsilon_1) + \kappa_1^2(1 - e_1^2)], \quad \alpha_{3,1}^{(1)} = 1 + \alpha_{1,1}^{(1)}, \quad \alpha_{4,1}^{(1)} = \alpha_{2,1}^{(1)}$$

$$\alpha_{3,2}^{(1)} = \alpha_{1,2}^{(1)}, \quad \alpha_{4,2}^{(1)} = 1 + \alpha_{2,2}^{(1)}, \quad \Delta_1 \beta_{2,1}^{(1)} = 2(e_1 - c_1)$$

$$\Delta_1 \beta_{1,2}^{(1)} = 2(\varepsilon_1 - e_1), \quad \Delta_1 = (1 + c_1)(1 + \varepsilon_1) + \kappa_1^2(1 + e_1)^2$$

$$c_1 = c_{44}^{(2)} / c_{44}^{(1)}, \quad e_1 = e_{15}^{(2)} / e_{15}^{(1)}, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_{11}^{(2)} / \varepsilon_{11}^{(1)}, \quad \kappa_1^2 = \frac{(e_{15}^{(1)})^2}{\varepsilon_{11}^{(1)} c_{44}^{(1)}}$$

Формулами (2.3), (2.5) фундаментальное решение для составной среды определяется вполне. Мерой связанности механических и электрических полей здесь является коэффициент электромеханической связи κ_1^2 .

Если сосредоточенные источники имеются в точках $z_r = x_1^{(r)} + ix_2^{(r)}$ ($r = 1, 2$) верхней ($r = 1$) и нижней ($r = 2$) полуплоскостей, то фундаментальное решение очевидно определяется функциями

$$F_v^{(r)}(z) = \frac{A_v^{(r)}}{z - z_r} + \sum_{m=1}^2 \left\{ \frac{\alpha_{v,m}^{(r)} A_m^{(r)}}{z - z_r} + \frac{\alpha_{v+2,m}^{(3-r)} A_m^{(3-r)}}{z - z_{3-r}} \right\} \quad (v, r = 1, 2) \quad (2.6)$$

где постоянные $A_v^{(n)}$, $\alpha_{v,m}^{(n)}$ вычисляются по формулам (2.2), (2.5), в которых материальным константам следует приписать верхний индекс n , а параметрам $c, \varepsilon, e, \kappa$ – нижний индекс n . При этом

$$c_2 = \frac{c_{44}^{(1)}}{c_{44}^{(2)}}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_{11}^{(1)}}{\varepsilon_{11}^{(2)}}, \quad e_2 = \frac{e_{15}^{(1)}}{e_{15}^{(2)}}, \quad \kappa_2^2 = \frac{(e_{15}^{(2)})^2}{\varepsilon_{11}^{(2)} c_{44}^{(2)}} \quad (2.7)$$

3. Возвращаясь к исходной задаче построим интегральные представления ее решений. Для этого заменим постоянные $A_v^{(1)}$ некоторыми распределениями $-\omega_v(\zeta)/2\pi i$ на $L = \cup L_j$. Используя фундаментальное решение (2.3), получим

$$F_v^{(r)}(z) = B_v^{(r)} + \Phi_v^{(r)}(z) \quad (v, r = 1, 2) \quad (3.1)$$

$$\Phi_v^{(1)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_v(\zeta)}{\zeta - z} ds - \sum_{m=1}^2 \frac{\alpha_{v,m}^{(1)}}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_m(\zeta)}{\zeta - z} ds, \quad \text{Im } z \geq 0$$

$$\Phi_v^{(2)}(z) = \sum_{m=1}^2 \frac{\alpha_{v+2,m}^{(1)}}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_m(\zeta)}{\zeta - z} ds, \quad \text{Im } z \leq 0, \quad \text{Im } \omega_v(\zeta) = 0$$

где постоянные $B_v^{(r)}$ определяются однородными электроупругими полями на бесконечности, а также условиями сопряжения сред; $\omega_v(\zeta) = \{\omega_{vj}(\zeta), \zeta \in L_j\}$.

Используя соотношения (1.4), (1.6), находим

$$c_{44}^{(r)} B_1^{(r)} = \langle \sigma_{13}^{(r)} \rangle - i \langle \sigma_{23} \rangle - e_{15}^{(r)} B_2^{(r)}, \quad B_2^{(r)} = i \langle E_2^{(r)} \rangle - \langle E_1 \rangle \quad (r = 1, 2)$$

$$\langle \sigma_{13}^{(2)} \rangle = c_1 \langle \sigma_{13}^{(1)} \rangle + (c_1 - e_1) e_{15}^{(1)} \langle E_1 \rangle \quad (3.2)$$

$$(1 + \kappa_2^2) \langle E_2^{(2)} \rangle = \varepsilon_2 (1 + \kappa_1^2) \langle E_2^{(1)} \rangle + \frac{e_{15}^{(1)} (c_1 - e_1)}{c_{44}^{(2)} \varepsilon_{11}^{(2)}} \langle \sigma_{23} \rangle$$

Таким образом, однородные механические и электрические поля на бесконечности не совсем произвольны, между ними имеют место соотношения связи (3.2). Комплексные потенциалы (3.1) удовлетворяют условиям сопряжения на оси независимо от выбора плотностей $\omega_v(\zeta)$.

Из граничных условий (1.5) следует, что функция $\Phi_2^{(1)}(z)$ непрерывно продолжима через разрез, что влечет за собой равенство $\omega_2(\zeta) = 0$. Функции (3.1) при этом принимают вид

$$\Phi_1^{(1)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_1(\zeta)}{\zeta - z} ds - \frac{\alpha_{1,1}^{(1)}}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_1(\zeta)}{\zeta - z} ds, \quad \Phi_2^{(1)}(z) = -\frac{\alpha_{2,1}^{(1)}}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_1(\zeta)}{\zeta - z} ds, \quad \text{Im } z \geq 0$$

$$\Phi_v^{(2)}(z) = \frac{\alpha_{v+2,1}^{(1)}}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_1(\zeta)}{\zeta - z} ds, \quad \text{Im } z \leq 0 \quad (3.3)$$

Единственную плотность $\omega_1(\zeta)$ необходимо определить из оставшегося невыполненным первого граничного условия в (1.5). Подставляя туда предельные значения функций $\Phi_v^{(1)}(z)$ при $z \rightarrow \zeta_0 \in L$, приходим к сингулярному интегральному уравнению первого рода

$$\int_L \omega_1(\zeta) G(\zeta, \zeta_0) ds = N(\zeta_0), \quad \zeta_0 \in L = \cup L_j \quad (3.4)$$

$$G(\zeta, \zeta_0) = \frac{1}{2\pi} \text{Im} \left\{ e^{i\psi_0} \left(\frac{1}{\zeta - \zeta_0} - \frac{\delta}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0} \right) \right\}$$

$$c_{44}^{(1)} N(\zeta_0) = -\langle \sigma_{13}^{(1)} \rangle \cos \psi_0 - \langle \sigma_{23} \rangle \sin \psi_0$$

$$\Delta_1 \delta = (1 - c_1)(1 + \varepsilon_1) + \kappa_1^2 (1 + 2e_1 - 2c_1 - e_1^2)$$

Решение этого уравнения в классе функций, неограниченных на концах дуг L_j , фиксируется дополнительными условиями (однозначности перемещения)

$$\int_{L_j} \omega_{1j}(\zeta) ds = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, M) \quad (3.5)$$

В соответствии со сказанным произведем параметризацию контуров L_j (ниже индекс j опускаем) и положим

$$\omega_1(\zeta) = \frac{\Omega(\beta)}{\sqrt{1-\beta^2} s'(\beta)}, \quad s'(\beta) = \frac{ds}{d\beta} > 0$$

$$\zeta = \zeta(\beta), \quad -1 \leq \beta \leq 1, \quad \text{Im } \Omega(\beta) = 0 \quad (3.6)$$

Тогда интегральное представление (3.3) функции $\Phi_1^{(1)}(z)$ с учетом соотношений (1.6) и поведения интеграла типа Коши на концах линии интегрирования [5] дает следующие асимптотические формулы в вершинах трещины:

$$\sigma = (\sigma_{13} - i\sigma_{23}) ie^{i\psi_c} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi\rho}} \left(\sin \frac{\theta}{2} \pm i \cos \frac{\theta}{2} \right) + O(1)$$

$$K_{III} = \frac{\sqrt{\pi} c_{44}^{(1)} \Omega(\pm 1)}{2\sqrt{s'(\pm 1)}}, \quad \rho = |z - c|$$

$$(D_1 - iD_2) ie^{i\psi_c} = \frac{e_{15}^{(1)}}{c_{44}^{(1)}} \sigma, \quad E_1 = O(1), \quad E_2 = O(1) \quad (3.7)$$

Здесь ψ_c – угол между нормалью к L_j в вершине c и осью ox_1 ; θ – угол, отсчитываемый от касательной к вершине трещины на ее продолжении до вектора $z - c$, верхний знак соответствует вершине $c = b$, нижний – $c = a$ (фиг. 1, a).

Остановимся на наиболее интересном случае, когда трещина концом a выходит на границу раздела сред (фиг. 1, b). Будем предполагать, что в этой точке плотность в интегральном уравнении (3.4) имеет степенную особенность и может быть представлена в виде

$$\omega_1(\zeta) = \frac{\omega(\zeta)}{(\zeta - a)^\gamma}, \quad \zeta - a = \rho e^{i\alpha^*}, \quad \text{Im } \gamma = 0, \quad 0 \leq \gamma < 1 \quad (3.8)$$

где $\omega(\zeta)$ удовлетворяет условию Гельдера в окрестности точки a и угол α^* стремится к углу наклона α касательной к L в точке a при $\zeta \rightarrow a$.

Воспользовавшись асимптотическим представлением интеграла типа Коши вблизи конца линии интегрирования, выпишем интегральное уравнение (3.4) в окрестности вершины a :

$$\text{ctg}(\pi\gamma) \text{Re} \frac{\omega(a)}{(\zeta - a)^\gamma} + \frac{\delta}{\sin \pi\gamma} \text{Re} \frac{\overline{\omega(a)} e^{i[2\alpha - \pi(1+\gamma)]}}{(\zeta - a)^\gamma} + \dots = 2N(\zeta_0) \quad (3.9)$$

Здесь точками обозначены члены, обладающие быть может степенной особенностью, но более низкого порядка чем $(\zeta - a)^{-\gamma}$.

Умножив левую и правую части равенства (3.9) на $|\zeta - a|^\gamma$ и учитывая тот факт, что $\omega_1(\zeta)$ – действительная функция, получим в пределе при $\zeta \rightarrow a$ следующее уравнение относительно γ :

$$\cos \pi\gamma - \delta \cos[\pi\gamma + 2(1 - \gamma)\alpha] = 0 \quad (3.10)$$

Фигурирующая здесь величина δ определена в (3.4) и содержит в себе информацию о физико-механических параметрах системы.

В частном случае, когда трещина подходит к оси x_1 под прямым углом ($\alpha = \pi/2$), находим

$$\cos \pi\gamma = -\delta, \quad 0 \leq \gamma < 1 \quad (3.11)$$

4. Рассмотрим теперь ситуацию, когда в составной пьезоэлектрической среде имеется трещина пересекающая границу раздела сред. В этом случае при построении интегральных представлений решений исходим из фундаментального решения (2.6). Учитывая непрерывную продолжимость функции $F_2^{(r)}$ через L_r ($r = 1, 2$), приходим к следующим формулам:

$$F_v^{(r)}(z) = B_v^{(r)} + \Phi_v^{(r)}(z), \quad (v, r = 1, 2) \quad (4.1)$$

$$\Phi_1^{(r)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_r} \frac{\omega_1^{(r)}(\zeta)}{\zeta - z} ds - \frac{\alpha_{1,1}^{(r)}}{2\pi i} \int_{L_r} \frac{\omega_1^{(r)}(\zeta)}{\bar{\zeta} - z} ds + \frac{\alpha_{3,1}^{(3-r)}}{2\pi i} \int_{L_{3-r}} \frac{\omega_1^{(3-r)}(\zeta)}{\zeta - z} ds$$

$$\Phi_2^{(r)}(z) = -\frac{\alpha_{2,1}^{(r)}}{2\pi i} \int_{L_r} \frac{\omega_1^{(r)}(\zeta)}{\bar{\zeta} - z} ds + \frac{\alpha_{2,1}^{(3-r)}}{2\pi i} \int_{L_{3-r}} \frac{\omega_1^{(3-r)}(\zeta)}{\zeta - z} ds, \quad \text{Im } \omega_1^{(r)}(\zeta) = 0$$

Здесь $\text{Im } z \geq 0$ при $r = 1$ и $\text{Im } z \leq 0$ при $r = 2$; L_r – часть контура L , лежащая в r -й полуплоскости.

Электрические граничные условия (1.5) на трещине сводятся к равносильным равенствам

$$[F_2(z)]_L = 0, \quad \left[\frac{\partial u_3}{\partial n} \right]_L = 0, \quad L = L_1 \cup L_2 \quad (4.2)$$

где символ $[\cdot]_L$ обозначает скачок соответствующей функции при переходе через L .

Непосредственно видно, что эти условия удовлетворяются независимо от выбора плотностей $\omega_1^{(n)}(\zeta)$. Последние определяются из механического граничного условия (1.5). Подстановка в него предельных значений σ_{n3}^{\pm} с учетом (4.1), дает

$$\sum_{n=1}^2 \int_{L_n} \omega_1^{(n)}(\zeta) G_{mn}(\zeta, \zeta_0) ds = N_m(\zeta_0) \quad (m = 1, 2) \quad (4.3)$$

$$G_{nn}(\zeta, \zeta_0) = \text{Im} \left\{ e^{i\psi_0} \left(\frac{1}{\zeta - \zeta_0} - \frac{\delta_{nn}}{\bar{\zeta} - \zeta_0} \right) \right\}, \quad \zeta, \zeta_0 \in L_n \quad (n = 1, 2)$$

$$G_{12}(\zeta, \zeta_0) = \delta_2 \text{Im} \frac{e^{i\psi_0}}{\zeta - \zeta_0}, \quad \zeta \in L_2, \quad \zeta_0 \in L_1$$

$$G_{21}(\zeta, \zeta_0) = \delta_1 \text{Im} \frac{e^{i\psi_0}}{\zeta - \zeta_0}, \quad \zeta \in L_1, \quad \zeta_0 \in L_2$$

$$N_m(\zeta_0) = -\frac{2\pi}{c_{44}^{(m)}} \{ \langle \sigma_{13}^{(m)} \rangle \cos \psi_0 + \langle \sigma_{23} \rangle \sin \psi_0 \}, \quad \zeta_0 \in L_m \quad (m = 1, 2)$$

$$\Delta_n \delta_{nn} = (1 - c_n)(1 + 2\varepsilon_n) + \kappa_n^2(1 + 2e_n - 2c_n - e_n^2) \quad (n = 1, 2)$$

$$\delta_n = 1 + \alpha_{1,1}^{(n)} + 2 \frac{e_{15}^{(1)} e_{15}^{(2)} (e_n - c_n)}{C_{44}^{(3-n)} \varepsilon_{11}^{(n)} \Delta_n}, \quad \Delta_2 = c_2 \varepsilon_2 \Delta_1$$

Система сингулярных интегральных уравнений (4.3) помимо подвижной особенности типа Коши в ядрах имеет неподвижные особенности в точке пересечения контура трещины с осью x_1 .

Из соотношений (1.6) и (4.1) находим скачок перемещения u_3 на линии трещины

$$[u_3^{(1)}(\zeta_0)] = \int_{\zeta_0}^b \omega_1^{(1)}(\zeta) ds, \quad \zeta_0 \in L_1, \quad [u_3^{(2)}(\zeta_0)] = -\int_a^{\zeta_0} \omega_1^{(2)}(\zeta) ds, \quad \zeta_0 \in L_2$$

№	<i>M</i>	C_{44} [Н/м ²]	ϵ_{11}/ϵ_0	e_{15} [Кл/м ²]
1	PZT-4	$2,56 \cdot 10^{10}$	730	12,7
2	ЦТС-19	2,40	840	10,6
3	ПП-1	5,12	800	0
4	ПП-2	10,00	500	0

№	$\frac{\text{PZT-4}}{\text{ЦТС-19}}$	$\frac{\text{PZT-4}}{\text{ПП-1}}$	$\frac{\text{ПП-2}}{\text{PZT-4}}$	Бор Эпоксид ($c_1 = 1/129$)	Эпоксид Бор ($c_1 = 129$)
---	--------------------------------------	------------------------------------	------------------------------------	-------------------------------------	-----------------------------------

1					
2					
3	$\delta = 3,08 \cdot 10^{-2}$	-0,6878	0,4253	0,9846	-0,9846
4					

где b и a – вершины трещины, лежащие соответственно в верхней и нижней полуплоскостях.

Условие равенства скачков перемещений $u_3^{(1)}$ и $u_3^{(2)}$ в точке пересечения контура L осью x_1 приводит к равенству

$$\int_L \omega_1(\zeta) ds = 0, \quad \omega_1(\zeta) = \{\omega_1^{(r)}(\zeta), \zeta \in L_r, (r = 1, 2)\} \quad (4.4)$$

Таким образом, систему (4.3) необходимо рассматривать совместно с дополнительным условием (4.4).

Для определения порядка степенной особенности γ в точке пересечения контура трещины с осью x_1 (точка c на фиг. 1, c) введем представления

$$\omega_1^{(r)}(\zeta) = \frac{\omega^{(r)}(\zeta)}{(\zeta - c)^\gamma}, \quad \zeta \in L_r, \quad \text{Im } \gamma = 0 \quad (r = 1, 2) \quad (4.5)$$

$$\zeta_0 - c = \rho_r e^{i\alpha_r^*}, \quad \zeta_0 \in L_r, \quad \lim_{\zeta_0 \rightarrow c} \alpha_r^* = (-1)^{r-1} \alpha_r \quad (\zeta_0 \rightarrow c)$$

$$0 \leq \alpha_1 \leq \pi, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq \pi$$

где $(-1)^{r-1} \alpha_r$ ($r = 1, 2$) – угол, составленный касательной к контуру L_r в точке c и осью ox_1 , функции $\omega^{(r)}(\zeta)$ ограничены в окрестности точки c .

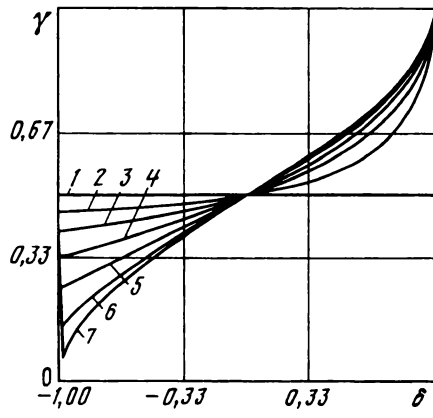
Используя асимптотические представления интегралов типа Коши в окрестности узла c [5], получаем при помощи той же процедуры, что и выше, однородную систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\Omega_1 \{\delta_{11} \cos[\pi\gamma + 2\alpha_1(1 - \gamma)] - \cos \pi\gamma\} - \Omega_2 \delta_{12} \cos[\pi\gamma + (\alpha_1 + \alpha_2)(1 - \gamma)] = 0 \quad (4.6)$$

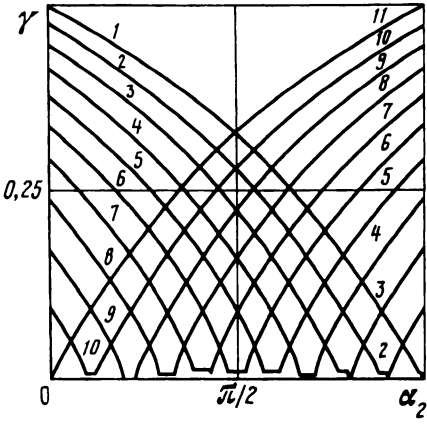
$$-\Omega_1 \delta_{21} \cos[\pi\gamma + (\alpha_1 + \alpha_2)(1 - \gamma)] + \Omega_2 \{\delta_{22} \cos[\pi\gamma + 2\alpha_2(1 - \gamma)] - \cos \pi\gamma\} = 0$$

$$\Omega_r = \omega^{(r)}(c) \exp\{(-1)^{r-1} i\gamma(2\pi - \alpha_r)\}, \quad \text{Im } \Omega_r = 0$$

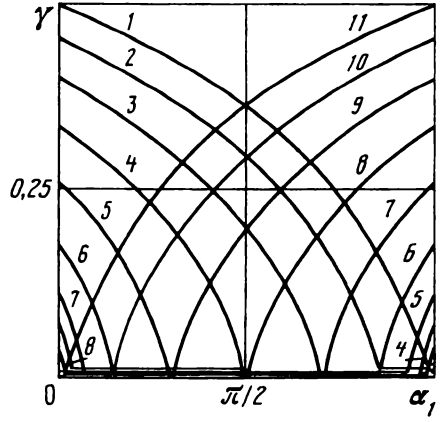
Поскольку, по предположению, плотности имеют в узле степенную особенность порядка γ , то следует считать, что $\omega^{(r)}(c) \neq 0$. Тогда условие нетривиальной разреши-



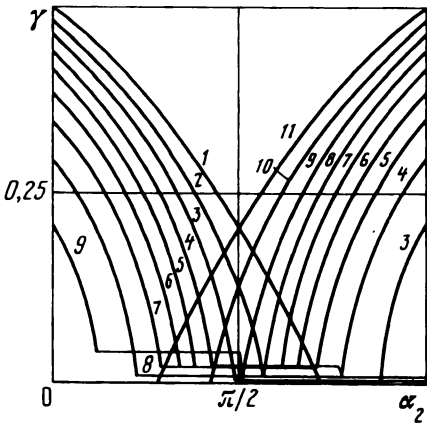
Фиг. 2



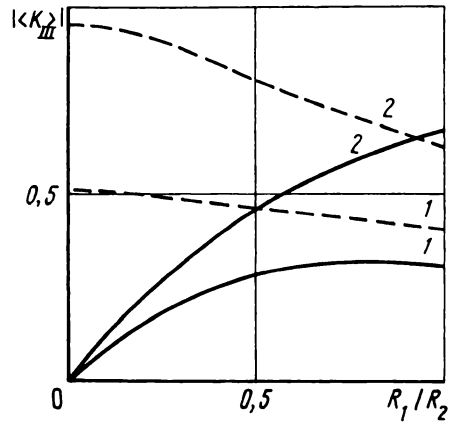
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

мости системы (4.6) приводит к уравнению относительно γ :

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} \cos[\pi\gamma + 2\alpha_1(1 - \gamma)] - \cos \pi\gamma & -\delta_{12} \cos[\pi\gamma + (\alpha_1 + \alpha_2)(1 - \gamma)] \\ -\delta_{21} \cos[\pi\gamma + (\alpha_1 + \alpha_2)(1 - \gamma)] & \delta_{22} \cos[\pi\gamma + 2\alpha_2(1 - \gamma)] - \cos \pi\gamma \end{vmatrix} = 0 \quad (4.7)$$

Отметим, что в узле c допускается излом трещины, поэтому возникает множество частных случаев, выписать которые не представляет труда. Отсюда также следуют результаты для составного пьезокерамического клина.

5. Пусть трещина подходит из верхней полуплоскости к линии раздела материалов (фиг. 1, ϵ). Согласно уравнению (3.10) величина γ зависит от параметра δ , содержащего в себе информацию о модулях сдвига, диэлектрических проницаемостях и пьезомодулях сопрягающихся материалов. Результаты расчета величины δ для различных композиций представлены в таблице (данные для пьезокерамики взяты из [2]). Как видно из таблицы, достаточно разыскивать корни уравнения (3.10) на интервале $-1 < \delta < 1$ (M – марка материала).

Графики изменения величины $\gamma = \gamma(\delta)$ для различных значений угла наклона трещины α показаны на фиг. 2. Здесь кривые 1, 2, ..., 7 построены для значений $\alpha = \pi n/12$ ($n = 0, 1, \dots, 6$) соответственно. При $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi/2$ имеем межфазную трещину. Так же как и в композиции из пьезоактивных материалов в этом случае имеет место корневая особенность в ее вершинах.

Пусть теперь трещина пересекает границу раздела материалов, причем в точке пересечения имеет место излом (фиг. 1, ζ). Порядок степенной особенности γ подчитывается по уравнению (4.7). На фиг. 3–5 приведены кривые, иллюстрирующие изменение параметра γ в зависимости от углов α_1 и α_2 для композиции PZT-4/ЦТС-19, PZT-4/ПП-1 и ПП-2/PZT-4 соответственно. Кривые 1, 2, ..., 11 построены для значений угла $\alpha_1 = \pi n/10$ ($n = 0, 1, \dots, 10$). Отметим, что в отличие от композиций из пьезоактивных материалов (ПП) здесь $\gamma \neq 0$ при $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$.

При расчете коэффициента интенсивности напряжений (КИН) в вершинах трещины рассматривался "хороший" случай, когда параболический разрез $x_1 = R_1\beta^2$, $x_2 = R_2\beta$, $-1 \leq \beta \leq 1$ под прямым углом пересекает ось x_1 . Искомое решение системы интегральных уравнений (4.3) представлялось в виде (3.6), причем $\Omega(\beta) = \Omega_1(\beta)$ при $0 < \beta < 1$ и $\Omega(\beta) = \Omega_2(\beta)$ при $-1 < \beta < 0$, где функции $\Omega_1(\beta)$, $\Omega_2(\beta)$ удовлетворяют условию Гельдера в соответствующих промежутках за исключением точки $\beta = 0$. Порядок степенной особенности γ в этой точке весьма мал, поэтому система (4.3) приближенно решалась обычным методом механических квадратур [6]. После вычисления функции $\Omega(\beta)$ КИН в вершинах трещины a , b определялся по формулам

$$K_{III}^a = \frac{\sqrt{\pi} c_{44}^{(2)} \Omega_2(-1)}{2\sqrt{s'(-1)}}, \quad K_{III}^b = -\frac{\sqrt{\pi} c_{44}^{(1)} \Omega_1(1)}{2\sqrt{s'(1)}}$$

На фиг. 6 представлены результаты расчета модулей относительных КИН $\langle K_{III}^a \rangle = K_{III}^a/(\sigma_2\sqrt{\pi l})$ и $\langle K_{III}^b \rangle = K_{III}^b/(\sigma_1\sqrt{\pi l})$, где $\sigma_{1,2}$ – параметры нагружения, $2l$ – длина трещины, для композиции ПП-2/PZT-4. Кривые 1 и 2 построены для вершин a и b ; сплошные линии соответствуют значениям $\langle \sigma_{13}^{(1)} \rangle = 0$, $\langle \sigma_{23} \rangle = 1$ ($\sigma_1 = \sigma_2 = \langle \sigma_{23} \rangle$), штриховые – $\langle \sigma_{13}^{(1)} \rangle = 1$, $\langle \sigma_{23} \rangle = 0$ ($\sigma_1 = \langle \sigma_{13}^{(1)} \rangle$, $\sigma_2 = c_1 \langle \sigma_{13}^{(1)} \rangle$), при этом $\langle E_1 \rangle = 0$, $\langle E_2^{(1)} \rangle = 0$. Отметим, что нечувствительность поля электрической напряженности к трещине является следствием граничных условий (1.5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фильштинский Л.А., Фильштинский М.Л.* Функция Грина для составной пьезокерамической плоскости с межфазной трещиной // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 2. С. 159–166.
2. *Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г.* Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика. Т. 1. Методы и приборы ультразвуковых исследований. Ч.А. М.: Мир, 1966. С. 204–326.
3. *Партон В.З., Кудрявцев Б.А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 474 с.
4. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга А.Н.* Электроупругость. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Киев: Наук. думка, 1989. 279 с.
5. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
6. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.

Сумы

Поступила в редакцию
15.IX.1996