

Л.А. Фильштинский, Т.С. Матвиенко (Сумы. гос. ун-т, Украина)

РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ СОСТАВНОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ СРЕДЫ С КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРЯЖЕНИЙ

Задачи электроупругости о растяжении составной пьезокерамической среды с туннельными неоднородностями рассматривались в [1, 2]. В данном докладе техника теории сингулярных интегральных уравнений применяется к решению аналогичных задач в условиях антиплоской деформации.

1. Туннельные отверстия в составном пьезокерамическом пространстве.

Рассмотрим отнесенное к декартовым прямолинейным осям $Ox_1x_2x_3$ составное пространство, состоящее из двух непрерывно скрепленных вдоль плоскости $x_2 = 0$ различных пьезокерамических полупространств. Пусть в одном из полупространств (например, в верхнем) имеются туннельные вдоль оси x_3 полости, поперечные сечения которых ограничены простыми замкнутыми контурами Γ_j ($j = 1, 2, \dots, M$). На бесконечности заданы равномерные поля вектора электрической напряженности $\langle E_1 \rangle$, $\langle E_2^{(1)} \rangle$, $\langle E_2^{(2)} \rangle$ и усилий сдвига $\langle \sigma_{13}^{(1)} \rangle$, $\langle \sigma_{13}^{(2)} \rangle$, $\langle \sigma_{23} \rangle$, а поверхности полостей свободны от сил. Будем считать, что полость отверстия заполнена средой, ассоциируемой с вакуумом, кривизны контуров L_j удовлетворяют условию Гельдера и $\cap L_j = \emptyset$.

В этих условиях составное пространство находится в состоянии антиплоской деформации в плоскости x_1Ox_2 , описываемой соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} - i\sigma_{23} &= \sum_{v=1}^2 d_{1v} F_v(z), & D_1 - iD_2 &= \sum_{v=1}^2 d_{2v} F_v(z), & F_v(z) &= df_v(z)/dz \\ E_1 - iE_2 &= -F_2(z), & u_3 &= \operatorname{Re} f_1(z), & \varphi &= \operatorname{Re} f_2(z) \\ d_{11} &= c_{44}, & d_{12} = d_{21} &= e_{15}, & d_{22} &= -\varepsilon_{11}, & z &= x_1 + ix_2 \end{aligned} \quad (1)$$

где физические константы c_{44} , e_{15} , ε_{11} определены в [3].

Можно показать, что интегральные представления аналитических функций $F_v(z)$ имеют вид

$$\begin{aligned} F_v^{(r)}(z) &= B_v^{(r)} + \Phi_v^{(r)}(z) \quad (v, r = 1, 2) \\ \Phi_v^{(1)}(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\Omega_v(\zeta)}{\zeta - z} ds + \sum_{m=1}^2 \frac{\alpha_{v,m}^{(1)}}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\Omega_m(\zeta)}{\zeta - z} ds, \quad \operatorname{Im} z \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\Phi_v^{(2)}(z) = \sum_{m=1}^2 \frac{\alpha_{v+2,m}^{(1)}}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\Omega_m(\zeta)}{\zeta - z} ds, \quad \text{Im } z \leq 0 \quad (v = 1, 2)$$

$$\Omega_v(\zeta) = \{\Omega_{vj}(\zeta), \zeta \in \Gamma_j\} \quad (j = 1, 2, \dots, M)$$

где константы $\alpha_{v,m}$ определяются из условия сопряжения материалов на оси x_1 , а постоянные $B_v^{(r)}$ определяются из условий на бесконечности; верхние индексы 1 и 2 относятся к функциям определенным в верхнем нижнем полупространствах соответственно.

Подстановка функций (2) в граничные условия на свободных от сил поверхностях отверстий приводит к системе интегральных уравнений второго рода.

$$Y_m(\zeta_0) - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^2 \int_{\Gamma} Y_n(\zeta) g_{m,n}^{(1)}(\zeta, \zeta_0) ds = N_m^{(1)}(\zeta_0), \quad \zeta_0 \in \Gamma \quad (m = 1, 2) \quad (3)$$

где

$$g_{n,n}^{(1)}(\zeta, \zeta_0) = \text{Re}(g + \alpha_{n,n}^{(1)} g_*), \quad g_{1,2}^{(1)}(\zeta, \zeta_0) = \beta_{1,2}^{(1)} \text{Re } g_*$$

$$g_{2,1}^{(1)}(\zeta, \zeta_0) = \kappa_1^2 \beta_{2,1}^{(1)} \text{Re } g_*, \quad g = e^{i\psi_0} (\zeta - \zeta_0)^{-1}, \quad g_* = e^{i\psi_0} (\bar{\zeta} - \zeta_0)^{-1}$$

$$N_1^{(1)}(\zeta_0) = 2 \left(\langle \sigma_{13}^{(1)} \rangle \cos \psi_0 + \langle \sigma_{23} \rangle \sin \psi_0 \right) - N_2^{(1)}(\zeta_0), \quad \Delta_1 \beta_{1,2}^{(1)} = 2(\epsilon_1 - e_1), \quad \psi_0 = \psi(\zeta_0)$$

$$N_2^{(1)}(\zeta_0) = -2e_{15}^{(1)} \left(\langle E_1 \rangle \cos \psi_0 + \langle E_2^{(1)} \rangle \sin \psi_0 \right), \quad \Delta_1 \beta_{2,1}^{(1)} = 2(e_1 - c_1)$$

После вычисления плотностей $Y_m(\zeta)$ механическое напряжение на контуре отверстия определяется по формуле

$$\sigma_{3s}(\zeta_0) = \langle \sigma_{23} \rangle \cos \psi_0 - \langle \sigma_{13}^{(1)} \rangle \sin \psi_0 - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \sum_{n=1}^2 X_n(\zeta) h_n(\zeta, \zeta_0) ds \quad (4)$$

$$\text{где } h_1(\zeta, \zeta_0) = \text{Im}(g + \alpha_{1,1}^{(1)} g_*), \quad h_2(\zeta, \zeta_0) = \beta_{2,1}^{(1)} \text{Im } g_*$$

2. Составное пьезокерамическое пространство с туннельными трещинами.

Рассмотрим вновь составное пьезокерамическое пространство и пусть в одном из полупространств (например, в верхнем) имеются туннельные вдоль оси x_3 трещины, поперечные сечения которых представляют собой простые разомкнутые дуги L_j ($j = 1, 2, \dots, M$). На бесконечности зададим равномерные поля вектора электрической напряженности $\langle E_1 \rangle$, $\langle E_2^{(1)} \rangle$, $\langle E_2^{(2)} \rangle$ и усилий сдвига $\langle \sigma_{23} \rangle$, $\langle \sigma_{13}^{(1)} \rangle$, $\langle \sigma_{13}^{(2)} \rangle$. Будем считать, что поверхности трещины свободны от сил, кривизны контуров L_j удовлетворяют условию Гельдера и $\cap L_j = \emptyset$.

Механические граничные условия имеют обычный вид, а электрические граничные условия берем в форме, предложенной в [3]

$$\begin{aligned} [D_n] &= 0, \quad [E_s] = 0 \\ D_n &= D_1 n_1 + D_2 n_2, \quad E_s = E_2 n_1 - E_1 n_2 \end{aligned} \quad (5)$$

Можно показать, что интегральные представления решений, поставленной граничной задачи корректны в том смысле, что условия сопряжения материалов и электрические граничные условия на берегах трещин (5) выполняются независимо от фигурирующей в них плотности и имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(1)}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_1(\zeta)}{\zeta - z} ds - \frac{\alpha_{1,1}^{(1)}}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_1(\zeta)}{\zeta - z} ds \\ \Phi_2^{(1)}(z) &= -\frac{\alpha_{2,1}^{(1)}}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_1(\zeta)}{\zeta - z} ds, \quad Im z \geq 0 \\ \Phi_v^{(2)}(z) &= \frac{\alpha_{v+2,1}^{(1)}}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_1(\zeta)}{\zeta - z} ds, \quad Im z \leq 0 \quad (v = 1, 2) \end{aligned} \quad (6)$$

С учетом этих представлений сводим граничную задачу к следующему сингулярному интегральному уравнению первого рода

$$\int_L \omega_1(\zeta) G(\zeta, \zeta_0) ds = N(\zeta_0), \quad \zeta_0 \in L = \cup L_j \quad (7)$$

где

$$G(\zeta, \zeta_0) = Im \left\{ e^{i\psi_0} \left(\frac{1}{\zeta - \zeta_0} - \frac{\delta}{\bar{\zeta} - \zeta_0} \right) \right\}, \quad \psi_0 = \psi(\zeta_0)$$

$$c_{44}^{(1)} N(\zeta_0) = -2\pi \left\{ \langle \sigma_{13}^{(1)} \rangle \cos \psi_0 + \langle \sigma_{23} \rangle \sin \psi_0 \right\}, \quad \Delta_1 \delta = (1 - c_1)(1 + \varepsilon_1) + \kappa_1^2 (1 + 2e_1 - 2c_1 - e_1^2)$$

3. Результаты расчетов.

В качестве примера рассмотрим составное пространство, ослабленное туннельной трещиной с поперечным сечением в виде дуги параболы: $x_1 = R_1 \beta^2$, $x_2 = h + R_2 \beta$, $-1 \leq \beta \leq 1$. Материал верхнего полупространства пьезокерамика ЦТС-19 [3], материал нижнего полупространства пьезопассивный, характеризуемый параметрами $c_{44} = 2,5 \cdot 10^{12} \text{ Н/м}^2$, $\varepsilon_{11}/\varepsilon_0 = 10000$, $e_{15} = 0$. Интегральные уравнения (3), (7) решались численно по схеме метода механических квадратур [4]. На рис. 1 представлены результаты расчетов относительного коэффициента интенсивности напряжений (σ_0 - параметр нагружения, $2l$ - длина трещины)

$$\langle K_{III} \rangle = K_{III} (\sigma_0 \sqrt{\pi l})^{-1} \quad (13)$$

в вершинах a и b при двух типах нагружения: $\langle \sigma_{13}^{(1)} \rangle = 1$, $\langle \sigma_{23} \rangle = 0$ (сплошные кривые) и $\langle \sigma_{23} \rangle = 1$, $\langle \sigma_{13}^{(1)} \rangle = 0$ (штрихпунктир). В расчетах принималось $h = 1,1$; $R_2 = 1$. Параметр R_1 - варьировался. Кривая 1 соответствует вершине a , кривая 2 - вершине b .

Рассмотрим композицию (нижнее полупространство пьезокерамика PZT-4 [3], верхнее полупространство пьезопассивный материал, характеризуемый параметрами $c_{44} = 10 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\epsilon_{11}/\epsilon_0 = 500$, $e_{15} = 0$), ослабленную эллиптическим отверстием $x_1 = R_1 \cos \varphi$, $x_2 = h + R_2 \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. На рис. 2 представлены результаты расчета относительного напряжения на контуре отверстия $K = \sigma_{3S}/\sigma$ (σ - параметр нагружения) при $R_1 = 1$, $R_2 = 0,5$, $h = 1$. На всех рисунках кривые 1, 2, 3, 4 относятся к вариантам: $\langle \sigma_{23} \rangle = \langle E_1 \rangle = \langle E_2^{(1)} \rangle = 0$ ($\sigma = \langle \sigma_{13}^{(1)} \rangle$); $\langle \sigma_{23} \rangle \neq 0$, $\langle \sigma_{13}^{(1)} \rangle = \langle E_1 \rangle = \langle E_2^{(1)} \rangle = 0$ ($\sigma = \langle \sigma_{23} \rangle$); $\langle E_1 \rangle \neq 0$, $\langle \sigma_{13}^{(1)} \rangle = \langle \sigma_{23} \rangle = \langle E_2^{(1)} \rangle = 0$ ($\sigma = e_{15}^{(r)} \langle E_1 \rangle$) и $\langle E_2^{(1)} \rangle \neq 0$, $\langle E_1 \rangle = \langle \sigma_{13}^{(1)} \rangle = \langle \sigma_{23} \rangle = 0$ ($\sigma = e_{15}^{(r)} \langle E_2^{(1)} \rangle$) соответственно.

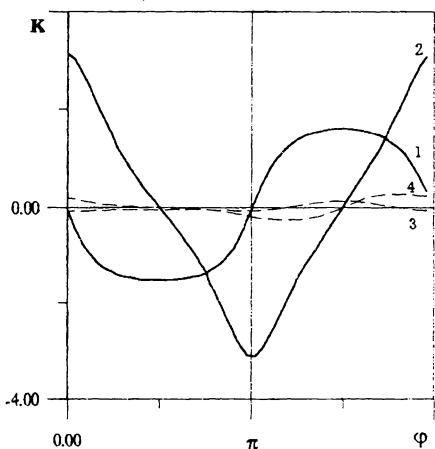


рис. 1

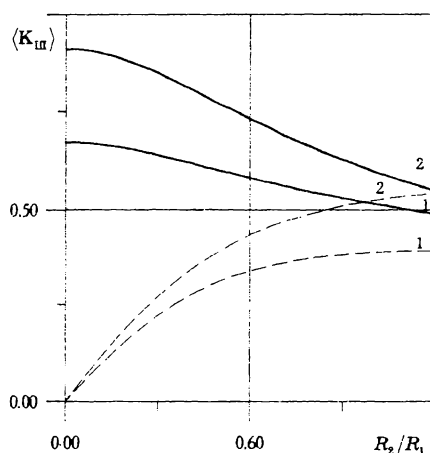


рис. 2

[1] Фильштинский Л.А., Фильштинский М.Л. Растяжение составной пьезо-керамической пластины, ослабленной трещинами-разрезами // Прикл. мех.-1993 - т. 29, N12 - с. 66-71.

[2] Фильштинский Л.А., Фильштинский М.Л. Функция Грина для составной пьезокерамической плоскости с межфазной трещиной // ПММ. - 1994.- Т. 58, Вып. 2.- с. 159-166

[3] Гринченко В. Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. Киев. Наукова думка, 1989. 280 с.- (механика связанных полей в элементах конструкций: В 5-ти т.: Т.5)

[4] Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. - М.: Наука, 1985. - 253 с.