

УДК 539.3

© 1993 г. Л.А. Фильштинский

## ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА МАГНИТОУПРУГОСТИ ДЛЯ ФЕРРОМАГНИТНОЙ СРЕДЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ РАЗРЕЗАМИ

Рассматривается плоская задача магнитоупругости для мягкой ферромагнитной среды, ослабленной несколькими трещинами, которые в исходном (недеформированном) состоянии трактуются как математические разрезы. Поскольку подход, использованный при анализе влияния намагниченности материала на напряженное состояние в окрестности прямолинейной трещины [1–3] в общем случае не применим, разработана новая процедура. Она основана на представлении механических и магнитных величин через три произвольные аналитические функции. Краевая задача сводится к системе двух действительных сингулярных интегральных уравнений первого рода. Получены формулы для коэффициентов интенсивности напряжений в вершине трещины. Приводится пример.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим отнесенную к прямоугольной декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$  неограниченную среду из мягкого ферромагнетика, ослабленную туннельными вдоль оси  $x_3$  разрезами  $L_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ). Предположим, что исходное магнитное поле (в которое было помещено ферромагнитное тело) однородно во всем пространстве и ориентировано вдоль оси  $x_2$  (фиг. 1). Вследствие того что материал намагничивается, тело приобретает магнитный момент и подвергается механическому воздействию со стороны внешнего поля. Будем считать, что на поверхности разрезов возможно действие механической нагрузки  $(X_{1n}, X_{2n}, O)$ , где  $X_{in} = X_{in}(x_1, x_2)$ . Под влиянием всех этих сил в среде возникают деформации, вызывающие добавочное (индуцированное) магнитное поле. Вопрос заключается в определении взаимодействующих между собой механических и магнитных полей в ферромагнитной среде с трещинами.

В исследованиях этого рода обычно используется вариант теории, основанный на линеаризации уравнений магнитоупругости для мягких ферромагнетиков (в ненасыщенном состоянии) в пренебрежении эффектом магнитострикции и влиянием индукционных токов [1, 4, 5].

Пусть в результате деформации тела, вызванной полем бесконечно малого вектора перемещения  $(u_1, u_2, u_3)$ , исходное магнитное поле претерпевает малые изменения

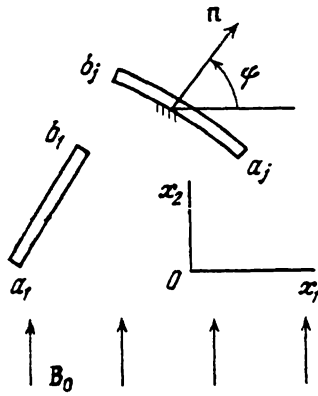
$$B = B_0 + b, \quad M = M_0 + m, \quad H = H_0 + h \quad (1.1)$$

где  $B_0 = (B_{0i})$ ,  $H_0 = (H_{0i})$ ,  $M_0 = (M_{0i})$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – индукция, напряженность магнитного поля и намагниченность, соответствующие телу в недеформированном состоянии;  $b, h, m$  – флуктуации указанных величин, имеющие, по предположению, тот же порядок, что и вектор упругого перемещения.

Тогда при условии, что  $|M_{0j}\partial_j\mu_i| \ll |m_i|$ , имеем следующую систему линейных соотношений:

полевые уравнения (суммирование по повторяющемуся индексу)

$$\partial_j t_{ji} + \mu_0 (M_{0j} \partial_j H_{0i} + M_{0j} \partial_j h_i + m_j \partial_j H_{0i}) = 0 \quad (1.2)$$



Фиг. 1

$$\text{rot } h = 0, \quad \text{div } b = 0, \quad \partial_i = \partial / \partial x_i \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

материальные уравнения

$$m = \chi h, \quad b = \mu_0(h + m) = \mu_0 \mu_r h, \quad \mu_r = 1 + \chi \quad (1.3)$$

$$t_{ij} = \sigma_{ij} + \chi \mu_0 (H_{0i} H_{0j} + H_{0i} h_j + H_{0j} h_i)$$

$$T_{ij} = H_{0j} B_{0i} + H_{0j} b_i + B_{0i} h_j - \frac{1}{2} \mu_0 (H_{0k} H_{0k}) \delta_{ij} - \mu_0 (H_{0k} h_k) \delta_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \partial_k u_k + \mu (\partial_j u_i + \partial_i u_j)$$

граничные условия на поверхностях раздела сред

$$(S_{ij} - S_{ij}^e) n_j = 0, \quad S_{ij} = t_{ij} + T_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.4)$$

$$\epsilon_{ijk} \{ n_j (h_k - h_k^e) - (H_{0k} - H_{0k}^e) n_m \partial_j u_m \} = 0$$

$$n_i (b_i - b_i^e) - (B_{0i} - B_{0i}^e) n_m \partial_j u_m = 0$$

Здесь  $t_{ij}$  и  $T_{ij}$  – тензоры магнитоупругих напряжений и напряжений Максвелла,  $\epsilon_{ijk}$  – тензор подстановок, индекс  $e$  указывает на принадлежность соответствующей физической величины к внешней среде (в рассматриваемом случае – к полости трещины),  $n_i$  – проекция орта нормали к поверхности раздела на ось  $x_i$ ;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Г/м – абсолютная магнитная проницаемость,  $\mu_r$  – относительная магнитная проницаемость,  $\chi$  – магнитная восприимчивость вещества;  $\lambda, \mu$  – постоянные Ламе.

В соотношения (1.2)–(1.4) входят компоненты невозмущенного магнитного поля, которые определяются из решения задачи магнитостатики для сопрягающихся сред (одна из которых обычно ассоциируется с вакуумом)

$$\text{rot } H_0 = 0, \quad \text{div } B_0 = 0, \quad B_0 = \mu_0 (H_0 + M_0) = \mu_0 \mu_r H_0 \quad (1.5)$$

$$\text{rot } H_0^e = 0, \quad \text{div } B_0^e = 0, \quad B_0^e = \mu_0 H_0^e$$

$$\epsilon_{ijk} n_j (H_{0k} - H_{0k}^e) = 0, \quad n_i (B_{0i} - B_{0i}^e) = 0$$

Система уравнений (1.1)–(1.5) полна в том смысле, что дает возможность определить все механические и магнитные величины в теле, а также магнитное поле в окружающей среде.

Переходя к решению двумерной граничной задачи для ферромагнитной среды,

будем считать, что магнитное поле  $B_0$  нечувствительно к наличию трещин, так как последние в недеформированном состоянии трактуем как математические разрезы. В соответствии с этим положим  $B_0 = (0, B_{02}, 0)$ , где  $B_{02} = \text{const}$ . Уравнения (1.5), очевидно, будут удовлетворены при следующих значениях магнитного поля на оси разреза:

$$H_{01}^e = \chi H_{02} n_1 n_2, \quad H_{02}^e (1 + \chi n_2^2), \quad n_1 = \cos \psi, \quad n_2 = \sin \psi \quad (1.6)$$

где  $\psi$  – угол между нормалью к левому берегу  $L_j$  (при движении от его начала  $a_j$  к концу  $-b_j$ ) и осью  $x_1$  (фиг. 1).

Соотношения (1.2)–(1.3) при учете независимости величин  $t_{ij}$ ,  $T_{ij}$ ,  $h_i$  от координаты  $x_3$  дают [1]

$$\nabla^2 u_i + \sigma \partial_i \vartheta + 2\chi \mu^{-1} \mu_0 H_{02} \partial_2 h_i = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (1.7)$$

$$\nabla^2 \Psi = 0, \quad h = \text{grad } \Psi, \quad \vartheta = \partial_m u_m$$

$$\sigma = (1 - 2\nu)^{-1}, \quad \nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$$

Граничные условия вытекают из условий сопряжения (1.4). Имеем, учитывая равенства (1.6),

$$n_1 (b_1^\pm - b_1^e) + n_2 (b_2^\pm - b_2^e) = \mu_0 M_{02} n_1 (U_1^*)^\pm \quad (1.8)$$

$$n_1 (h_2^\pm - h_2^e) - n_2 (h_1^\pm - h_1^e) = M_{02} n_2 (U_1^*)^\pm$$

$$U_1^* = n_m \partial u_m / \partial s, \quad \partial / \partial s = n_1 \partial_2 - n_2 \partial_1$$

где  $h_i^\pm$ ,  $b_i^\pm$ ,  $(U_1^*)^\pm$  – значения соответствующих величин на берегах  $L_j$ , а  $h_i^e$ ,  $b_i^e$  – значения их в "полости трещины" (на ее оси).

Из четырех уравнений (1.8) находим компоненты флуктуации магнитного поля в полости трещины

$$h_1^e = (\chi n_1^2 + 1) h_1^\pm + n_1 n_2 m_2^\pm - M_{02} (U_1^*)^\pm \cos 2\psi \quad (1.9)$$

$$h_2^e = n_1 n_2 m_1^\pm + (\chi n_2^2 + 1) h_2^\pm - M_{02} (U_1^*)^\pm \sin 2\psi$$

Соотношения (1.9), очевидно, имеют смысл при соблюдении следующих условий совместности системы (1.8):

$$(\chi n_1^2 + 1)[h_1] + n_1 n_2 \chi [h_2] = M_{02} U_1 \cos 2\psi \quad (1.10)$$

$$n_1 n_2 \chi [h_1] + (\chi n_2^2 + 1)[h_2] = M_{02} U_1 \sin 2\psi, \quad U_1 = [U_1^*]$$

где угловые скобки означают скачок соответствующей величины при переходе через разрез.

Механические граничные условия на берегах  $L_j$  получим при учете соотношений (1.3), (1.6) и (1.7). Представим их в виде комплексных равенств

$$(t_{11} + t_{22})^\pm - e^{2i\psi} (t_{22} - t_{11} + 2it_{12})^\pm + 2\mu_0 M_{02} (H_{02} \alpha(\psi) U_1^* - n_2 n_m \chi h_m)^\pm = \quad (1.11)$$

$$= 2(N - iT)^\pm + \mu_0 M_{02}^2 n_2^2, \quad \alpha(\psi) = \chi n_2 e^{-i\psi} - i$$

Здесь  $N$  и  $T$  – действующие на берегах  $L_j$  нормальные и сдвигающие усилия, верхний знак относится к левому берегу (фиг. 1).

Ниже будем считать, что  $[N - iT] = 0$ . Граничное равенство (1.11) достаточно будет выполнять лишь на одном из берегов каждой трещины, если учитывать при этом условие непрерывной продолжимости левой его части при переходе

через  $L_j$

$$[t_{11} + t_{22}] - e^{2i\psi} [t_{22} - t_{11} + 2it_{12}] + 2\mu_0 \chi H_{02}^2 \beta(\psi) U_1 = 0 \quad (1.12)$$

$$\beta(\psi) = \chi n_1 n_2 \mu_r^{-1} - i(1 + \chi n_2^2)$$

Таким образом, поставленная граничная задача заключается в разыскании решения дифференциальных уравнений (1.7), удовлетворяющего на  $L_j$  условиям по скачкам (1.10), (1.12) и одному из граничных условий (1.11).

2. Общее решение системы (1.7). Непосредственно видно, что объемное расширение  $\vartheta$  – гармоническая функция. В соответствии с этим положим

$$\mu\vartheta = (\kappa - 1) \operatorname{Re} \Phi(z), \quad \Psi = \operatorname{Re}\{if(z)\}, \quad \kappa = 3 - 4\nu \quad (2.1)$$

где  $\Phi(z), f(z)$  – произвольные аналитические в области, занятой телом, функции комплексной переменной  $z = x_1 + ix_2$ ,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Записывая уравнения равновесия (1.7) в виде равносильного комплексного уравнения относительно комбинации  $u_1 + iu_2$  и интегрируя его в соответствии с определением объемного расширения (2.1), находим

$$2\mu(u_1 + iu_2) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\Phi(z)} - \overline{\varphi_1(z)} + \mu_0 M_{02} (z\overline{F(z)} - f(z)) \quad (2.2)$$

$$\Phi(z) = \frac{d\varphi}{dz} = \varphi'(z), \quad F(z) = f'(z)$$

где  $\varphi_1(z)$  – произвольная аналитическая функция,  $\bar{f}$  – величина, комплексно сопряженная к  $f$ . Из представлений (2.1), (2.2) при учете соотношений (1.3), (1.4) выводим:

$$\begin{aligned} t_{11} + t_{22} &= 4 \operatorname{Re} \Phi(z) - 2\mu_0 M_{02} \operatorname{Re} F(z) + \chi\mu_0 H_{02}^2 \\ t_{22} - t_{11} + 2it_{12} &= 2\{\bar{z}W'(z) + W_1(z)\} + \chi\mu_0 H_{02}^2 \\ S_{11} + S_{22} &= 4 \operatorname{Re} W(z) + 2\chi\mu_0 H_{02}^2, \quad h_1 - ih_2 = iF(z) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\Phi_1(z) = \varphi_1'(z), \quad W(z) = \Phi(z) - \mu_0 M_{02} F(z), \quad W_1(z) = \Phi_1(z) - \mu_0 M_{02} F(z)$$

$$S_{22} - S_{11} + 2iS_{12} = 2\{\bar{z}W'(z) + W_1(z)\} - 2B_{02} F(z) + (1 + 2\chi)\mu_0 H_{02}^2$$

Таким образом, компоненты тензоров магнитоупругих и максвелловских напряжений, а также векторов механического перемещения и напряженности магнитного поля в ферромагнитном теле выражаются через три произвольные аналитические функции. При  $B_{02} = 0$  формулы (2.2), (2.3) совпадают с классическими представлениями плоской задачи теории упругости. Отметим, что некоторые формы представления решений задач магнитоупругости через функции комплексного переменного содержатся в [6, 7].

Постановку граничной задачи завершим, перефразировав в терминах аналитических функций условия (1.9), (1.11), (1.12). Имеем:

$$[F(\zeta)] = M_{02} \delta(\psi) U_1(\zeta), \quad \zeta \in L = \bigcup_{j=1}^k L_j$$

$$\operatorname{Re}\{\phi(\zeta)\} - e^{2i\psi} \{\zeta W'(\zeta) + W_1(\zeta)\} + \chi\mu_0 H_{02}^2 \beta(\psi) U_1(\zeta) + \operatorname{Re}\{W(\zeta)\} = 0 \quad (2.4)$$

$$2 \operatorname{Re} W(\zeta) - e^{2i\psi} \{\bar{\zeta} W'(\zeta) + W_1(\zeta)\} + \mu_0 M_{02} \Lambda = R(\zeta)$$

$$\Lambda = \operatorname{Im}\{F(\zeta) \overline{\alpha(\psi)}\} + H_{02} \alpha(\psi) U_1^*$$

$$R(\zeta) = N - iT + \frac{1}{2} \chi\mu_0 H_{02}^2 (\chi n_2^2 + e^{2i\psi} - 1)$$

$$2\mu U_1^*(\zeta) = \text{Im}\{\mu_0 M_{02} F(\zeta) - W(\zeta) - \kappa \phi(\zeta) + e^{2i\psi} (\bar{\zeta} W'(\zeta) + \Phi(\zeta))\}$$

**3. Интегральные представления решений.** Представления искомым аналитических функций, корректные в том смысле, что условия по скачкам в (2.4) выполняются независимо от фигурирующих в них плотностей, запишем, следуя схеме работы [8], в виде:

$$F(z) = \frac{\mu_0 M_{02}}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad W(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{p_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$W_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{\zeta} p_1(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{p_2(\zeta)}}{\zeta - z} d\bar{\zeta}$$

$$\Phi(z) = W(z) + \mu_0 M_{02} F(z), \quad \Phi_1(z) = W_1(z) + \mu_0 M_{02} F(z) \quad (3.1)$$

$$p_j(\zeta) = \frac{2\mu}{\kappa + 1} \{iU_1(\zeta) - U_2(\zeta) + e_0^2 \Lambda_j(\psi) U_1(\zeta)\} \quad (j=1,2)$$

$$\Lambda_1(\psi) = \frac{\chi}{2} \left\{ i + \chi e^{-i\psi} \left( \frac{in_1}{\mu_r} (2 - \kappa) - (\kappa + 1)n_2 \right) \right\}$$

$$\Lambda_2(\psi) = \frac{i\chi}{2} \left\{ -\kappa + \chi e^{-i\psi} (2 - \kappa) \frac{n_1}{\mu_r} \right\}, \quad e_0^2 = \frac{\mu_0 H_{02}^2}{\mu}$$

Плотности  $U_j$  выражаются через перемещения согласно соотношению ( $ds$  – элемент дуги контура  $L$ )

$$(U_1 + iU_2)e^{i\psi} = d / ds[u_1 + iu_2] \quad (3.2)$$

которое согласовано с определением функции  $U_1$  в (1.8), (1.10).

Функции (3.1) еще не вполне соответствуют физическому содержанию поставленной граничной задачи. Необходимо позаботиться о том, чтобы выполнялись условия однозначности перемещений в области, занятой средой, а также интегральные равенства

$$\int_{C_j} (n_1 b_1 + n_2 b_2) ds = 0, \quad \int_{C_j} (n_1 h_2 - n_2 h_1) ds = 0 \quad (j=1,2,\dots,k) \quad (3.3)$$

где  $C_j$  – произвольный замкнутый контур, охватывающий  $L_j$ . Условия однозначности перемещений сводятся в силу (3.1) к виду

$$\int_{L_j} (U_1 + iU_2) d\zeta = 0 \quad (j=1,2,\dots,k) \quad (3.4)$$

Равенства (3.3) можно, учитывая (2.3), представить в равносильной форме

$$\int_{L_j} \omega(\zeta) d\zeta = 0 \quad (j=1,2,\dots,k) \quad (3.5)$$

Таким образом, интегральные представления (3.1) имеют смысл только при выполнении условий (3.4), (3.5). На самом деле, равенства (3.5) вытекают из (3.4). Это легко обнаружить, привлекая первое соотношение (2.4) и определение (3.2).

**4. Интегральные уравнения граничной задачи (2.4).** Подстановка предельных значений функций (3.1) в граничное условие (2.4) на одном из берегов  $L$  приводит к системе сингулярных интегральных уравнений первого рода:

$$\sum_{n=1}^2 \int_L U_n(\zeta) dN_{mn}(\zeta, \zeta_0) = N_m(\zeta_0), \quad \zeta_0 \in L \quad (m=1,2) \quad (4.1)$$

$$4dH_{11} = \text{Im}\{[2H_2H_3^0g - 4H_1(\kappa+1)H_4^0 - 2H_1H_3^0h - i\chi^2e_0^2(\kappa+1)\delta(\psi)H_s^0]d\tau\},$$

$$d\tau = (\zeta - \zeta_0)^{-1} d\zeta$$

$$4dH_{12} = \text{Im}\{[4 + i\chi^2e_0^2(\kappa+1)n_1^0n_2^0 + 2H_3^0(h-g)]d\tau\}$$

$$4dH_{21} = \text{Re}\{[2H_6^0(H_1h - H_2g) + \chi(1 + \chi\sin^2\psi_0)e_0^2(\kappa+1)H]d\tau\}$$

$$4dH_{22} = \text{Re}\{[2H_6^0(g-h) - \chi(1 + \chi\sin^2\psi_0)e_0^2(\kappa+1)]d\tau\}$$

$$4N_1(\zeta) = \pi(\kappa+1) \left[ \frac{2N}{\mu} + \chi e_0^2(\chi n_2^2 - 1 + \cos 2\psi) \right]$$

$$2N_2(\zeta) = \pi(\kappa+1) \left[ \chi e_0^2 n_1 n_2 - \frac{T}{\mu} \right], \quad g = e^{2i(\psi_0 - \psi)}$$

$$h = e^{2i\psi_0} \frac{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0}{\zeta - \zeta_0}, \quad H_j = H_j(\psi), \quad H_j^0 = H_j(\psi_0)$$

$$H_1 = i + e_0^2 \Lambda_1(\psi), \quad H_2 = e_0^2 \overline{\Lambda_2(\psi)} - i, \quad H_3 = 2H_4 + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}$$

$$H_4 = \frac{1}{\kappa + 1} + i\chi^2 e_0^2 \frac{n_1 n_2}{4}$$

$$H_6 = 1 + \chi(1 + \chi n_2^2) \frac{e_0^2}{2}$$

$$H_s = \overline{\alpha(\psi)} + \chi^2 e_0^2 (1 - \kappa + e^{2i\psi}) \frac{n_1 n_2}{2}$$

$$H(\psi, \psi_0) = H_1 + \frac{1}{2} \chi^2 e_0^2 \delta(\psi) (1 - \kappa + e^{2i\psi_0})$$

Эту систему необходимо рассматривать в совокупности с дополнительными условиями (3.4). При этом в предположении что контуры  $L_j$  не имеют общих точек и кривизны их, а также функции  $N_i(\zeta)$  удовлетворяют условию Гельдера, получаем единственное решение в классе функций, неограниченных на концах  $L_j$ .

**5. Коэффициенты интенсивности напряжений.** Введем параметрическое представление контура  $L_j$  (ниже индекс  $j$  опускаем):  $\zeta = \zeta(\beta)$ ,  $-1 \leq \beta \leq 1$ . В соответствии с этим положим

$$U_m(\zeta) = \Omega_m(\beta) / \sqrt{1 - \beta^2} \quad (5.1)$$

где  $\Omega_m(\beta)$  удовлетворяет условию Гельдера на  $[-1, 1]$ .

Вводя функции (5.1) в интегральные представления (3.1), получим в результате стандартной процедуры выделения особенностей решения на концах  $L_j$

$$K_I^s - iK_{II}^s = \pm \frac{2\mu\sqrt{s'(\pm 1)}}{\kappa + 1} \left\{ i\Omega_2(\pm 1) - \Omega_1(\pm 1) + \frac{\chi}{4} e_0^2 \Omega_1(\pm 1) \left( -2 + \sum_{\alpha, \delta=1}^2 a_{\alpha\delta} n_\alpha^\pm n_\delta^\pm \right) \right\},$$

$$n_1^\pm = \cos \psi(\pm 1), \quad n_2^\pm = \sin \psi(\pm 1)$$

$$K_I^s - iK_{II}^s = \sqrt{2r}(S_{nn} - iS_{ns}), \quad r = |z - c| \rightarrow 0$$

$$a_{11} = \frac{2\chi(\kappa - 2)}{\chi + 1}, \quad a_{22} = -2\chi(\kappa + 1) \quad a_{12} = a_{21} = i\chi \left( \kappa + 1 + \frac{\kappa - 2}{\chi + 1} \right)$$

где верхний знак относится к вершине  $c = b$  ( $\beta = 1$ ), а нижний – к вершине  $c = a$  ( $\beta = -1$ ),  $S_{nn}$ ,  $S_{ns}$  – нормальное и касательное суммарные напряжения на площадке с нормалью  $n = (\cos\psi_c, \sin\psi_c)$  на продолжении за вершину  $c$ .

**6. Пример.** Рассмотрим среду с прямолинейной трещиной длины  $2l$ , ориентированной по отношению к исходному магнитному полю так, как показано на фиг. 2а. Параметрическое уравнение возьмем в форме:  $\zeta = i\beta e^{i\psi}$ ,  $\zeta_0 = i\beta_0 e^{i\psi}$ ,  $-1 \leq \beta$ ,  $\beta_0 \leq 1$ . При этом интегральные уравнения (4.1) и дополнительное условие (3.4) примут вид:

$$\sum_{n=1}^2 p_{mn} \int_{-1}^1 \frac{\Omega_n(\beta) d\beta}{\sqrt{1-\beta^2}(\beta-\beta_0)} = N_m^*(\beta_0) \quad (m=1,2) \quad (6.1)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\Omega_1(\beta) + i\Omega_2(\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} d\beta = 0, \quad N_m^*(\beta) = N_m(\zeta)$$

$$p_{11} = \sum_{j=0}^4 d_j \chi^j, \quad p_{21} = \sum_{j=2}^3 d_j^* \chi^j, \quad p_{12} = \chi^2 e_0^2 (\kappa - 1) \frac{n_1 n_2}{4}$$

$$4p_{22} = 4 + \chi e_0^2 (1 - \kappa)(1 + \chi n_2^2), \quad d_0 = -1, \quad 4d_1 = (\kappa - 1)e_0^2$$

$$4d_2 = -\frac{n_1^2}{\mu_r} (5 - \kappa) e_0^2, \quad 4d_3 = (\kappa + 1) e_0^2 n_2^2, \quad n_1 n_2 d_3^* = -(1 + \chi n_2^2) d_4,$$

$$4d_4 = e_0^4 n_1^2 n_2^2 \left( \kappa + 1 + \frac{1 - 2\kappa}{\mu_r} \right)$$

$$4d_2^* = e_0^2 n_1 n_2 \left( \kappa + 1 + \frac{2\kappa - 4}{\mu_r} \right)$$

Решение характеристической системы (6.1) таково:

$$\Omega_n(\beta) = A_n \beta \quad (n=1,2) \quad (6.2)$$

$$\pi \Delta A_1 = p_{22} N_1^* - p_{12} N_2^*, \quad \pi \Delta A_2 = p_{11} N_2^* - p_{21} N_1^*$$

$$\Delta = p_{11} p_{22} - p_{12} p_{21}$$

Соответственно определяются искомые аналитические функции и их комбинация (фиг. 2б):

$$F(z) = \frac{1}{2i} M_{02} A_1 \delta(\psi) \gamma_1(z), \quad W(z) = i\mu \bar{\epsilon}_1 \gamma_1(z) \quad (6.3)$$

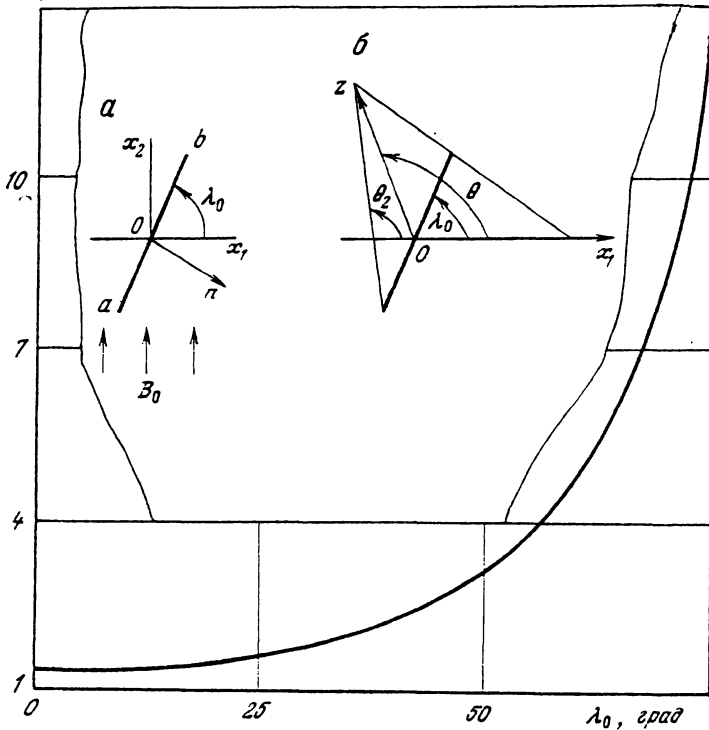
$$W_1(z) = i\mu e^{-2i\psi} (\bar{\epsilon}_1 \gamma_2(z) + \bar{\epsilon}_2 \gamma_1(z)), \quad \lambda_0 = \psi - \frac{3}{2}\pi$$

$$\gamma_1(z) = \frac{z}{\sqrt{z^2 - c^2}} - 1, \quad \gamma_2(z) = \frac{z^3 - 2zc^2}{\sqrt{(z^2 - c^2)^3}} - 1, \quad c = l e^{i\lambda_0}$$

$$\bar{z} W'(z) + W_1(z) = \mu \left\{ \frac{\bar{\epsilon}_1}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}} \sin(\theta_2 - \theta_1) \exp \left[ i\lambda_0 - \frac{3i}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] - \right. \\ \left. - i(\bar{\epsilon}_1 + \bar{\epsilon}_2) \left[ \frac{\rho}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}} \exp \left( i\theta - i \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) - 1 \right] e^{-2i\lambda_0} \right\}$$

$$(\kappa + 1)\epsilon_1 = A_1 \bar{H}_1 - A_2, \quad (\kappa + 1)\epsilon_2 = A_1 \bar{H}_2 - A_2$$

$$z - c = \rho_1 e^{i\theta_1}, \quad z + c = \rho_2 e^{i\theta_2}, \quad z = \rho e^{i\theta}$$

$(B_c^*)^2 \cdot 10^5$ 


Фиг. 2

С помощью функций (6.3) находим механические и магнитные величины в любой точке тела. В частности, на прямой, параллельной трещине, имеем

$$S_{nn} - iS_{ns} = 2i\mu\epsilon_1 \left\{ 1 - \frac{\rho}{\sqrt{\rho_1\rho_2}} \cos\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \right\} + \quad (6.4)$$

$$+ \mu\sqrt{\epsilon_1} \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sqrt{\rho_1\rho_2}} \exp\left\{ 3i\left(\lambda_0 - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \right\} + \mu e_0^2 \left( \chi + \left(\chi + \frac{1}{2}\right) e^{2i\lambda_0} \right)$$

$$\epsilon_1 = \frac{i\chi e_0^2}{4(\kappa+1)} A_1 \left( -2 + \sum_{\alpha, \sigma=1}^2 a_{\alpha\sigma} n_\alpha n_\sigma \right) - \frac{A_2 + iA_1}{\kappa+1}$$

Если же прямая совпадает с осью трещины, то находим из (6.4) при  $\rho \leq l$

$$S_{nn} - iS_{ns} = \mu \left\{ e_0^2 \left( \chi + \left(\chi + \frac{1}{2}\right) e^{2i\lambda_0} \right) + 2i\epsilon_1 \right\} \quad (6.5)$$

При  $\rho > l$  к правой части (6.5) добавляется слагаемое  $-2i\epsilon_1\mu\rho/\sqrt{\rho^2 - l^2}$ .

С помощью этих зависимостей прослеживается влияние ориентации трещины по отношению к исходному магнитному полю  $B_0$  на механические и магнитные величины. Наиболее простые результаты получаются для горизонтальной или вертикальной трещины. В этом случае  $n_1 n_2 = 0$ ,  $p_{12} = p_{21} = 0$  и система уравнений (6.1) распадается на два независимых уравнения, причем величины  $A_n$ , фигурирующие в (6.2), таковы:

$$\varphi_{11} A_1 = N_1^*, \quad \varphi_{22} A_2 = N_2^* \quad (6.6)$$



где для горизонтальной трещины ( $n_1 = 0, n_2 = -1$ )

$$4p_{11} = \chi e_0^2 \{(\kappa+1)\chi^2 + (\kappa-1)\} - 4, \quad N_2^* = -\frac{\pi T}{2\mu}(\kappa+1)$$

$$4p_{22} = 4 - \chi e_0^2 \mu_r (\kappa-1), \quad N_1^* = \frac{\pi}{2}(\kappa+1) \left\{ \frac{N}{\mu} + \frac{\chi}{2} e_0^2 (\chi-2) \right\}$$

для вертикальной трещины ( $n_1 = 1, n_2 = 0$ )

$$4p_{11} = \chi e_0^2 \left( \kappa - 1 - \chi \frac{5-\kappa}{\mu_r} \right) - 4, \quad N_2^* = -\frac{\pi T}{2\mu}(\kappa+1)$$

$$4p_{22} = 4 - \chi e_0^2 (\kappa-1), \quad N_1^* = \frac{\pi N}{2\mu}(\kappa+1)$$

Из формул (6.4)–(6.6) непосредственно видно, что существуют такие значения параметра  $b_c^2 = (\mu_r e_0)^2 = B_{02}^2 / (\mu \mu_0)$ , называемые критическими, при которых компоненты тензоров магнитоупругих и максвелловских напряжений, а также векторов напряженности и индукции магнитного поля в ферромагнитной среде с трещиной обращаются в бесконечность. Это явление было обнаружено для случая горизонтальной трещины [1–3]. В то же время для вертикальной трещины (параллельной исходному магнитному полю) дело обстоит иначе. Как следует из (6.6), при  $N \neq 0, T = 0$  такого критического значения не существует, а при  $N = 0, T \neq 0$  теоретически оно существует ( $b_c^* = 6,3 \times 10^2$  при  $\mu_r = 10^5, \nu = 0,25$ ), но физически это значение не реализуемо. Если принять во внимание, что в однородной ферромагнитной среде при наличии исходного магнитного поля  $(0, B_{02}, 0)$  имеют место суммарные напряжения  $2S_{11} = -\mu_0 H_{02}^2, S_{12} = 0, 2S_{22} = (4\chi+1)\mu_0 H_{02}^2$ , то можно прийти к выводу, что при  $b_c = b_c^*$  плоская форма равновесия ферромагнитной среды с трещиной становится невозможной.

Для прямолинейной трещины, ориентированной к направлению исходного магнитного поля под некоторым углом  $\pi/2 - \lambda_0$ , критическое значение  $b_c^*$  определяется согласно (6.2), как наименьший положительный корень уравнения  $\Delta = 0$ . Это алгебраическое уравнение четвертой степени относительно параметра  $b_c$ . Наименьшее значение величина  $b_c^*$  принимает при  $\lambda_0 = 0$  ( $b_c^* = 3,6 \times 10^{-3}$  при  $\mu_r = 10^5, \nu = 0,25$ ). Далее с увеличением  $\lambda_0$  от 0 до  $\pi/2$  оно монотонно увеличивается до указанного выше значения для вертикальной трещины (фиг. 2).

Из сказанного следует, что при рассмотрении общей ситуации (в постановке [4]) существует спектр критических значений параметра  $b_c$ , зависящий от конфигурации трещин, их взаимного расположения, ориентации по отношению к исходному магнитному полю, типа нагружения, при которых плоская форма равновесия становится невозможной.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Shindo Y. The linear magnetoelastic problem for a soft ferromagnetic elastic solid with a finite crack // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1977. U. 44. No. 1. P. 47–50.
2. Shindo Y. Singular stresses in a soft ferromagnetic elastic solid with two coplanar griffith cracks // Intern. J. Solids and Struct. 1980. U. 16. No. 6. P. 537–543.
3. Асанян Д.Д., Асланян А.А., Багдасарян Г.Е. Концентрация напряжений в магнитомягком теле с трещиной, вызванной внешним магнитным полем // Изв. АН АрмССР. Механика. 1988. Т. 41. Н. 5. С. 8–13.
4. Pao Y.-H., Yeh C.S. A linear theory for soft ferromagnetic elastic solids // Intern. J. Eng. Sci. 1973. U. 11. No. 4. P. 415–436.

5. Кудрявцев Б.А., Партон В.З. Магнитотермоупругость // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНТИ, 1981. Т. 14. С. 3–59.
6. Багдасарян Г.Е., Асанян Д.Д., Асланян А.А. Приведение плоских задач теории магнитоупругости магнитомягких ферромагнитных тел к задачам теории функций комплексного переменного // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред // Изд-во АН АрмССР, 1987. С. 53–58.
7. Черный Л.Т. Некоторые плоские задачи теории упругости сильнонамагничивающихся тел // Научн. тр. ин-та механики МГУ. 1974. № 31. С. 120–130.
8. Фильштинский Л.А. Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 5. С. 91–97.

Сумы

Поступила в редакцию  
11.XI.1992