

Л. А. Фильштинский, В. М. Олейник

## КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ СЛОЯ С ТУННЕЛЬНЫМИ СКВОЗНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

Электро механические преобразователи подвергаются не только динамическому, но и статическому нагружению [6]. Поэтому представляет определенный интерес рассмотрение задач, связанных с расчетом изделий из пьезо керамики при различных видах статических нагрузок. Необходимо учитывать неоднородности в материале, так как они являются концентраторами механических и электрических напряжений. В [2] рассмотрена задача о нахождении сопряженного электроупругого поля вблизи круговой трещины для пьезо керамического цилиндра.

В данной работе рассматривается пространственная задача электроупругости для слоя, ослабленного сквозными туннельными трещинами. Для решения задачи привлекаются однородные решения А. И. Лурье [5]. Краевая задача сводится к бесконечной системе одномерных сингулярных интегральных уравнений. Проведен асимптотический анализ механических и электрических величин в вершинах разреза. Представлены результаты расчетов коэффициентов интенсивности напряжений.

**§ 1. Постановка задачи.** Рассмотрим пьезо керамический слой, отнесенный к декартовой системе координат  $0x_1x_2x_3$  ( $-\infty < x_1, x_2 < \infty, x_3 = \bar{x}_3/h, \bar{x}_3$  — ось поляризации) и ослабленный туннельными вдоль толщинной координаты  $x_3$  сквозными разрезами. Обозначим поперечные сечения разрезов через  $L_j$  ( $j=1, 2 \dots k$ ). Пусть берега разрезов и основания слоя свободны от сил, а на торцах слоя задан электрический потенциал. Предположим, что кривизны дуг удовлетворяют условию Гельдера на  $L_j$ . Будем рассматривать симметричную (относительно срединной плоскости слоя) задачу электроупругости.

Для решения поставленной задачи используем: уравнения состояния [8]

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= C_{11}^E S_{11} + C_{12}^E S_{22} + C_{13}^E S_{33} - e_{31} E_3; & \sigma_{22} &= C_{12}^E S_{11} + C_{11}^E S_{22} + \\ &+ C_{13}^E S_{33} - e_{31} E_3; & \sigma_{33} &= C_{13}^E (S_{11} + S_{22}) + C_{33}^E S_{33} - e_{33} E_3; & \sigma_{12} &= (C_{11}^E - \\ &- C_{12}^E) S_{12} = 2C_{66}^E S_{12}; & \sigma_{i3} &= 2C_{44}^E S_{i3} - e_{15} E_i; & D_i &= 2e_{15} S_{i3} + \varepsilon_{11}^s E_i \\ & & (i=1, 2); & D_3 &= e_{31} (S_{11} + S_{22}) + e_{33} S_{33} + \varepsilon_{33}^s E_3; \end{aligned} \quad (1.1)$$

уравнения механического и электрического равновесия

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= 0 \quad (i, j=1, 2, 3); \\ \operatorname{div} \vec{D} &= 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad (\vec{E} = -\operatorname{grad} \psi). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $C_{ij}^E$  — модули упругости;  $e_{ij}$  — пьезомодули;  $\varepsilon_{ij}^s$  — диэлектрические проницаемости;  $E_k, D_k$  — компоненты вектора напряженности электрического поля и электрической индукции;  $\sigma_{ij}, S_{ij}$  соответственно — компоненты тензора напряжений и деформации.

Предположим, что на торцах слоя выполняются следующие граничные условия:

$$\sigma_{i3}|_{\pm h} = 0, \quad \psi|_{\pm h} = \pm V_0 \quad (i=1, 2, 3). \quad (1.3)$$

Для дальнейших выкладок будем привлекать однородные решения [3], а также результаты, полученные в [4].

Неоднородность в условии (1.3) можно снять при помощи элементарного решения  $u_1 = u_2 = 0$ ,  $u_3 = \frac{ab_{33}}{a_{33}} C_0 x_3$ ,  $u_4 = a C_0 x_3$ , где неизвестные постоянные определены в [3].

На берегах разрезов при  $-1 \leq x_3 \leq 1$  примем следующие краевые условия:

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} + \sigma_{22})^\pm - e^{2i\psi} (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12})^\pm &= 0; \\ \operatorname{Re} \{e^{i\psi} (\sigma_{13} - i\sigma_{23})^\pm\} &= 0; \\ \operatorname{Im} \{e^{i\psi} (E_1 - iE_2)^+\} &= \operatorname{Im} \{e^{i\psi} (E_1 - iE_2)^-\}; \\ \operatorname{Re} \{e^{i\psi} (D_1 - iD_2)^+\} &= \operatorname{Re} \{e^{i\psi} (D_1 - iD_2)^-\}; \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $\psi$  — угол между положительной нормалью к левому берегу разреза (при движении от его начала  $a_j$  к концу  $b_j$ ) и осью  $ox_1$ , верхний знак относится к левому берегу (рис. 1).

Входящие в представления бигармонического, вихревого и потенциального решений гармонические и метагармонические функции представим в виде (здесь принятые обозначения работы [3])

$$\begin{aligned} \Phi_1(x_1, x_2) &= \operatorname{Re} \int_L \left( P \frac{\partial \sigma}{\partial \zeta} + P_* \frac{\partial}{\partial \zeta} \nabla^2 \sigma d\zeta \right) + \int_L q \nabla^2 \sigma ds; \\ \varphi_1(x_1, x_2) &= -2\kappa \operatorname{Re} \int_L P(\zeta - z) (\ln(\zeta - z) - 1) d\zeta; \\ A_k(x_1, x_2) &= \int_L q_k K_0(\lambda_k r) dS + \int_L \left[ P_k \frac{\partial}{\partial \zeta} K_0(\lambda_k r) + P_k^* \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} K_0(\lambda_k r) d\bar{\zeta} \right]; \\ B_m(x_1, x_2) &= \int_L q_m^* K_0 \left( \frac{\delta_m}{h} r \right) ds + 2 \operatorname{Re} \int_L R_m \frac{\partial}{\partial \zeta} K_0 \left( \frac{\delta_m}{h} r \right) d\zeta; \quad (1.5) \\ \sigma &= r^2 \ln r, \quad r = |\zeta - z|, \quad L = \bigcup_{j=1}^k L_j; \\ \zeta &= \xi_1 + i\xi_2 \in L, \quad z = x_1 + ix_2, \quad \lambda_k = \gamma_k/h, \end{aligned}$$

где  $K_n(x)$  — функция Макдональда  $n$ -го порядка. Эти представления, как будет следовать из дальнейшего, обеспечивают полноту решения, существование скачков перемещений и непрерывность вектора напряжения при переходе через разрез. Электрические граничные условия также выполняются.

**§ 2. Сведение краевой задачи к системе интегральных уравнений.** Разложим четные компоненты электрических и механических величин в ряды Фурье вида  $u = \sum_{m=0}^{\infty} u^m \cos s_0 \delta_m x_3$ , а все нечетные компоненты — в

ряды вида  $v = \sum_{m=1}^{\infty} v^m \sin s_0 \delta_m x_3$  ( $s_0^2 = a_{66}/a_{44}$ ). При определении по функ-

циям (1.5) коэффициентов Фурье напряжений  $\sigma^m_{ij}$  в ядрах интегральных представлений появляются особенности типа  $(\zeta - z)^{-3}$ . Для того, чтобы избавиться от них введем связи между плотностями, фигуриру-

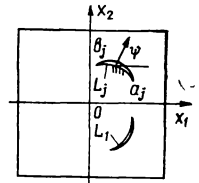
ющими в представлениях (1.5)

$$4P_* = - \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^0 P_k - \overline{\alpha_k^0 P_k^*}); \tag{2.1}$$

$$24h^2 q_0 \frac{(-1)^m}{\pi^2 m^2} P + 2iR_m = - \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^m P_k + \overline{\alpha_k^m P_k^*}) \quad (m=1, 2 \dots).$$

Условия непрерывности выражений (1.4) и существование разрывов вектора перемещения на  $L$  приводит к зависимостям

$$2\pi h q_m^*(\zeta) = - [u_s^m], \quad 4q(\zeta) = - \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^0 q_k(\zeta); \tag{2.2}$$



$$4h\pi\kappa P(\zeta) = U^0 - iV^0, \quad R_m = \frac{h}{\pi\delta_m^2} (iU^m - V^m) - \frac{[u_3^m]}{2\pi^2 m};$$

$$U^m = \frac{d}{ds} [u_n^m] - \frac{1}{\rho} [u_s^m], \quad V^m = \frac{d}{ds} [u_s^m] + \frac{1}{\rho} [u_n^m],$$

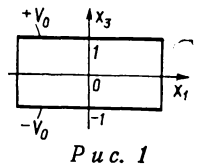


Рис. 1

а также к трем бесконечным системам линейных алгебраических уравнений вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^m q_k = \frac{[u_n^m]}{2\pi h}; \\ \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \kappa_k^m q_k = 0; \\ \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} r_k^m q_k = 0; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^m (P_k - P_k^*) = \frac{2hV^m}{\pi}; \\ \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^m (P_k - P_k^*) = \frac{[u_3^m]}{\pi} - \frac{2hq_1(-1)^m}{\pi^2 m \kappa} V^0; \\ \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{\infty} L_k^m (P_k - P_k^*) = 0; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^m (P_k + P_k^*) = \frac{2h}{\pi^3 m^2} \left( U^m - \frac{q_1(-1)^m}{\kappa} U_0 \right); \\ \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \kappa_k^m (P_k + P_k^*) = - \frac{2a_{66}h}{m\pi^2} U^m; \\ \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} r_k^m (P_k + P_k^*) = - \frac{2b_{15}h s_0^2}{\pi^2 m} U^m; \end{array} \right. \tag{2.3}$$

$$\alpha_k(x_3) = 2(q_5 f_k'' - \gamma_k q_6 f_k' + q_7 \theta_k');$$

$$\beta_k(x_3) = 2 \left( q_6 \gamma_k^4 f_k + \frac{1}{\kappa a_{66}} \gamma_k^2 f_k'' - q_7 \gamma_k^2 \theta_k' \right);$$

$$\mu_k(x_3) = -2(q_5 f_k''' - (q_6 - 2q_8) \gamma_k^2 f_k' + q_7 \theta_k''' - q_9 \gamma_k^2 \theta_k');$$

$$L_k(x_3) = 2\gamma_k^2 \theta_k, \quad r_k(x_3) = 2(q_{13} \gamma_k^2 \theta_k - q_9 \gamma_k^2 f_k');$$

$$\Lambda_k(x_3) = \beta_k(x_3) + \alpha_k(x_3) \gamma_k^2; \quad \operatorname{Re} \gamma_k > 0.$$

Здесь  $u_n^m, u_s^m$  — соответственно нормальная и касательная компоненты вектора  $u_1^m + iu_2^m$ ;  $\rho$  — радиус кривизны контура  $L_j$ ;  $\alpha_k^m, \kappa_k^m, \mu_k^m, L_k^m, r_k^m, \Lambda_k^m$  — коэффициенты Фурье соответствующих функций;  $[u]$  — скачок величины  $u$  на  $L$ .

Таким образом, плотности  $q_m(\zeta), P(\zeta), R_m(\zeta)$  — непосредственно выражаются через скачки перемещений на разрезе при помощи формул (2.2). Остальные плотности «завязаны» через скачки перемещений при помощи уравнений (2.3). Можно показать, что решение этих систем существует и единственно.

Раскладывая граничные условия (1.4) в ряды Фурье по координате  $x_3$  и используя представления (1.5), получаем бесконечную систему сингулярных интегральных уравнений, которую представим в виде ( $2l$  — длина разреза)

$$\int_L \left\{ \frac{1}{2\pi\kappa} \left( 1 - \frac{q_6}{q_{10}} q_1 \right) X^m(\zeta) + im \frac{a_{13}}{a_{11}} \omega_3^m(\zeta) \right\} g(\zeta, \zeta_0) ds + \dots = F_0$$

$$(m = 0, 1, 2 \dots); \quad (2.4)$$

$$\int_L \left( \frac{h}{2\pi} \frac{d\omega_3^m}{ds} - m\omega_4^m \right) g(\zeta, \zeta_0) ds + \dots = 0 \quad (m = 1, 2 \dots);$$

$$F_0 = - \frac{l(a_{13}b_{33} - b_{31}a_{33})}{a_{33}a_{66}h} C_0; \quad g(\zeta, \zeta_0) = \text{Im} \frac{e^{i\psi}}{\zeta - \zeta_0};$$

$$\omega_1^m(\zeta) = U^m, \quad \omega_2^m(\zeta) = V^m; \quad \omega_3^m(\zeta) = [u_3^m]/h;$$

$$\omega_4^m(\zeta) = [u_s^m]/h, \quad X^m(\zeta) = \omega_1^m - i\omega_2^m.$$

Ядро  $g(\zeta, \zeta_0)$  — сингулярное, регулярную часть системы здесь не выписываем.

В силу того, что скачки перемещений на концах разрезов должны обращаться в ноль, неизвестные  $\omega_1^m, \omega_2^m, d\omega_3^m/ds$  разыскиваем в классе  $h_0$  функций неограниченных на концах  $L_j$  [7]. Поэтому для замыкания алгоритма системе (2.4) необходимо рассматривать совместно с дополнительными условиями

$$\int_{L_j} (U^m + iV^m) d\zeta = 0, \quad \int_{L_j} du_3^m = 0 \quad (j = 1, 2 \dots k; \quad m = 0, 1, 2 \dots).$$

**§ 3. Результаты расчетов.** Введем параметризацию контура  $L_j$  (ниже индекс  $j$  опускаем):  $\zeta = \zeta(\beta), \zeta_0 = \zeta(\beta_0), (-1 \leq \beta, \beta_0 \leq 1)$  и в соответствии с этим положим

$$\omega_p^m(\zeta) = \frac{\Omega_p^m(\beta)}{\sqrt{1 - \beta^2 s'(\beta)}}, \quad (p = 1, 2; \quad m = 0, 1, 2 \dots), \quad s' = \frac{ds}{d\beta} > 0;$$

$$(3.1)$$

$$\frac{d\omega_3^m(\zeta)}{ds} = \frac{\Omega_3^m(\beta)}{\sqrt{1 - \beta^2 s'(\beta)}}, \quad \Omega_i^m(\beta) \in h_0[-1, 1] \quad (i = 1, 2, 3).$$

Используя эти выражения, представления (1.5), находим в результате детального асимптотического анализа напряжений

$$K_I^{\mp} - iK_{II}^{\mp} = \frac{2C_{66}^E \sqrt{\pi}}{\sqrt{s'(\mp 1)}} \frac{1}{2\kappa} \left( 1 - \frac{q_6}{q_{10}} q_1 \right) \sum_{m=0}^{\infty} [\Omega_1^m(\mp 1) -$$

$$- i\Omega_2^m(\mp 1)] \cos m\pi x_3;$$

$$K_{III}^{\pm} = - \frac{hC_{44}^E \sqrt{\pi}}{V s'(\mp 1)} \sum_{m=1}^{\infty} \Omega_3^m (\mp 1) \sin m\pi x_3; \quad (3.2)$$

$$K_D = - \frac{e_{31} \kappa q_{10}}{C_{11}^E (q_{10} - q_1 q_6)} K_I;$$

$$K_I = \sqrt{2\pi r} \sigma_n; \quad K_{II} = \sqrt{2\pi r} \sigma_{ns};$$

$$K_{III} = \sqrt{2\pi r} \sigma_{n3}, \quad K_D = \sqrt{2\pi r} D_3.$$

Здесь  $\sigma_n$ ,  $\sigma_{ns}$ ,  $\sigma_{n3}$  — нормальное и касательные напряжения за вершину трещины.

В качестве примера рассмотрим слой, ослабленный прямоугольным разрезом  $\xi_1 = P_1\beta$ ,  $\xi_2 = 0$  ( $-1 \leq \beta \leq 1$ ) при задании на торцах

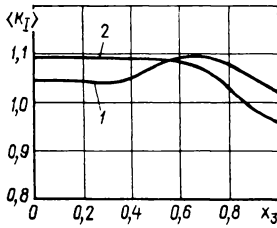


Рис. 2

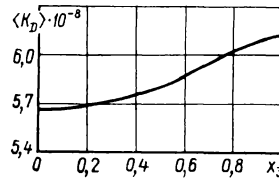


Рис. 3

слоя разности потенциалов  $2V_0$ . При численной реализации алгоритма система интегральных уравнений (2.4) методом механических квадратур [1] сводилась к линейной системе алгебраических уравнений, которая затем решалась методом редукции. Приближения с номером  $N$  отвечали удержанию в системе (2.4) первых  $3N+2$  неизвестных. Расчеты проводились при  $N=0,1,2,3,4$ , причем четвертое приближение практически не уточняло результатов в диапазоне  $|x_3| \leq 0,95$ . Для расчета напряжений в непосредственной близости от торцов использовать бесконечную систему одномерных сингулярных интегральных уравнений нецелесообразно. Для того следовало бы привлечь двумерные интегральные уравнения, которые помимо подвижной особенности типа Коши будут иметь неподвижную особенность в точках  $x_3 = \pm 1$ . Однако в этом нет необходимости, так как особенности в напряжениях у торца вычислены стандартным методом в работах [9, 10].

Пусть  $C_0 = 1$ . На рис. 2 приведены эпюры распределения относительного коэффициента интенсивности напряжений  $\langle K_I \rangle = \frac{K_I h}{\sqrt{\pi l} V_0 e_{33}}$  по толщинной координате. Кривые 1, 2 построены для значений  $h/l = 1$  и  $0,5$  соответственно. Эпюры величины  $\langle K_D \rangle = \frac{K_D h}{\sqrt{\pi l} \epsilon_{11}^s V_0}$  при  $h/l = 2,5$  приведены на рис. 3.

Из результатов, приведенных на рис. 2, следует, что механическое растяжение слоя поперек трещины  $\sigma_{\infty 22} \approx 15 \frac{H}{M^2}$  равносильно электрической нагрузке  $V_0 = \pm 1$  В на торцах.

Расчеты проводились для пьезокерамики типа PZT-4 [8].

**SUMMARY.** A boundary problem of electroelasticity for a piezoelectric ceramics layer slackened by tunnel through sections is considered. The problem is reduced to an infinite system of unidimensional singular integral equations. Results for calculation of the stress intensity coefficients are presented.

1. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях.— М.: Наука, 1985.— 253 с.
2. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Электроупругость.— Киев: Наук. думка, 1989.— 280 с.— (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5-ти т.; Т. 5).
3. Жиров В. Е. Электроупругое равновесие пьезокерамической плиты // Прикл. математика и механика.— 1977.— 41, № 6.— С. 1114—1121.
4. Жиров В. Е., Устинов Ю. А. Некоторые задачи теории плит из электроупругого материала // Тепловые напряжения в элементах конструкций.— 1977.— Вып. 17.— С. 62—67.
5. Лурье А. И. К теории толстых плит // Прикл. математика и механика.— 1942.— 6, № 2/3.— С. 151—169.
6. Писаренко Г. Г. Прочность пьезокерамики.— Киев: Наук. думка, 1987.— 232 с.
7. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.— М.: Наука, 1968.— 511 с.
8. Физическая акустика / Под редакцией У. Мэзона.— М.: Мир, 1966.— Т. 1, Ч. А.— 592 с.
9. Benthem J. P. A quarter—infinite crack in a half space; alternative and additional solutions // Int. J. Solid and Struct.— 1980.— 16, N 2.— P. 119—130.
10. Benthem J. P. State of stress at the vertex of a quarter—infinite crack in a half—space // Ibid.— 1977.— 13, N 5.— P. 479—492.

Сумский филиал Харьков. политехн. ин-та,

Поступила 01.08.90

УДК 539.374

**Ю. Н. Шевченко, Р. Г. Терехов,  
Н. С. Брайковская С. М. Захаров**

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТА ТЕЛА ПО ТРЕХЗВЕННОЙ ТРАЕКТОРИИ НАГРУЖЕНИЯ**

В работах [3, 7—9, 11] предложены определяющие уравнения теории термовязкопластичности для описания закономерностей деформирования элементов тела в неизотермических сложных процессах нагружения по произвольным траекториям и методы конкретизации функционалов, входящих в эти уравнения. В [2, 3, 7—13] исследованы закономерности неупругого деформирования некоторых конструкционных сталей и сплавов и проведено экспериментальное обоснование указанных определяющих уравнений в изотермических и неизотермических процессах сложного нагружения элементов тела по траекториям в виде двузвенных ломаных линий, включающим прямолинейные и криволинейные участки. В отличие от этого в данной статье приведены результаты исследований упругопластического процесса нагружения элемента тела при высокой температуре по трехзвенной траектории, расположенной в одной плоскости пространства А. А. Ильюшина [5].

По методике, изложенной в [4, 10], осуществлен при температуре 700 °С процесс сложного активного нагружения по плоской трехзвенной траектории, причем второе и третье звено криволинейные. Трубочные образцы, изготовленные из сплава ЭИ 437, равномерно нагретые до 700 °С, вначале растягивались осевой силой до значения необратимой деформации  $\epsilon^{(n)}_{zz} = 0,0133$ , а затем закручивались при одновременном уменьшении растягивающей силы. Начиная с некоторого момента времени, растягивающая сила вновь возрастала, а крутящий момент при этом уменьшался. Скорость нагружения образцов по траектории была