УДК 539.3

Л.А.Фильштинский, М.Л.Фильштинский

РАСТЯЖЕНИЕ СОСТАВНОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ ТРЕЩИНАМИ-РАЗРЕЗАМИ

Исследование сопряженных механических и электрических полей в однородной пьезокерамической пластине с трещинами, линейными включениями содержится в [1, 4]. Ниже предлагается решение задачи электроупругости для составной пьезокерамической плоскости, ослабленной трещинами достаточно произвольной конфигурации. Приводятся результаты расчетов.

§ 1. Рассмотрим кусочно-однородную пьезокерамическую среду, составленную из двух непрерывно скрепленных вдоль оси x_1 различных пьезокерамических полуплоскостей. Для определенности будем полагать, что направление предварительной поляризации пьезокерамики параллельно оси x_3 (рис.1). Пусть верхняя полуплоскость содержит трещины, которые в недеформированном состоянии ассоциируются с математическими разрезами $L_j\,(j = \overline{1,k})$, на бесконечности приложено однородное поле механических напряжений

$$<\sigma_{11}^{(1)}>, <\sigma_{11}^{(2)}>,$$

$$<\sigma_{13}>, <\sigma_{33}>$$

и электрической напряженности $<E_1>, <E_3^{(1)}>, <E_3^{(2)}>$, а на берегах разрезов имеет место вектор механического напряжения (X_{1n}, X_{3n}). Далее будем предполагать, что кривизны контуров L_j и функции X_{1n}, X_{3n} удовлетворяют условию Гельдера, L_j не имеют общих точек и заданная на них нагрузка непрерывно продолжима с одного берега на другой.

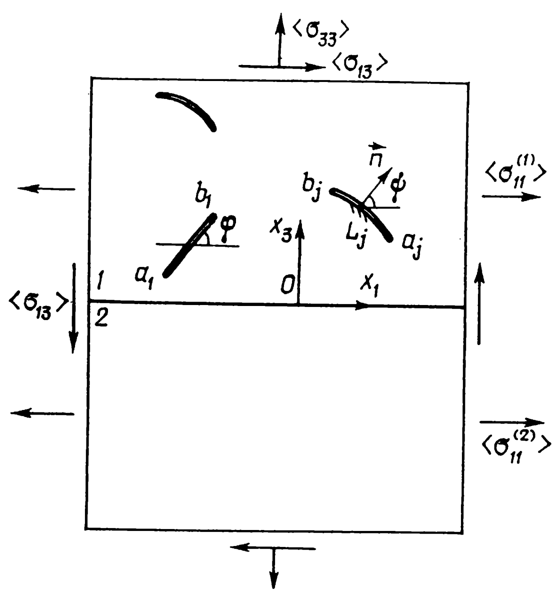

Рис. 1

В указанной постановке механические величины определяются через три комплексных потенциала $\Phi_\nu(z_\nu)$ по формулам [4]

$$\{\sigma_{33}, \sigma_{13}, \sigma_{11}\} = 2\,\mathrm{Re}\sum_{\nu=1}^{3}\{\gamma_\nu, -\gamma_\nu\mu_\nu, \gamma_\nu\mu_\nu^2\}\,\Phi_\nu(z_\nu);$$

$$\left\{u_1, u_3\right\} = 2\,\mathrm{Re}\sum_{\nu=1}^{3}\left\{p_\nu, q_\nu\right\}\varphi_\nu(z_\nu), \quad \Phi_\nu(z) = \frac{d\varphi_\nu(z)}{dz}; \tag{1.1}$$

$$\left\{E_1, E_3\right\} = 2\,\mathrm{Re}\sum_{\nu=1}^{3}\lambda_\nu\left\{1, \mu_\nu\right\}\Phi_\nu(z_\nu);$$

$$\left\{D_1, D_3\right\} = 2\,\mathrm{Re}\sum_{\nu=1}^{3} r_\nu\left\{\mu_\nu, -1\right\}\Phi_\nu(z_\nu);$$

$$\gamma_\nu = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}\mu_\nu^2, \quad \lambda_\nu = (d_{15} - d_{33})\mu_\nu - d_{31}\mu_\nu^3;$$

$$p_\nu = \gamma_\nu(s_{11}\mu_\nu^2 + s_{13}) + d_{31}\lambda_\nu\mu_\nu, \quad r_\nu = \mu_\nu^{-1}\varepsilon_{11}\lambda_\nu - \gamma_\nu d_{15};$$

$$q_\nu = \gamma_\nu(s_{13}\mu_\nu + s_{33}/\mu_\nu) + \lambda_\nu d_{33}, \; .$$

где σ_{ij}, u_i — компоненты тензора напряжения и вектора перемещения; E_i, D_i — компоненты электрической напряженности и индукции; $s_{ik} = s_{ik}^E$, $d_{ik}, \varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}^T$ — соответственно упругие податливости, пьезоэлектрические модули и диэлектрические постоянные [2, 3]; комплексные параметры $\mu_\nu\,(\mathrm{Im}\,\mu_\nu > 0)$ являются корнями характеристического уравнения

$$[s_{33} + (2s_{13} + s_{44})\mu^2 + s_{11}\mu^4](\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}\mu^2) - \mu^2(d_{15} - d_{33} - d_{31}\mu^2)^2 = 0. \tag{1.2}$$

В дальнейшем всем величинам, относящимся к r -й полуплоскости, будем приписывать сверху индекс r. На линии сопряжения полуплоскостей необходимо поставить условия непрерывной продолжимости векторов напряжения и смещения, а также электрических величин E_1 и D_3. Имеем в соответствии с (1.1)

$$\mathrm{Re}\sum_{\nu=1}^{3}\left\{c_{k\nu}^{(1)}\Phi_\nu^{(1)}(x_1) - c_{k\nu}^{(2)}\Phi_\nu^{(2)}(x_1)\right\} = 0 \quad (k = \overline{1,6}); \tag{1.3}$$

$$c_{1\nu}^{(r)} = \gamma_\nu^{(r)}, c_{2\nu}^{(r)} = \gamma_\nu^{(r)}\mu_\nu^{(r)}, c_{3\nu}^{(r)} = q_\nu^{(r)}, c_{4\nu}^{(r)} = q_\nu^{(r)}, c_{5\nu}^{(r)} = \lambda_\nu^{(r)}, \; c_{6\nu}^{(r)} = r_\nu^{(r)} \quad (r = 1,2).$$

Механические граничные условия на берегах L_j формулируются обычным образом. Электрические условия, следуя [6], представим как условия сопряжения поля на границе раздела двух диэлектриков. В терминах введенных потенциалов запишем

$$\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} b_{nk}\left\{\Phi_k^{(1)}(\zeta_k^{(1)})\right\}^{\pm} = f_n^{\pm}(\zeta) \quad (n = 1,2); \tag{1.4}$$

$$\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} b_{nk}\left[\Phi_k^{(1)}(\zeta_k^{(1)})\right] = 0 \quad (n = 3,4);$$

$$b_{1k} = \gamma_k\mu_k a_k(\psi), \; b_{2k} = \gamma_k a_k(\psi), \; b_{3k} = \lambda_k a_k(\psi);$$

$$b_{4k} = r_k a_k(\psi), \; a_k(\psi) = \mu_k\cos\psi - \sin\psi;$$

$$f_1(\zeta) = X_{1n}(\zeta), \quad f_2(\zeta) = -X_{3n}(\zeta);$$

$$\zeta_k^{(1)} = \mathrm{Re}\,\zeta + \mu_k^{(1)}\mathrm{Im}\,\zeta, \; \zeta = \xi_1 + i\xi_2 \in L_j \; (j = \overline{1,k}).$$

Здесь ψ — угол между положительной нормалью к левому берегу L_j (при движении от его начала a_j к концу - b_j) и осью ox_1; символ $[\cdot]$ — означает скачок соответствующей величины при переходе через разрез, индекс $r = 1$ относится к верхней полуплоскости.

Таким образом, задача заключается в определении потенциалов $\Phi_\nu^{(r)}(z_\nu^{(r)})$ по условиям сопряжения на границе раздела сред (1.3), граничным равенствам (1.4), а также условиям на бесконечности.

§ 2. Пусть в точке (x_{10}, x_{30}) верхней полуплоскости составной среды имеет место сосредоточенная сила $P_1 + iP_3$ или сосредоточенный заряд плотности ρ. Решение этой задачи назовем фундаментальным. Используя идею принципа отражения [5], представим его в виде

$$\Phi_\nu^{(1)}(z_\nu^{(1)}) = \frac{A_\nu^{(1)}}{z_\nu^{(1)} - z_{\nu 0}^{(1)}} - \sum_{m=1}^{3} \frac{\overline{\beta}_{\nu m}^{(1)} \overline{A}_m^{(1)}}{z_\nu^{(1)} - \overline{z}_{m0}^{(1)}} \quad (\nu = \overline{1,3}; r = 1,2);$$

$$\Phi_\nu^{(2)}(z_\nu^{(2)}) = \sum_{m=1}^{3} \frac{\beta_{\nu+3,m}^{(1)} A_m^{(1)}}{z_\nu^{(2)} - z_{m0}^{(1)}}, z_\nu^{(r)} = \operatorname{Re} z + \mu_\nu^{(r)} \operatorname{Im} z;$$

$$z_{\nu 0}^{(r)} = \operatorname{Re} z_0 + \mu_\nu^{(r)} \operatorname{Im} z_0, \quad z = x_1 + ix_3, \ z_0 = x_{10} + ix_{30} \ (x_{30} > 0). \quad (2.1)$$

Здесь первый член дает фундаментальное решение для однородной пьезокерамической среды; величины $A_\nu^{(1)}(\nu = 1,2)$ определены в [4]; константы $\beta_{\nu m}$ пока произвольны.

Потребовав, чтобы так определенное решение удовлетворяло условиям сопряжения (1.3) на границе $x_3 = 0$, приходим к системам уравнений относительно $\beta_{\nu m}$.

$$\sum_{\nu=1}^{3} (\overline{c_{k\nu}^{(1)}} \beta_{\nu m}^{(1)} + c_{k\nu}^{(2)} \beta_{\nu+3,m}^{(1)}) = c_{km}^{(1)} \ (m = \overline{1,3}; \ k = \overline{1,6}). \quad (2.2)$$

Можно показать, что определители этих систем отличны от нуля. Таким образом, фундаментальное решение вполне определяется соотношениями (2.1), (2.2).

Потенциалы исходной граничной задачи построим, заменив в (2.1) постоянные $A_m^{(1)}$ некоторыми распределениями по формулам (ds — элемент дуги L_j)

$$A_m^{(1)} = -\frac{1}{2\pi i} \omega_m(\zeta) a_m^{(1)}(\psi) ds \quad (m = \overline{1,3});$$

$$a_m^{(1)}(\psi) = \mu_m^{(1)} \cos\psi - \sin\psi, \ \zeta \in L = \cup L_j. \quad (2.3)$$

Имеем

$$\Phi_\nu^{(1)}(z_\nu^{(1)}) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_\nu(\zeta) d\zeta_\nu^{(1)}}{\zeta_\nu^{(1)} - z_\nu^{(1)}} - \sum_{m=1}^{3} \frac{\overline{\beta_{\nu m}^{(1)}}}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\omega_m(\zeta) d\zeta_m^{(1)}}}{\overline{\zeta_m^{(1)}} - z_\nu^{(1)}} + B_\nu^{(1)}; \quad (2.4)$$

$$\Phi_\nu^{(2)}(z_\nu^{(2)}) = \sum_{m=1}^{3} \frac{\beta_{\nu+3,m}^{(1)}}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_m(\zeta) d\zeta_m^{(1)}}{\zeta_m^{(1)} - z_\nu^{(2)}} + B_\nu^{(2)};$$

$$z_\nu^{(r)} = \operatorname{Re} z + \mu_\nu^{(r)} \operatorname{Im} z, \quad \zeta_\nu^{(1)} = \operatorname{Re}\zeta + \mu_\nu^{(1)} \operatorname{Im}\zeta;$$

$$\zeta \in L \quad (r = 1,2; \ \nu = \overline{1,3}).$$

Интегрирование здесь производится по соответствующим афинным отображениям контуров L_j в плоскостях $z_\nu^{(1)}$ $(\nu = \overline{1,3})$. Постоянные $B_\nu^{(r)}$ отражают условия на бесконечности.

Функции (2.4) удовлетворяют условиям сопряжения (1.3) независимо от выбора плотностей $\omega_\nu(\zeta)$. Последние необходимо определить из граничных равенств (1.4). Подставляя туда предельные значения функций (2.4), приходим к смешанной системе из двух вещественных сингулярных интегральных и четырех алгебраических уравнений относительно трех комплексных плотностей $\omega_\nu(\zeta)$

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{\nu=1}^{3} b^0_{n\nu}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\omega_\nu(\zeta)\,d\zeta^{(1)}_\nu}{\zeta^{(1)}_\nu-\zeta^{(1)}_{\nu 0}}-\sum_{m=1}^{3}\frac{\overline{\beta^{(1)}_{\nu m}}}{\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega_m(\zeta)}\,\overline{d\zeta^{(1)}_m}}{\overline{\zeta^{(1)}_m}-\zeta^{(1)}_{\nu 0}}\right\}=W_n(\zeta_0)\quad (n=1,2); \tag{2.5}$$

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{\nu=1}^{3} b_{n\nu}\omega_\nu(\zeta)=0\quad (n=\overline{1,4});$$

$$W_1(\zeta_0)=2X_{1n}-2(<\sigma^{(1)}_{11}>\cos\psi_0+<\sigma_{13}>\sin\psi_0);$$

$$W_2(\zeta_0)=-2X_{3n}+2(<\sigma_{13}>\cos\psi_0+<\sigma_{33}>\sin\psi_0);$$

$$\zeta^{(1)}_{\nu 0}=\mathrm{Re}\,\zeta_0+\mu^{(1)}_\nu\mathrm{Im}\,\zeta_0,\ \psi_0=\psi(\zeta_0),\ b^0_{n\nu}=b_{n\nu}(\psi_0).$$

Эту систему необходимо рассматривать в совокупности с дополнительными условиями

$$\mathrm{Re}\sum_{\nu=1}^{3} p_\nu\int_{L_j}\omega_\nu(\zeta)\,d\zeta^{(1)}_\nu=0,\quad \mathrm{Re}\sum_{\nu=1}^{3} q_\nu\int_{L_j}\omega_\nu(\zeta)\,d\zeta^{(1)}_\nu=0\quad (j=\overline{1,k}), \tag{2.6}$$

которые вытекают из требования однозначности перемещений в составной среде.

Уравнения (2.5), (2.6) однозначно определяют функции $\omega_\nu(\zeta)$ в классе функций, неограниченных на концах L_j. По ним восстанавливаются в соответствии с формулами (2.4) потенциалы $\Phi^{(r)}_\nu(z^{(r)}_\nu)$. После этого по соотношениям (1.1) можно вычислить механические и электрические полевые величины в любой точке составной среды.

В механике разрушения имеют значение коэффициенты интенсивности напряжений, определяемые следующим образом [7]:

$$K_{\mathrm{I}}=\lim\sqrt{2\pi r}\,\sigma_n,\quad K_{\mathrm{II}}=\lim\sqrt{2\pi r}\,\tau_{ns}\quad (r\to 0), \tag{2.7}$$

где σ_n, τ_{ns} — нормальное и касательное напряжения на продолжении трещины за вершину, r — расстояние от точки до вершины c.

Параметризуем контур L_j следующим образом (ниже индекс j опускаем): $\zeta=\zeta(\beta)$, $\zeta_0=\zeta(\beta_0)$, $-1\leqslant\beta,\beta_0\leqslant 1$. В соответствии с этим положим

$$\omega_m(\zeta)=\frac{\Omega_m(\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad \Omega_m(\beta)\in H[-1,1]\quad (m=\overline{1,3}). \tag{2.8}$$

Вычисляя асимптотику напряжений в вершине трещины с учетом соотношений (1.1), (2.4), (2.8), находим

$$K_{\mathrm{I}}=\mp\sqrt{\pi s'(\pm 1)}\,\mathrm{Im}\sum_{m=1}^{3}\gamma_m\left\{a^{(1)}_m(\psi_c)\right\}^2\Omega_m(\pm 1);$$

$$K_{\mathrm{II}}=\pm\sqrt{\pi s'(\pm 1)}\,\mathrm{Im}\sum_{m=1}^{3}\gamma_m\,a^{(1)}_m(\psi_c)e^{(1)}_m(\psi_c)\,\Omega_m(\pm 1); \tag{2.9}$$

$$a^{(1)}_m(\psi_c)=\mu^{(1)}_m\cos\psi_c-\sin\psi_c;$$

$$e^{(1)}_m(\psi_c)=\mu^{(1)}_m\sin\psi_c+\cos\psi_c,$$

где верхний знак соответствует вершине $c=в$, нижний — $c=a$; ψ_c — угол между нормалью к L_j в вершине c и осью ox_1.

§ 3. В качестве примера рассмотрим составную пьезокерамическую среду (верхняя полуплоскость $BaTiO_3$, нижняя — PZT - 5), содержащую над линией раздела параболическую трещину, параметрические уравнения которой $\xi_1+i\xi_2=(p_1\beta+ip_2\beta^2)e^{i\varphi}+ih$, $-1\leqslant\beta\leqslant 1$.

Ниже представлены результаты расчетов относительных коэффициен-

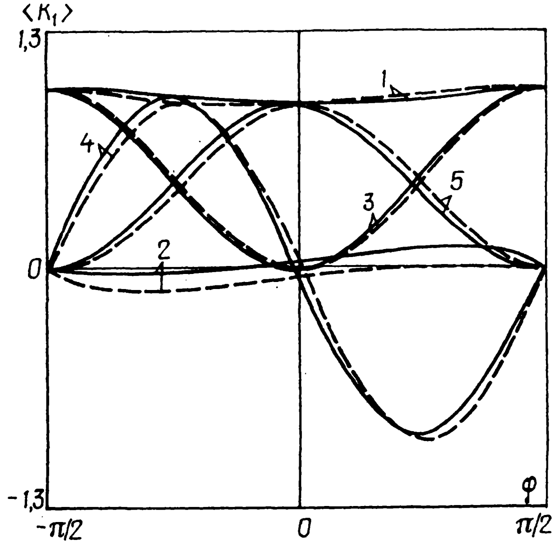

Рис. 2

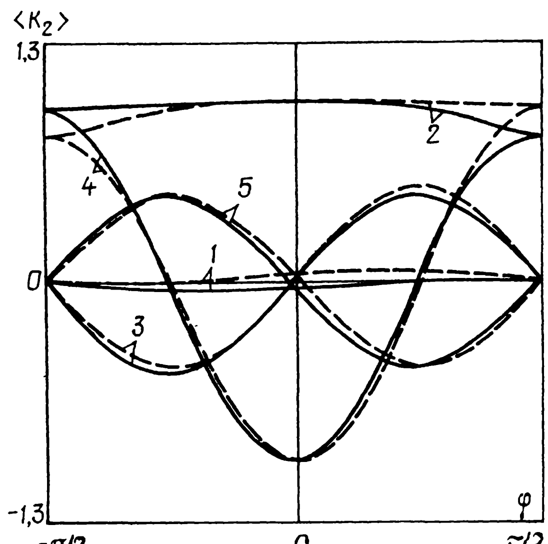

Рис. 3

тов интенсивности напряжений $<K_{1,2}> = (\Lambda\sqrt{\pi l})^{-1} K_{I,II}$ (Λ—параметр нагружения) в зависимости от угла φ и параметра кривизны p_2 для различных видов нагружения. Кривые *1,2* построены соответственно для равномерной нормальной и касательной нагрузки P на берегах трещины ($\Lambda = P$); кривые *3, 4, 5* соответственно для равномерного растяжения вдоль оси x_1 ($\Lambda = <\sigma_{11}^{(1)}>$), чистого сдвига ($\Lambda = <\sigma_{13}>$) и растяжения вдоль оси x_3 ($\Lambda = <\sigma_{33}>$) на бесконечности. Сплошные кривые относятся к вершине $c = a$, штриховые — к вершине $c = в$.

На рис. 2,3 построены графики величин $<K_1>$ и $<K_2>$ соответственно для прямой трещины при $p_1 = 2$, $p_2 = 0$, $h = 2{,}2$; на рис. 4 — графики для параболической трещины при $p_1 = 1$, $\varphi = 0$, $h = 0{,}8$.

Из результатов расчетов следует, что влияние неоднородности пластины на коэффициенты интенсивности напряжений может оказаться существенным. Например, при $0 < h/l < 0{,}05$ величина $<K_1>$ резко возрастает от значения 0,61 до 0,79 и затем, с увеличением h/l монотонно возрастает, асимптотически приближаясь к единице.

В заключение отметим, что заданные на бесконечности механические и электрические величины не вполне произвольны. Напряжения σ_{13}, σ_{33}, а также компонента электрической напряженности E_1 непрерывно продолжимы через линию раздела сред, а σ_{11} и E_3 претерпевают скачки, которые можно определить из условий совместности. Имеем

$$s_{11}^{(2)} <\sigma_{11}^{(2)}> + d_{31}^{(2)} <E_3^{(2)}> = s_{11}^{(1)} <\sigma_{11}^{(1)}> + (s_{13}^{(1)} - s_{13}^{(2)}) <\sigma_{33}> + d_{31}^{(1)} <E_3^{(1)}>;$$

$$d_{31}^{(2)} <\sigma_{11}^{(2)}> + \varepsilon_{33}^{(2)} <E_3^{(2)}> = d_{31}^{(1)} <\sigma_{11}^{(1)}> + (d_{33}^{(1)} - d_{33}^{(2)}) <\sigma_{33}> + \varepsilon_{33}^{(1)} <E_3^{(1)}>.$$

Отсюда, по заданным $<\sigma_{11}^{(1)}>, <\sigma_{33}>, <E_3^{(1)}>$ определяются $<\sigma_{11}^{(2)}>$ и $<E_3^{(2)}>$.

Р Е З Ю М Е. Розглядається задача про розтяг складеної п'єзокерамічної площини, послабленої тріщинами, розташованими цілком у верхній напівплощині. Побудовано інтегральні представлення розв'язків граничної задачі, на базі яких вона зведена до мішаної системи інтегральних та алгебраічних рівнянь.

S U M M A R Y. The problem of extension of a composite piezoceramic plane weakened with the cracks completely situated in the upper half-plane is considered. Integral representations of solutions to the boundary value problem are constructed. On this basis, the problem is reduced to a mixed system of integral and algebraic equations.

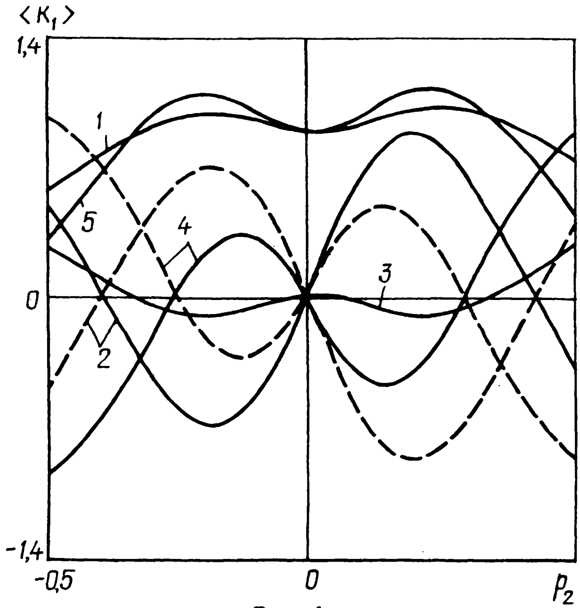

Рис. 4

1. *Белокопытова Л.В., Фильштинский Л.А.* Двумерная краевая задача электроупругости для пьезоэлектрической среды с разрезами // Прикл. математика и механика. — 1979. — 43, № 1. — С. 138 — 143.
2. *Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г.* Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика. — М., 1966. — Т. 1, Ч.А. — С. 204 — 326.
3. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость. — Киев: Наук. думка. 1989. — 280 с.
4. *Иваненко О.А., Фильштинский Л.А.* Взаимодействие трещины и включения в пьезокерамическом полупространстве // Прикл. механика. — 1983. — 19, № 12. — С. 52 — 58.
5. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики: В 2 -х т. — М.: Изд-во иностр. лит., 1958. — Т. 1. — 930 с.
6. *Половинкина И.Б., Улитко А.Ф.* К теории равновесия пьезокерамических тел с трещинами // Тепл. напряжения в элементах конструкций. — 1978. — № 18. — С. 10 — 17.
7. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. — М.: Наука. 1974. — 640 с.

Сумский физ.-технол. ин-т
Поступила 08.04.92