ДВУМЕРНЫЕ СТАТИЧЕСКИЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛ С ТРЕЩИНАМИ

Л.А.Фильштинский

Теория регулярных упругих кусочно-однородных структур начала развиваться у нас в стране под влиянием чл.-корр. АН СССР Э.И.Григолюка и затрагивала вначале проблемы, связанные с расчетом на прочность и жесткость регулярно-перфорированных изотропных пластин и оболочек [1-3]. Развитые здесь подходы оказались как нельзя более приспособленными для построения структурной теории волокнистых композиционных материалов и были использованы, например, в [4,5] при рассмотрении КМ с простейшей микроструктурой ячейки, а затем в [6-8] для более общих случаев.

Растяжение анизотропных регулярно-перфорированных пластин и проблема осреднения их упругих свойств исследованы в [9,10]. Разработанные здесь алгоритмы и специфические особенности, связанные с анизотропией упругих свойств, были использованы затем при построении моделей волокнистых КМ с анизотропными компонентами и осреднении их упругих, электрических и теплофизических свойств [11-14].

Ниже более подробно остановимся на исследованиях этого цикла последних лет, касающихся однородных и кусочно-однородных анизотропных пластин и оболочек с трещинами-разрезами, а также динамических задач теории упругости о взаимодействии волн напряжений с трещинами в изотропных телах.

1. Растяжение анизотропных (изотропных) пластин с криволинейными трещинами - разрезами

Впервые первая краевая задача для неограниченной анизотропной среды, ослабленной несколькими криволинейными разрезами, была решена в [15]. Предполагалось, что разрезы L_j не имеют общих точек и представляют собой простые разомкнутые гладкие дуги с кривизной, удовлетворяющей условию Гельдера [16], на их берегах заданы удовлетворяющие тому же условию напряжения, а на бесконечности имеет место однородное поле растяжения и сдвига.

Комплексные потенциалы, определяющие напряжения в среде, конструируются в виде

$$\Phi_k(z_k)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{p_k(t)}{t_k-z_k}\,dt_k+A_k,\quad L=\bigcup_{j=1}^{n} L_j, \tag{1.1}$$

причем, плотности $p_1(t)$ и $p_2(t)$ связываются между собой линейным соотношением, обеспечивающим непрерывную продолжимость вектора напряжения через берега разрезов. В силу этого краевая задача сводится к сингулярному интегральному уравнению первого рода относительно функции $p_1(t)$, которое в совокупности с дополнительными условиями (однозначности перемещений) всегда разрешимо.

Численный анализ построенного алгоритма показал существенную зависимость коэффициентов интенсивности напряжений от кривизны трещины и характера анизотропии материала.

В [15] был проведен предельный переход к изотропной среде, при этом выражения (1.1) превратились в известные представления типа Д.И.Шермана для изотропной кусочно-однородной среды [62]. Одновременно с [15] вышла в свет статья [17], в которой были получены интегральные уравнения первой краевой задачи для изотропной среды с криволинейными разрезами.

Предложенный в [15] подход обобщен на ситуацию, когда в анизотропной среде имеется двоякопериодическая система трещин-разрезов [18]. Здесь предполагается, что в пределах фундаментальной ячейки имеется несколько вообще криволинейных разрезов, контуры которых не имеют общих точек.

Осреднение упругих свойств такой регулярной трещиноватой среды показало, что (в смысле жесткости на растяжение) она эквивалентна однородной анизотропной среде, параметры упругости которой описываются точно, при помощи некоторых функционалов, определенных на решениях соответствующих краевых задач.

Вторая краевая задача для анизотропной среды с разрезами рассмотрена в [19]. Здесь, наряду с обычными допущениями относительно контуров L_j, предполагается, что производные от заданных перемещений по дуговой координате на L_j – функции класса H^* [16]. Представления решений имеют вид (1.1), однако связь между плотностями выбирается таким образом, чтобы обеспечить заданные на L_j скачки перемещений (точнее производные от них по дуговой координате). Появляющийся в процессе решения краевой задачи жесткий поворот ω на бесконечности фиксируется условием равенства нулю главного момента сил, возникающих на берегах L.

Оставшееся краевое условие приводит к сингулярному интегральному уравнению первого рода, которое в совокупности с дополнительными условиями равенства нулю главного вектора усилий, возникающих на каждом L_j, имеет единственное решение в классе H^*.

Для случая одиночной прямолинейной трещины решение определяется в замкнутом виде. Так, например, если трещина длины 2ℓ ориентирована вдоль оси Ox и на ее берегах заданы перемещения $u^{\pm}(x) = 0$, $v^{\pm}(x) = \pm v_0\sqrt{1-(x/\ell)^2}$, то асимптотика напряжений на продолжении за вершину трещины такова

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\ell}{2\rho}}\,\mathrm{Re}\left[\lambda\left(S_1\mu_2^2 - S_2\mu_1^2\right)\right], \quad \lambda = \frac{\gamma}{\Delta} \tag{1.2}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\ell}{2\rho}}\,\mathrm{Re}\left[\lambda\left(S_1 - S_2\right)\right], \quad \tau_{xy} = \sqrt{\frac{\ell}{2\rho}}\,\mathrm{Re}\left[\lambda\left(S_1\mu_2 - S_2\mu_1\right)\right]$$

$$\gamma = \frac{i v_0}{\ell} - \omega, \quad \Delta = S_2 g_1 - S_1 g_2, \quad S_\nu = \mu_\nu^2\beta_{11} + \beta_{12} - \mu_\nu\beta_{16}$$

$$g_\nu = \mu_\nu\beta_{12} + \frac{\beta_{22}}{\mu_\nu} - \beta_{26} \qquad (\nu = 1, 2).$$

Здесь β_{ik} – коэффициенты закона Гука для анизотропной среды, μ_ν – соответствующие комплексные параметры [20].

Учет влияния границы области на напряженное состояние в телах с трещинами осуществлен в последующих исследованиях. В работе [21] рассмотрены краевые задачи для анизотропной полуплоскости с разрезами или отверстиями. Интегральные представления решений строятся с использованием полученных здесь функций Грина. Для свободной полуплоскости с разрезами они имеют вид

$$\Phi_\nu(z_\nu)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{P_\nu(t)\,dt_\nu}{t_\nu-z_\nu}-\frac{\alpha_\nu}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{P_1(t)}\,\overline{dt_1}}{\overline{t_1}-z_\nu}-\frac{\beta_\nu}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{P_2(t)}\,\overline{dt_2}}{\overline{t_2}-z_\nu} \quad (\nu=1,2) \tag{1.3}$$

$$\alpha_1=(\mu_2-\bar{\mu}_1)/(\mu_1-\mu_2),\quad \beta_1=(\mu_2-\bar{\mu}_2)/(\mu_1-\mu_2)$$

$$\alpha_2=(\bar{\mu}_1-\mu_1)/(\mu_1-\mu_2),\quad \beta_2=(\bar{\mu}_2-\mu_1)/(\mu_1-\mu_2).$$

Такое построение обеспечивает автоматическое выполнение краевых условий на границе полуплоскости. Связь между функциями $P_1(t)$ и $P_2(t)$ выбирается таким образом, чтобы вектор напряжения мог быть непрерывно продолжен через разрез. Краевая задача сводится к сингулярному интегральному уравнению относительно функции $P_1(t)$, которая в совокупности с дополнительными условиями однозначно определяет решение. Вторая краевая задача для полуплоскости с разрезами рассмотрена в [22].

Напряженное состояние в дисках сложной конфигурации, подкрепленных ребрами жесткости и ослабленных отверстиями и разрезами, исследуется в [23-25]. Там же строится макромодель такого структурного диска, наделенного циклической симметрией.

2. Кусочно-однородные среды с разрезами

Сюда относятся краевые задачи о разрезах, частично или полностью расположенных на линиях раздела сред с различными упругими свойствами. Первые работы в этом направлении посвящены исследованию напряженного состояния кусочно-однородной плоскости с разрезами вдоль круговых или прямых линий раздела [26,27].

Продольный сдвиг анизотропной среды с включениями, когда на границе раздела фаз имеются разрезы, рассмотрен в [28]. Относительно контуров включений предполагается лишь, что это простые гладкие замкнутые линии с кривизной, удовлетворяющей условию Гельдера.

В наиболее общей постановке эти вопросы рассмотрены в [29]. Предполагается, что граница области (объединение разрезов и линий раздела) – произвольная кусочно-гладкая линия [16]. Таким образом, сюда включаются случаи инородного включения с кусочно-гладким контуром, разреза с точкой излома, ветвящегося разреза, расположение разреза на линии раздела сред, выхода на эту линию и пересечение с ней и т.п.

Исходные представления комплексных потенциалов, описывающих решение краевой задачи, имеют такой же вид, как и в [15,62]. Это дает возможность свести краевую задачу к сингулярному интегральному уравнению относительно одной искомой плотности $\omega(t)$, причем помимо подвижной особенности типа Коши оно обладает неподвижными особенностями в тех точках, где сходятся не касательные друг к другу дуги.

Теория сингулярных интегральных уравнений с неподвижными особенностями получила свое развитие в последние годы [30,31], некоторые аспекты ее обсуждались в [32,33,63,64]. Важное значение приобретают вопросы численной реализации таких уравнений, так как имеющиеся в литературе работы касаются лишь случаев простых разомкнутых контуров.

По-видимому, первая достаточно общая схема численной реализации сингулярных интегральных уравнений с неподвижными особенностями на кусочно-гладких линиях в классе H^* предложена М.Г.Грингаузом. Здесь использована идея М.А.Лаврентьева [34] о полигональной аппроксимации искомых функций. Выполнение интегрального уравнения и дополнительных условий на дискретном множестве точек коллокации приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно узловых значений полигона. Замыкают систему линейные связи в тех узлах, где сходятся не касательные друг к другу дуги (полученные из асимптотического анализа уравнения в окрестности этих узлов).

Впоследствии описанная схема анализа напряжений в кусочно-однородных средах с разрезами была использована при построении модели волокнистого композиционного материала с дефектами типа трещин.

3. Продольный сдвиг анизотропной среды с туннельными разрезами

Первая задача о криволинейных туннельных трещинах продольного сдвига в неограниченной анизотропной среде рассмотрена в [35]. Здесь исследуется влиние кривизны трещины и анизотропии материала на коэффициент интенсивности напряжений. Для перехода к изотропной среде достаточно положить $\mu_1 = i$. Далее эта задача была обобщена на двоякопериодическую систему трещин продольного сдвига в работе [36], где помимо вычисления коэффициента интенсивности напряжений произведено осреднение упругих свойств такой трещиноватой среды. Продольный сдвиг композиционного материала с анизотропными компонентами при наличии дефектов типа трещин на границах раздела рассмотрен в [28].

4. Температурные напряжения в анизотропной среде с разрезами

Стационарные температурные поля и напряжения в неограниченной среде с криволинейным разрезом с учетом контакта его берегов рассматриваются в [37]. Предполагается, что имеется один участок контакта, прилегающий к одной из вершин, причем трение между берегами отсутствует. В окрестности разреза действуют два точечных источника и два стока таким образом, что принятая схема контакта действительно имеет место.

Нестационарная задача термоупругости для анизотропного в смысле теплофизических и упругих свойств цилиндрического тела с туннельными трещинами-разрезами решается в [38]. Предполагается, что поперечное сечение тела представляет собой многосвязную область, ограниченную внешним контуром C и контурами разрезов L_j, кривизны которых удовлетворяют условию Гельдера. Тело находится в условиях плоской деформации.

В качестве примера рассматривается остывание отливки прямоугольного поперечного сечения (со скругленными углами) с внутренней, расположенной на оси симметрии трещиной. Предполагается, что теплообмен с внешней средой осуществляется по закону Ньютона, граница тела свободна от сил и оно остывает от начальной температуры $T_0 = 1000^\circ$ до температуры окружающей среды $T_* = 20^\circ$. Выявляются зависимости коэффициента интенсивности напряжений от времени в процессе остывания тела, а также характерное явление разгрузки на его контуре в тени трещины. В дальнейшем эта задача была обобщена в различных направлениях [39].

5. Изгиб анизотропных пластин с трещинами

Изгиб неограниченной пластины с криволинейными трещинами-разрезами рассмотрен в [40]. В идейном плане эта работа близка к [15], однако имеются и особенности. Так, условия однозначности функции прогибов в окрестности каждого разреза равносильны трем уравнениям. Поэтому для фиксации решения сингулярного интегрального уравнения краевой задачи в классе h_0 [16] необходимо определить соответствующим образом константы B_j, фигурирующие в краевых условиях на разрезах L_j. Такая же ситуация имеет место и в случае изотропной пластины с дефектами [41].

Учет влияния границы содержится в [42], где рассматривается изгиб защемленной вдоль края полубесконечной анизотропной пластинки, ослабленной криволинейными трещинами-разрезами. Выписывается функция Грина соответствующей краевой задачи, исходя из которой строятся интегральные представления решений. В качестве примера взята трещина вдоль дуги эллипса. Для этого случая численно исследуется влияние кривизны трещины и близости края на главную асимптотику изгибающих моментов в окрестности вершин.

6. Контактные задачи для тел с трещинами

В некоторых случаях неучет контакта берегов приводит к существенному завышению коэффициентов интенсивности напряжений. Контактные задачи этого рода – нелинейные краевые задачи, в процессе решения которых наряду с напряженно-деформированным состоянием разыскивается также и зона контакта. В работах [37,43–46] предложена схема решения контактных задач в предположении, что имеется один участок контакта, примыкающий к одной из вершин, и трение между берегами отсутствует. Рассматривается неограниченная анизотропная пластинка с криволинейным разрезом [43,45], полуплоскость с разрезом [44,46], взаимодействие двух разрезов с учетом контакта берегов [45], температурные напряжения в анизотропной пластине с разрезом при действии стационарного теплового поля [37].

Анализ численных результатов показал, например, что учет контакта берегов разреза при действии на бесконечности однородного поля сдвиговых напряжений в пластине с трещиной вдоль дуги эллипса может подправить значения коэффициента интенсивности K_2 на 10–25%.

Отметим, что в полученных алгоритмах производится, аналогично [15], предельный переход к изотропной среде с разрезами.

7. Краевые задачи электроупругости для пьезоэлектрических тел с разрезами

При действии электрического поля или механических напряжений на пьезокерамическую пластинку с трещиной-разрезом в окрестности последнего возникают сопряженные сингулярные поля механических и электрических величин. Если трещина не выходит на поверхность, то механические напряжения, векторы электрической напряженности и индукции имеют в окрестности вершины особенности типа $r^{-1/2}$. Это приводит к тому, что помимо механического разрушения возникает вероятность электрического "разрушения", т.е. пробоя диэлектрика и нарушения структуры материала в окрестности кончика трещины.

Для оценки разрушения пьезоэлектрического тела с трещиной необходимо, как это следует из [47], иметь решение соответствующей задачи электроупругости. Двумерные задачи электроупругости можно записать в терминах теории функций комплексного переменного, например так, как это сделано в [48,49].

Первая краевая задача электроупругости для неограниченной поперечно-изотропной пьезоэлектрической среды (кристалл гексагональной системы $6mm$, поляризованная керамика [65]), ослабленной туннельными вдоль оптической оси криволинейными трещинами-разрезами, рассматривается в [48]. Предполагается, что поверхность трещины покрыта тонкими заземленными электродами и, стало быть, на ней потенциал электрического поля (или касательная компонента вектора электрической напряженности) равен нулю. Это приводит к тому, что разрез является фронтом разрыва не только вектора механических перемещений и тензора механических напряжений, но и векторов электрической напряженности и индукции.

Краевая задача сводится к системе трех сингулярных уравнений. Для прямой трещины решение находится в замкнутой форме. Аналогичная задача для кристалла 23, 43 m рассмотрена в [52].

Если трещина моделируется математическим разрезом, то целесообразно, по-видимому, электрические граничные условия приближенно принимать в виде, предлагаемом в [54].

Такая постановка существенно меняет алгоритм решения краевых задач для пьезоэлектрических тел с разрезами, ибо в силу непрерывной продолжимости через разрез нормальной компоненты вектора электрической индукции и касательной компоненты вектора напряженности поля, краевая задача сводится к смешанной системе, состоящей из одного комплексного сингулярного интегрального и четырех вещественных алгебраических уравнений.

В последующих работах [50–53] рассмотрены краевые задачи для пьезокерамической полуплоскости с разрезом, взаимодействие криволинейного и прямолинейного разрезов в пьезокерамической среде. Получено замкнутое решение задачи о сосредоточенной силе или заряде в окрестности прямолинейного разреза в неограниченной пьезокерамической пластинке.

8. Взаимодействие волн напряжений с трещиной-разрезом в упругой среде

При действии на берегах разреза гармонической во времени нагрузки, динамический коэффициент интенсивности с увеличением частоты ω (при фиксированной длине трещины) сначала подрастает по сравнению со статическим значением (при $\omega = 0$), достигает максимального значения, а затем убывает. Величина этого отклонения может существенно зависеть от кривизны трещины. Для прямой трещины она достигает, в различных случаях, до 15-25%.

Традиционные методы динамики трудно приспособить к анализу волновых полей в окрестности криволинейной трещины. Впервые задача такого рода для трещины продольного сдвига в неограниченной упругой среде была рассмотрена в [55], где соответствующая краевая задача сведена к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению. Численная реализация алгоритма позволила исследовать влияние кривизны трещины на динамический коэффициент интенсивности напряжений.

Обобщение на случай взаимодействия волн напряжений с периодической системой трещин продольного сдвига содержится в [56]. Учет влияния границы тела - в [57], где рассмотрен также случай, когда трещина-разрез выходит на границу полупространства. Взаимодействие волн напряжений с жесткой туннельной вставкой исследовано в [58,59]. Периодическая система трещин в полупространстве рассмотрена в [60].

В периодической динамической задаче полоса периодов играет роль волновода с мягкими стенками. Здесь существует дискретный спектр волновых чисел, при которых наступает явление резонанса. Для любой частоты вынуждающей нагрузки имеет место конечное число однородных, бегущих вдоль полосы периодов монохроматических волн и бесконечное число неоднородных волн с быстро затухающей амплитудой.

Отметим также, что при взаимодействии волн напряжений с разрезами или вставками в полупространстве для фиксированного положения и конфигурации дефекта всегда существует такое волновое число, при котором динамический коэффициент интенсивности напряжений близок к нулю.

При рассмотрении первой динамической задачи для среды с криволинейными туннельными трещинами в условиях плоской деформации были построены интегральные представления производных от перемещений в виде обобщенных потенциалов таким образом, чтобы амплитуда вектора напряжения была непрерывно продолжима через разрез. В случае второй основной задачи интегральные представления автоматически обеспечивают заданные скачки амплитуд перемещений (точнее производных от них по дуговой координате). Это дало возможность свести соответствующие краевые задачи к хорошо изученным сингулярным интегральным уравнениям.

9. Анизотропные оболочки с трещинами-разрезами. Эффект торможения трещины ребром жесткости в оболочке

Впервые задача такого рода поставлена и решена в [61], где рассматривается длинная анизотропная (армированная) оболочка,ослабленная одной или несколькими поперечными трещинами и усиленная продольным набором стрингеров конечной длины. Краевая задача сведена к системе пяти сингулярных интегральных уравнений, которая реализована численно.

Произведено параметрическое исследование коэффициентов интенсивности усилий и моментов, а также контактных усилий и усилий в ребре в зависимости от характера анизотропии, угла навивки волокон, жесткости ребра, его длины, взаимного расположения ребер и трещин и кривизны оболочки.

Коэффициенты интенсивности напряжений существенно зависят от угла навивки волокон (ориентации осей ортотропии) материала оболочки. При определенных углах коэффициенты интенсивности достигают своих экстремальных значений.

Литература

1. Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А. Перфорированные пластины и оболочки. – М.: Наука, 1970. – 556 с.

2. Фильштинский Л.А. Двоякопериодическая задача теории упругости для изотропной среды, ослабленной конгруэнтными группами произвольных отверстий. – ПММ, 1972, т. 36, № 4, с. 682–690.

3. Григолюк Э.И., Гринrауз М.Г., Долгих В.Н., Фильштинский Л.А. Об изгибе упругих пластин с регулярной структурой. – Изв. АН СССР, МТТ, 1982, № 3, с. 124–130.

4. Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А. Упругое равновесие изотропной плоскости с двоякопериодической системой включений. – Прикладная механика, 1966, т. 2, № 9, с. 1–7.

5. Ван Фо Фы Г.А. Теория армированных материалов с покрытиями. – Киев: Наукова думка: 1971. – 232 с.

6. Фильштинский Л.А. К теории упругих неоднородных сред с регулярной структурой. – ПММ, 1973, т. 37, № 2, с. 262–273.

7. Гринrауз М.Г., Фильштинский Л.А. К теории упругого линейно-армированного композиционного материала. – ПММ, 1975, т. 39, № 3, с. 537–546.

8. Долгих В.Н., Фильштинский Л.А. Об одной модели регулярной кусочно-неоднородной среды. – Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 2, с. 158–164.

9. Григолюк Э.И., Кац В.Е., Фильштинский Л.А. Двоякопериодическая задача теории упругости для плоской анизотропной среды. – Изв. АН СССР, МТТ, 1971, № 6, с. 45–53.

10. Кац В.Е., Фильштинский Л.А. Обобщенная двоякопериодическая задача для плоской анизотропной среды, ослабленной конгруэнтными группами произвольных отверстий. – Изв. АН СССР, МТТ, 1975, № 2, с. 75–82.

11. Фильштинский Л.А. Теория двумерного потенциального поля в кусочно-неоднородных анизотропных регулярных средах. – ПММ, 1974, т. 38, № 2, с. 349–358.

12. Долгих В.Н., Фильштинский Л.А. Теория линейно-армированного композиционного материала с анизотропными компонентами структуры. – Изв. АН СССР, МТТ, 1978, № 6, с. 53–63.

13. Долгих В.Н., Фильштинский Л.А. Модель анизотропной среды, армированной тонкими лентами. – Прикладная механика, 1979, т. 15, № 4, с. 24–30.

14. Колесников В.П., Фильштинский Л.А. Модель линейно-армированного композиционного материала с жесткими волокнами и анизотропной матрицей. – Прикладная механика, 1977, т. 13, № 7, с. 59–67.

15. Фильштинский Л.А. Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами. – Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 5, с. 91–97.

16. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 512 с.

17. Саврук М.П. О построении интегральных уравнений двумерных задач теории упругости для тела с криволинейными трещинами. – Физ. хим. механика материалов, 1976, т. 12, № 6, с. 111–113.

18. Фильштинский Л.А. Двоякопериодическая задача теории упругости для анизотропной среды с криволинейными разрезами. – Изв. АН СССР, МТТ, 1977, № 6, с. 116–124.

19. Любчак В.А., Фильштинский Л.А. Вторая краевая задача для упругой анизотропной среды, ослабленной криволинейными разрезами. – Изв. АН СССР, МТТ, 1978, № 5, с. 98–101.

20. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.

21. Фильштинский Л.А. Краевые задачи теории упругости для анизотропной полуплоскости, ослабленной отверстием или разрезом. – Изв. АН СССР, МТТ, 1980, № 6, с. 72–79.

22. Кравец Е.М., Любчак В.А. Вторая краевая задача теории упругости для анизотропной полуплоскости с разрезами.–Динамика и прочность машин. Респ. межвед. сб. Харьков: Вища школа, 1982, вып.36, с. 12–14.

23. Любчак В.А., Шаповалов С.П. Напряженное состояние диска, ослабленного трещинами в поле центробежных сил.–Динамика и прочность машин. Респ. межвед. сб. Харьков: Вища школа, 1981, вып. 34, с.22–25.

24. Волков Н.И., Фильштинский Л.А. О напряженном состоянии вращающегося оребренного диска сложной конфигурации при наличии отверстий и трещин. – Изв. АН СССР, МТТ, 1982, № 5, с. 124–129.

25. Волков Н.И., Любчак В.А., Фильштинский Л.А., Шаповалов С.П. О двух способах анализа напряженного состояния вращающегося диска с разрезами. – Прикладная механика, 1983, т. 19, № 5, с. 121–124.

26. Грилiцький Д.В. Основi граничнi задачi теорii пружностi для безмежноi iзотропноi пластинки з впаяною круглою iзотропною шайбою з розрiзами на лiнii спаю. – Пiтання мех. i мат., Вид. Львiв ун–ту, 1962, вип. 9, с. 79–86.

27. Черепанов Г.П. О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами. – Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение, 1962, № 1, с. 131–137.

28. Долгих В.Н., Фильштинский Л.А. Продольный сдвиг композиционного материала с дефектами. – Изв. АН СССР, МТТ, 1980, № 4, с. 103–110.

29. Григолюк Э.И., Грингауз М.Г., Фильштинский Л.А. Об одном подходе к исследованию сингулярных полей напряжений в кусочно–однородной среде с ветвящимися разрезами. – ДАН СССР, 1981, т. 261, № 3, с. 567–570.

30. Дудучава Р.В. Сингулярные интегральные уравнения с фиксированными особенностями в ядре на кусочно–гладких линиях. – Сообщ. АН Груз. ССР, 1978, т. 91, № 2, с. 293–296.

31. Солдатов А.П. К нетеровской теории сингулярных операторов общего вида. – ДАН СССР, 1978, т. 238, № 5, с. 1067–1070.

32. Шерман Д.И. О некоторых типах особых интегральных уравнений, встречающихся в приложениях. – ПММ, 1979, т. 43, № 3, с.519–530.

33. Партон В.З., Перлин П.И. Интегральные уравнения теории упругости. – М.: Наука, 1977.–312 с.

34. Лаврентьев М.А. О построении потока, обтекающего дугу заданной формы. – Тр. ЦАГИ, 1932, вып. 118. – 58 с.

35. Фильштинский Л.А. Продольный сдвиг в анизотропной среде с разрезами. – Изв. АН СССР, МТТ, 1978, № 4, с. 68–72.

36. Волкова Л.В., Фильштинский Л.А. Двоякопериодическая задача теории упругости для продольного сдвига анизотропной среды с трещинами. – Изв. АН СССР, МТТ, 1979, № 2, с. 91–95.

37. Кантор Б.Я., Стрельникова Е.А., Фильштинский Л.А. О некоторых смешанных задачах теории трещин в анизотропных пластинах. – В сб.: Смешанные задачи механики деформируемого тела. Тез. докл. П Всес. конф. Днепропетровск, 1981, с. 73–74.

38. Фильштинский Л.А., Ячменев В.А. Нестационарные напряжения в остывающем теле с трещиной. – Доклады АН УССР, с. А, 1982, № 5, с. 47–50.

39. Фильштинский Л.А., Ячменев В.А., Хворост В.Ф. Исследование нестационарных температурных напряжений в плоской среде, ослабленной отверстиями и разрезами. – В сб.: Концентрация напряжений. Тез. докл. Республ. симпозиума. Донецк, 1983, с. 118.

40. Фильштинский Л.А., Хандогин В.А. Изгиб анизотропной пластины, ослабленной криволинейными разрезами. – Прикладная механика, 1980, т. 16, № 1, с. 120–124.

41. Бережницкий Л.Т., Делявский М.В., Панасюк В.В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. – Киев: Наукова думка, 1979. – 400с.

42. Любчак В.А., Фильштинский Л.А. Изгиб полубесконечной анизотропной пластины, ослабленной криволинейными разрезами. – Прикладная механика, 1982, т. 18, № 10, с. 63–67.

43. Кантор Б.Я., Стрельникова Е.А., Фильштинский Л.А. Контактная задача теории упругости для плоской анизотропной среды, ослабленной криволинейным разрезом. – В сб.: Исследования по теории пластин и оболочек. Казань, 1981, № 16, с. 99–106.

44. Кантор Б.Я., Стрельникова Е.А., Фильштинский Л.А. Контактная задача теории упругости для анизотропной полуплоскости, ослабленной криволинейным разрезом. – Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1981, т. 34, № 2, с. 21–31.

45. Стрельникова Е.А. О влиянии контакта берегов криволинейной трещины в анизотропной пластине на коэффициенты интенсивности. – Пробл. машиностроения. Харьков, 1980, № 12, с. 15–19.

46. Фильштинский Л.А., Кантор Б.Я., Стрельникова Е.А. Контактная задача теории упругости для свободной или защемленной полуплоскости с криволинейным разрезом. – В кн.: Всесоюзная конференция по теории упругости. Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1979, с. 352–353.

47. Кудрявцев Б.А., Партон В.З., Ракитин В.И. Механика разрушения пьезоэлектрических материалов. Прямолинейная туннельная трещина на границе с проводником. – ПММ, 1975, т. 39, № 1, с. 149–159.

48. Белокопытова Л.В., Фильштинский Л.А. Двумерная краевая задача электроупругости для пьезоэлектрической среды с разрезами. – ПММ, 1979, т. 43, № 1, с. 138–143.

49. Белокопытова Л.В., Иваненко О.А., Фильштинский Л.А. Передача нагрузки от упругого ребра к полубесконечной пьезокерамической пластинке. – Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1981, т. 34, № 5, с. 41–51.

50. Белокопытова Л.В., Волкова Л.В., Иваненко О.А., Любчак В.А., Фильштинский Л.А. Некоторые статические и динамические краевые

задачи теории упругости и электроупругости для сред с трещинами и упругими включениями. – В кн.: Всесоюзная конференция по теории упругости. Тезисы докладов. Ереван, 1979, с. 56–58.

51. Белокопытова Л.В., Иваненко О.А., Фильштинский Л.А. Сопряженные электрические и механические поля в пьезоупругих телах с разрезами или включениями. – Динамика и прочность машин. Респ. межвед. сб. Харьков: Вища школа, 1981, вып. 34, с. 16–21.

52. Белокопытова Л.В., Фильштинский Л.А. Напряженное состояние в пьезоэлектрике типа 23, 43 m, ослабленном криволинейными трещинами. – Динамика и прочность машин. Респ. межвед. сб. Харьков: Вища школа, 1979, вып. 29, с. 53–57.

53. Дуркин И.А., Иваненко О.А., Фильштинский Л.А. Продольный сдвиг пьезоэлектрической среды с туннельным разрезом. – Физ. хим. механика материалов, 1983, т. 19, № 2, с. 55–59.

54. Половинкина И.Б., Улитко А.Ф. К теории равновесия пьезокерамических тел с трещинами. – Тепловые напряжения в элементах конструкций. Респ. межвед. сб., 1978, вып. 18, с. 10–17.

55. Фильштинский Л.А. Динамическая задача теории упругости для области с криволинейными разрезами (деформация продольного сдвига). – ДАН СССР, 1977, т. 236, № 6, с. 1327–1330.

56. Волкова Л.В., Фильштинский Л.А. Взаимодействие волн напряжений с периодической системой криволинейных трещин продольного сдвига. – ПМТФ, 1981, № 2, с. 164–169.

57. Фильштинский Л.А. Взаимодействие волн напряжений с криволинейными туннельными трещинами продольного сдвига в полупространстве. – ПММ, 1982, т. 46, № 3, с. 482–487.

58. Назаренко А.М., Фильштинский Л.А. Решение второй краевой задачи динамической теории упругости для трещины продольного сдвига. – Динамика и прочность машин. Респ. межвед. сб. Харьков: Вища школа, 1982, вып. 35, с. 32–35.

59. Назаренко А.М., Фильштинский Л.А. Взаимодействие волн напряжений с жесткими вставками в полупространстве. – Проблемы прочности, 1983, № 4, с. 26–28.

60. Назаренко А.М., Фильштинский Л.А. Взаимодействие волн напряжений с периодической системой трещин продольного сдвига в полупространстве.– Акустический журнал, 1983, т. 29, № 3, с. 382–386.

61. Исследование влияния анизотропии материала и подкрепляющего ребра на напряженное состояние оболочки с трещиной. – Сб. тр. XIII Всес. конференции по теории пластин и оболочек, т. 4, Таллин, 1983, с. 212–216.

62. Sherman D.I. On the problem of plain strain in nonhomogeneous media. - In: Non-homogeneity in elasticity and plasticity. - Pergamon Press, 1959, p.3-20.

63. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. Numerical solution of singular integral equations. - In: Mech. fracture. 1. Methods of analysis and solutions of crack problems. Leyden Noordhoff Int. Publ. Co., 1973, p.368-425.

64. Erdogan F., Gupta G.D. The inclusion problem with a crack crossing the boundary. - Int. J. Fract., 1975, v.11, 1, p.13-27.

65. Physical acoustics, vol.1, p.A. Ed. by N.P.Mason, New York-London, Acad. Press, 1964.