МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

О.І. Ворошило, В.Ф. Нефедченко, А.М. Юнда

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З ФІЗИКИ

Частина 1

Механіка

**Затверджено
вченою радою Сумського державного
університету як навчальний посібник
для студентів всіх спеціальностей
напряму "Інженерна механіка"**

Суми
Вид-во СумДУ 2004

ЗМІСТ с.

ВСТУП 5

1 ОСНОВИ КІНЕМАТИКИ 7
1.1 Кінематика матеріальної точки 7
1.2 Тангенціальне і нормальне прискорення 10
1.3 Рівномірний і рівноприскорений прямолінійні рухи 11
1.4 Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту 12
1.5 Рух матеріальної точки навколо нерухомої осі 14
1.6 Задачі для самостійного розв'язку 15

2 ОСНОВИ ДИНАМІКИ 22
2.1 Закони сил 22
2.2 Основне рівняння динаміки матеріальної точки 23
2.3 Основне рівняння динаміки точки в проекціях на дотичну і нормаль 25
2.4 Рух тіла зі змінною масою 27
2.5 Сили інерції 28
2.6 Задачі для самостійного розв'язку 30

3 ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ 39
3.1 Імпульс частинки. Імпульс сили 39
3.2 Закон збереження імпульсу 40
3.3 Центр інерції 40
3.4 Робота і потужність 41
3.5 Класифікація сил 43
3.6 Кінетична і потенціальна енергії 43
3.7 Закон збереження енергії 44
3.8 Зіткнення двох частинок 45
3.9 Момент імпульсу. Момент сили 49
3.10 Закон збереження моменту імпульсу 50
3.11 Задачі для самостійного розв'язку 50

4 МЕХАНІКА ТВЕРДОГО ТІЛА . . . 56
4.1 Обертання навколо нерухомої осі . . . 56
4.2 Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла . . . 58
4.3 Кінетична енергія твердого тіла . . . 60
4.4 Умови рівноваги твердого тіла . . . 63
4.5 Гіроскопічний ефект . . . 63
4.6 Задачі для самостійного розв'язку . . . 66

5 МЕХАНІКА РІДИН І ГАЗІВ . . . 77
5.1 Гідростатика нестисливої рідини . . . 77
5.2 Стаціонарний рух ідеальної рідини . . . 77
5.3 Рух в'язкої рідини . . . 79
5.4 Задачі для самостійного розв'язку . . . 81

6 РЕЛЯТИВІСТСЬКА МЕХАНІКА . . . 86
6.1 Кінематика спеціальної теорії відносності . . . 86
6.2 Релятивістська динаміка . . . 87
6.3 Задачі для самостійного розв'язку . . . 89

7 МЕХАНІКА ПРУЖНИХ ТІЛ . . . 92
7.1 Видовження і стиснення стрижнів . . . 92
7.2 Зсув і кручення . . . 93
7.3 Задачі для самостійного розв'язку . . . 95

ВІДПОВІДІ . . . 97

ДОДАТОК А . . . 105

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ . . . 111

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК . . . 112

ВСТУП

Навчальний посібник укладений у відповідності до програми курсу загальної фізики для інженерних спеціальностей університету.

Дана частина посібника присвячена механіці, яка є розділом фізики, що вивчає механічний рух, тобто зміну положення тіла відносно інших тіл. На практиці для опису руху з тілом відліку зв'язують будь-яку систему координат, найчастіше декартову, а також годинник, що проводить відлік часу. Опис реального руху тіл в математичному плані настільки складний, що вивчаючи його, необхідно не враховувати несуттєві деталі для данного руху. З цією метою використовують ідеалізації, можливість використання яких залежить від конкретного характеру задачі, а також степеня точності, з яким необхідно розв'язати задачу. Основними ідеалізаціями в механіці є поняття матеріальної точки, тобто тіла, розмірами якого в умовах даної задачі можна знехтувати; і абсолютно твердого тіла – тіло як сукупність матеріальних точок, відстань між якими під час руху не змінюється.

При самостійному розв'язанні задач слід дотримуватися такої методології:

а) детально опрацювати теоретичний матеріал за одним із підручників: Савельев И.В. Курс физики. – Т.1, 1989; Дущенко В.П., Кучерук І.М. Загальна фізика: Фізичні основи механіки: Молекулярна фізика і термодинаміка. – 1993 і т.п.;

б) уважно переглянути зразки розв'язання задач з даної теми;

в) записати коротко умову (всі числові значення фізичних величин подати в системі СІ), зробити рисунок до задачі;

г) з'ясувати, які закони слід використати при розв'язанні задачі і виписати необхідні рівняння;

д) провести математичні викладки й отримати розв'язок у загальному вигляді, і лише потім провести числові розрахунки; відповідь записати з точністю до трьох значущих цифр (див. додаток А);

е) перевірити, чи дає розрахункова формула правильну розмірність; за необхідності провірити розв'язок у граничних випадках.

З метою полегшення користування посібником до кожної з тем наведені необхідні теоретичні відомості. У кінці кожної частини посібника подано необхідні довідкові дані.

1 ОСНОВИ КІНЕМАТИКИ

Кінематика – це розділ механіки, що вивчає способи опису руху тіла, незалежно від причин, що визвали цей рух.

1.1 Кінематика матеріальної точки

Положення матеріальної точки (тіла) в кожний момент часу задається як **радіус-вектор** $\vec{\mathbf{r}}(t)$ (див. рис. 1.1), проведений із початку відліку координат 0 в точку розміщення тіла в момент часу t. Геометричне місце

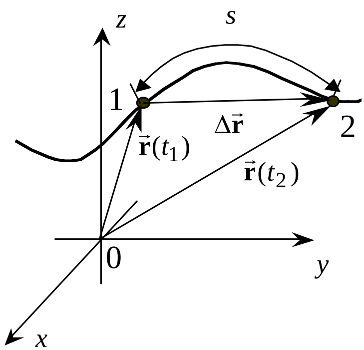

Рисунок 1.1

кінців радіуса-вектора $\vec{\mathbf{r}}$ – називають **траєкторією** матеріальної точки.

Шляхом s називають довжину відрізка траєкторії, пройдений точкою за даний відрізок часу.

Вектор переміщення $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ – це приріст вектора $\vec{\mathbf{r}}$ за час Δt (див. рис. 1.1).

Середнім вектором швидкості $\langle\vec{\boldsymbol{v}}\rangle$ за час Δt називають відношення

$$\langle\vec{\boldsymbol{v}}\rangle = \Delta\vec{\mathbf{r}}/\Delta t. \tag{1.1}$$

Миттєвим вектором швидкості називають границю відношення $\Delta\vec{\mathbf{r}}/\Delta t$ при $\Delta t \to 0$:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \lim_{\Delta t\to 0}\Delta\vec{\mathbf{r}}/\Delta t = \mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}/\mathrm{d}t. \tag{1.2}$$

Середньою шляховою швидкістю називають скалярну величину, яка дорівнює відношенню шляху s, пройденого точкою за відрізок часу $\Delta t = t_2 - t_1$, до величини цього відрізка:

$$\upsilon_{\text{ср.шл}} = \frac{s}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\int\limits_{t_1}^{t_2} |\vec{\boldsymbol{\upsilon}}|\,\mathrm{d}t. \tag{1.3}$$

Вектор прискорення $\vec{\mathbf{a}}$ визначає швидкість зміни вектора швидкості з часом:

$$\vec{\mathbf{a}} = \lim_{\Delta t\to 0} \Delta\vec{\boldsymbol{\upsilon}}/\Delta t = \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\upsilon}}/\mathrm{d}t. \tag{1.4}$$

Часто виникає обернена задача — знайти $\vec{\boldsymbol{\upsilon}}(t)$ і $\vec{\mathbf{r}}(t)$, знаючи $\vec{\mathbf{a}}(t)$. Ці величини знаходять інтегруванням:

$$\vec{\boldsymbol{\upsilon}}(t) = \vec{\boldsymbol{\upsilon}}_0 + \int_0^t \vec{\mathbf{a}}(t')\mathrm{d}t'; \quad \vec{\mathbf{r}}(t) = \vec{\mathbf{r}}_0 + \int_0^t \vec{\boldsymbol{\upsilon}}(t')\mathrm{d}t', \tag{1.5}$$

де $\vec{\boldsymbol{\upsilon}}_0$, $\vec{\mathbf{r}}_0$ — початкові швидкість і положення тіла.

Приклад 1.1 Точка рухається в площині, причому її декартові координати визначаються рівняннями: $x = A\cos\omega t$, $y = B\sin\omega t$, де A, B, ω — сталі. По якій траєкторії рухається точка? Знайти її прискорення.

Р о з в'я з о к. Виключимо час t із даних рівнянь таким чином:

$$(x/A) = \cos\omega t \quad \Rightarrow \quad \cos^2\omega t = (x/A)^2,$$

$$(y/B) = \sin\omega t \quad \Rightarrow \quad \sin^2\omega t = (y/B)^2.$$

Із тригонометричної рівності $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ випливає

$$(x/A)^2 + (y/B)^2 = 1. \tag{1.6}$$

Отже, отримали рівняння еліпса, тому рух точки відбувається по еліпсу.

У декартових координатах радіус-вектор записується у вигляді $\vec{\mathbf{r}} = x\vec{\mathbf{e}}_x + y\vec{\mathbf{e}}_y$, а прискорення — $\vec{\mathbf{a}} = \ddot{x}\vec{\mathbf{e}}_x + \ddot{y}\vec{\mathbf{e}}_y$. Диференціювання дає

$$\dot{x} = -A\omega\sin\omega t, \quad \ddot{x} = -A\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 x;$$

$$\dot{y} = B\omega\cos\omega t, \quad \ddot{y} = -B\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 y,$$

таким чином,

$$\vec{\mathbf{a}} = -\omega^2 x\vec{\mathbf{e}}_x - \omega^2 y\vec{\mathbf{e}}_y = -\omega^2(x\vec{\mathbf{e}}_x + y\vec{\mathbf{e}}_y) = -\omega^2\vec{\mathbf{r}}.$$

Прискорення направлене до центра еліпса і пропорційне $\vec{\mathbf{r}}$.

Перевірка розмірності: $[\mathrm{a}] = [\omega]^2[r] = \text{м}/\text{c}^2$.

Приклад 1.2 Трамвай рухається прямолінійно від зупинки A до наступної зупинки B з прискоренням, що змінюється за законом $\mathrm{a} = \mathrm{c} - \mathrm{b}x$, де c, b — додатні сталі; x — відстань від нього до зупинки A. Знайти відстань між цими зупинками і максимальну швидкість трамвая.

Р о з в'я з о к. Спочатку знайдемо залежність швидкості v від x. За відрізок часу $\mathrm{d}t$ приріст швидкості $\mathrm{d}v = \mathrm{a}\,\mathrm{d}t$. Зведемо цей вираз до вигляду, зручного для інтегрування, скориставшись тим, що $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x/v$, тоді

$$v\mathrm{d}v = (\mathrm{c} - \mathrm{b}x)\mathrm{d}x.$$

Взявши інтеграл з лівої частини від 0 до v, з правої — від 0 до x, отримаємо

$$v^2/2 = \mathrm{c}x - \mathrm{b}x^2/2,$$

або

$$v = \sqrt{2\mathrm{c}x - \mathrm{b}x^2}.$$

Звідси випливає, що відстань між зупинками, тобто точками, в яких $v = 0$, є $x_0 = 2\mathrm{c}/\mathrm{b}$.

Максимальну швидкість знайдемо з умови, що підкореневий вираз досягає максимуму:

$$f(x) = 2\mathrm{c}x - \mathrm{b}x^2; \quad f'(x) = 2\mathrm{c} - 2\mathrm{b}x;$$

$$f'(x_{\max}) = 0 \Rightarrow \quad 2\mathrm{c} - 2\mathrm{b}x_{\max} = 0 \Rightarrow \quad x_{\max} = \mathrm{c}/\mathrm{b} \Rightarrow \quad f_{\max} = \mathrm{c}^2/\mathrm{b},$$

тому

$$v_{\max} = \sqrt{f_{\max}} = \mathrm{c}/\sqrt{\mathrm{b}}.$$

Перевірка розмірності: враховуючи, що $[\mathrm{c}] = \text{м}/\text{c}^2$, $[\mathrm{b}] = 1/\text{c}^2$ отримаємо

$$[v] = [\mathrm{c}]^{1/2}[x]^{1/2} = \frac{\text{м}^{1/2}}{\text{c}} \cdot \text{м}^{1/2} = \frac{\text{м}}{\text{c}}, \quad [v] = [\mathrm{b}]^{1/2}[x] = \frac{1}{\text{c}} \cdot \text{м} = \frac{\text{м}}{\text{c}},$$

$$[\upsilon_{\max}] = \frac{[\text{c}]}{[\text{b}]^{1/2}} = \frac{\text{м} \cdot \text{с}^{-2}}{\text{с}} = \frac{\text{м}}{\text{с}^{-2}}.$$

1.2 Тангенціальне і нормальне прискорення

Будемо вважати, що траєкторія руху матеріальної точки відома. Положення точки A визначається дуговою координатою l, яка дорівнює відстані вздовж траєкторії від початку відліку O (див. рис. 1.2). Рух тіла заданий, якщо відома траєкторія, початок відліку O, додатний напрямок відліку дугової координати l і закон руху тіла $l(t)$.

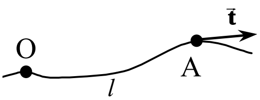

Рисунок 1.2

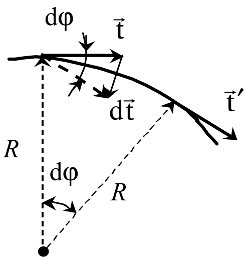

Рисунок 1.3

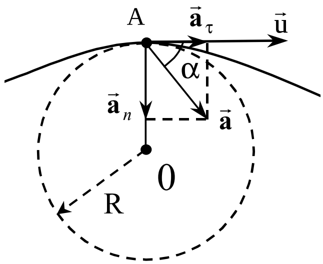

Рисунок 1.4

Швидкість тіла $\vec{\boldsymbol{\upsilon}} = \upsilon_\tau \vec{\boldsymbol{\tau}}$, де $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ – одиничний вектор, зв'язаний з точкою A і направлений по дотичній до траєкторії в бік зростання дугової координати l; $\upsilon_\tau = \mathrm{d}l/\mathrm{d}t$ – проекція вектора $\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$ на напрямок вектора $\vec{\boldsymbol{\tau}}$.

Прискорення тіла

$$\vec{\mathbf{a}} = \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\upsilon}}/\mathrm{d}t = (\mathrm{d}\upsilon_\tau/\mathrm{d}t)\vec{\boldsymbol{\tau}} + \upsilon_\tau(\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\tau}}/\mathrm{d}t).$$

Враховуючи, що $\dot{\vec{\boldsymbol{\tau}}} = (\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t)\vec{\mathbf{n}}$, де $\vec{\mathbf{n}}$ – орт нормалі до траєкторії, направлений до центра кривизни траєкторії, із рис. 1.3 $\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}s/R = \upsilon_\tau \mathrm{d}t/R$, де R – **радіус центра кривизни** траєкторії, отримаємо $\dot{\vec{\boldsymbol{\tau}}} = (\upsilon_\tau \mathrm{d}t/R)\vec{\mathbf{n}}$, тому можемо записати

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_\tau + \vec{\mathbf{a}}_n = (\mathrm{d}\upsilon_\tau/\mathrm{d}t)\vec{\boldsymbol{\tau}} + (\upsilon_\tau^2/R)\vec{\mathbf{n}}, \tag{1.7}$$

де $\vec{\mathbf{n}}$ – одиничний вектор нормалі до траєкторії в точці A, направлений до центра кривизни; $\mathbf{a}_\tau = (\mathrm{d}\upsilon_\tau/\mathrm{d}t)\boldsymbol{\tau}$ – **тангенціальне** прискорення, яке характеризує зміну швидкості за величиною; $\vec{\mathbf{a}}_n = (v_\tau^2/R)\vec{\mathbf{n}}$ — **нормальне** (або доцентрове) прискорення, яке характеризує зміну швидкості за напрямком; R — радіус кривизни.

Модуль повного прискорення

$$\mathrm{a} = \sqrt{\mathrm{a}_\tau^2 + \mathrm{a}_n^2} = \sqrt{(\mathrm{d}v_\tau/\mathrm{d}t)^2 + (v_\tau^2/\mathrm{R})^2}. \tag{1.8}$$

Приклад 1.3 Точка A рухається по дузі кола радіусом R. Її швидкість залежить від дугової координати l за законом $v = a\sqrt{l}$, де a — стала. Знайти залежність від l кута α між вектором повного прискорення і вектором швидкості.

Розв'язок. Кут α можна знайти із виразу $\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{a_n}/\mathrm{a}_\tau$ (див. рис. 1.4). Знайдемо a_n і a_τ:

$$\mathrm{a}_n = v^2/R = \mathrm{a}^2 l/R$$

$$\mathrm{a}_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}l}v = \frac{a}{2\sqrt{l}}a\sqrt{l} = \frac{a^2}{2},$$

звідки $\mathrm{tg}\,\alpha = 2l/\mathrm{R}$.

1.3 Рівномірний і рівноприскорений прямолінійні рухи

Характеристики рівномірного ($\vec{\boldsymbol{v}} = \mathrm{const}$) і рівноприскореного ($\vec{\mathbf{a}} = \mathrm{const}$) рухів вздовж осі x наведені в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Величина	$v = \mathrm{const}$	$\mathrm{a} = \mathrm{const}$
Переміщення	$x = x_0 + vt$	$x = x_0 + v_0 t + \mathrm{a}\,t^2/2$
Швидкість	$v = (x - x_0)/t$	$v = v_0 + \mathrm{a}\,t$
Прискорення	$\mathrm{a} = 0$	$\mathrm{a} = (v - v_0)/t =$ $(v^2 - v_0^2)/(2(x - x_0))$

1.4 Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту

Вздовж осі x відбувається рівномірний рух з швидкістю $\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha$, а вздовж осі y — рівноприскорений під дією прискорення вільного падіння — $g = 9,8$ м/с^2.

Траєкторія руху тіла в параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = \upsilon_{0x}t, \\ y = \upsilon_{0y}t - gt^2/2, \end{cases} \tag{1.9}$$

де $\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha$, $\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha$ — проекції початкової швидкості на осі x, y відповідно. Виключаючи час t, який у даному випадку відіграє роль параметра, отримаємо рівняння параболи:

$$(y - H) = -g\left(x - L/2\right)^2/(2\upsilon_{0x}^2), \tag{1.10}$$

де $H = \upsilon_{0y}^2/2g$, $L/2 = \upsilon_{0x}\upsilon_{0y}/g$ — координати центра параболи (див. рис. 1.4).

Швидкість тіла і її модуль в кожний момент часу

$$\vec{\boldsymbol{\upsilon}} = \upsilon_x\vec{\mathbf{e}}_x + \upsilon_y\vec{\mathbf{e}}_y, \quad \upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}, \tag{1.11}$$

де $\upsilon_x = \upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha$, $\upsilon_y = \upsilon_{0y} - gt$ проекції швидкості на осі x та y відповідно.

Максимальну висоту підняття тіла H визначають із умови, що в цій точці $\upsilon_y = 0$, звідки час підняття $\tau_H = \upsilon_{0y}/g$, а

$$H = y_{\max} = \upsilon_{0y}\tau_H - g\tau_H^2/2 = \upsilon_{0y}^2/(2g) = (\upsilon_0^2/2g)\sin^2\alpha. \tag{1.12}$$

Дальність польоту знаходять із умови $y = 0, \quad x = L$. Перша умова дає час польоту $\tau_L = 2\upsilon_{0y}/g$, звідки

$$L = x_{\max} = \upsilon_{0x}\tau_L = 2\upsilon_{0x}\upsilon_{0y}/g = (\upsilon_0^2/g)\sin 2\alpha, \tag{1.13}$$

причому максимальна дальність польоту досягається при $\alpha = 45^\circ$ і дорівнює $L_{\max} = \upsilon_0^2/g$.

Примітка — Аналогічно знаходять характеристики руху тіла, кинутого вертикально вгору, а також із уступу горизонтально до поверхні землі.

Приклад 1.4 Тіло кинули під кутом $\alpha = 60°$ до горизонту з початковою швидкістю 200 м/с. Записати рівняння траєкторії, за яким визначити найбільшу висоту підняття, дальність польоту. Знайти радіус кривизни траєкторії руху тіла у момент часу $\tau = 2$ с.

Розв'язок. Рівняння траєкторії в параметричному вигляді має вигляд

$$\begin{cases} x = \upsilon_0 \cos \alpha t = 100, \\ y = \upsilon_0 \sin \alpha t - gt^2/2 = \sqrt{3}\,100\,t - 4,9t^2. \end{cases}$$

Із першого рівняння системи отримаємо $t = x/100$, підставимо в друге рівняння $y = \sqrt{3}x - 4,9 \cdot 10^{-4} x^2 \quad \Rightarrow \quad y = -4,9 \cdot 10^{-4}(x^2 - 2 \cdot 1767{,}4\,x + {} + 1767,4^2) - 1530{,}6$. У результаті рівняння траєкторії набуває вигляду:

$$y - 1530,6 = -(x - 1767,4)^2,$$

з якого отримаємо максимальну висоту підйому $H = 1530,6$ м, дальність польоту $L = 2 \cdot 1767,4 = 3534{,}8$ м.

У момент часу τ для повного прискорення можемо записати

$$\mathrm{a}^2 = (\upsilon^2(\tau)/R)^2 + (\mathrm{d}\upsilon/\mathrm{d}t)^2.$$

З іншого боку, рух тіла відбувається тільки під дією прискорення вільного падіння, тому $\mathrm{a}^2 = \mathrm{g}^2$, звідки

$$\mathrm{g}^2 = \upsilon^4(\tau)/R^2 + (\mathrm{d}\upsilon/\mathrm{d}t)^2 \quad \Rightarrow \quad R = \upsilon^2(\tau)/\sqrt{\mathrm{g}^2 - (\mathrm{d}\upsilon/\,\mathrm{d}t)|_{t=\tau}}.$$

Модуль швидкості і похідна від нього дорівнюють:

$$\upsilon(t) = \sqrt{\upsilon_{0x}^2 + (\upsilon_{0y} - gt)^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\sqrt{\upsilon_{0x}^2 + (\upsilon_{0y} - gt)^2}} 2(\upsilon_{0y} - gt)(-g) = -\frac{g(\upsilon_{0y} - gt)}{\upsilon(t)},$$

тому

$$R = \frac{\upsilon^3}{\sqrt{\mathrm{g}^2\upsilon^2(\tau) - g^2(\upsilon_{0y} - \mathrm{g}\tau)^2}} = \frac{(\upsilon_0^2 \cos^2\alpha + (\upsilon_0 \sin\alpha - \mathrm{g}\,t)^2)^{3/2}}{\mathrm{g}\upsilon_0 \cos\alpha} =$$

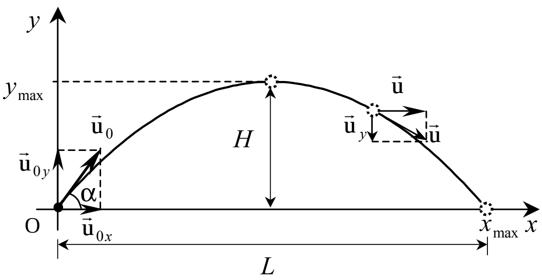

Рисунок 1.5

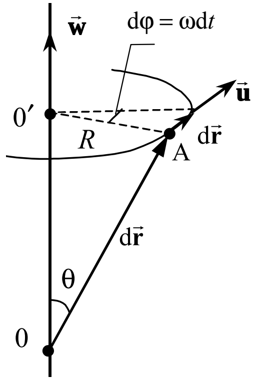

Рисунок 1.6

$$= \frac{(100^2 + (\sqrt{3}\ \cdot 100 - 9.81 \cdot 2)^2)^{3/2}}{9.81 \cdot 100} \text{ (м)} = 6,28 \cdot 10^3 \text{ (м)} = 6,28 \text{ (км)}.$$

Перевірка розмірності:

$$[R] = \frac{[v]^3}{[g][v]} = \frac{[v]^2}{[g]} = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}}{\text{м} \cdot \text{с}^{-2}} = \text{м}.$$

1.5 Рух матеріальної точки навколо нерухомої осі

Для нескінченно малого кута повороту $\mathrm{d}\varphi$ елементарне переміщення $\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}$ точки A (див. рис. 1.6) дорівнює $\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}} = [\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\varphi}}, \vec{\mathbf{r}}]$, де напрямок вектора $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\varphi}}$ визначається правилом правого гвинта.

Кутова швидкість

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\varphi}}/\mathrm{d}t. \tag{1.14}$$

Кутове прискорення

$$\vec{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\omega}}/\mathrm{d}t. \tag{1.15}$$

Зв'язок між лінійними і кутовими величинами:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = [\vec{\boldsymbol{\omega}}, \vec{\mathbf{r}}], \quad v = \omega R; \quad \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_\tau + \vec{\mathbf{a}}_n,$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \tag{1.16}$$

де $\vec{\mathbf{a}}_\tau = [\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}, \vec{\mathbf{r}}]$, $a_\tau = \varepsilon R$ – тангенціальне прискорення і його модуль; $\vec{\mathbf{a}}_n = [\vec{\boldsymbol{\omega}}, [\vec{\boldsymbol{\omega}}, \vec{\mathbf{r}}]]$, $a_n = \omega^2 R$ – нормальне прискорення і його модуль.

1.6 Задачі для самостійного розв'язку

1.1 Першу чверть шляху мотоцикліст проїхав зі швидкістю $v_1 = 10,0$ м/с, другу – зі швидкістю $v_2 = 15,0$ м/с, третю – зі швидкістю $v_3 = 20,0$ м/с і останню – зі швидкістю $v_4 = 5,0$ м/с. Визначити середню швидкість мотоцикліста на всьому шляху.

1.2 Матеріальна точка рухалася протягом $t_1 = 15,0$ с зі швидкістю $v_1 = 5,0$ м/с, $t_2 = 10,0$ с зі швидкістю $v_2 = 8$ м/с і $t_3 = 6,0$ с зі швидкістю $v_3 = 20,0$ м/с. Яка середня швидкість $\langle v \rangle$ точки?

1.3 Тіло пройшло першу половину прямолінійного шляху за час $t_1 = 2$ с, другу – за час $t_2 = 8,00$ с. Визначити середню швидкість $\langle v \rangle$ тіла, якщо довжина шляху $s = 20$ м.

1.4 Щосекунди частинка переміщується на половину відстані s_0 між нею і другою нерухомою частинкою. Як змінюється відстань між ними? Чи зустрінуться частинки?

1.5 Визначити швидкість зустрічного вітру v, якщо під час руху автобуса зі швидкістю $v_1 = 54,0$ км/год краплини дощу, які мають вертикальну складову швидкості $v_2 =$10,0 м/с, утворюють на віконному склі автобуса смуги під кутом $\alpha = 30°$

1.6 Визначити час польоту літака t між двома пунктами, що розташовані на відстані $s = 500$ км, якщо швидкість літака відносно повітря $v_1 = 100$ м/с, а швидкість зустрічного вітру, направленого під кутом $\alpha = 30°$ до напрямку руху, $v_2 = 30$ м/с.

1.7 Дві прямі дороги перетинаються під кутом $\alpha = 60°$. Від перехрестя одночасно почали віддалятися дві машини. Одна зі швидкістю $v_1 = 60$ км/год, друга – $v_2 = 80$ км/год. Визначити швидкості v', v'', з якими машини можуть віддалятися одна від одної.

1.8 Автомобіль рухається зі швидкістю $v_0 = 72$ км/год під прямим кутом до стіни. В момент, коли відстань до стіни $L = 400$ м, автомобіль подає короткий звуковий сигнал. Яку відстань l він проїде до моменту, коли водій почує луну? Швидкість звуку $c = 330$ м/с.

1.9 Два підводні човни пливуть назустріч один одному, кожний зі швидкістю v. З першого човна послали ультразвуковий сигнал, який відбившись від другого човна, повернувся назад через час τ. Швидкість ультразвуку c. На якій відстані розміщувалися човни в момент посилання сигналу?

1.10 Пасажир потягу, який рухається зі швидкістю $u = 15,0$ м/с, помітив, що зустрічний потяг довжиною 210 м пройшов повз нього за 6,00 с. Визначити швидкість зустрічного потягу.

1.11 Точка рухається вздовж прямої в один бік. На рис. 1.7 поданий графік пройденого нею шляху s в залежності від часу t. Знайти за допомогою цього графіка: а) середню швидкість точки за час руху; б) максимальну швидкість; в) момент часу t_0, в який миттєва швидкість дорівнює середній швидкості за перші t_0 секунд.

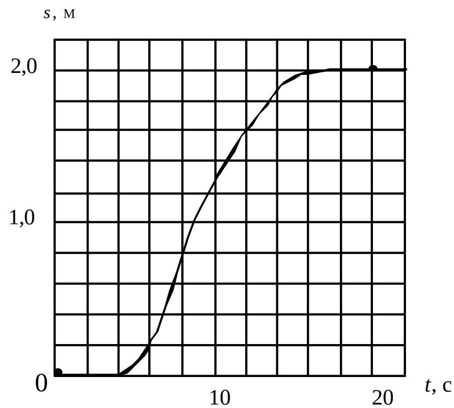

Рисунок 1.7

1.12 Залежність пройденого тілом шляху s від часу має вигляд $s = At - Bt^2 + Ct^3$, де $A = 6,00$ м; $B = 3,00$ м/с^2; $C = 4,00$ м/с^3. Знайти: а) залежність швидкості v і прискорення а від часу t; б) відстань s, пройдену тілом, швидкість v і прискорення а тіла через $t = 2,00$ с з початку руху. Побудувати графік залежності шляху s, швидкості v і прискорення а від часу t для інтервалу $0 \leq t \leq 3,00$ через 0,50 с.

1.13 Залежність пройденого тілом шляху s від часу t подається рівнянням $s = A + Bt + Ct^2$, де $A = 6,00$ м; $B = 3,00$ м; $C = 2,00$ м/с. Знайти середню швидкість $\langle v \rangle$ і середнє прискорення $\langle \mathrm{a} \rangle$ тіла для інтервалу часу $1,00 \leq t \leq 4,00$ с. Побудувати графік залежності шляху s, швидкості v і прискорення a від часу t для інтервалу $1,00 \leq t \leq 5,00$ через 1,00 с. Відповідь: $\langle v \rangle = 7,00$ м/с, $\langle \mathrm{a} \rangle = 4,00$ м/с^2.
1.14 Частинка рухається вздовж прямої згідно з рівнянням $x = At^3 + Bt$, де $A = -0,36$ м/с^3; $B = 2,00$ м/с. Визначити середній модуль швидкості $\langle |v| \rangle$ і модуль середньої швидкості $|\langle v \rangle|$ за перші 3,00 с з початку руху.
1.15 Матеріальна точка рухається прямолінійно. Залежність пройденого шляху від часу описується рівнянням $s = 0,50 \cdot t + t^3$ (м). Визначити залежність швидкості та прискорення від часу; середню швидкість точки за другу секунду; шлях, який пройшла точка за п'яту секунду. Накреслити графіки залежності шляху, швидкості і прискорення від часу.
1.16 Швидкість матеріальної точки, яка рухається вздовж осі x, визначається рівнянням $v_x = 0,20 - 0,10 \cdot t$. Знайти координату точки в момент часу t=10,0 с, якщо в початковий момент часу вона розміщувалась в точці $x_0 = 1$ м.
1.17 Швидкість тіла змінюється за законом $v = At^2 + C\mathrm{e}^{Bt}$, де $A = 3,00$ м/с^3; $B = 1$ с$^{-1}$; $C = 1$ м/с. Знайти прискорення тіла наприкінці першої секунди руху, шлях, пройдений тілом, і середню швидкість за цей час.
1.18 На висоті $h_1 = 100$ м тіло, що вільно падає, мало швидкість $v_1 = 20$ м/с. Чому дорівнює швидкість на висоті $h_2 = 75$ м?
1.19 Визначити початкову швидкість, яку необхідно надати тілу, кинутому вертикально вгору, щоб воно повернулося назад через $t = 6,00$ с. Чому дорівнює максимальна висота підняття?
1.20 Тіло кинуте вертикально вгору з початковою швидкістю $v_0 = 21,0$ м/с. Визначити час між двома моментами проходження тілом позначки половини висоти. Опором повітря знехтувати.
1.21 Тіло, кинуте вертикально вниз із початковою швидкістю $v_0 = 19,6$ м/с, за останню секунду пройшло $n = 1/4$ частину шляху. Визначити час падіння тіла і його кінцеву швидкість. З якої висоти

кинули тіло?

1.22 М'яч кинули вертикально вгору зі швидкістю $v_0 = 9,81$ м/с. Після того як він досяг найвищої своєї точки підйому, з того самого місця, з тією самою початковою швидкістю кинули вгору другий м'яч. Визначити на якій висоті м'ячі зіштовхнуться.

1.23 Аеростат піднімається вгору зі швидкістю 10,0 м/с. У момент, коли він розміщувався на висоті $h = 1093$ м, з нього випав камінь. Знайти час, за який тіло упаде на поверхню землі.

1.24 Кабіна ліфта, в якої відстань від підлоги до стелі дорівнює 2,70 м, почала підніматися з постійним прискоренням 1,20 м/с^2. Через 2,00 с з початку руху зі стелі кабіни почав падати болт. Знайти: а) час вільного падіння болта; б) переміщення і шлях болта за час вільного падіння в системі відліку, зв'язаною з шахтою ліфта.

1.25 Матеріальна точка рухається в площині XY. Визначити траєкторію точки, якщо її рух описаний рівняннями: $x = 2\sin\omega t$, $y = 2\cos\omega t$. Накреслити графік траєкторії.

1.26 Яка траєкторія точки, якщо її радіус-вектор відносно початку координат змінюється за законом $\vec{\mathbf{r}} = 2,00 \cdot t\vec{\mathbf{e}}_x + 8,00 \cdot t^2\vec{\mathbf{e}}_y$. Знайти середнє значення швидкості за час від $t_1 = 1,00$ с до $t_2 = 10$ с. Відповідь: $\langle v\rangle = 88,9$ м/с.

1.27 Рух частинки описується рівняннями: $x = 5\sin(2\pi t)$ і $y = 5\cos(2\pi t)$. Знайти шлях, який проходить тіло за час $t = 10,3$ с. Чому дорівнює модуль переміщення за цей час?

1.28 Координати матеріальної точки змінюються з часом за законами: $x = 4,00$, $y = 3,00 \cdot t$, $z = 0$. Знайти залежність пройденого шляху від часу, відраховуючи відстань від початкового її положення. Який шлях пройде точка за 5 с?

1.29 Частинка рухається з прискоренням $\vec{\mathbf{a}} = 2t\vec{\mathbf{e}}_x + 4t\vec{\mathbf{e}}_y + 3\vec{\mathbf{e}}_z$. Визначити модуль швидкості частинки в момент часу $t = 2$ с, якщо в початковий момент часу $t = 0$ с її швидкість була $\vec{v}_0 = 3,00 \cdot \vec{\mathbf{e}}_x + 1,00 \times \times \vec{\mathbf{e}}_y - 1,00 \cdot \vec{\mathbf{e}}_z$.

1.30 Тіло кинули під кутом $\alpha = 60^\circ$ до горизонту з початковою швидкістю v_0 =200 м/с. Визначити найбільшу висоту підйому, дальність польоту та радіус кривизни траєкторії руху тіла у найвищій її точці.

1.31 Тіло кинули зі швидкістю $v_0 = 20$ м/с під кутом $\alpha = 30°$ до горизонту. Знайти радіус кривизни траєкторії тіла через t_1=1,20 с з початку вільного руху.

1.32 Тіло кинули з поверхні землі під кутом $\alpha = 30°$ до горизонту з початковою швидкістю $v_0 = 10$ м/с. Не враховуючи опору повітря, знайти: а) швидкість тіла в момент часу $t_1 = 0,8$ с; б) рівняння траєкторії; в) час підйому і час спуску; г) дальність польоту; д) радіус кривизни траєкторії в момент t_1.

1.33 З башти висотою $H = 19,6$ м в горизонтальному напрямі кинули тіло зі швидкістю v_0=10,0 м/с. Записати рівняння траєкторії тіла. Чому дорівнює швидкість тіла в момент падіння? Який кут з горизонтом утворює ця швидкість?

1.34 Камінь кинули з вишки у горизонтальному напрямі зі швидкістю 30,0 м/с. Визначити швидкість, тангенціальне і нормальне прискорення каменя в кінці другої секунди з початку руху.

1.35 З висоти $h = 2,00$ м над поверхнею землі в горизонтальному напрямі кинули тіло зі швидкістю v_0. Через деякий час це тіло впало на землю на відстані $s = 7,00$ м від місця кидання. Визначити початкову швидкість тіла та його швидкість у момент дотику до поверхні землі.

1.36 Тіло кинули зі швидкістю $v_0 = 10,0$ м/с під кутом $\alpha = 30°$ до горизонту. Знайти шлях, пройдений тілом до падіння.

1.37 Через який час із початку руху вектор швидкості тіла, яке кинуте під кутом $\alpha = 45°$ до горизонту з початковою швидкістю $v_0 = 10$ м/с, буде утворювати з горизонтом кут $\alpha_1 = 30°$? Тіло рухається вільно.

1.38 З поїзда, що рухається зі швидкістю $v_1 = 72,0$ км/год, у перпендикулярному до руху напрямі кинули камінь. Початкова швидкість каменя відносно поїзда $v_0 = 20,0$ м/с, а кут нахилу до горизонту $\alpha = 30°$. Знайти швидкість каменя як функцію часу і відстань, яку пролетів камінь.

1.39 До вертикальної труби висотою $h = 3,00$ м влітає маленька пружна кулька зі швидкістю $u = 5,0$ м/с під кутом $\alpha = 30°$до горизонту. Кулька відбивається від стінок. Визначити час падіння кульки до основи труби.

1.40 Із одної точки одночасно кинули два тіла з однаковою швидкістю

v_0 під різними кутами $\alpha_1 = 30^\circ$ і $\alpha_2 = 60^\circ$ до горизонту. Визначити відстань між тілами через $\Delta t = 10$ с з початку руху.
1.41 Знайти кутову швидкість ω: а) добового обертання Землі; б) часової стрілки на годиннику; в) хвилинної стрілки на годиннику; г) штучного супутника Землі, який рухається по круговій орбіті з періодом $T = 88,0$ хв. Яка лінійна швидкість v руху цього супутника, якщо відомо, що його орбіта розташована на відстані $h = 200$ км від поверхні Землі.
1.42 Точка рухається по колу радіусом R $= 30,0$ см з постійним кутовим прискоренням. Знайти тангенціальне прискорення точки, якщо відомо, що за 4,00 с вона зробила 3 оберти.
1.43 Колесо, що обертається рівноприскорено, досягло кутової швидкості $\omega = 20,0$ рад/с через $N = 10$ обертів з початку обертання. Знайти кутове прискорення ε колеса. Відповідь: 3,20 рад/с^2.
1.44 Лінійна швидкість точок на ободі диска, що обертається, $v_1 = 3,00$ м/с. Точки, що розміщені на Δr $=$ 10,0 см ближче до осі обертання, мають лінійну швидкість $v_2 = 2,00$ м/с. Скільки обертів за секунду робить диск.
1.45 Колесо, обертаючись рівноприскорено, за час $t =$ 1,00 хв зменшило свою частоту з $n_1 = 300$ об/хв до $n_2 = 180$ об/хв. Знайти кількість обертів N за цей час.
1.46 Скільки обертів зробили колеса автомобіля після включення гальма до повної зупинки, якщо в момент початку гальмування автомобіль мав швидкість $v_0 = 60,0$ км/год і зупинився за $t = 3,00$ с з початку гальмування? Діаметр коліс $D = 0,70$ м. Чому дорівнює середнє кутове прискорення коліс при гальмуванні?
1.47 На циліндр, який може вільно обертатись навколо горизонтальної осі, намотана нитка. До кінця нитки прив'язали вантаж і надали йому можливість опускатися. Рухаючись рівноприскорено, вантаж за час $t = 3$ с опустився на $h = 1,50$ м. Знайти кутове прискорення ε циліндра, якщо його радіус $r = 4,00$ см.
1.48 Матеріальна точка рухається по колу радіусом $R = 4$ м. Закон руху $s = 8,00 - 2,00 \cdot t^2$ (м). Визначити момент часу, коли нормальне прискорення точки дорівнює 9,00 м/с^2. Знайти швидкість, тангенціальне і повне прискорення точки в той самий момент часу.

1.49 Точка рухається з уповільненням по колу радіусом r, причому так, що її тангенціальне і нормальне прискорення в кожний момент часу дорівнюють одне одному за модулем. У початковий момент часу точці була надана швидкість v_0. Знайти швидкість v і модуль повного прискорення a в залежності від пройденого шляху s.

1.50 Знайти кутове прискорення ε колеса, якщо відомо, що через час $t = 2,00$ с з початку руху вектор повного прискорення точки, що лежить на ободі, склав кут $\alpha = 60^\circ$ з вектором її лінійної швидкості.

1.51 У скільки разів нормальне прискорення a_n точки, що лежить на ободі колеса, яке обертається, більше від тангенціального прискорення a_τ для того моменту, коли вектор повного прискорення точки складає кут $\alpha = 30^\circ$ з вектором її лінійної швидкості.

1.52 Закон руху точки A обода колеса, яке котиться рівномірно у горизонтальному напрямку (вісь x), має вигляд $x = a(\omega t - \sin\omega t)$, $y = a(1 - \cos\omega t)$, де a і ω – додатні сталі. Знайти швидкість точки A, довжину шляху l, пройдену нею між двома послідовними дотиками до полотна шляху, величину прискорення a точки.

1.53 За проміжок часу $t = 10,0$ с точка пройшла одну шосту частину кола радіусом $R = 150$ см. Обчислити за час руху: а) середнє значення модуля швидкості; б) модуль вектора середньої швидкості; в) модуль вектора середнього повного прискорення, якщо точка рухалась зі сталим тангенціальним прискоренням, а початкова швидкість дорівнювала нулю.

2 ОСНОВИ ДИНАМІКИ

Динаміка — це розділ механіки, що вивчає рух тіл, у зв'язку з діючими на них силами.

2.1 Закони сил

Сила гравітаційного притягання діє між двома матеріальними точками: $F = \mathrm{G}m_1m_2/r^2$, де m_1, m_2 — маси точок; r — відстань між ними; G — гравітаційна стала. Ця сила направлена по прямій, що з'єднує ці дві точки.

Сила Кулона діє між двома точковими електричними зарядами: $F = kq_1q_2/r^2$, де q_1, q_2 — величини 1-го і 2-го зарядів; r — відстань між ними; $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$; ε_0 — електрична стала. Якщо q_1, q_2 мають один знак, то це сила відштовхування, різний — сила притягання.

Сила Лоренца діє на заряд q, який рухається в магнітному полі: $\vec{\mathbf{F}} = q[\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\mathbf{B}}]$, де $\vec{\boldsymbol{v}}$ — швидкість заряду; $\vec{\mathbf{B}}$ — індукція магнітного поля.

Крім цих фундаментальних сил, вводять наближені сили:

Однорідна сила тяжіння: $\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{g}}$, де m — маса тіла; $\vec{\mathbf{g}}$ — прискорення вільного падіння. Зазначимо, що **вага тіла** — це сила, з якою тіло діє на опору або підвіс, нерухомі відносно даного тіла. Наприклад, якщо тіло з опорою (підвісом) нерухомі відносно землі, то вага $\vec{\mathbf{P}}$ збігається зі силою тяжіння. У протилежному разі вага $\vec{\mathbf{P}} = m(\vec{\mathbf{g}} - \vec{\mathbf{a}})$, де $\vec{\mathbf{a}}$ — прискорення тіла (разом з опорою) відносно землі.

Пружна сила пропорційна зміщенню частинки із положення рівноваги і напрямлена до положення рівноваги: $\vec{\mathbf{F}} = -\kappa\vec{\mathbf{r}}$, де $\vec{\mathbf{r}}$ — радіус-вектор, який характеризує зміщення частинки із положення рівноваги; κ— додатний коефіцієнт, який характеризує пружні властивості тої чи іншої сили. Прикладом такої сили є пружна деформація при розтягу (стисненні) пружини, або стрижня: $F = k\Delta l$, де k — жорсткість; Δl — величина пружної деформації.

Сила тертя ковзання виникає при ковзанні даного тіла по поверхні іншого тіла: $F = \mu N$, де μ — коефіцієнт тертя ковзання; N — сила нормального тиску, яка придавлює поверхні, що труться. Дана сила спрямована в бік, протилежний напрямку руху даного тіла відносно

іншого. Сила тертя кочення формально підлягає тим самим законам, що і тертя ковзання, але коефіцієнт тертя значно менший, ніж при терті ковзання.
Сила опору, що діє на тіло, яке рухається в газі чи рідині: $\vec{\mathbf{F}} = -k\vec{\boldsymbol{v}}$, де k – коефіцієнт опору; $\vec{\boldsymbol{v}}$ – швидкість тіла.

2.2 Основне рівняння динаміки матеріальної точки

Другий закон Ньютона: $\mathrm{d}\vec{\mathbf{p}}/\mathrm{d}t = \vec{\mathbf{F}}$. Якщо маса стала, то

$$m\vec{\mathbf{a}} = m\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{v}}/\mathrm{d}t = \vec{\mathbf{F}}. \tag{2.1}$$

Дане рівняння є, по суті, диференціальним рівнянням руху матеріальної точки у векторному вигляді. Його розв'язок – основна задача динаміки матеріальної точки.

Можливі два шляхи розв'язання задачі:
1 Знайти закон руху точки, тобто залежність $\vec{\mathbf{r}}(t)$, якщо відома маса m, діюча на точку сила $\vec{\mathbf{F}}$, задані початкові швидкість $\vec{\boldsymbol{v}}_0$ та положення $\vec{\mathbf{r}}_0$ точки.

У цьому випадку розв'язок задачі зводиться до інтегрування другого закону Ньютона.
2 Знайти закон діючої на точку сили $\vec{\mathbf{F}}$, якщо відомі маса m точки і залежність від часу її радіуса-вектора $\vec{\mathbf{r}}(t)$.

У цьому випадку розв'язок задачі зводиться до диференціювання $\vec{\mathbf{r}}(t)$ за часом.
Приклад 2.1 Невеликий брусок масою m зісковзує вниз по похилій площині, яка складає кут α з горизонтом. Коефіцієнт тертя між бруском і площиною дорівнює μ. Знайти прискорення бруска відносно площини (ця система відліку передбачається інерційною).

Р о з в'я з о к. Спочатку зобразимо всі сили, що діють на брусок. Це сила тяжіння $m\vec{\mathbf{g}}$, сила реакції $\vec{\mathbf{N}}$ з боку площини і сила тертя $\vec{\mathbf{F}}_{\text{тр}}$, яка напрямлена в бік, протилежний руху бруска (рис. 2.1).

Після цього зв'яжемо з системою відліку "похила площина" систему координат x, y. Для зручності спрямуємо вісь x за напрямком руху бруска.

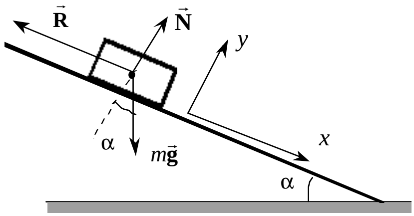

Рисунок 2.1

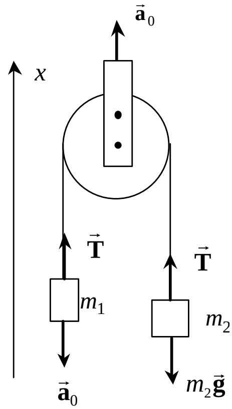

Рисунок 2.2

Тепер можна записати рівняння руху (2.1): зліва — добуток маси на проекцію прискорення a_x, а справа — проекції всіх сил на вісь x:

$$ma_x = mg_x + N_x + F_{\text{тр,x}}.$$

У даному випадку $g_x = g\sin\alpha$, $R_x = 0$ і $F_{\text{тр,x}} = -F_{\text{тр}}$, тому

$$ma_x = mg\sin\alpha - F_{\text{тр}}.$$

Оскільки брусок рухається тільки вздовж осі x, то це означає, відповідно до другого закону Ньютона, що сума проекцій всіх сил на будь-який перпендикулярний до осі x напрямок дорівнює нулю. Взявши за такий напрямок вісь y, отримаємо

$$N = mg\cos\alpha.$$

Враховуючи, що

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\cos\alpha,$$

маємо

$$a_x = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Приклад 2.2 Через блок (рис. 2.2) перекинута нерозтяжна, невагома нитка, на кінцях якої висять тягарці масами m_1 і m_2, причому $m_1 > m_2$. Блок почали піднімати вверх з прискоренням $\vec{\mathbf{a}}_0$ відносно землі. Вважаючи, що нитка зісковзує по блоку без тертя, знайти сили натягу нитки і прискорення a_1 тягарця m_1 відносно землі.

Р о з в'я з о к. Виберемо додатний напрямок осі x, як подано на рис. 2.2, і запишемо для обох тягарців основне рівняння динаміки в проекціях на цю вісь:

$$\begin{cases} m_1 a_{1x} = T - m_1 g, \\ m_2 a_{2x} = T - m_2 g. \end{cases} \tag{2.2}$$

Ця система рівнянь має три невідомих: a_{1x}, a_{2x} і T. Для запису третього рівняння використаємо кінетичний зв'язок між прискореннями:

$$\vec{\mathbf{a}}_1 = \vec{\mathbf{a}}_0 + \vec{\mathbf{a}'}, \quad \vec{\mathbf{a}}_2 = \vec{\mathbf{a}}_0 - \vec{\mathbf{a}'},$$

де $\vec{\mathbf{a}'}$ – прискорення вантажу масою m_1 відносно блока. Склавши почленно ліву і праву частини цих рівностей, отримаємо

$$\vec{\mathbf{a}}_1 + \vec{\mathbf{a}}_2 = 2\vec{\mathbf{a}}_0,$$

або в проекціях на вісь x:

$$a_{1x} + a_{2x} = 2a_0. \tag{2.3}$$

Розв'язавши разом рівняння (2.2) і (2.3), знайдемо:

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}(g + a_0), \quad a_{1x} = \frac{2m_2 a_0 + (m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2}.$$

Звідси випливає, що при заданому $\vec{\mathbf{a}}_0$ знак a_{1x} залежить від співвідношення мас m_1, m_2, зокрема, $a_{1x} = 0$ при $m_1/m_2 = 1 + 2a_0/g$.

2.3 Основне рівняння динаміки точки в проекціях на дотичну і нормаль

Рівняння (2.1) можна записати в проекціях на дотичну і нормаль до траєкторії в даній точці (див. розд. 1.2). Проектуючи обидві частини (2.1)

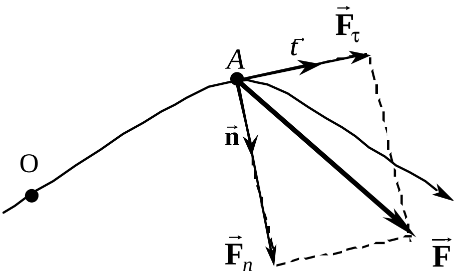

Рисунок 2.3

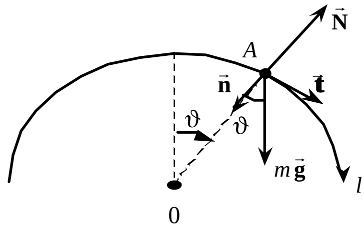

Рисунок 2.4

на рухомі орти $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ (рис. 2.3) і використовуючи записані раніше формули для тангенціального і нормального прискорення, отримаємо

$$\begin{cases} m\mathrm{d}v_\tau/\mathrm{d}t = F_\tau, \\ mv^2/R = F_n, \end{cases} \tag{2.4}$$

де F_τ і F_n – проекції вектора $\vec{F}$ на рухомі орти $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ (тангенціальна і нормальна складова сили $\vec{F}$). Нагадаємо, що напрямок орта $\vec{\tau}$ вибирають в бік зростання дугової координати l, а напрямок орта $\vec{n}$ – до центра кривизни траєкторії в даній точці. Рівняннями (2.4) зручно користуватися, коли наперед відома траєкторія руху матеріальної точки.

Приклад 2.3 Невелике тіло A зісковзує з вершини гладкої сфери радіусом r. Знайти швидкість тіла в момент відриву від поверхні сфери, якщо його початкова швидкість дуже мала.

Р о з в'я з о к. Зобразимо сили, що діють на тіло A. Це сила тяжіння $m\vec{g}$ і сила реакції опори $\vec{N}$). Запишемо рівняння (2.4) в проекціях на орти $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ (рис. 2.4):

$$\begin{cases} m\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = mg\sin\vartheta, \\ mv^2/r = mg\cos\vartheta - N. \end{cases}$$

У першому рівнянні врахуємо, що $\mathrm{d}t = \mathrm{d}l/v = r\mathrm{d}\vartheta/v$, де $\mathrm{d}l$ – елементарний шлях тіла A за відрізок часу $\mathrm{d}t$:

$$v\mathrm{d}v = gr\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta.$$

Візьмемо інтеграл від лівої частини – за v від 0 до v; від правої – за ϑ від 0 до ϑ, в результаті отримаємо

$$v^2 = 2gr(1 - \cos\vartheta).$$

Повернемося до другого рівняння системи. В момент відриву $N = 0$, тому

$$v^2 = gr\cos\vartheta,$$

де значення v, ϑ відповідають точці відриву. Виключивши $\cos\vartheta$ із двох останніх рівнянь, отримаємо $v = \sqrt{2gr/3}$.

2.4 Рух тіла зі змінною масою

Основне рівняння динаміки матеріальної точки зі змінною масою (рівняння Мещерського)

$$m\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{v}}/\mathrm{d}t = \vec{\mathbf{F}} + Q_m\vec{\mathbf{u}},$$

де $Q_m = \mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ – зменшення (збільшення) маси точки за одиницю часу; $\vec{\mathbf{u}}$ – швидкість речовини, що відділяється (приєднується) від даної точки (тіла). Останній член рівняння Мещерського має назву реактивної сили: $\vec{\mathbf{R}} = (\mathrm{d}m/\mathrm{d}t)\vec{\mathbf{u}} = Q_m\vec{\mathbf{u}}$.

Приклад 2.4 Платформа в момент $t = 0$ почала рухатися під дією сталої сили тяги $\vec{\mathbf{F}}$. Знехтувавши тертям, знайти залежність від часу швидкості платформи, якщо: а) її завантажили піском, який висипається через отвір в днищі зі сталою швидкістю Q_m кг/с, а в момент часу $t = 0$ с маса платформи з піском дорівнює m_0; б) на платформу, маса якої m_0, в момент часу $t = 0$ с починає висипатись пісок із нерухомого бункера так, що швидкість завантаження стала і дорівнює Q_m кг/с.

Р о з в'я з о к. а) У цьому випадку реактивна сила дорівнює нулю, і рівняння Мещерського має вигляд

$$(m_0 - Q_m t)(\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{v}}/\mathrm{d}t) = \vec{\mathbf{F}},$$

звідки

$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\mathbf{F}}\mathrm{d}t/(m_0 - Q_m t).$$

Інтегруючи з урахуванням початкових умов, отримаємо

$$\vec{v} = (\vec{\mathbf{F}}/Q_m) \ln \left(m_0/(m_0 - Q_m t) \right).$$

б) У даному випадку реактивна сила $\vec{\mathbf{R}} = Q_m(-\vec{\boldsymbol{v}})$, тому відповідно до рівняння Мещерського

$$(m_0 + Q_m t) \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F - Q_m v,$$

звідки

$$\frac{\mathrm{d}v}{F - Q_m v} = \frac{\mathrm{d}t}{m_0 + Q_m t}.$$

Інтегруючи це рівняння з урахуванням початкових умов, отримаємо

$$v = \frac{F}{m_0} \cdot \frac{t}{1 + Q_m t/m_0}.$$

Перевірка розмірності:

$$[v] = \frac{[F]}{[Q_m]} = \frac{\text{Н}}{\text{кг/с}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м/с}^2}{\text{кг/с}} = \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

$$[v] = \frac{[F][t]}{[m_0]} = \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{кг}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м/с}}{\text{кг}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

2.5 Сили інерції

Основне рівняння динаміки Ньютона справедливе тільки в інерційних системах відліку. Візьмемо дві системи відліку: інерційну K-систему та неінерційну K'-систему. Нехай K'-система обертається з постійною кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо осі, переміщуючись одночасно з прискоренням $\vec{\mathbf{a}}_0$ відносно K-системи. Тоді основне рівняння динаміки в неінерційній системі K' матиме вигляд

$$m\vec{\mathbf{a}'} = \vec{\mathbf{F}} - m\vec{\mathbf{a}}_0 + 2m[\vec{\boldsymbol{v}'}, \vec{\boldsymbol{\omega}}] + m\omega^2 \vec{\boldsymbol{\rho}},$$

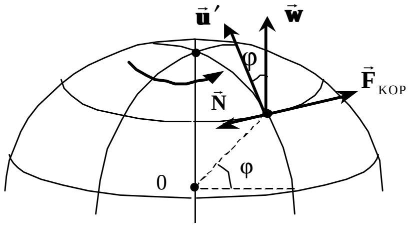

Рисунок 2.5

де $\vec{\boldsymbol{v}}'$ — швидкість частинки відносно K'-системи; $\vec{\boldsymbol{\rho}}$ — радіус-вектор, перпендикулярний до осі обертання, що характеризує положення частинки відносно цієї осі. Величину $\vec{\mathbf{F}}_{\text{ін}} = -m\vec{\mathbf{a}}_0$ називають силою інерції, $\vec{\mathbf{F}}_{\text{кор}} = 2m[\vec{\boldsymbol{v}}', \vec{\boldsymbol{\omega}}]$ — силою Коріоліса, $\vec{\mathbf{F}}_{\text{цб}} = m\omega^2\vec{\boldsymbol{\rho}}$ — відцентровою силою. Перша сила обумовлена поступальним рухом систем відліку, а дві останні — обертовим. Зазначимо, що якщо $\vec{\mathbf{F}} = 0$, то частинка все одно в K'-системі рухається з прискоренням, причому так, ніби на неї діяли деякі сили, що відповідають трьом силам інерції. Для сил інерції неможливо вказати їх джерела у вигляді певного тіла, що діє на частинку, тому сили інерції не мають протидіючих і на противагу від сил взаємодії не підлягають третьому закону Ньютона.

Приклад 2.5 Потяг масою m рухається по меридіану на широті φ зі швидкістю v'. Знайти силу бокового тиску, з яким поїзд діє на рейки.

Р о з в'я з о к. У системі відліку, зв'язаною із Землею (вона обертається з кутовою частотою ω), складова прискорення поїзда перпендикулярна до площини меридіана дорівнює нулю. Тому і сума проекцій сил, що діють на потяг у цьому напрямку, також дорівнює нулю. А це означає, що сила Коріоліса $\vec{\mathbf{F}}_{\text{кор}}$ (рис. 2.5) повинна урівноважуватися силою $\vec{\mathbf{N}}$ бокового тиску, що діє на потяг з правого боку за ходом руху рейки, тобто $\vec{\mathbf{F}}_{\text{кор}} = -\vec{\mathbf{N}}$.

За третім законом Ньютона потяг буде діяти на цю рейку в горизонтальному напрямку зі силою $\vec{\mathbf{N}}' = -\vec{\mathbf{N}}$. Таким чином, $\vec{\mathbf{N}}' = \vec{\mathbf{F}}_{\text{кор}} = 2m[\vec{\boldsymbol{v}}', \vec{\boldsymbol{\omega}}]$. Модуль вектора $\vec{\mathbf{N}}'$ у відповідності до рис. 2.5 буде дорівнювати $N' = 2mv'\omega\sin\varphi$.

2.6 Задачі для самостійного розв'язку

2.1 Під дією сталої сили тіло масою $m = 3$ кг здійснює прямолінійний рух, що описується рівнянням $x = At^3 - Bt^2 + Ct + D$. Враховуючи, що $A = 2$ м·с$^{-3}$, $B = 3$ м·с$^{-2}$, $C = 5$ м·с$^{-1}$, $D = 4$ м, визначити силу, яка діє на тіло через $t = 5$ с з початку руху. Як ця сила залежить від часу?

2.2 Під дією якої сили тіло масою 10 кг при прямолінійному русі змінює пройдений шлях із часом за законом $s = 10\,t(1 - 2t)$ м? Побудуйте графіки залежності шляху, швидкості і прискорення від часу.

2.3 Знайти модуль і напрямок сили, що діє на частинку масою m при її русі по площині xy за законом $x = A\sin\omega t$, $y = B\cos\omega t$, де A, B, ω – сталі.

2.4 Аеростат масою $m = 250$ кг почав опускатися з прискоренням $a = 0,2$ м/с^2. Визначити масу баласту, який необхідно викинути за борт, щоб аеростат отримав таке саме прискорення, але направлене вгору. Опором повітря знехтувати.

2.5 Два тіла масами $m_1 = 50$ кг і $m_2 = 8$ кг, що лежать на горизонтальній площині, зв'язані динамометром. До тіл прикладено сили $f_1 = 4.9$ Н та $f_2 = 14.7$ Н. Яке значення сили покаже динамометр, якщо: а) сила $\vec{\mathbf{f}}_2$ прикладена до тіла більшої маси, а сила $\vec{\mathbf{f}}_1$ – до тіла меншої маси; б) сили прикладені навпаки; в) обидва тіла мають однакову масу $m_1 = m_2 = 4$ кг?

2.6 На гладенькій горизонтальній поверхні розміщене тіло масою $m_1 = 3$ кг. Друге тіло масою $m_2 = 2$ кг підвішене до перекинутої через невагомий блок нитки, на другому кінці якої розміщене тіло масою m_1 (рис. 2.6). Знайти прискорення тіл і натяг нитки? Тертям тіла масою m_1 під час руху по горизонтальній площині і тертям у блоці знехтувати. Нитку вважати невагомою і нерозтяжною.

2.7 З яким мінімальним прискоренням у горизонтальному напрямку потрібно рухати візок (рис. 2.7), щоб тіла однакової маси m перебувало в стані спокою відносно нього. Коефіцієнти тертя обох тіл із сторонами візка однакові і дорівнюють μ. Масою блока і ниток знехтувати. Тертя в блоці не враховувати.

2.8 Тіло масою m_0 може рухатися без тертя по горизонтальній поверхні стола. До тіла прикріплено нерозтяжну і невагому нитку, яку пе-

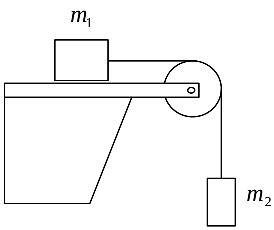

Рисунок 2.6

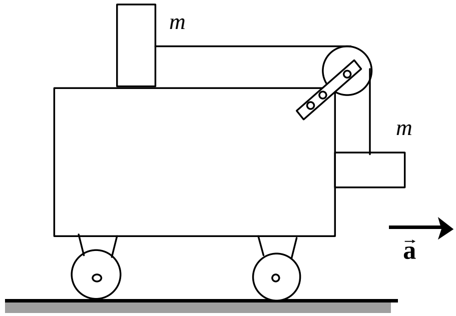

Рисунок 2.7

рекинуто через невагомий блок (рис. 2.8). До другого кінця нитки прикріплено вісь іншого невагомого блока, через який перекинуто нитку, до кінців якої прикріплено два тягарці масами m_1 і m_2. Знехтувавши тертям, знайти прискорення тіла масою m_1.

2.9 Два однакових тіла масою M кожне зв'язані між собою ниткою, яку перекинуто через блок з нерухомою віссю (рис. 2.9). До одного з цих тіл додають тягарець масою m. Визначити: а) силу натягу нитки; б) прискорення, з якими рухаються тіла; в) силу, з якою тягарець діє на тіло M; г) силу, з якою блок діє на вісь.

2.10 Через нерухомий блок перекинута тонка нерозтяжна нитка, на кінцях якої підвішені тягарці масами $m_1 = 1$ кг і $m_2 = 2$ кг. У початковий момент часу обидва тягарці розміщувалися на одній висоті. Визначити, на яку відстань змістяться центри мас тягарців через $t = 1$ с з початку руху. Вважати, що тертя немає, а маса блока і нитки дуже мала. Знайти прискорення центра мас тягарців.

2.11 Визначити прискорення a_1, a_2, a_3 тіл масами $m_1 = 4$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 1$ кг, що складають систему, зображену на рис. 2.10. Визначити також натяги T_1, T_2 нерозтяжних і невагомих ниток, а також силу F, яку показує динамометр. Масою блоків та тертям у них знехтувати.

2.12 На гладенькому столі лежить брусок масою $m = 4$ кг. До бруска прив'язані два шнури, перекинуті через нерухомі блоки, які прикріплені до протилежних країв столу. До кінців шнурів прив'язані гирі, маси яких

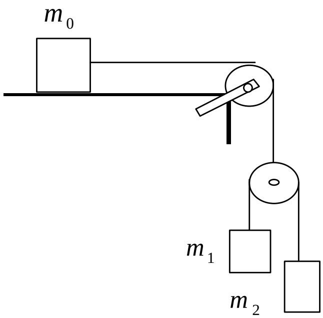

Рисунок 2.8

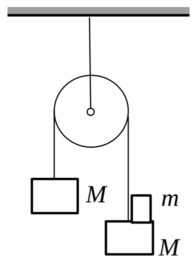

Рисунок 2.9

$m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг. Знайти прискорення a, з яким рухається брусок, і силу T натягу кожного із шнурів. Масою блоків і тертям знехтувати.

2.13 Тіло лежить на похилій площині, яка складає з горизонтом кут $\alpha = 4^\circ$. При якому найбільшому коефіцієнті тертя тіло почне зісковзувати по похилій площині? З яким прискоренням a буде ковзати тіло по площині, якщо коефіцієнт тертя $\mu = 0,03$? Який час необхідний для проходження за цих умов шляху $s = 100$ м? Яку швидкість v тіло буде мати в кінці шляху?

2.14 Похила площина, що утворює кут $\alpha = 25^\circ$ з площиною горизонту, має довжину $l = 2$ м. Тіло, рухаючись рівноприскорено, зісковзує з цієї площини за час $t = 2$ с. Визначити коефіцієнт тертя μ тіла по площині.

2.15 На вершині ідеально гладенької похилої площини, що утворює кут α з горизонтом, розташовано невагомий блок. Через блок перекинуто нерозтяжну і невагому нитку, до кінців якої прикріплено тягарці m_1 і m_2 (рис. 2.11). Знехтувавши тертям у блоці, визначити прискорення, з яким рухаються тягарці, та натяг нитки.

2.16 В установці (рис. 2.11) відомий кут α і коефіцієнт тертя μ між тілом m_1 і похилою площиною. Масами блока і нитки можна знехтувати, тертя в блоці немає. Спочатку обидва тіла нерухомі. Знайти відношення мас m_2/m_1, при якому тіло m_2 почне: а) опускатися; б) підніматися.

2.17 Невагомий блок закріплено на вершині двох похилих площин, що складають з горизонтом кути відповідно $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$ (рис. 2.12).

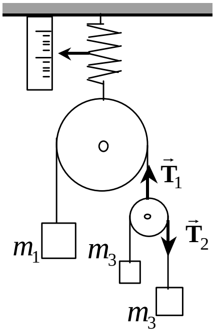

Рисунок 2.10

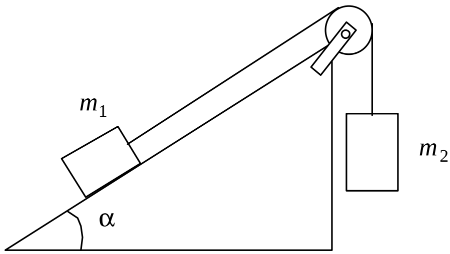

Рисунок 2.11

Через блок перекинуто нитку, до кінців якої прикріплено тягарці $m_1 = m_2 = 1$ кг. Знехтувавши тертям, знайти: а) прискорення, з яким рухаються тягарці; б) натяг нитки.

2.18 Тіло масою m зісковзує по боковій поверхні клина масою M, який лежить на гладенькій горизонтальній поверхні столу. Бокові грані клина утворюють кут (рис. 2.13) α. З яким прискоренням буде рухатися клин по столу, якщо тертя між тілом і клином, а також між клином і столом відсутнє?

2.19 Невелике тіло пустили знизу вверх по похилій площині, яка складає кут $\alpha = 15°$ з горизонтом. Знайти коефіцієнт тертя, якщо час підняття тіла був у $\eta = 2$ рази менший від часу спускання.

2.20 Тіло зісковзує по похилій площині, кут нахилу якої до горизонту $\alpha = 30°$. При цьому в деякій точці A тіло мало швидкість $v_A = 0,14$ м/с, а в точці B його швидкість стала $v_B = 2,57$ м/с. Який час тіло рухалося із точки A в точку B, якщо коефіцієнт тертя $\mu = 0,1$?

2.21 На вершині двох похилих площин, що утворюють з горизонтом кути α і β, закріплено невагомий блок. До нитки, яка перекинута через блок, прив'язані два тягарці масами m_1 і m_2. Визначити прискорення, з яким рухаються тіла вздовж похилих площин, якщо коефіцієнт тертя першого тіла по похилій площині μ_1, а другого – μ_2. Визначити силу натягу нитки та силу, з якою блок тисне на вісь. Тертям у блоці і масою

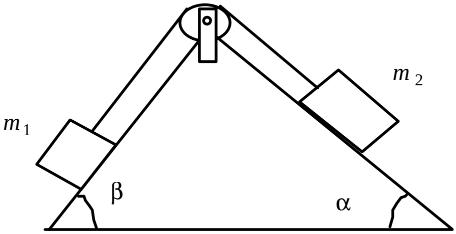

Рисунок 2.12

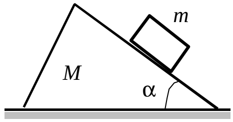

Рисунок 2.13

нитки знехтувати.

2.22 Брусок масою $m_2 = 5$ кг може вільно ковзати по горизонтальній поверхні без тертя. На ньому розміщений другий брусок масою $m_1 = 1$ кг. Коефіцієнт тертя між поверхнями брусків $\mu = 0,3$. Визначити максимальне значення сили $F_{\max}$, прикладеної до нижнього бруска, при якому почнеться проковзування верхнього бруска.

2.23 На горизонтальній площині розміщений брусок масою $m_1 = 2$ кг. Коефіцієнт тертя бруска по площині $\mu_1 = 0,2$. На бруску розміщений другий брусок масою $m_2 = 8$ кг. Коефіцієнт тертя μ_2 верхнього бруска по нижньому дорівнює $\mu_2 = 0,3$. До верхнього бруска прикладена сила F. Визначити: а) значення сили F_1, при якому почнеться сумісне ковзання брусків по поверхні; б) значення сили F_2, при якому верхній брусок почне проковзувати відносно нижнього.

2.24 Літак летить в горизонтальному напрямку з прискоренням $a = 20$ м/с^2. Яке перевантаження пасажирів літака? (Перевантаженням називають відношення сили F, що діє на пасажира, до сили тяжіння mg).

2.25 Автоцистерна з керосином рухається з прискоренням $a = 0,7$ м/с^2. Під яким кутом φ до площини горизонту розміщений рівень керосину в цистерні?

2.26 На візочку, який рухається в горизонтальному напрямку з прискоренням $a = 9,8$ м/с^2, повісили нитку з тягарцем. Знайти натяг нитки і кут, що утворює нитка з вертикаллю, якщо маса підвішеного на нитці тягарця $m = 0,10$ кг.

2.27 При якій швидкості автомобіля тиск, з яким він діє на ввігнутий міст, в два рази більший від тиску, що діє на випуклий міст? Радіус кривизни в обох випадках $R = 30$ м.
2.28 Брусок масою m тягнуть за нитку так, що він рухається з постійною швидкістю по горизонтальній поверхні з коефіцієнтом тертя μ (рис. 2.14). Знайти кут α, при якому натяг нитки буде найменшим. Чому він дорівнює?
2.29 Горизонтально розташований диск обертається навколо вертикальної осі, яка проходить через його центр. На диску лежить вантаж на відстані $R = 10$ см від осі обертання. Знайти коефіцієнт тертя спокою між диском і вантажем, якщо при частоті $n = 0,5$ об/с вантаж починає зісковзувати по поверхні диска.
2.30 Тіло масою $m = 200$ г підвішене на нитці довжиною $l = 80$ см. Його відхилили від положення рівноваги до висоти точки підвісу і відпустили, в результаті чого нитка порвалася. На якій висоті було тіло в момент розриву нитки, якщо вона розривається під дією сили $F = 4$ Н.
2.31 Невелику кульку масою m, підвішену на нитці, відвели в бік так, що нитка утворила прямий кут з вертикаллю, а потім відпустили. Знайти:

а) модуль повного прискорення кульки і силу натягу нитки в залежності від ϑ — кута відхилення нитки від вертикалі;

б) силу натягу нитки в момент, коли вертикальна складова швидкості кульки максимальна;

в) кут ϑ між ниткою і вертикаллю в момент, коли вектор повного прискорення кульки направлений горизонтально.
2.32 Невелике тіло A починає зісковзувати з вершини гладенької сфери радіусом R. Знайти кут ϑ між вертикаллю і радіусом-вектором, який характеризує положення тіла A відносно центра сфери в момент відриву від неї.
2.33 Автомашина рухається з постійним тангенціальним прискоренням $a_\tau = 0,62$ м/с^2 по горизонтальній поверхні, описуючи коло радіусом $R = 40$ м. Коефіцієнт тертя ковзання між колесами машини і поверхнею $\mu = 0,20$. Який шлях пройде машина без ковзання, якщо в початковий момент її швидкість дорівнювала нулю?
2.34 Всередині вертикально розташованого конуса з кутом при вер-

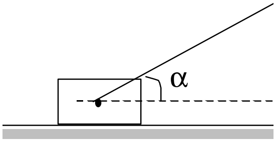

Рисунок 2.14

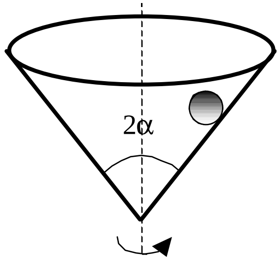

Рисунок 2.15

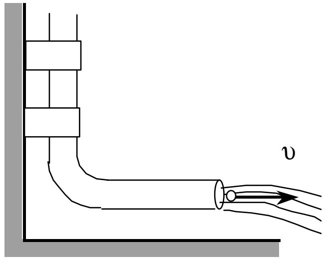

Рисунок 2.16

шині $2\alpha = 90^\circ$ розміщене тіло (рис. 2.15). На якій мінімальній відстані від вершини конуса може розміщуватися тіло, якщо коефіцієнт тертя між тілом і поверхнею конуса $\mu = 0,2$, а конус обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю $\omega = 7,0$ рад/с? Чому дорівнює максимальне значення цієї відстані?

2.35 Нерухома труба з поперечним перерізом $S = 10$ см^2 вигнута під кутом $\varphi = 90^\circ$ і прикріплена до стіни (рис. 2.16). По трубі тече вода, об'ємна витрата якої $Q_V = 50$ л/с. Знайти тиск p струменя води, спричинений вигином труби.

2.36 Струмінь води вдаряє по нерухомій площині, поставленій під кутом $\varphi = 60^\circ$ до напрямку руху струменя. Швидкість струменя $v = 20$ м/с, площа S його поперечного перерізу дорівнює 5 см^2. Визначити силу F тиску струменя на площину.

2.37 Снаряд масою $m = 10$ кг вилетів із зенітної гармати вертикально вгору зі швидкістю $v_0 = 800$ м/с. Вважаючи, що сила опору повітря змінюється пропорційно швидкості, визначити час τ піднімання снаряда до найвищої точки. Коефіцієнт опору $r = 0,25$ кг/с.

2.38 Катер масою $m = 400$ кг почав рухатися по озеру. Сила тяги F мотора дорівнює $0,2$ кН. Вважаючи силу опору F_o пропорційною швидкості, знайти швидкість v катера через $\Delta t = 20$ с з початку руху. Коефіцієнт опору $r = 20$ кг/с.

2.39 Ракета масою $m = 1$ т, запущена з поверхні Землі вертикально вгору, піднімається з прискоренням $a = 2g$. Швидкість v струменя газів,

що вириваються із сопла, 1200 м/с. Знайти витрату палива Q_m.
2.40 Космічний апарат має масу $m = 3,5$ т. При маневруванні із його двигунів виривається струмінь газів зі швидкістю $v = 800$ м/с; витрата палива $Q_m = 0,2$ кг/с. Знайти реактивну тягу R двигуна і прискорення a, яке вона надає космічному апарату.
2.41 Гелікоптер масою $m = 3,5$ т з ротором, діаметр якого дорівнює 18 м, "висить" в повітрі. З якою швидкістю v ротор зіштовхує вниз струмінь повітря? Діаметр струменя вважати таким, що дорівнює діаметру ротора.
2.42 Ракету з рідким паливом масою $M = 15$ т запускають у вертикальному напрямку. Витрата палива $Q_m = 150$ кг/с. На яку висоту підніметься ракета за час роботи двигуна Δt=1 хв., якщо швидкість витоку газів із сопла $u = 3$ км/с.
2.43 Платформа завантажена піском, який висипається через отвір у днищі зі сталою швидкістю $Q_m = 10$ кг/с. Знайти швидкість платформи через час $t = 2$ хв. з початку руху, якщо при $t = 0$ с швидкість $v_0 = 0$ м/с, маса платформи $M = 20$ т і на неї почала діяти стала сила тяги $F = 1000$ Н. Тертя не враховувати.
2.44 У центрі горизонтально розташованого диска радіусом $R = 2$ м встановлена мішень, а на його краю – пневматичний пістолет. При нерухомому диску кулька попадає в центр мішені. Якщо диск обертається навколо вертикальної осі, яка проходить через його центр, з постійною кутовою швидкістю $\omega = 0,5$ рад/с, то кулька попаде в точку мішені, зміщену від її центра на $s = 10$ см. Визначити швидкість кульки.
2.45 На географічній широті $\varphi = 60°$ тіло вільно падає на Землю з висоти $H = 200$ м. Визначити відхилення тіла під дією коріолісової сили інерції, спричиненою добовим обертанням Землі.
2.46 У точці, розташованій на широті $\varphi = 60°$, із гвинтівки зроблено постріл строго вертикально вгору. Через деякий час пуля впала на землю. Визначити на скільки змістилася пуля після падіння від точки пострілу, якщо її початкова швидкість $v_0 = 200$ м/с. Опором повітря знехтувати.
2.47 Гладенький горизонтальний диск обертається з кутовою швидкістю $\omega = 5$ рад/с навколо вертикальної осі, яка проходить через її центр.

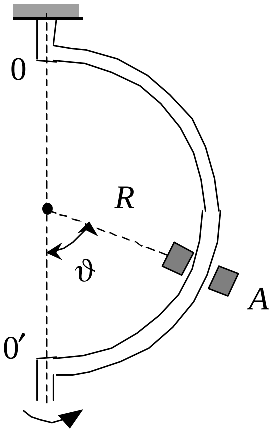

Рисунок 2.17

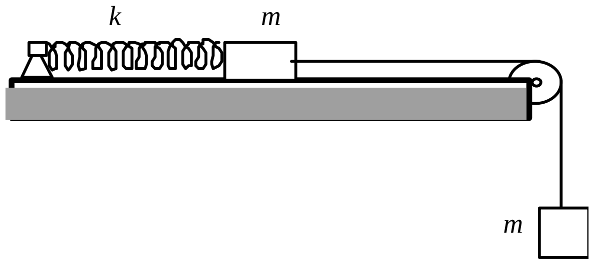

Рисунок 2.18

У центрі диска розмістили невелику шайбу масою $m = 60$ г і надали їй поштовхом горизонтальної швидкості $v_0 = 2,6$ м/с. Знайти модуль сили Коріоліса, що діє на шайбу в системі відліку "диск", через $t = 0,5$ с з початку її руху.

2.48 Муфточка A може вільно ковзати вздовж гладкого стрижня, вигнутого у формі півкільця радіусом R (рис. 2.17). Систему почали обертати з постійною кутовою швидкістю ω навколо вертикальної осі OO$'$. Знайти кут ϑ, який відповідає стійкому положенню рівноваги муфточки.

2.49 Невелику кульку масою $m = 50$ г прикріпили до кінця пружної нитки, жорсткість якої $k = 63$ Н/м. Нитку з кулькою відвели в горизонтальне положення, не розтягуючи її, і обережно відпустили. Коли нитка була у вертикальному положенні, її довжина була $l = 1,5$ м, а швидкість кульки $v = 3$ м/с. Знайти силу натягу нитки в цьому положенні.

2.50 У системі, поданій на рис. 2.18, маса кожного бруска $m = 0,5$ кг, жорсткість пружини $k = 40$ Н/м, коефіцієнт тертя між бруском і площиною $\mu = 0,2$. Масами блока, нитки і пружини можна знехтувати. Система приведена в рух з нульовою початковою швидкістю при недеформованій пружині. Знайти максимальну швидкість брусків.

3 ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ

Закони збереження енергії, імпульсу і моменту імпульсу відносять до найбільш універсальних законів природи. До цього часу не знайдено ні одного явища, де б ці закони порушувались. Важлива роль законів збереження як інструментів дослідження обумовлена рядом причин:

1 Закони збереження не залежать ні від траєкторій, ні від характеру діючих сил, тому вони дозволяють отримати ряд дуже загальних і суттєвих висновків про властивості різних механічних процесів, не вникаючи в їх детальний розгляд з допомогою рівнянь руху.

2 Той факт, що закони збереження не залежать від характеру діючих сил, дозволяє використовувати їх, коли сили невідомі.

3 У випадках, коли сили точно відомі, використання законів збереження дуже часто дозволяє отримати розв'язок найбільш простим і елегантним шляхом.

3.1 Імпульс частинки. Імпульс сили

Імпульс частинки за визначенням дорівнює $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\boldsymbol{v}}$. Із другого закону Ньютона, знаючи залежність сили $\vec{\mathbf{F}}$ від часу, можна знайти зміну імпульсу частинки за певний відрізок часу t:

$$\vec{\mathbf{p}}_2 - \vec{\mathbf{p}}_1 = \int_0^t \vec{\mathbf{F}}\,\mathrm{d}t. \tag{3.1}$$

Величину, що стоїть в правій частині цієї рівності, називають **імпульсом сили**.

Приклад 3.1 На частинку, яка в початковий момент часу $t = 0$ мала імпульс $\vec{\mathbf{p}}_0$, діє протягом часу τ сила $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{a}}t(1 - \tau/t)$, де $\vec{\mathbf{a}}$ – сталий вектор. Знайти імпульс $\vec{\mathbf{p}}$ частинки після закінчення дії цієї сили.

Р о з в’я з о к. Відповідно до (3.1)

$$\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_0 + \int\limits_0^\tau \vec{\mathbf{F}}\,\mathrm{d}t.$$

Знайшовши інтеграл, отримаємо $\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_0 + \vec{\mathbf{a}}\tau^2/2$ (див. рис. 3.1).

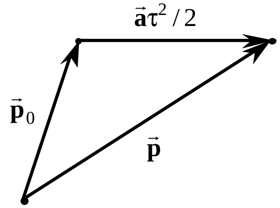

Рисунок 3.1

3.2 Закон збереження імпульсу

Сумарний імпульс системи залишається сталим, якщо результуюча всіх зовнішніх сил дорівнює нулю :

$$\vec{\mathbf{p}} = \sum \vec{\mathbf{p}}_i(t) = \mathbf{const}. \tag{3.2}$$

Закон збереження імпульсу є відображенням такої фундаментальної властивості природи, як однорідність простору.

3.3 Центр інерції

У будь-якій системі частинок є точка $C-$ центр інерції, або центр мас, яка має ряд важливих властивостей. Її положення відносно початку 0 даної системи відліку характеризується радіусом-вектором $\vec{\mathbf{r}}_C$, який знаходять за формулою

$$\vec{\mathbf{r}}_C = \sum m_i \vec{\mathbf{r}}_i / m, \tag{3.3}$$

де m_i, $\vec{\mathbf{r}}_i$ — маса і радіус-вектор $i-$ї частинки; m — маса всієї системи. Зазначимо, що центр інерції системи збігається з її центром тяжіння.

Якщо на систему діють зовнішні сили, то центр інерції рухається так, як би всі зовнішні сили були прикладені до цієї точки і маса системи була зосереджена в цій точці. Тобто рух центра інерції не залежить від точки прикладення зовнішніх сил. Якщо рівнодіюча зовнішніх сил дорівнює нулю, то центр інерції системи перебуває у стані спокою або рухається рівномірно і прямолінійно.

Приклад 3.2 На поверхні води розміщений у стані спокою вузький довгий пліт масою m_1, з людиною масою m_2. Почавши рухатись, людина виконала переміщення $\vec{\mathbf{l}}'$ відносно плоту, а потім зупинилася. Знайти переміщення $\vec{\mathbf{l}}_2$, яке виконав при цьому пліт відносно води. Опором води знехтувати.

Розв'язок. Результуюча всіх зовнішніх сил, що діють на систему людина-пліт, дорівнює нулю. А це означає, що положення центра інерції даної системи в процесі руху людини (і плоту) змінюватися не буде, тобто

$$m_1\vec{\mathbf{r}}_1 + m_2\vec{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{const},$$

де $\vec{\mathbf{r}}_1$ і $\vec{\mathbf{r}}_2$ – радіуси-вектори, що характеризують положення центрів інерції людини і плоту відносно деякої точки води. Із цієї рівності знайдемо зв'язок між приростами векторів $\vec{\mathbf{r}}_1$ і $\vec{\mathbf{r}}_2$:

$$m_1\Delta\vec{\mathbf{r}}_1 + m_2\Delta\vec{\mathbf{r}}_2 = 0.$$

Маючи на увазі, що прирости $\Delta\mathbf{r}_1$ і $\Delta\mathbf{r}_2$ є переміщеннями людини і плоту відносно води, причому $\Delta\vec{\mathbf{r}}_1 = \Delta\vec{\mathbf{r}}_2 + \vec{\mathbf{l}}'$, знайдемо переміщення плоту:

$$\Delta\vec{\mathbf{r}}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{\mathbf{l}}'.$$

3.4 Робота і потужність

Робота сили $\vec{\mathbf{F}}$ при переміщенні точки по траєкторії 1–2:

$$A = \int_1^2 \vec{\mathbf{F}}\,\mathrm{d}\vec{\mathbf{l}} = \int_1^2 F_l \mathrm{d}l. \tag{3.4}$$

Зокрема, якщо на всьому шляху $F_l = \mathrm{const}$, то $A = F_l l$, де l – шлях.

Приклади роботи деяких сил:

1 Робота пружної сили $\vec{\mathbf{F}} = -k\vec{\mathbf{r}}$: $A = kr_1^2/2 - kr_2^2/2$.

2 Робота гравітаційної і кулонівської сили $A = \alpha/r_1 - \alpha/r_2$,
де $\alpha = \begin{cases} -Gm_1m_2 & \text{– гравітаційна взаємодія,} \\ kq_1q_2 & \text{– кулонівська взаємодія.} \end{cases}$

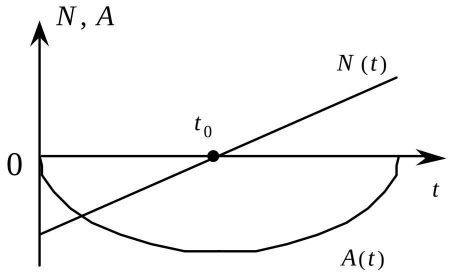

Рисунок 3.2

3 Робота однорідної сили тяжіння $\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{g}}$: $A = mgh_1 - mgh_2$.

Потужність, за визначенням, — це робота, виконана силою за одиницю часу:

$$N = \mathrm{d}A/\mathrm{d}t = \vec{\mathbf{F}}\,\vec{\boldsymbol{v}}. \tag{3.5}$$

Приклад 3.3 Камінь масою m кинули з поверхні землі під кутом α до горизонту з початковою швидкістю $\vec{\boldsymbol{v}}_0$. Не враховуючи опору повітря, знайти потужність сили тяжіння через t секунд з початку руху, а також роботу цих сил за перші t секунд руху.

Розв'язок. Швидкість каменя через t секунд з початку руху $\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}}_0 + \vec{\mathbf{g}}t$. Потужність, яка розвивається силою тяжіння $m\vec{\mathbf{g}}$ у цей момент,

$$N = m\vec{\mathbf{g}}\vec{\boldsymbol{v}} = m(\vec{\mathbf{g}}\vec{\boldsymbol{v}}_0 + g^2t).$$

У нашому випадку $\vec{\mathbf{g}}\vec{\boldsymbol{v}}_0 = g\boldsymbol{v}_0\cos(\pi/2+\alpha) = -gv_0\sin\alpha$, тому

$$N = mg(gt - v_0\sin\alpha).$$

Звідси випливає, що при $t < t_0 = v_0\sin\alpha/g$ потужність $N < 0$, а при $t > t_0$, $N > 0$.

Робота, виконана силою тяжіння за перші t секунд, дорівнює

$$A = \int\limits_0^t N\mathrm{d}t = mg(gt^2/2 - v_0t\sin\alpha).$$

Графіки залежностей $N(t)$ і $A(t)$ подані на рис. 3.2.

3.5 Класифікація сил

Сили взаємодії між частинками механічної системи називаються внутрішніми, а сили, обумовлені дією інших тіл, що не входять в дану систему, — зовнішніми.

Крім цього, сили ділять на потенціальні і непотенціальні. В потенціальному полі робота сил поля на будь-якому замкненому шляху дорівнює нулю. До непотенціальних відносять: гіроскопічні і дисипативні сили. Для гіроскопічних сил робота завжди дорівнює нулю, наприклад: сила Лоренца, Коріоліса. Дисипативні сили — це сили тертя і опору. Сумарна робота всіх внутрішніх дисипативних сил величина від'ємна.

3.6 Кінетична і потенціальна енергії

Враховуючи, що $\vec{\mathbf{F}} = m\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{v}}/\mathrm{d}t$ і $\mathrm{d}\vec{\mathbf{l}} = \vec{\boldsymbol{v}}\mathrm{d}t$, для роботи (3.3) отримаємо вираз

$$A_{12} = mv_2^2/2 - mv_1^2/2. \tag{3.6}$$

Величину $T = mv^2/2$ називають **кінетичною енергією** частинки. Закон (3.6) можна сформулювати так: приріст кінетичної енергії частинки на деякому переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт усіх сил, діючих на частинку на тому самому переміщенні.

Аналогічно, якщо в (3.3) врахувати явний вигляд сили, то роботу можна подати у вигляді

$$A_{12} = \int\limits_1^2 \vec{\mathbf{F}}\,\mathrm{d}\vec{\mathbf{l}} = U_1 - U_2. \tag{3.7}$$

Величину $U(\vec{\mathbf{r}}) = \int \vec{\mathbf{F}}\,\mathrm{d}\vec{\mathbf{l}}$ називають **потенціальною енергією** частинки в потенціальному полі сили $\vec{\mathbf{F}}$. Відзначимо, що потенціальна енергія визначена з точністю до довільної сталої.

Зв'язок між потенціальною енергією і силою

$$F_l = -\partial U/\partial l,$$

$$\vec{\mathbf{F}} = -(\partial U/\partial x)\vec{\mathbf{e}}_x - (\partial U/\partial y)\vec{\mathbf{e}}_y - (\partial U/\partial z)\vec{\mathbf{e}}_z = -\mathrm{grad}U.$$

3.7 Закон збереження енергії

Якщо в замкнутій системі дисипативні сили відсутні (таку систему називають консервативною), то її повна механічна енергія зберігається в процесі руху:

$$E = T + U = \text{const}. \tag{3.8}$$

Закон збереження механічної енергії є відображенням такої фундаментальної властивості природи, як однорідність часу.

Приклад 3.4 Показати, що кінетична енергія T_2, яку слід надати тілу для віддалення її за межі земного тяжіння, у два рази перевищує кінетичну енергію T_1, необхідну для виведення цього тіла на кругову орбіту штучного супутника Землі (поблизу її поверхні). Опором повітря і обертанням Землі знехтувати.

Р о з в'я з о к. Знайдемо швидкість v_1 тіла на круговій орбіті. Відповідно до другого закону Ньютона

$$mv_1^2/R = mg,$$

де m – маса тіла; R – радіус орбіти, приблизно дорівнює радіусу Землі, звідки

$$v_1 = \sqrt{gR} = 7,95 \quad \text{км/год.}$$

Це так звана перша космічна швидкість.

Для того щоб тіло могло подолати поле тяжіння Землі, йому необхідно надати другу космічну швидкість v_2. Цю швидкість можна знайти із законів збереження енергії, відповідно до якого кінетична енергія поблизу поверхні Землі повинна дорівнювати висоті потенційного бар'єра, який тіло повинне подолати. Висота цього бар'єра дорівнює приросту потенціальної енергії між точками $r = R$ і $r = \infty$. Таким чином,

$$mv_2^2/2 = GmM/R,$$

де M – маса Землі, звідки

$$v_2 = \sqrt{2GM/R} = \sqrt{2gR} = 11 \quad \text{км/год.}$$

Тут враховано, що $g = GM/R^2$, тому $v_2 = \sqrt{2}v_1$ і $T_2 = mv_2^2/2 = 2T_1 =$ $= 2 \cdot mv_1^2/2$.

3.8 Зіткнення двох частинок

Розрізняють три типи зіткнення частинок: абсолютно пружне, абсолютно непружне і проміжний випадок – непружне.

Абсолютно непружне зіткнення – це зіткнення, в результаті якого обидві частинки "злипаються" і далі рухаються як одне ціле. Нехай дві частинки (кульки), маси яких m_1, m_2, мають до зіткнення швидкості $\vec{\boldsymbol{v}}_1$, $\vec{\boldsymbol{v}}_2$. Після зіткнення утворюється частинка з масою $m_1 + m_2$. Швидкість частинки $\vec{\boldsymbol{v}}'$, що утворилася, можна знайти із закону збереження імпульсу: $(m_1 + m_2)\vec{\boldsymbol{v}}' = m_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + m_2\vec{\boldsymbol{v}}_2$. Швидкість $\vec{\boldsymbol{v}}'$ дорівнює швидкості центра інерції системи. Частина кінетичної енергії частинок до зіткнення переходить у внутрішню енергію частинки, що утворилася:

$$Q = m_1 v_2^2/2 + m_2 v_2^2/2 - (m_1 + m_2)v'^2/2.$$

Абсолютно пружне зіткнення – це зіткнення, в результаті якого внутрішня енергія частинок не змінюється, а тому незмінюється і кінетична енергія системи.

Удар називають **центральним**, якщо кулі до удару рухалися вздовж прямої, що проходить через їх центри.

Приклад 3.5 Ящик масою m_1 зісковзує по ідеально гладкому лотку довжиною l на нерухомий візок з піском і застряє в ньому. Візок з піском масою m_2 може вільно рухатись (без тертя), переміщуючись по рейках в горизонтальному напрямку. Визначити швидкість u візка з ящиком, якщо лоток нахилений під кутом α до рейок.

Розв'язок. Візок і ящик можна розглядати як систему двох непружно взаємодіючих тіл. Але ця система не замкнута, оскільки на неї діють зовнішні сили: сили тяжіння $m_1\vec{\mathbf{g}}$, $m_2\vec{\mathbf{g}}$ і сила реакції опори $\vec{\mathbf{N}}_2$ (див. рис. 3.3). Тому використати закон збереження імпульсу до системи ящик – візок не можна, але оскільки проекція зазначених сил на напрямок x, що збігається із напрямком рейок, дорівнює нулю, то проекція імпульсу системи на цей напрямок можна вважати сталою, тому

$$p_{1x} + p_{2x} = p'_{1x} + p'_{2x}, \tag{3.9}$$

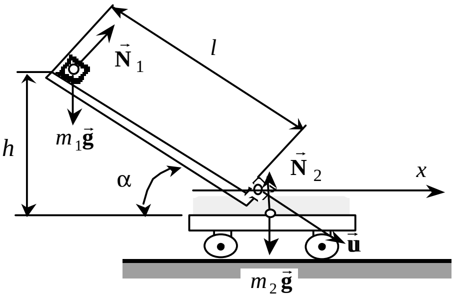

Рисунок 3.3

де p_{1x}, p_{2x} і p'_{1x}, p'_{2x} – проекції імпульсу ящика і візка з піском у момент падіння ящика на візок і після падіння ящика. Тоді із (3.9) для непружного удару отримаємо

$$m_1 v_{1x} = (m_1 + m_2)u,$$

де $v_{1x} = v_1 \cos\alpha$ – проекція швидкості ящика на вісь x, звідки

$$u = m_1 v_1 \cos\alpha/(m_1 + m_2). \tag{3.10}$$

Модуль швидкості v_1 знайдемо із закону збереження енергії:

$$m_1 gh = m_1 v_1^2/2,$$

де $h = l\sin\alpha$, тому

$$v_1 = \sqrt{2gl\sin\alpha}.$$

Підставимо отриманий вираз для v_1 у формулу (3.10), отримаємо

$$u = m_1\sqrt{2gl\sin\alpha}\cos\alpha/(m_1 + m_2).$$

Перевірка розмірності: $[u] = [m][g]^{1/2}[l]^{1/2}/[m] = (\text{м}^{1/2}/\text{с})\text{м}^{1/2} = \text{м/с}$.

Приклад 3.6 Знайти швидкості двох куль після зіткнення, якщо до зіткнення вони рухалися вздовж однієї прямої зі швидкостями $\vec{v}_1$ і

$\vec{\boldsymbol{v}}_2$. Удар вважати центральним, абсолютно пружним, обертання куль відсутнє. Маси куль m_1 і m_2 відповідно.

Р о з в'я з о к. Позначимо швидкості куль після зіткнення $\vec{\boldsymbol{v}}'_1$, $\vec{\boldsymbol{v}}'_2$. Запишемо рівняння збереження енергії і імпульсу:

$$m_1\vec{\boldsymbol{v}}_1^2/2 + m_2\vec{\boldsymbol{v}}_2^2/2 = m_1\vec{\boldsymbol{v}'}_1^2/2 + m_1\vec{\boldsymbol{v}'}_1^2/2, \tag{3.11}$$

$$m_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + m_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 = m_1\vec{\boldsymbol{v}'}_1 + m_2\vec{\boldsymbol{v}'}_2. \tag{3.12}$$

Запишемо (3.11) у вигляді

$$m_1(\vec{\boldsymbol{v}}_1^2 - \vec{\boldsymbol{v}'}_1^2) = m_1(\vec{\boldsymbol{v}'}_1^2 - \vec{\boldsymbol{v}}_2^2). \tag{3.13}$$

Врахувавши, що $(\vec{\mathbf{a}}^2 - \vec{\mathbf{b}}^2) = (\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}})(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}})$, зведемо (3.13) до вигляду

$$m_1(\vec{\boldsymbol{v}}_1 - \vec{\boldsymbol{v}'}_1)(\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \vec{\boldsymbol{v}'}_1) = m_2(\vec{\boldsymbol{v}'}_2 - \vec{\boldsymbol{v}}_2)(\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \vec{\boldsymbol{v}'}_2). \tag{3.14}$$

З врахуванням (3.12)

$$m_1(\vec{v'}_1 - \vec{v'}_1) = m_2(\vec{v'}_2 - \vec{v}_2), \tag{3.15}$$

тому вираз (3.14) зводиться до такого вигляду:

$$\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \vec{\boldsymbol{v}'}_1 = \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \vec{\boldsymbol{v}'}_2. \tag{3.16}$$

Помноживши (3.16) на m_2 і віднявши результат від (3.15), а потім домноживши (3.16) на m_1 і результат додавши до (3.15), отримаємо швидкості куль після удару:

$$\vec{\boldsymbol{v}'}_1 = \frac{2m_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + (m_1 - m_2)\vec{\boldsymbol{v}}_1}{m_1 + m_2}, \quad \vec{\boldsymbol{v}'}_2 = \frac{2m_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + (m_2 - m_1)\vec{\boldsymbol{v}}_1}{m_1 + m_2}.$$

Приклад 3.7 Частинка масою m_1 з імпульсом p_1 пружно зіткнулася з частинкою масою m_2, що перебувала в стані спокою. Знайти імпульс p'_1 першої частинки після зіткнення, в результаті якого вона стала рухатися під кутом ϑ до початкового напрямку руху.

Р о з в'я з о к. Запишемо закон збереження імпульсу:

$$\vec{\mathbf{p}}_1 = \vec{\mathbf{p}'}_1 + \vec{\mathbf{p}'}_2.$$

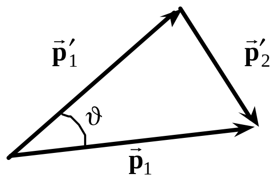

Рисунок 3.4

Із нього знаходимо (див. рис. 3.4):

$$p'^2_2 = p_1^2 + p'^2_1 - 2p_1p'_1\cos\vartheta. \tag{3.17}$$

З другого боку, із закону збереження енергії випливає, що $T_1 = T'_1 + T'_2$, де T'_1, T'_2 – кінетичні енергії першої і другої частинок після зіткнення. Врахуємо зв'язок між кінетичною енергією і імпульсом: $T = p^2/(2m)$, тоді закон збереження енергії можна записати у вигляді

$$p'^2_2 = (m_2/m_1)(p_1^2 - p'^2_1). \tag{3.18}$$

Підставимо (3.17) в (3.18), отримаємо квадратне рівняння для знаходження p'_1, з якого

$$p'_1 = p_1\frac{\cos\vartheta \pm \sqrt{\cos^2\vartheta + (m_2^2/m_1^2 - 1)}}{1 + m_2/m_1}.$$

Якщо $m_1 < m_2$, то фізичний зміст має тільки знак плюс перед коренем. Це випливає з того, що за цієї умови корінь буде більшим, ніж $\cos\vartheta$, а оскільки p'_1 – це модуль, то, природно, він не може бути від'ємним.

Якщо $m_1 > m_2$, то фізичний зміст мають обидва знаки перед коренем. Відповідь в цьому випадку неоднозначна: під кутом ϑ імпульс розсіяної частинки може мати одне із двох значень (це залежить від відносного розташування частинок у момент удару).

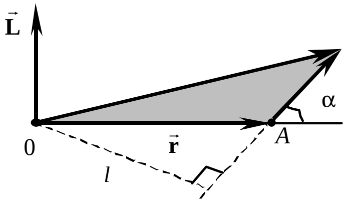

Рисунок 3.5

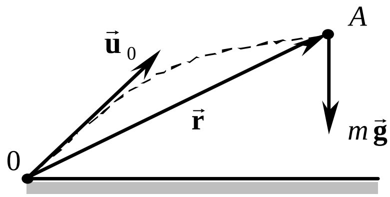

Рисунок 3.6

3.9 Момент імпульсу. Момент сили

Моментом імпульсу частинки A відносно точки 0 (рис. 3.5) називають вектор $\vec{\mathbf{L}}$ який дорівнює векторному добутку радіуса-вектора $\vec{\mathbf{r}}$ на імпульс частинки $\vec{\mathbf{p}}$:

$$\vec{\mathbf{L}} = [\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{p}}]. \tag{3.19}$$

Модуль вектора $\vec{\mathbf{L}}$ дорівнює

$$L = rp\sin\alpha = lp,$$

де α – кут між векторами $\vec{\mathbf{r}}$ і $\vec{\mathbf{p}}$; $l = r\sin\alpha$ – плече вектора $\vec{\mathbf{p}}$ відносно точки 0.

З використанням другого закону Ньютона можна отримати рівняння моментів:

$$\mathrm{d}\vec{\mathbf{L}}/\mathrm{d}t = [\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{p}}] = \vec{\mathbf{M}}, \tag{3.20}$$

де $\vec{\mathbf{M}} = [\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{F}}]$ – момент сили $\vec{\mathbf{F}}$ відносно точки 0.

Моментом імпульсу (сили) відносно осі z називають проекцію на цю вісь вісь вектора $\vec{\mathbf{L}}$ ($\vec{\mathbf{M}}$), визначений відносно довільної точки 0 даної осі.

Приклад 3.8 Камінь A масою m кинули під кутом до горизонту з початковою швидкістю $\vec{\boldsymbol{v}}_0$. Не враховуючи опір повітря, знайти залежність від часу моменту імпульсу каменя $\vec{\mathbf{L}}(t)$ відносно точки кидання (рис. 3.6).

Р о з в'я з о к. За проміжок часу $\mathrm{d}\,t$ момент імпульсу каменя відносно точки 0 отримує приріст $\mathrm{d}\,\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{M}}\mathrm{d}t = [\vec{\mathbf{r}}, m\vec{\mathbf{g}}]\mathrm{d}t$. Оскільки камінь рухається з прискоренням вільного падіння $\vec{\mathbf{g}}$, то радіус-вектор каменя відносно точки кидання визначається за формулою $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\boldsymbol{v}}_0 t + \vec{\mathbf{g}}\, t^2/2$ (див. рис. 3.6), тоді $\mathrm{d}\,\vec{\mathbf{L}} = [\vec{\boldsymbol{v}}_0 t + \vec{\mathbf{g}} t^2/2, m\vec{\mathbf{g}}] = [\vec{\boldsymbol{v}}_0 t, m\vec{\mathbf{g}}] + [\vec{\mathbf{g}} t^2/2, m\vec{\mathbf{g}}] = [\vec{\boldsymbol{v}}_0, m\vec{\mathbf{g}}] t \mathrm{d}\, t$, де ми врахували, що $[\vec{\mathbf{g}}, \vec{\mathbf{g}}] = 0$. Візьмемо інтеграл від лівої і правої частин отриманого виразу за t від 0 до t, врахувавши, що в момент $t = 0$ $\vec{\mathbf{L}}(0) = 0$:

$$\int_0^t \mathrm{d}\,\vec{\mathbf{L}} = \int_0^t [\vec{\boldsymbol{v}}_0, m\vec{\mathbf{g}}] t\, \mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{L}}(t) = [\vec{v}_0, m\vec{\mathbf{g}}] t^2/2.$$

З отриманого виразу випливає, що напрямок вектора $\vec{\mathbf{L}}$ залишається незмінним у процесі руху (вектор $\mathbf{L}$ направлений за площину рис. 3.6).

3.10 Закон збереження моменту імпульсу

Момент імпульсу $\vec{\mathbf{L}}$ замкнутої системи залишається сталим відносно будь-якої точки довільної інерційної системи відліку:

$$\vec{\mathbf{L}} = \sum \vec{\mathbf{L}}_i(t) = \mathrm{const}. \tag{3.21}$$

Так, наприклад, веде себе момент імпульсу Сонячної системи, яка є практично замкнутою.

Закон збереження моменту імпульсу є відображенням такої фундаментальної властивості простору, як його ізотропність. Він відіграє таку саму важливу роль, як і закони збереження енергії та імпульсу. Сам по собі він у багатьох випадках дозволяє зробити ряд суттєвих висновків про властивості тих чи інших процесів, не вникаючи в їх детальний розгляд.

Використання закону збереження моменту імпульсу у випадку твердого тіла буде розглянуто нами в наступному розділі.

3.11 Задачі для самостійного розв'язку

3.1 Куля масою $m_1 = 10,0$ кг, що рухається зі швидкістю $v_1 = 4{,}0$ м/с, зіткнулася з кулею масою $m_2 = 4,00$ кг, швидкість якої 12,0 м/с. Вважаючи удар прямим, не пружним, знайти швидкість u куль після удару в двох випадках: а) мала куля доганяє велику кулю; б) кулі рухаються назустріч одна одній.

3.2 На підлозі стоїть візок у вигляді довгої дошки, обладнаної легкими колесами. На одному кінці дошки стоїть людина. Маса людини $M = 60$ кг, маса дошки $m = 20$ кг. З якою швидкістю u (відносно підлоги) буде рухатися візок, якщо людина піде вздовж дошки зі швидкістю (відносно дошки) $v = 1$ м/с? Масою коліс знехтувати. Тертям у втулках знехтувати.

3.3 Два ковзанярі масами $m_1 = 80,0$ кг і $m_2 = 50,0$ кг, що держаться за кінці довгого натягненого шнура, нерухомо стоять на льоду один проти одного. Один з них починає вкорочувати шнур, вибираючи його зі швидкістю $v = 1,00$ м/с. З якими швидкостями будуть рухатися по льоду ковзанярі? Тертям знехтувати.

3.4 На залізничній платформі встановлено гармату. Маса платформи з гарматою $M = 15,0$ т. Гармата стріляє вверх під кутом $\alpha = 60°$ до горизонту в напрямку шляху. З якою швидкістю v_1 покотиться платформа внаслідок віддачі, якщо маса снаряда $m = 20,0$ кг, і він вилітає зі швидкістю $v_2 = 600$ м/с.

3.5 Снаряд масою $m = 10,0$ кг мав швидкість $v = 200$ м/с у верхній точці траєкторії. У цій точці він розірвався на дві частини. Менша масою $m = 3,00$ кг отримала швидкість $u_1 = 400$ м/с в попередньому напрямку. Знайти швидкість u_2 більшої частини після розриву.

3.6 Снаряд масою $m = 10,0$ кг мав швидкість $v = 200$ м/с у верхній точці траєкторії. У цій точці він розірвався на дві частини. Менша масою $m = 3,00$ кг отримала швидкість $u_1 = 400$ м/с. З якою швидкістю u_2 і під яким кутом φ_2 до горизонту полетить більша частина снаряду, якщо менша полетіла вперед під кутом $\varphi_2 = 60°$ до горизонту.

3.7 На підлозі стоїть візок у вигляді довгої дошки, обладнаної легкими колесами. На одному кінці дошки стоїть людина. Маса людини $M = 60,0$ кг, маса дошки $m = 20,0$ кг. Знайти, на яку відстань d: а) переміститься візок, якщо людина перейде на другий кінець дошки; б) переміститься людина відносно підлоги; в) переміститься центр мас системи візок-людина відносно дошки і відносно підлоги. Довжина дошки $l = 2,00$ м.

3.8 На спокійній воді перпендикулярно до берега і носом до нього розміщений човен масою M і довжиною L. На кормі стоїть людина масою m. На яку відстань l віддалиться човен від берега, якщо людина перейде з корми на ніс човна? Силами тертя і опору знехтувати.

3.9 Човен довжиною $l = 3,00$ м і масою $m = 120$ кг стоїть на спокійній воді. На носі і кормі перебувають два рибалки масами $m_1 = 60,0$ кг і $m_2 = 90,0$ кг. На скільки зрушиться човен відносно води, якщо рибалки поміняються місцями?

3.10 Розрахувати роботу A, виконану при рівноприскореному підніманні вантажу масою $m = 100$ кг на висоту $h = 4$ м за час $t = 2,00$ с.

3.11 Знайти роботу A піднімання вантажу по похилій площині довжиною $l = 2,00$ м, якщо маса вантажу $m = 100$ кг, кут нахилу $\alpha = 30°$, коефіцієнт тертя $\mu = 0,1$ і вантаж рухається з прискоренням $a = 1,00$ м/с^2.

3.12 Розрахувати роботу A, виконану на шляху $s = 12,0$ м рівномірно зростаючою силою, якщо на початку шляху сила $F_1 = 10,0$ Н, в кінці — $F_2 = 46,0$ Н.

3.13 Тіло масою $m = 1,00$ кг кинули з вишки в горизонтальному напрямку зі швидкістю $v_0 = 20,0$ м/с, через $t = 3,00$ с впало на землю. Визначити кінетичну енергію T, яку мало тіло в момент удару об землю, не користуючись законом збереження енергії. Опором повітря знехтувати.

3.14 Камінь кинули вгору під кутом $\alpha = 60°$ до горизонту. Кінетична енергія каменя в початковий момент часу дорівнювала $T_0 = 20,0$ Дж. Визначити кінетичну T і потенціальну U енергії каменя в найвищій точці його траєкторії. Опором повітря знехтувати.

3.15 Камінь масою 5,00 г кинули під кутом до горизонту, з висоти 20,0 м над поверхнею землі зі швидкістю 18 м/с, він упав на землю зі швидкістю 24,0 м/с. Знайти роботу щодо подолання сил опору повітря.

3.16 Насос викидає струмінь води діаметром $d = 2,00$ см зі швидкістю $v = 20,0$ м/с. Знайти потужність N, необхідну для викидання води.

3.17 Гелікоптер масою $m = 3,00$ т висить в повітрі. Визначити потужність N, що витрачається на підтримку його в цьому положенні, при двох значеннях діаметру d ротора: а) 18,0 м; б) 8,0 м. При розрахунках взяти до уваги, що ротор відкидає вниз циліндричний

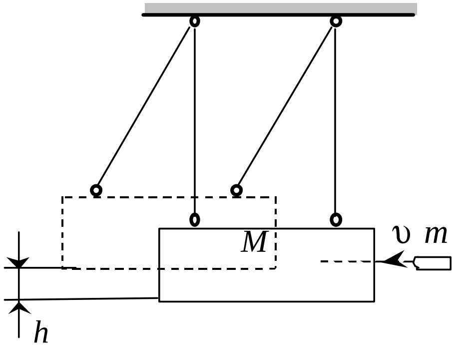

Рисунок 3.7

струмінь повітря діаметром, який дорівнює діаметру ротора.

3.18 Матеріальна точка масою $m = 2,00$ кг рухається під дією деякої сили відповідно до рівняння $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, де $A = 10,0$ м; $B = -2,00$ м/с; $C = 1,00$ м/с^2; $D = -0,20$ м/с^2. Знайти потужність N, що витрачається на рух точки, в моменти часу $t_1 = 2$ с і $t_2 = 5$ с.

3.19 Ковзаняр, стоячи на льоду, кинув вперед гирю масою $m_1 = 5,00$ кг і внаслідок віддачі покотився назад зі швидкістю $\upsilon_2 = 1,00$ м/с. Маса ковзаняра $m_2 = 60,0$ кг. Визначити роботу A, виконану ковзанярем при киданні гирі.

3.20 На рейках стоїть платформа, на якій в горизонтальному положенні закріплено гармату без противідкочувального пристрою. Із гармати виконують постріл вздовж залізничного полотна. Маса снаряда $m_1 = 10,0$ кг, його швидкість $\upsilon = 1,00$ км/с. Маса платформи із гарматою і вантажем $m_2 = 2,00 \cdot 10^4$ кг. На яку відстань l відкотиться платформа після пострілу, якщо коефіцієнт опору $\mu = 2,00 \cdot 10^{-3}$?

3.21 Куля масою $m = 10,0$ г, що летіла зі швидкістю $\upsilon = 600$ м/с, попала в балістичний маятник (рис. 3.7) масою $M = 5,00$ кг і застряла в ньому. На яку висоту h, відхилившись після удару, піднявся маятник?

3.22 Дві кулі масами $m_1 = 10,0$ кг і $m_2 = 15,0$ кг підвішені на нитках довжиною $l = 2,00$ м так, що торкаються одна одної. Меншу кулю відхилили на кут $\alpha = 60°$ і відпустили. Визначити висоту h, на яку піднімуться обидві кулі після удару. Удар куль вважати не пружним.

3.23 Дві кулі масами $m_1 = 2,00$ кг і $m_2 = 3,00$ кг рухаються зі швидкостями відповідно $v_1 = 8,00$ м/с і $v_2 = 4,00$ м/с. Визначити приріст ΔU внутрішньої енергії куль в результаті їх абсолютно не пружного зіткненні в двох випадках: а) менша куля наздоганяє більшу; б) кулі рухаються назустріч одна одній.

3.24 Куля масою m_1, що летить зі швидкістю $v_1 = 5,00$ м/с, ударяє нерухому кулю масою m_2. Удар вважати прямим, не пружним. Визначити швидкість u куль після удару, а також долю w кінетичної енергії кулі, що летіла, яка витратилася на збільшення внутрішньої енергії цих куль. Розглянути два випадки: а) $m_1 = 2,00$ кг, $m_2 = 8,00$ кг; б) $m_1 = 8,00$ кг, $m_2 = 2,00$ кг.

3.25 Куля масою $m_1 = 2,00$ кг налітає на кулю масою $m_2 = 8,00$ кг, що перебуває в стані спокою. Імпульс кулі, що налітає, $p_1 = 10$ кг·м/с. Удар вважати прямим, пружним. Визначити безпосередньо після удару: а) імпульси p_1' першої кулі і p_2' другої кулі; б) зміну Δp_1 імпульсу першої кулі; в) кінетичні енергії T_1', T_2' обох куль; г) зміну ΔT_1 кінетичної енергії першої кулі; д) частку w кінетичної енергії, переданої першою кулею другій.

3.26 Молот масою $m_1 = 5,00$ кг ударяє невеликий кусок заліза, що лежить на ковадлі. Маса ковадла $m_2 = 100$ кг. Масою куска заліза знехтувати. Удар не пружний. Визначити к.к.д. η удару молота за даних умов.

3.27 Куля масою $m_1 = 200$ г, що рухається зі швидкістю v_1=10,0 м/с, вдаряє нерухому кулю масою $m_2 = 800$ г. Удар прямий, абсолютно пружний. Якими будуть швидкості u_1, u_2 куль після удару?

3.28 Куля масою $m = 1,80$ кг зіткнулася з кулею більшої маси M, яка перебувала в стані спокою. У результаті прямого пружного удару куля втратила w=0,36 своєї кінетичної енергії T_1. Визначити масу більшої кулі.

3.29 На кулю, що перебуває в стані спокою, налітає зі швидкістю $v_1 = 2,00$ м/с друга куля однакової з нею маси. В результаті зіткнення куля змінила напрямок швидкості на кут $\alpha = 30°$. Визначити: а) швидкості u_1, u_2 куль після удару; б) кут β між векторами швидкості другої кулі і

початковим напрямком руху першої кулі. Удар вважати пружним.
3.30 Ланцюг довжиною $l = 2$ м лежить на столі, одним кінцем звисаючи зі столу. Якщо довжина частини, що звішується зі столу, перевищує $l/3$, то ланцюг зісковзує зі столу. Визначити швидкість v ланцюга в момент відриву від столу.
3.31 До матеріальної точки, положення якої визначається радіусом-вектором $\vec{\mathbf{r}} = 3\vec{\mathbf{e}}_x + 2\vec{\mathbf{e}}_y + 4\vec{\mathbf{e}}_z$, прикладена сила $\vec{\mathbf{F}} = 5\vec{\mathbf{e}}_x + 4\vec{\mathbf{e}}_y + 3\vec{\mathbf{e}}_z$. Знайти момент сили $\vec{\mathbf{M}}$ відносно початку координат, модуль вектора $\vec{\mathbf{M}}$ і момент сили M_z відносно осі z.
3.32 Тіло масою $m = 100$ г кинули під кутом $\alpha = 45°$ до горизонту з початковою швидкістю $v_0 = 20,0$ м/с. Знайти модуль моменту імпульсу тіла відносно точки кидання в момент розміщення його в найвищій точці траєкторії. Опором повітря знехтувати.
3.33 Тіло масою m кинули під кутом α до горизонту зі швидкістю v. Знайти залежність від часу модуля моменту імпульсу тіла відносно точки кидання. Опором повітря знехтувати. Відповідь: $L = mgv_0 \cos\alpha \cdot t^2/2$.
3.34 На гладенькій горизонтальній площині лежить однорідний стрижень довжиною $l = 0,50$ м і масою $m = 1,00$ кг. По площині ковзає кулька масою $m_1 = 0,3$ кг зі швидкістю $v = 10$ м/с, спрямованою перпендикулярно до стрижня. Кулька вдаряє по стрижню і зупиняється. Точка удару розміщена на відстані $l_1 = 20,0$ см від середини стрижня. Діаметр кульки дорівнює діаметру стрижня. Визначити поступальну швидкість стрижня після удару і кутову швидкість відносно його центра мас.
3.35 Показати, що другий закон Кеплера (радіус-вектор, проведений від Сонця до планети, за рівні відрізки часу описує однакові площі) є наслідком закону збереження моменту імпульсу.

4 МЕХАНІКА ТВЕРДОГО ТІЛА

4.1 Обертання навколо нерухомої осі

Знайдемо вираз для моменту імпульсу твердого тіла відносно осі обертання OO' (рис. 4.1). Розіб'ємо тіло на нескінченно малі елементи об'єму, в границях яких можна вважати швидкість постійною. Їх масу позначимо Δm_i. Тоді відповідно до формули (3.19) запишемо

$$L_z = \sum L_{iz} = (\sum \Delta m_i r_i^2)\omega,$$

де r_i — відстань від i-го елемента твердого тіла до осі обертання; ω — його кутова швидкість.

Таблиця 4.1 — Моменти інерції деяких твердих тіл

Тверде тіло	Вісь z	Момент інерції $\mathrm{I_c}$
Тонкий стрижень довжини l	Перпендикулярна до стрижня	$ml^2/12$
Суцільний циліндр радіусом R	Збігається з віссю циліндра	$mR^2/2$
Тонкий диск радіусом R	Збігається з діаметром	$mR^2/4$
Куля радіусом R	Проходить через центр кулі	$2mR^2/5$

Величину $\mathrm{I} = \sum \Delta m_i r_i^2$ називають моментом інерції твердого тіла відносно осі OO'. З врахуванням цього позначення момент імпульсу твердого тіла буде дорівнювати

$$L_z = \mathrm{I}\omega. \tag{4.1}$$

Розрахунок моменту інерції тіла виконується за формулою

$$\mathrm{I} = \int r^2 \mathrm{d}m = \int \rho r^2 \mathrm{d}V, \tag{4.2}$$

де $\mathrm{d}m$ — маса елементарного об'єму $\mathrm{d}V$ тіла, що розміщена на відстані r від осі z; ρ — густина тіла в даній точці.

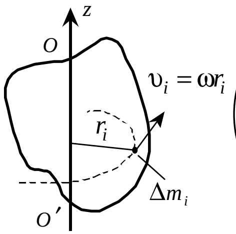

Рисунок 4.1

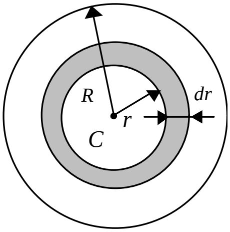

Рисунок 4.2

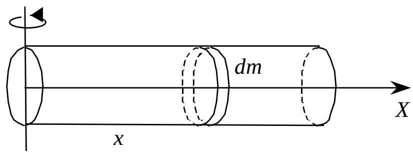

Рисунок 4.3

Якщо відомий момент інерції твердого тіла відносно осі z_c, що проходить через центр інерції тіла I_c (див. табл. 4.1), то момент інерції відносно довільної осі, паралельної даній, знаходять, користуючись теоремою Штейнера

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}_c + ma^2, \tag{4.3}$$

де a — відстань між осями.

Приклад 4.1 Знайти момент інерції тонкого диска і суцільного циліндра відносно їх повздовжніх геометричних осей.

Р о з в'я з о к. Будемо вважати, що диск і циліндр однорідні, тобто речовина розподілена в них з постійною густиною. Нехай вісь z проходить через центр диска С перпендикулярно до його площини (рис. 4.2). Розглянемо нескінченно тонке кільце з внутрішнім радіусом r і зовнішнім $r + \mathrm{d}r$. Площа такого кільця $\mathrm{d}S = 2\pi r \mathrm{d}r$. Його момент інерції дорівнює $\mathrm{dI} = r^2 \mathrm{d}m$. Момент інерції всього диска дорівнює інтегралу $\mathrm{I}_z = \int r^2 \mathrm{d}m$. Враховуючи однорідність диска $\mathrm{d}m = m\mathrm{d}S/S = 2mr\mathrm{d}r/r^2$, де $S = \pi R^2$ — площа всього диска. Вносячи цей вираз під знак інтеграла, отримаємо

$$\mathrm{I}_z = \frac{2m}{R^2} \int\limits_0^R r^3 \mathrm{d}r = \frac{1}{2} m R^2. \tag{4.4}$$

Формула (4.4) визначає також момент інерції однорідного суцільного циліндра відносно його повздовжньої геометричної осі.

Приклад 4.2 Визначити момент інерції I_z однорідного суцільного циліндра відносно поперечної осі.

Р о з в'я з о к. Нехай вісь обертання проходить через центр основи циліндра A перпендикулярно до його повздовжньої геометричної осі (рис. 4.3). Умовно зробимо в циліндрі виріз у вигляді короткого циліндра масою dm, що розміщений на відстані x від осі обертання. Для його моменту інерції за теоремою Штейнера можна записати

$$\mathrm{dI}_A = \mathrm{d}m \cdot x^2 + \mathrm{d}m \cdot R^2/4,$$

а для моменту інерції всього циліндра

$$\mathrm{I}_A = \int x^2 \mathrm{d}m + \frac{1}{4} R^2 \int \mathrm{d}m.$$

Перший доданок у правій частині формально збігається з виразом для моменту інерції однорідного нескінченного тонкого стрижня, а тому дорівнює $ml^2/3$. Другий доданок дорівнює $mR^2/4$, тому

$$\mathrm{I}_A = ml^2/3 + mR^2/4.$$

4.2 Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла

Диференціюючи (4.1) за часом і враховуючи формулу (3.20), записану в проекції на вісь z, отримаємо

$$\mathrm{Id}\omega/\mathrm{d}t = M_z, \tag{4.5}$$

де $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2\varphi/\mathrm{d}t^2 = \varepsilon$ – кутове прискорення твердого тіла відносно осі z; M_z – сумарний момент всіх зовнішніх сил відносно осі обертання. Моменти сил відносно осі – величини алгебраїчні: їх знаки залежать як від вибору додатного напрямку осі z (яка збігається з віссю обертання), так і від напрямку "обертання" відповідного моменту сили. Наприклад, вибравши додатний напрямок осі z, як подано на рис. 4.1, ми тим самим задаємо і додатний напрямок відліку кута φ (обидва ці напрямки зв'язані правилом правого гвинта). Якщо деякий момент M_{iz} "обертає" в додатному напрямку кута φ, то цей момент вважається додатним, і

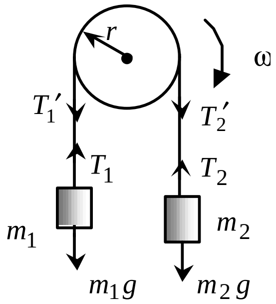

Рисунок 4.4

навпаки, а знак сумарного моменту M_z, в свою чергу, визначає знак $\ddot{\varphi}$ — проекцію вектора кутового прискорення на вісь z.

Інтегрування рівняння (4.5) з врахуванням початкових умов (значень ω_0, φ_0 у початковий момент часу) дозволяє розв'язати задачу про обертання твердого тіла навколо нерухомої осі, тобто знайти залежність від часу кутової швидкості $\omega(t)$ і кута повороту $\varphi(t)$.

Приклад 4.3 Визначити прискорення тіл і натяг нитки на машині Атвуда, вважаючи, що $m_2 > m_1$ (рис. 4.4). Момент інерції блока відносно геометричної осі дорівнює I, радіус блока r. Масою нитки знехтувати.

Р о з в'я з о к. Зважаючи на те, що маса нитки дуже мала, то зміною натягів вздовж нитки можна знехтувати: $T_1 = T_1'$, $T_2 = T_2'$. Рівняння руху вантажів (другий закон Ньютона) і блока (основний закон обертального руху) будуть мати вигляд

$$\begin{cases} m_1 a = T_1 - m_1 g, \\ m_2 a = m_2 g - T_2, \\ \mathrm{I}\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = r(T_2 - T_1). \end{cases}$$

Якщо немає проковзування нитки по блоку, то $r\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = a$. Розв'язуючи систему рівнянь з врахуванням останньої формули, отримаємо

$$a = (m_2 - m_1)g/(m_1 + m_2 + \mathrm{I}/r^2),$$

після чого знаходимо T_1 і T_2:

$$T_1 = \frac{2m_2 + \mathrm{I}/r^2}{m_1 + m_2 + \mathrm{I}/r^2} m_1 g, \quad T_2 = \frac{2m_1 + \mathrm{I}/r^2}{m_1 + m_2 + \mathrm{I}/r^2} m_2 g.$$

Якщо маса блока дуже мала, то $T_1 = T_2$.

4.3 Кінетична енергія твердого тіла

Маючи на увазі, що швидкість i-го елемента об'єму твердого тіла, що обертається $v_i = \rho_i \omega$, запишемо

$$T = \sum \Delta m_i v_i^2/2 = (\sum \Delta m_i \rho_i^2)\omega^2/2, \quad \Rightarrow \quad T = \mathrm{I}\omega^2/2. \qquad (4.6)$$

У відповідності до (3.3) елементарна робота всіх зовнішніх сил у випадку твердого тіла дорівнює приросту тільки кінетичної енергії тіла, оскільки власна потенціальна енергія твердого тіла не змінюється. Таким чином, $\mathrm{d}A = \mathrm{d}T = \mathrm{d}(\mathrm{I}\omega^2/2) = \mathrm{I}\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\mathrm{dt}$. Маючи на увазі, що $\dot{\varphi}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\varphi$ і відповідно до (4.5) $\mathrm{I}\ddot{\varphi} = M_z$, отримаємо $\mathrm{d}A = M_z \mathrm{d}\varphi$. Робота зовнішніх сил за поворотом твердого тіла на певний кут φ дорівнює

$$A = \int\limits_0^{\varphi} M_z \mathrm{d}\varphi. \qquad (4.7)$$

У випадку, коли $M_z = \mathrm{const}$, останній вираз спрощується: $A = M_z \Delta\varphi$.

Нехай тіло виконує плоский рух у деякій інерційній системі відліку. Кінетична енергія твердого тіла при плоскому русі складається із енергії обертання навколо осі, що проходить через центр інерції тіла, і енергії, зв'язаної з рухом центра інерції:

$$T = \mathrm{I}_c \omega^2/2 + mV_c^2/2, \qquad (4.8)$$

де I_c — момент інерції тіла відносно осі обертання, що проходить через його центр інерції; ω — кутова швидкість тіла; m — його маса; V_c — швидкість центра інерції тіла в інерційній системі відліку.

Приклад 4.4 Однорідна куля радіусом r починає скочуватися без ковзання з вершини сфери радіусом R (рис. 4.5). Знайти кутову швидкість кулі після відриву від поверхні сфери.

Розв'язок. По-перше, зазначимо, що кутова швидкість кулі після відриву незмінюється, тому задача зводиться до знаходження її величини в момент відриву.

Запишемо рівняння руху центра мас кулі в момент відриву:

$$mv^2/(R+r) = mg\cos\vartheta,$$

де v – швидкість центра кулі в момент відриву, а ϑ – кут, що відповідає цьому моменту (рис. 4.5). Швидкість v можна знайти із закону збереження енергії:

$$mgh = mv^2/2 + \mathrm{I}\omega^2/2,$$

де $\mathrm{I} = 2mr^2/5$ – момент інерції кулі відносно осі, що проходить через її центр, крім того,

$$v = \omega r, \quad h = (R+r)(1-\cos\vartheta).$$

Із цих чотирьох рівнянь отримаємо

$$\omega = \sqrt{10g(R+r)/(17r^2)}.$$

Перевірка розмірності: $[\omega] = [g]^{1/2}[r]^{-1/2} = \text{м}^{1/2}\cdot\text{с}\cdot\text{м}^{-1/2} = \text{с}^{-1}$.

Приклад 4.5 В установці (рис. 4.6) однорідний диск D масою m і радіусом r може вільно обертатися навколо осей AA', BB' і разом з платформою P навколо вертикальної осі OO', відносно якої момент інерції платформи дорівнює I. Диску D надали кутової швидкості ω_0 навколо осі AA'. Потім, діючи на кінець O нитки ACO деякою силою F, установили вісь AA' диска, що обертається вертикально. Яку роботу при цьому виконала сила F? Масою осі AA' і кільця $ABA'B'$ знехтувати. Тертя немає.

Розв'язок. У даному випадку робота сили F йде на приріст кінетичної енергії системи ΔT, тому задача зводиться до знаходження ΔT.

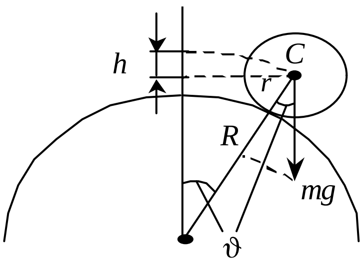

Рисунок 4.5

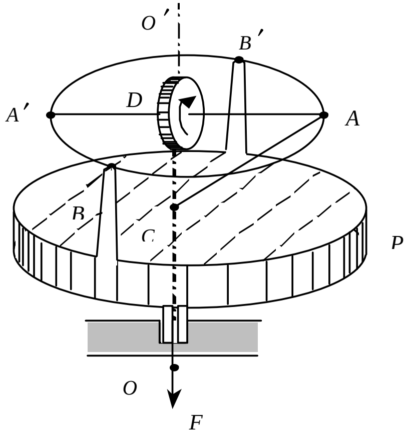

Рисунок 4.6

Відносно осі OO' момент імпульсу системи не змінюється при повороті диска і дорівнює нулю як було спочатку, а це означає, що в кінцевому положенні моменти імпульсу диска і платформи стануть однаковими за величиною і протилежно напрямленими. Тобто платформа почне обертатися в напрямку, протилежному напрямку обертання диска, звідси

$$\mathrm{I}\omega = mr^2\omega_0/2,$$

де враховано, що кутова швидкість диска при повороті не змінилася.

Із того, що кутова швидкість диска, а отже, і його кінетична енергія не змінилася в результаті повороту, відразу випливає, що шукана робота пішла на надання кінетичної енергії платформі:

$$A = \mathrm{I}\omega^2/2 = m^2r^4\omega_0^2/(8\cdot \mathrm{I}).$$

Зазначимо, що спочатку система мала момент імпульсу, а після повороту диска він зменшився до нуля. Зникнення моменту імпульсу обумовлене дією моменту зовнішніх сил, що виникає в процесі повороту диска. Ці сили прагнуть затримати вісь платформи в незмінному положенні (пружні сили).

4.4 Умови рівноваги твердого тіла

1 Результуюча всіх зовнішніх сил, прикладених до тіла, повинна дорівнювати нулю, тобто

$$\vec{\mathbf{F}} = \sum \vec{\mathbf{F}}_i = 0. \tag{4.9}$$

2 Сумарний момент зовнішніх сил відносно будь-якої точки повинен дорівнювати нулю, тобто

$$\vec{\mathbf{M}} = \sum \vec{\mathbf{M}}_i = 0. \tag{4.10}$$

4.5 Гіроскопічний ефект

Гіроскопом називають тіло, яке швидко обертається, і вісь якого може змінювати свій напрямок у просторі. Найважливішу роль в техніці відіграють **симетричні гіроскопи**, що мають симетрію обертання навколо осі, яку називають геометричною віссю або **віссю фігури гіроскопа**. Звичайно, одна із точок фігури гіроскопа, яку називають **точкою опори гіроскопа**, закріплена.

Вся теорія гіроскопів побудована на рівнянні моментів

$$\dot{\vec{\mathbf{L}}} = \vec{\mathbf{M}},$$

причому моменти $\vec{\mathbf{L}}$, $\vec{\mathbf{M}}$ беруться відносно нерухомої точки опори гіроскопа. Якщо момент зовнішніх сил $\vec{\mathbf{M}}$ дорівнює нулю, то гіроскоп називають **вільним**. Для вільного гіроскопа $\dot{\vec{\mathbf{L}}} = 0$, і тому

$$\vec{\mathbf{L}} = \mathrm{I}_{||}\vec{\omega}_{||} + \mathrm{I}_{\perp}\vec{\omega}_{\perp} = \mathrm{const}, \tag{4.11}$$

де $\mathrm{I}_{||}$ – момент інерції гіроскопа відносно осі його фігури; $\mathrm{I}_{\perp}$ – момент інерції гіроскопа відносно осі, перпендикулярної до осі його фігури; $\vec{\omega}_{||}$ – складова вектора миттєвої кутової швидкості гіроскопа паралельна осі його фігури; $\vec{\omega}_{\perp}$ – складова вектора миттєвої кутової швидкості гіроскопа, перпендикулярна до осі його фігури. Рівняння (4.11) відповідає закону збереження моменту імпульсу гіроскопа. Піднісши (4.11) до квадрата, отримаємо

$$\mathrm{I}_{||}^2\omega_{||}^2 + \mathrm{I}_{\perp}^2\omega_{\perp}^2 = \mathrm{const}. \tag{4.12}$$

Запишемо також закон збереження енергії:

$$E = (\vec{\mathbf{L}}\vec{\omega})/2 = (I_{||}\omega_{||}^2 + I_{\perp}\omega_{\perp}^2)/2 = \mathrm{const}. \tag{4.13}$$

Із рівнянь (4.12), (4.13) випливає, що під час руху вільного гіроскопа довжини векторів $\vec{\boldsymbol{\omega}}_{||}$ і $\vec{\boldsymbol{\omega}}_{\perp}$ залишаються незмінними. Разом з тим залишаються незмінними і обидві складові моменту імпульсу: $L_{||} = I_{||}\omega_{||}$ і $L_{\perp} = I_{\perp}\omega_{\perp}$, тому, як випливає із (4.13), залишається постійним кут між векторами $\vec{\mathbf{L}}$ і $\vec{\boldsymbol{\omega}}$. Також із незмінності $L_{||}$ і $L_{\perp}$ випливає сталість кута між вектором $\vec{\mathbf{L}}$ і віссю фігури гіроскопа. В кожний момент часу вісь фігури гіроскопа виконує обертання навколо миттєвої осі з кутовою швидкістю $\vec{\boldsymbol{\omega}}$. Вектори $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ і $\vec{\mathbf{L}}$, лежать в одній площині з віссю фігури гіроскопа. А оскільки вектор $\vec{\mathbf{L}}$ зберігає незмінним свій напрямок у просторі, то миттєва вісь і вісь фігури повинні обертатися навколо цього незмінного напрямку з однією і тією самою кутовою швидкістю.

Таким чином, картина вільного руху гіроскопа має такий вигляд. У кожний момент часу рух вільного гіроскопа є обертання навколо миттєвої осі, що проходить через нерухому точку опори. З плином часу миттєва вісь і вектор $\vec{\mathbf{L}}$ змінюють своє положення в тілі, описуючи конуси навколо осі фігури гіроскопа з однією і тією самою постійною кутовою швидкістю $\vec{\boldsymbol{\omega}}_1$, що, взагалі, не дорівнює $\vec{\boldsymbol{\omega}}$. Напрямок $\vec{\mathbf{L}}$ незмінний у просторі. Вісь фігури гіроскопа і миттєва вісь рівномірно обертаються в просторі навколо цього напрямку з однією і тією самою кутовою швидкістю $\vec{\boldsymbol{\omega}}_1$, але в протилежному напрямі. Такий рух називається **вільною регулярною прецесією гіроскопа**.

Якщо гіроскоп з достатньо великим моментом інерції привести в швидке обертання, то він буде мати великий момент імпульсу. Приріст моменту імпульсу визначається інтегралом

$$\Delta\vec{\mathbf{L}} = \int_0^t \vec{\mathbf{M}}\,\mathrm{d}t.$$

Якщо зовнішня сила діє протягом короткого проміжку часу, то даний інтеграл, а з ним і приріст моменту імпульсу будуть малими. Тому

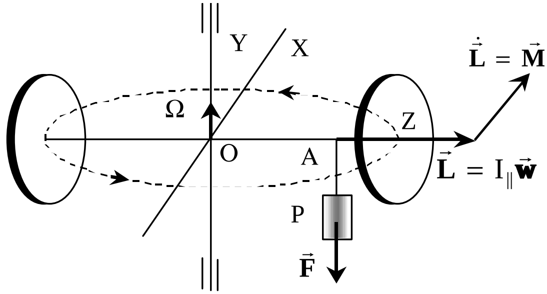

Рисунок 4.7

при короткодіючій взаємодії навіть великих сил рух вільного гіроскопа змінюється незначно. Гіроскоп ніби опирається будь-яким спробам змінити величину і напрямок його моменту імпульсу. З цим зв'язана чудова стійкість, яку отримує рух гіроскопа після приведення його в швидке обертання.

Найбільш цікавим видом руху гіроскопа є вимушена прецесія. Вона виникає під дією зовнішніх сил. Розглянемо гіроскоп, схематично зображений на рис. 4.7. Він складається із двох однакових маховичків, які вільно надіті на загальну вісь. Гіроскоп побудований так, що може вільно обертатися не тільки навколо осі фігури OZ, але і навколо вертикальної і горизонтальної осей OY і OX. Про такий гіроскоп кажуть, що він має три степені вільності. Прикладемо до довільної точки A осі фігури гіроскопа сталу силу $\vec{\mathbf{F}}$, наприклад, підвісимо в цій точці неважкий вантаж P. Коли маховички гіроскопа не обертаються, спостерігається звичне явище: під дією вантажу правий маховичок опускається, лівий – піднімається.

Але рух набуває зовсім іншого характеру, якщо попередньо маховички привести в швидке обертання в одну й ту саму сторону. В цьому випадку вісь фігури гіроскопа разом з вантажем P не опускається, а починає повільно обертатися з постійною швидкістю навколо вертикальної осі OY. Таке обертання називають **вимушеною прецесією**. Вимушену прецесію простіше всього пояснити наближеною теорією гіроскопа, в якій обертанням навколо перпендикулярної осі можна знехтувати в порівнянні з обертанням навколо осі його фігури. У формулі (4.11) знехтуємо другим доданком. У цьому наближенні вектори $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ і $\vec{\mathbf{L}}$ направлені вздовж осі фігури гіроскопа.

Знайдемо довжину вектора кутової швидкості прецесії $\vec{\Omega}$. Вектор $\vec{\mathbf{L}}$ змінюється тільки внаслідок обертання з кутовою швидкістю прецесії $\vec{\Omega}$. Для лінійної швидкості руху його кінця, тобто похідної $\dot{\vec{\mathbf{L}}}$, можемо записати $\dot{\vec{\mathbf{L}}} = [\vec{\Omega}\vec{\mathbf{L}}]$, тому рівняння моментів дає

$$[\vec{\Omega}\vec{\mathbf{L}}] = \vec{\mathbf{M}}. \tag{4.14}$$

Із цього рівняння можна знайти швидкість прецесії $\vec{\Omega}$. Підставимо в (4.14) вираз $\vec{\mathbf{M}} = [\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{F}}] = a[\vec{\mathbf{s}}\vec{\mathbf{F}}]$, де $\vec{\mathbf{s}}$ – одиничний вектор вздовж осі фігури гіроскопа. Для приближеної теорії гіроскопа $\vec{\mathbf{L}} = \mathrm{L}\vec{\mathbf{s}}$. У результаті (4.14) набуває вигляду $\mathrm{L}[\vec{\Omega}\vec{\mathbf{s}}] = a[\vec{\mathbf{s}}\vec{\mathbf{F}}]$, звідси **вектор кутової швидкості прецесії** дорівнює

$$\vec{\Omega} = -a\vec{\mathbf{F}}/\mathrm{L} = -a\vec{\mathbf{F}}/(\mathrm{I}_{||}\omega_{||}). \tag{4.15}$$

4.6 Задачі для самостійного розв'язку

4.1 Знайти момент інерції тонкого однорідного стрижня довжиною l і масою m відносно перпендикулярної осі, що проходить: а) через один із кінців стрижня; б) через середину стрижня.

4.2 Знайти момент інерції однорідної пластинки шириною a, довжиною b і масою m відносно осі z, перпендикулярной до її площини, яка проходить через центр пластинки.

4.3 Знайти момент інерції порожнистої кулі радіусом R, масою m з нескінченно тонкими стінками відносно осі z, що проходить через центр кулі.

4.4 Знайти момент інерції I тонкого однорідного кільця радіусом $R = 20,0$ см і масою $m = 100$ г відносно осі, що лежить в площині кільця і проходить через його центр.

4.5 В однорідному диску масою $m = 1,00$ кг і радіусом $r = 30,0$ см вирізаний круглий отвір діаметром $d = 20,0$ см, центр якого розміщений на відстані $l = 15,0$ см від осі диска (рис. 4.8). Знайти момент інерції

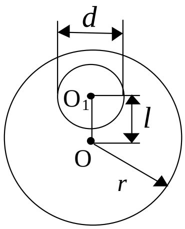

Рисунок 4.8

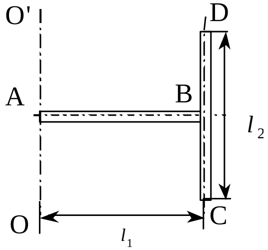

Рисунок 4.9

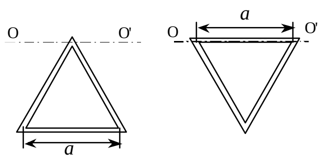

Рисунок 4.10

I цього тіла відносно осі, що проходить перпендикулярно до площини диска через його центр.

4.6 Знайти момент інерції суцільної однорідної кулі радіусом R, масою m відносно осі z, що проходить через центр кулі.

4.7 Визначити момент інерції кулі відносно осі, яка збігається з дотичною до його поверхні. Радіус кулі 0,1 м, її маса 5,0 кг.

4.8 Чому дорівнює момент інерції тонкого прямого стрижня довжиною 0,50 м і масою 0,20 кг відносно осі, перпендикулярної до стрижня, яка проходить через точку, віддалену на 0,15 м від одного із його кінців?

4.9 Два однорідних тонких стрижня: AB довжиною $l_1 = 40,0$ см і масою $m_1 = 900$ г та CD довжиною $l_2 = 40,0$ см і масою $m_2 = 400$ г скріплені під прямим кутом (рис. 4.9). Визначити момент інерції відносно осі OO$'$, яка проходить через кінець стрижня AB паралельно стрижню CD.

4.10 Знайти момент інерції I дротяного рівностороннього трикутника зі стороною $a = 10,0$ см відносно: а) осі, яка лежить в площині трикутника і проходить через його вершину (рис. 4.10); б) осі, яка збігається з однією із сторін трикутника. Маса m трикутника дорівнює 12,0 г і рівномірно розподілена за довжиною дроту.

4.11 На барабан радіусом $R = 10,0$ см намотано нитку, до кінця якої прив’язано вантаж масою $m = 0,50$ кг. Знайти момент інерції барабана, якщо вантаж опускається з прискоренням $a = 1,00$ м/с^2.

4.12 По дотичній до шківа маховика у вигляді диска діаметром $D = 75,0$ см і масою $m = 40$ кг прикладена сила $F = 1,00$ кН. Визначити

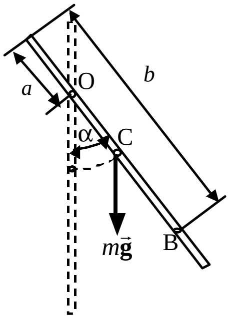

Рисунок 4.11

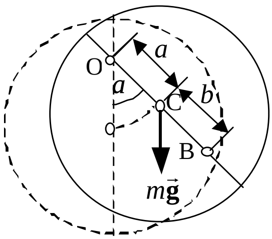

Рисунок 4.12

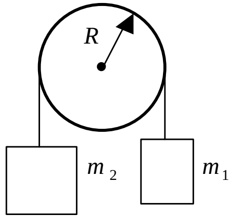

Рисунок 4.13

кутове прискорення ε і частоту обертань n маховика через час $t = 10,0$ с з початку дії сили, якщо радіус шківа $r = 12,0$ см. Тертям знехтувати.

4.13 Вал масою $m = 100$ кг і радіусом $R = 5,00$ см обертався з частотою $n = 8,00$ об/с. До циліндричної поверхні вала притиснули гальмівну колодку з силою $F = 40,0$ Н, під дією якої вал зупинився через $t = 10,0$ с. Визначити коефіцієнт тертя.

4.14 Тонкий однорідний стрижень довжиною $l = 1,00$ м може вільно обертатися навколо горизонтальної осі, що проходить через точку O на стрижні (рис. 4.11). Стрижень відхилили від вертикалі на кут α і відпустили. Визначити для початкового моменту часу кутове ε і тангенціальне a_τ прискорення точки B на стрижні. Розрахунок виконати для таких випадків: а) $a = 0$, $b = 2l/3$, $\alpha = \pi/2$; б) $a = l/3$, $b = l$, $\alpha = \pi/3$; в) $a = l/4$, $b = l/2$, $\alpha = 2\pi/3$.

4.15 Однорідний диск радіусом $R = 10,0$ см може вільно обертатися навколо горизонтальної осі, яка перпендикулярна до площини диска і проходить через точку O на ньому (рис. 4.12). Диск відхилили на кут α і відпустили. Визначити для початкового моменту часу кутове ε і тангенціальне прискорення точки B, що розміщена на диску. Розрахунок провести для таких випадків: а) $a = R$, $b = R/2$, $\alpha = \pi/2$; б) $a = R/2$, $b = R$, $\alpha = \pi/6$; в) $a = 2R/3$, $b = 2R/3$, $\alpha = 2\pi/3$.

4.16 Куля масою $m = 10,0$ кг і радіусом $R = 20,0$ см обертається навколо осі, що проходить через її центр. Рівняння обертання кулі має вигляд $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$, де $B = 4,00$ рад/с^2; $C = -1,00$ рад/с^3. Знайти закон зміни моменту сил, що діють на кулю. Визначити момент сил M в момент часу $t = 2,00$ с.

4.17 Через блок, маса якого $m = 100$ г, перекинута тонка нитка, до кінців якої підвішені два тягарці масами $m_1 = 200$ г і $m_2 = 300$ г (рис. 4.13). Тягарці удержують в нерухомому стані. З яким прискоренням будуть рухатися тягарці, якщо їх залишити на самих себе. Чому дорівнює кутове прискорення блока, якщо його радіус 10,0 см?

4.18 До кінців легкої нерозтяжної нитки, перекинутої через блок, підвішені вантажі масами $m_1 = 0,20$ кг і $m_2 = 0,30$ кг. У скільки разів відрізняються сили, що діють на нитку по обидва боки від блока, якщо маса блока $m = 0,40$ кг, а його вісь рухається вертикально вгору з прискоренням $a = 2,0$ м/с^2? Силами тертя і проковзуванням нитки по блоку знехтувати.

4.19 На шків маятника Обербека (рис. 4.14) намотано нитку, до якої підвішений тягарець $M = 1,0$ кг. Тягарець опускається з висоти $h = 1$ м. Радіус шківа $r = 3,0$ см. На хрестовині закріплено чотири тягарці масою $m = 250$ г кожний на відстані від осі $R = 30$ см. Маса кожного стрижня $m_1 = 0,12$ кг, довжина $l = 0,40$ м. Знайти кутове прискорення обертання маятника та прискорення, з яким опускається тягарець.

4.20 Із колодязя з допомогою коловорота піднімали відро з водою масою $m = 10$ кг. У момент, коли відро розміщувалося на висоті $h = 5,00$ м від поверхні води, рукоятка звільнилася, і відро стало рухатися вниз. Визначити лінійну швидкість рукоятки в момент удару відра об поверхню води в колодязі, якщо радіус рукоятки $R = 30$ см, радіус вала коловорота r =10 см, його маса $m_1 = 20$ кг. Тертям і масою троса, на якому підвішене відро, знехтувати.

4.21 До кінця тонкої нерозтяжної нитки, намотаної на циліндричний суцільний нерухомий блок масою $m_1 = 200$ г, прикріплене тіло масою $m_2 = 500$ г, яке розміщене на похилій площині з кутом нахилу $\alpha = 45°$ (рис. 4.15). Нитка, що вдержує тіло, паралельна похилій площині. Який шлях пройде тіло по похилій площині за $t = 1,00$ с, якщо коефіцієнт тертя ковзання по похилій площині $\mu = 0,100$?

4.22 Знайти прискорення вантажів і силу натягу ниток в системі,

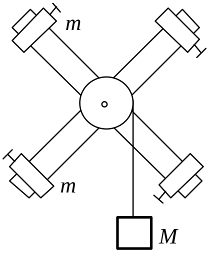

Рисунок 4.14

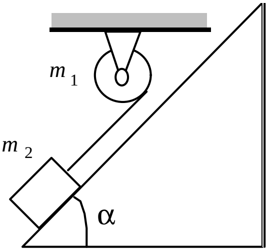

Рисунок 4.15

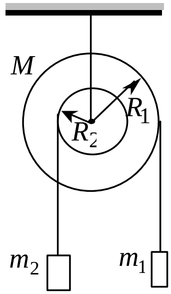

Рисунок 4.16

зображеній на рис. 4.16, якщо $m_1 = 2,00$ кг, $m_2 = 3,00$ кг, $M = 1,00$ кг, $R_1 = 20,0$ см, $R_2 = 10,0$ см. Нитки невагомі, тертям знехтувати.

4.23 Який шлях пройде диск, що котиться без проковзування, піднімаючись вверх по похилій площині з кутом нахилу $\alpha = 30°$, якщо йому надана початкова швидкість $v_0 = 7,0$м/с, паралельно похилій площині?

4.24 Куля скочується по похилій площині з кутом нахилу $\alpha = 30°$. Яку швидкість буде мати центр кулі відносно похилої площини через 1,5 с, якщо його початкова швидкість дорівнювала нулю?

4.25 Яку потужність повинен розвивати двигун, що приводить в рух стабілізуючий гіроскоп у вигляді диска радіусом $R = 1,0$ м і масою $m =$ $= 1000$ кг, якщо протягом t =1 хв кутову швидкість доводять до $\omega =$ $= 32$ рад/с? Тертям і опором повітря знехтувати.

4.26 Розрахувати кінетичну енергію диска масою $m = 2$ кг, який без проковзування котиться по горизонтальній площині з відносною швидкістю $v = 2$ м/с.

4.27 Маховик, що має форму диска, радіусом $R = 40$ см і масою $m_1 = 48$ кг може обертатися навколо горизонтальної осі. До його циліндричної поверхні прикріплено кінець нерозтяжної нитки, а до другого кінця підвішений вантаж масою $m_2 = 0,20$ кг (рис. 4.17). Вантаж підняли, а потім відпустили. Упавши вільно з висоти $h = 2,0$ м, вантаж натягнув нитку і завдяки цьому привів маховик в обертання? Яку кутову швидкість вантаж надав при цьому маховику?

4.28 Диск масою $m_1 = 5,0$ кг і радіусом $R = 5,0$ см, що обертається з частотою $n = 10$ об/хв, зчеплюється з нерухомим диском масою $m_2 = 10$ кг і таким самим радіусом. Визначити енергію, що піде на нагрівання дисків, якщо при їх зчепленні проковзування відсутнє.
4.29 Платформа у вигляді диска радіусом $R = 1,00$ м обертається по інерції з частотою $n = 6,00$ об/хв. На краю платформи стоїть людина, маса m якої дорівнює 80 кг. З якою частотою n буде обертатися платформа, якщо людина перейде в її центр? Момент інерції I платформи дорівнює 120 кг·м^2. Момент інерції людини розрахувати як для матеріальної точки.
4.30 На лаві Жуковського сидить чоловік і тримає на витягнутих руках гирі масою $m = 5,0$ кг кожна. Відстань від кожної гирі до осі лави $l = 70$ см. Лава обертається з частотою $n_1 = 1,0$ с$^{-1}$. Як зміниться частота обертання лави і яку роботу A виконає людина, якщо вона стисне руки так, що відстань від кожної гирі до осі зменшиться до $l_2 = 20$ см? Момент інерції людини і лави (разом) відносно осі $I = 2,5$ кг·м^2.
4.31 Платформа, що має форму диска, може обертатися навколо вертикальної осі. На краю платформи стоїть людина. На який кут φ повернеться платформа, якщо людина піде вздовж краю платформи і, обійшовши її, повернеться в початкову (на платформі) точку? Маса платформи $m_1 = 240$ кг, маса людини $m_2 = 60$ кг.
4.32 Однорідний стрижень довжиною $l = 1,00$ м може вільно обертатися навколо горизонтальної осі, що проходить через один із його кінців. У інший кінець абсолютно не пружно вдаряє куля масою $m = 7,00 \times$ $\times\, 10^{-3}$ кг, яка летить перпендикулярно до стрижня і його осі. Визначити масу M стрижня, якщо в результаті попадання кулі він відхилився на кут $\alpha = 60°$. Швидкість кулі взяти $v = 360$ м/с.
4.33 Однорідний стрижень довжиною $l = 1,00$ м і масою $M = 0,700$ кг підвішений на горизонтальній осі, що проходить через верхній кінець стрижня. В точку, що віддалена від осі на $2l/3$, абсолютно пружно вдаряє куля масою $m = 5$ г, що летить перпендикулярно до стрижня і його осі. Після удару стрижень відхиляється на кут $\alpha = 60°$. Визначити швидкість кулі.
4.34 Однорідний диск масою $m_1 = 0,200$ кг і радіусом $R = 20$ см може

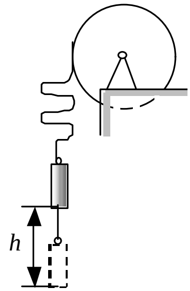

Рисунок 4.17

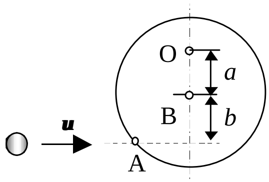

Рисунок 4.18

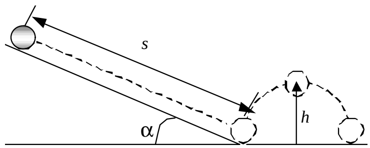

Рисунок 4.19

вільно обертатися навколо горизонтальної осі z, що проходить через точку С перпендикулярно до площини диска (рис. 4.18). В точку А на твірній диска попадає пластилінова кулька, що летить горизонтально (перпендикулярно до осі z) зі швидкістю $v = 10,0$ м/с і прилипає до його поверхні. Маса m_2 кульки дорівнює 10 г. Визначити кутову швидкість ω диска і лінійну швидкість u точки О на диску в початковий момент часу. Розрахунок провести для таких значень a і b: а) $a = b = R$; б) $a = R/2$, $b = R$; в) $a = 2R/3$, $b = R/2$; г) $a = R/3$, $b = 2R/3$.

4.35 Кулька, що скочується без проковзування по похилій площині з кутом нахилу $\alpha = 30°$, вдаряється об похилу площину і після удару підскакує на висоту $h = 12,5$ см (рис. 4.19). Знехтувавши тертям і вважаючи удар абсолютно пружним, визначити шлях s, який пройшла кулька по похилій площині.

4.36 Диск радіусом R розкручується навколо вертикальної осі з допомогою вірьовки довжиною l, яку тягнуть з постійною силою F (рис. 4.20). Після цього диск зісковзує з осі і попадає на горизонтальну площину. Скільки обертів зробить диск на площині до повної зупинки, якщо його маса M, а коефіцієнт тертя диска по площині μ?

4.37 Дві кулі однакового розміру, виготовлені із алюмінію і міді, обертаються незалежно одна від одної навколо загальної нерухомої осі, що проходить через їх центри, з кутовими швидкостями $\omega_1 = 5,0$ рад/с і ω_2=10,0 рад/с. З якою кутовою швидкістю оберталися б обидві кулі,

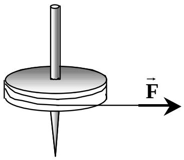

Рисунок 4.20

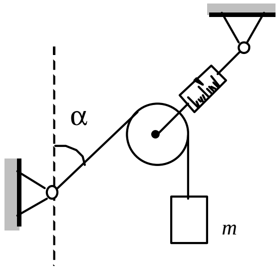

Рисунок 4.21

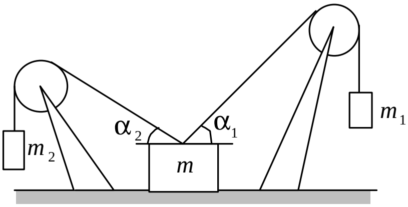

Рисунок 4.22

якщо їх жорстко з'єднати.

4.38 Однорідний стрижень довжиною $L = 1,0$ м і масою $M = 5,0$ кг підвішений горизонтально на двох вірьовках однакової довжини. До стрижня прикріпили вантаж масою $m = 10$ кг на відстані $l = 0,25$ м від одного із його кінців. Знайти натяг ниток?

4.39 Через блок, прикріплений до динамометра, перекинуто канатик. Один кінець канатика закріплений так, що він утворює кут $\alpha = 60°$ з вертикаллю (рис. 4.21). До другого кінця підвішений вантаж масою $m = 5,0$ кг. Визначити покази динамометра.

4.40 На горизонтальній площині лежить вантаж масою $m = 10,0$ кг, до якого прикріплені вірьовки, перекинуті через блоки (рис. 4.22). До кінців вірьовок підвішені вантажі m_1, m_2. Знайти найбільше значення маси вантажу m_1, при якому система перебуватиме в рівновазі, якщо $m_2 = 5,0$ кг, $\alpha_1 = 45°$, $a_2 = 30°$ і коефіцієнт тертя вантажу по горизонтальній площині $\mu = 0,50$. Масами блоків і вірьовок і тертям в блоках знехтувати.

4.41 Стрижень AB масою $m_1 = 5,0$ кг шарнірно закріплений нижнім кінцем до вертикальної стінки (рис. 4.23). До верхнього кінця стрижня, який прив'язаний до стінки вірьовкою CB, підвісили вантаж масою $m_2 = 3,0$ кг. Визначити натяг нитки CB, якщо кут $\alpha = 45°$, а довжина вірьовки CB у 2 рази менша від довжини стрижня AB.

4.42 На похилій площині з кутом нахилу $\alpha = 35°$ стоїть однорідний прямий циліндр радіусом $R = 10$ см. Чому дорівнює найбільша висота

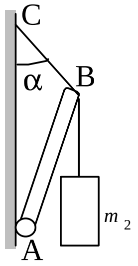

Рисунок 4.23

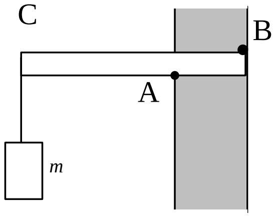

Рисунок 4.24

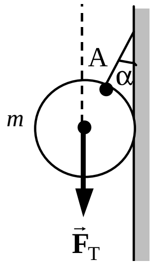

Рисунок 4.25

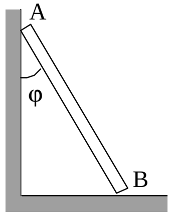

Рисунок 4.26

циліндра, при якій він ще не перекидається.

4.43 Однорідна горизонтальна балка довжиною $l = 1,50$ м і масою $m = 50$ кг закріплена в стінці товщиною $h = 0,50$ см так, що впирається на неї в двох точках A і B (рис. 4.24). До вільного кінця балки підвісили вантаж масою 100 кг. Визначити сили реакції в опорах A і B.

4.44 Однорідна куля масою 2 кг прикріплена до вертикальної стінки з допомогою нитки (рис. 4.25). Обчислити: а) З якою силою куля давить на стінку, якщо нитка утворює з нею кут $\alpha = 30°$ (тертя не враховувати)? б) при якому найменшому значенні коефіцієнта тертя між стінкою і кулею (див. рис. 4.25) точка A, в якій прикріплено нитку, і центр кулі будуть розміщуватись на одній вертикалі.

4.45 Драбина AB спирається кінцем A на вертикальну гладку стінку, а кінцем B – на підлогу (рис. 4.26). Коефіцієнт тертя драбини по підлозі $\mu = 0,3$. Чому дорівнює найбільше значення кута φ, утвореного драбиною з вертикальною стіною, при якому драбина перебуватиме в рівновазі?

4.46 На вантажному автомобілі встановлено підйомний кран (рис. 4.27). Маса автомобіля разом з краном $3{\cdot}10^3$ кг. Відстань між осями передніх і задніх коліс 3,5 м. Який максимальний вантаж може підняти цей кран, якщо задня вісь і точка, в якій підвішений вантаж, розташовані на відстанях 1,5 м і 6,0 м від вертикальної площини, що проходить через центр мас автомобіля.

4.47 Важкий циліндричний коток потрібно підняти на сходинку висо-

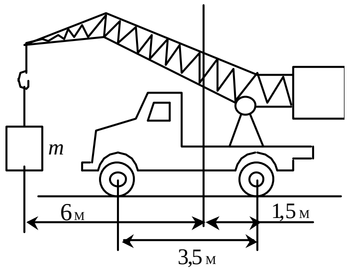

Рисунок 4.27

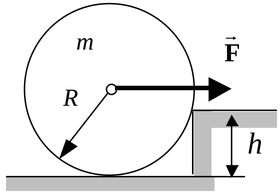

Рисунок 4.28

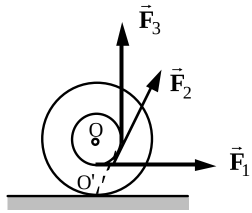

Рисунок 4.29

тою h (рис. 4.28). Яку силу при цьому потрібно прикласти до центра котка у горизонтальному напрямку, якщо маса котка m, а радіус $R\,(R > h)$?

4.48 Котушка лежить на столі (рис. 4.29). У який бік вона буде рухатись, коли нитку натягувати силами $\vec{\mathbf{F}}_1$, $\vec{\mathbf{F}}_2$, $\vec{\mathbf{F}}_3$?

4.49 Знайти координати центра мас системи, що складається із чотирьох кульок масами $m_1 = 100$ г, $m_2 = 200$ г, $m_3 = 300$ г і $m_4 = 400$ г, які розташовані у вершинах і центрі рівностороннього трикутника зі стороною $a = 20$ см. Координатні осі направити так, як подано на рис. 4.30.

4.50 В однорідному диску діаметром 60 см вирізано круглий отвір діаметром 20 см, центр якого розміщений на відстані 8 см від центра диска. Визначити положення центра мас диска.

4.51 Симетрична дзига, вісь якої нахилена під кутом α до вертикалі (рис. 4.31), виконує регулярну прецесію під дією сили тяжіння. Точка опори дзиги нерухома. Визначити, під яким кутом β до вертикалі направлена сила, з якою дзига діє на площу опори.

4.52 Гіроскопічні ефекти використовуються в дискових млинах. Масивний циліндричний каток (бігун), який може обертатися навколо своєї геометричної осі, приводиться в обертання навколо вертикальної осі (з кутовою швидкістю Ω) і котиться по горизонтальній плиті (рис. 4.32). Таке обертання можна розглядати як вимушену прецесію гіроскопа, яким є бігун. При вимушеній прецесії зростає сила тиску бігуна на го-

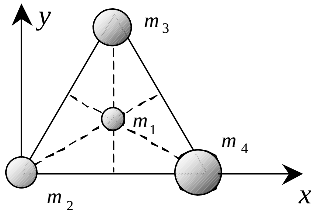

Рисунок 4.30

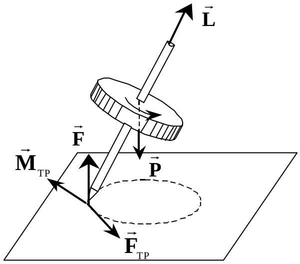

Рисунок 4.31

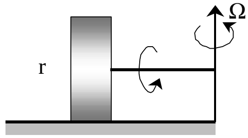

Рисунок 4.32

ризонтальну опору, по якій він котиться. Ця сила розтирає та здрібнює матеріал, який підсипають під каток на плиту. Знайти повну силу тиску котка на плиту.

4.53 Диск радіусом r, який обертається навколо власною осі з кутовою швидкістю ω, котиться без проковзування в нахиленому стані по горизонтальній площині, описуючи коло за час T. Визначити T і радіус кола R, якщо $R \gg r$, а кут між горизонтальною площиною і площиною диска дорівнює α.

5 МЕХАНІКА РІДИН І ГАЗІВ

5.1 Гідростатика нестисливої рідини

Закон Паскаля: тиск у будь-якій точці рідини або газу, які перебувають у спокої, однаковий у всіх напрямках і передається в усіх напрямках однаково.

Якщо тиск на вільну поверхню рідини p_0, то гідростатичний тиск рідини на глибині h буде

$$p = p_0 + \rho g h, \tag{5.1}$$

де ρ — густина рідини.

Закон Архімеда: на будь-яке тіло, занурене в рідину (газ), діє з боку рідини (газу) виштовхувальна сила, яка дорівнює вазі витісненої тілом рідини (газу). Ця сила направлена вгору і проходить через центр маси рідини (газу), витісненої тілом:

$$F_{\text{А}} = m_{\text{р}} g = \rho g V, \tag{5.2}$$

де $m_{\text{р}}$, V — маса і об'єм витісненої рідини (газу). Зазначимо, що закон Архімеда не справедливий у випадку, коли тіло лежить на дні і рідина не підступає під низ тіла.

5.2 Стаціонарний рух ідеальної рідини

Рівняння нерозривності: добуток швидкості течії нестисливої рідини на площу поперечного перерізу трубки течії (див. рис. 5.1) є величина стала для даної трубки течії:

$$\upsilon_1 S_1 = \upsilon_2 S_2. \tag{5.3}$$

Масу рідини, що протікає за секунду через поперечний переріз труби, називають **витратою рідини**: $Q = \rho \upsilon S$.

Рівняння Бернуллі

$$p_0 + \rho g h + \rho \upsilon^2/2 = \text{const} \tag{5.4}$$

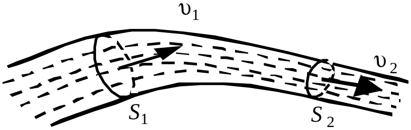

Рисунок 5.1

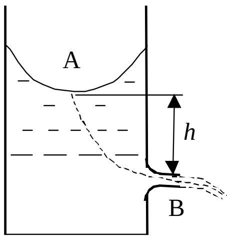

Рисунок 5.2

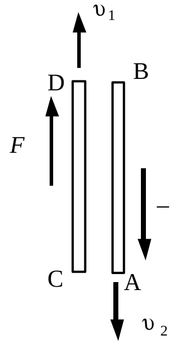

Рисунок 5.3

встановлює зв'язок між тиском і швидкістю стаціонарного руху ідеальної рідини. Величину p_0 називають статичним тиском, $\rho v^2/2$ — динамічним тиском, а їх суму повним тиском.

Приклад 5.1 Циліндрична посудина з налитою в неї ідеальною нестисливою рідиною обертається навколо своєї геометричної осі, що спрямована вертикально, з кутовою швидкістю ω. Визначити швидкість витікання струменя рідини через малий отвір у боковій стінці посудини при сталому русі рідини (відносно посудини).

Р о з в'я з о к. Перейдемо в систему відліку, в якій рідина перебуває в стані спокою. В ній додадуться дві сили інерції: доцентрова і коріолісова. Коріолісова сила не виконує роботи. Вона лише викривляє лінії току, але не змінює форми рівняння Бернуллі (5.4). Доцентрова сила дає новий доданок до потенціальної енергії, тому рівняння Бернуллі запишеться у вигляді

$$p_0 + \rho v^2/2 + \rho g h - \rho\omega^2 r^2/2 = \mathrm{const}, \tag{5.5}$$

де v — швидкість рідини відносно системи відліку, що обертається. Використаємо рівняння (5.5) до лінії току AB, що починається на поверхні рідини в точці (рис. 5.2). Якщо початок відліку координат помістити в точку , то $h_A = r_A = v_A = 0$, $P_A = P_B = P_A$, $v_B = v$,

$z_B = -H, r_B = R$. Ми отримаємо

$$p_0 = p_0 + \rho v^2/2 - \rho g H - \rho\omega^2 R^2/2,$$

звідки

$$v = \sqrt{2(gH + \omega^2 R^2)}.$$

Перевірка розмірності: $[v] = [g]^{1/2}[H]^{1/2} = \text{м}^{1/2}\text{с}^{-1} \cdot \text{м}^{1/2} = \text{м/с}$;

$$[v] = [\omega][R] = \text{с}^{-1} \cdot \text{м} = \text{м/с}.$$

5.3 Рух в'язкої рідини

На паралельні нескінченно довгі пластинки (тобто їх ширина і довжина значно перевищують відстань між ними), між якими розміщений шар рідини, що рухаються зі швидкостями v_1 і v_2 відповідно (рис. 5.3), діє сила

$$F = \eta S(v_2 - v_1)/h, \tag{5.6}$$

де η — коефіцієнт в'язкості рідини; S — площа пластинки; h — відстань між пластинками.

Сила тертя між двома шарами рідини

$$F = \eta|\mathrm{d}v/\mathrm{d}z|S. \tag{5.7}$$

При ламінарному русі в'язкої нестисливої рідини вздовж прямолінійної циліндричної труби радіусом R швидкість рідини є функцією радіуса r:

$$v = (P_1 - P_2)(R^2 - r^2)/(4\eta l), \tag{5.8}$$

де P_1 — тиск на вході труби; P_2 — на виході; l — довжина труби. Витрата рідини, тобто кількість її, що за секунду проходить через поперечний переріз труби, дорівнює

$$Q = \pi\rho(P_1 - P_2)R^4/(8\eta l), \tag{5.9}$$

де ρ — густина рідини.

Число Рейнольдса

$$Re = \rho l \upsilon / \eta, \tag{5.10}$$

де l – характерний розмір (величина, що характеризує лінійні розміри тіла). При критичному значенні числа Рейнольдса $Re_{\text{кр}}$ ламінарний рух переходить в турбулентний. Число $Re_{\text{кр}}$ визначається тільки експериментально.

Сила опору руху кульки радіусом r у в'язкій рідині визначається формулою Стокса:

$$F = 6\pi\eta r\upsilon. \tag{5.11}$$

Приклад 5.2 У посудину з гліцерином падає свинцева кулька. Визначити максимальне значення діаметра кульки, при якому рух шарів гліцерину, спричинений падінням кульки, являється ламінарним. Рух вважати сталим. Критичне значення числа Рейнольдса $Re_{\text{кр}} = 0,5$.

Розв'язок. Якщо тіло, що рухається в рідині, має форму кулі діаметром d, то число Рейнольдса визначається за формулою

$$Re = \rho \upsilon d / \eta. \tag{5.12}$$

Для знаходження швидкості кульки розглянемо сили, що діють на неї:
а) сила тяжіння кульки

$$mg = \rho_{\text{св}} g V = \pi \rho_{\text{св}} g d^3 / 6,$$

де $\rho_{\text{св}}$ – густина свинцю; V – об'єм кульки;
б) сила Архімеда

$$F_{\text{А}} = \rho_{\text{гл}} V = \pi \rho_{\text{гл}} g d^3 / 6,$$

де $\rho_{\text{гл}}$ – густина гліцерину;
в) сила внутрішнього тертя, що визначається за формулою Стокса,

$$F_{\text{тр}} = 6\pi\eta r\upsilon = 3\pi\eta d\upsilon.$$

При сталому русі кульки в рідині ($\upsilon = \text{const}$) сила тяжіння кульки врівноважується сумою сили Архімеда і сили внутрішнього тертя, тобто

$$\pi \rho_{\text{св}} g d^3 / 6 = \pi \rho_{\text{гл}} g d^3 / 6 + 3\pi\eta d\upsilon,$$

звідки

$$v = (\rho_{\text{св}} - \rho_{\text{гл}})gd^3/(18\eta). \tag{5.13}$$

Розв'язуючи разом (5.5), (5.13) відносно d, знайдемо

$$d = \sqrt[3]{18\eta^2 Re/(\rho_{\text{гл}}g(\rho_{\text{св}} - \rho_{\text{гл}}))}.$$

Максимальне значення діаметра $d_{\max}$, при якому рух залишається ламінарним, відповідає критичному значенню числа Рейнольдса $Re_{\text{кр}}$, тому

$$d_{\max} = \sqrt[3]{18\eta^2 Re_{\text{кр}}/(\rho_{\text{гл}}g(\rho_{\text{св}} - \rho_{\text{гл}))}} = 5,29 \text{ мм}.$$

Перевірка розмірності:

$$[d_{\max}] = [\eta]^{2/3}[Re_{\text{кр}}]^{1/3}[\rho]^{-2/3}[g]^{1/3} = \text{кг}\frac{1}{\text{м}^{2/3}\text{с}^{4/3}}\text{с}^{2/3}\frac{\text{м}^2}{\text{кг}^{2/3}}\frac{\text{с}^{2/3}}{\text{кг}^{1/3}} = \text{м}.$$

5.4 Задачі для самостійного розв'язку

5.1 У циліндричну посудину налито дві рідини з густинами $\rho_1 < \rho_2$. На межі поділу цих рідин плаває невеликий диск (густина матеріалу, з якого його виготовлено, ρ $(\rho_1 < \rho < \rho_2)$). Товщина диска h (рис. 5.4). Визначити глибину занурення диска в другу рідину.

5.2 Визначити натяг нитки, що зв'язує дві кульки об'ємом $10,0$ см^3 кожна (рис. 5.5). Верхня кулька плаває наполовину занурившись у воду. Нижня кулька має масу втричі більшу, ніж верхня.

5.3 Тонка однорідна палка шарнірно закріплена за верхній кінець. Нижня частина палки занурена у воду, причому рівновага досягається тоді, коли палка розташована похило до поверхні води і у воді розміщена половина палки. Знайти густину матеріалу, з якого виготовлено палку.

5.4 Із посудини, заповненої водою, виходе труба радіусом r і висотою h (рис. 5.6). Труба закрита круглою пластиною радіусом R і масою M, яку притискає до труби тиск води. Який вантаж необхідно підвісити до пластини в точці А, для того щоб вона повернулася, відкривши трубу? Посудина заповнена водою до висоти H. Товщина пластинки дуже мала.

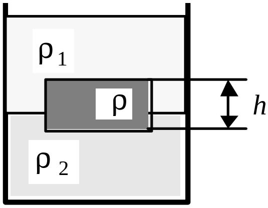

Рисунок 5.4

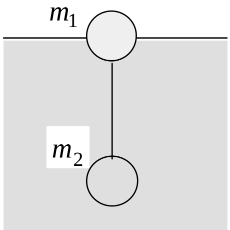

Рисунок 5.5

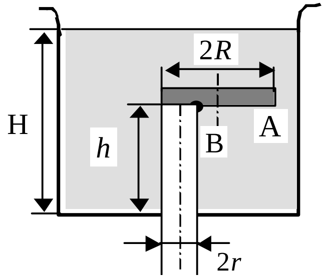

Рисунок 5.6

5.5 Вода тече в горизонтально розташованій трубі змінного перерізу. Швидкість v_1 води в широкій частині труби дорівнює 20,0 см/с. Визначити швидкість v_2 у вузькій частині труби, діаметр d_2 якої в 1,50 разу менший від діаметра d_1 широкої частини.

5.6 До поршня спринцівки, розташованої горизонтально, прикладена сила $F = 15,0$ Н. Визначити швидкість v витоку води із наконечника спринцівки, якщо площа поршня $S = 12,0$ см^2.

5.7 Шприц, розміщений горизонтально, максимально заповнений ліками з густиною 900 кг/м^3 (рис. 5.7). Під дією сталої сили $F = 30$ Н, прикладеної до поршня площею $S_1 = 1,20$ см^2 за час $t = 0,50$ с, всі ліки повністю витікають із шприца. Хід поршня шприца $l = 4,0$ см. Визначити площу поперечного перерізу внутрішнього отвору голки шприца S_2.

5.8 Циліндрична склянка радіусом R_1 заповнена водою. Висота стовпа води h_0. У дні склянки утворився отвір малого діаметра. Внаслідок цього за $t = 600$ с вода із склянки повністю витекла. Знайти радіус R_2 отвору у дні склянки.

5.9 Прямокутна коробка плаває на поверхні води, занурившись під дією власної ваги на глибину h. Площа дна коробки дорівнює S, висота – H. Через який час коробка потоне, якщо в центрі її дна зробити малий отвір площею σ і з допомогою бокових направляючих зберігати незмінною орієнтацію коробки.

5.10 Через який час наповниться водою кульова колба радіусом R,

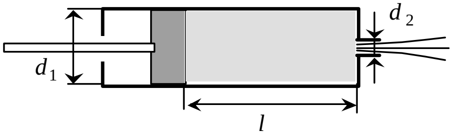

Рисунок 5.7

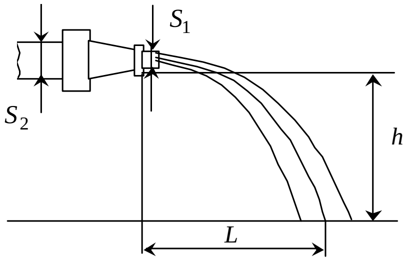

Рисунок 5.8

якщо в центрі її нижньої основи зроблений малий отвір площею σ? Колба поміщена у воду до нижньої основи її горловини.

5.11 Струмінь води площею поперечного перерізу $S_1 = 4,00$ см^2 витікає в горизонтальному напрямі із брандспойта, розташованого на висоті $h = 2,00$ м над поверхнею землі і падає на неї на відстані $L = 8,00$ м від отвору брандспойта (рис. 5.8). Знаючи надлишковий тиск $p = 78,0$ кПа води в рукаві, знайти його поперечний переріз.

5.12 У горизонтально розташованій трубі з площею поперечного перерізу $S_1 = 20,0$ см^2 тече рідина. В одному місці труба має звуження, в якому площа перерізу дорівнює $S_2 = 12,0$ см^2. Різниця Δh рівнів у двох манометричних трубках, встановлених у широкій і вузьких частинах труби, дорівнює 8,00 см. Визначити об'ємну витрату води.

5.13 Горизонтальний циліндр насоса має діаметр $d_1 = 20,0$ см. У ньому рухається зі швидкістю $v_1 = 1$ м/с поршень, виштовхуючи воду через отвір діаметром $d_2 = 2,0$ см. З якою швидкістю v_2 буде витікати вода із отвору? Яким буде надлишковий тиск p води в циліндрі?

5.14 Визначити роботу, що виконується за переміщенням води об'ємом 2,0 м^3, в горизонтальній трубі змінного перерізу з тиском від 50 до 20 кПа.

5.15 У широкій посудині, заповненій касторовим маслом, падає стальна кулька зі сталою швидкістю $v = 0,2$ м/с. Динамічна в'язкість касторового масла при температурі досліду $\eta = 2$ Н·с/м^2. Визначити діаметр кульки.

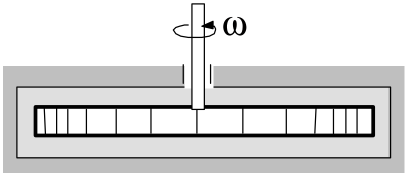

Рисунок 5.9

5.16 Кулька спливає з постійною швидкістю v в рідині, густина якої в 4 рази більша від густини матеріалу кульки. В скільки раз сила тертя $F_{\text{тр}}$, що діє на кульку, більша від сили тяжіння.

5.17 Якої найбільшої швидкості v може досягнути дощова краплина діаметром $d = 0,30$ мм, якщо динамічна в'язкість повітря $\eta = 1,2 \cdot 10^{-5}$ Па·с.

5.18 Суміш свинцевих дробинок з діаметрами $d_1 = 3,0$ мм і $d_2 = 1,0$ мм опустили в бак з гліцерином висотою $h = 1,0$ м. На скільки пізніше упадуть на дно дробинки меншого діаметра в порівнянні з дробинками більшого діаметра. Динамічна в'язкість гліцерину $\eta = 1,47$ Па·с.

5.19 Підрахувати максимальне значення швидкості потоку води у трубі діаметром 2,0 см, при якому рух рідини залишається ламінарним. Прийняти, що $Re_{\text{кр}} = 3,0 \cdot 10^3$.

5.20 У трубі з внутрішнім діаметром $d = 3,00$ см тече вода. Визначити максимальну масову витрату води $Q_{m,\max}$ при ламінарному русі.

5.21 Чан місткістю $V = 2$ м^3 повинен бути заповнений водою за $t = 5$ хв. Визначити найменший радіус труби, яка може бути використана для з'єднання чана з водонапірною баштою, що розташована на відстані $l = 500$ м, якщо рівень води в башті на $h = 20$ м вищий від рівня отвору в чані.

5.22 Один із методів визначення в'язкості рідин полягає у вимірюванні швидкості падіння кульки в циліндрі, який заповнений досліджуваною рідиною, і розрахунок η за формулою Стокса. Беручи для кулі критичне значення числа Рейнольдса $Re_{\text{кр}} = 0,05$, знайти максимальне значення радіуса стальної кульки, яке може бути використано в досліді із визначення в'язкості гліцерину.

5.23 Тонкий горизонтальний диск радіусом $R = 10$ см розташований у циліндричній порожнині з маслом, в'язкість якого $\eta = 8$ мПа·с (рис. 5.9). Зазори між диском і горизонтальними торцями порожнини однакові і дорівнюють $h = 1$ мм. Знайти потужність, яку розвивають сили в'язкості, що діють на диск, при його обертанні з кутовою швидкістю $\omega = 60$ рад/с. Крайовими ефектами знехтувати.

5.24 Під час руху кульки радіусом $r_1 = 1,20$ мм у гліцерині ламінарне обтікання спостерігається при швидкостях кульки, не вищих за $v_1 = 23$ см/с. При якій мінімальній швидкості v_2 кулі радіусом $r_2 = 5,50$ см у воді обтікання стане турбулентним? В'язкість гліцерину і води дорівнюють відповідно $\eta_1 = 1,39$ мПа·с і $\eta_2 = 1,10$ мПа·с.

6 РЕЛЯТИВІСТСЬКА МЕХАНІКА

6.1 Кінематика спеціальної теорії відносності

Постулати Ейнштейна: 1 Всі закони природи і рівняння, що їх описують, інваріантні, тобто не змінюються при переході від однієї інерційної системи відліку до іншої.

2 Швидкість світла є граничною для передачі взаємодії у природі. Вона однакова для всіх інерційних систем відліку і дорівнює $c \approx$ $\approx 3 \cdot 10^8$ м/с.

Перетворення координат Лоренца при переході від інерційної системи відліку K до інерційної системи K', що рухається відносно K зі швидкістю $\mathbf{V}$ (див. рис. 6.1):

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t' = \frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1-(V/c)^2}}. \tag{6.1}$$

Тривалість події в рухомій системі відліку K'

$$\Delta t' = \Delta t / \sqrt{1-(V/c)^2}, \tag{6.2}$$

де Δt – тривалість події в нерухомій системі відліку K.

Скорочення довжини рухомого тіла

$$l = l_0 \sqrt{1-(V/c)^2}, \tag{6.3}$$

де l – довжина рухомого тіла; l_0 – власна довжина тіла.

Релятивістський закон додавання швидкостей

$$u = (u' + V)/(1 + u'V). \tag{6.4}$$

де u – швидкість тіла в системі K (абсолютна швидкість); u' – швидкість тіла в системі K' (відносна швидкість).

Інтервал s_{12} між подіями 1 і 2

$$s_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2}, \tag{6.5}$$

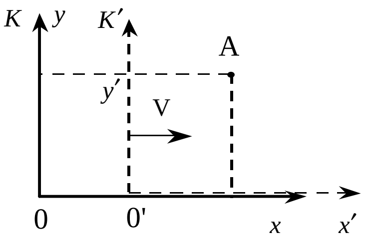

Рисунок 6.1

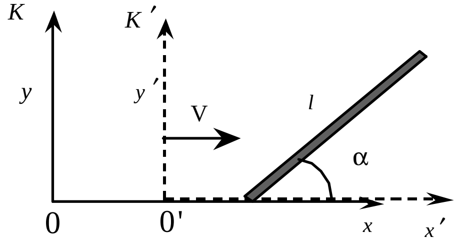

Рисунок 6.2

де t_{12} — проміжок часу між подіями; l_{12} — відстань між двома подіями, в яких відбуваються дані події.

Приклад 6.1 В K-системі відліку розміщений нерухомий стрижень довжиною $l = 1$ м, який орієнтований під кутом $\vartheta = 45°$ до осі x (рис. 6.2). Знайти його довжину l' і відповідний кут ϑ' в K'-системі, що рухається відносно K-системи зі швидкістю $V = c/2$ вздовж осі x.

Р о з в'я з о к. Довжина стрижня в K'-системі

$$l' = \sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2} = \sqrt{(\Delta x)^2(1 - (V/c)^2) + (\Delta y)^2}.$$

Маючи на увазі, що $\Delta x = l \cos\vartheta$ і $\Delta y = l \sin\vartheta$, отримаємо

$$l' = l\sqrt{1 - (V/c)^2 \cos^2\vartheta} = 0,94 \text{ м}.$$

Кут ϑ в K'-системі знайдемо через тангенс:

$$\mathrm{tg}\vartheta' = \Delta y'/\Delta x' = \frac{\Delta y}{\Delta x\sqrt{1 - (V/c)^2}} = \frac{\mathrm{tg}\vartheta}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}; \quad \vartheta' = 49°.$$

6.2 Релятивістська динаміка

Релятивістський імпульс:

$$\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\boldsymbol{v}} = m_0\vec{\boldsymbol{v}}/\sqrt{1 - (v/c)^2}, \tag{6.6}$$

де $\vec{v}$ — швидкість частинки. Величину $m = m_0/\sqrt{1-(v/c)^2}$ називають релятивістською масою, m_0 — масою спокою частинки.

Основне рівняння релятивістської динаміки

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) = \vec{\mathbf{F}}. \tag{6.7}$$

Енергія спокою (власна енергія)

$$E_0 = m_0c^2. \tag{6.8}$$

Повна енергія тіла

$$E = mc^2 = m_0c^2/\sqrt{1-(v/c)^2}. \tag{6.9}$$

Релятивістська кінетична енергія

$$T = E - E_0 = m_0c^2(1/\sqrt{1-(v/c)^2} - 1). \tag{6.10}$$

Зв'язок між енергією та імпульсом тіла

$$E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4, \tag{6.11}$$

$$\vec{\mathbf{p}} = m\vec{v} = E\vec{v}/c^2, \quad p = \frac{1}{c}\sqrt{T(T+2m_0c^2)}. \tag{6.12}$$

Для частинок з нульовою масою спокою ($m_0 = 0$) $p = E/c$.

Приклад 6.2 Фотон з енергією ε розсіявся на вільному електроні, що перебував у стані спокою. Знайти енергію ε' розсіяного фотона, якщо кут між напрямами руху розсіяного і початкового фотонів дорівнює ϑ.

Розв'язок. Скористаємося законами збереження енергії та імпульсу в даному процесі:

$$T_e = \varepsilon - \varepsilon', \quad \vec{\mathbf{p}}_e = \vec{\mathbf{p}} - \vec{\mathbf{p}'},$$

де T_e і $\vec{\mathbf{p}}_e$ — кінетична енергія та імпульс електрона віддачі; $\vec{\mathbf{p}}$ і $\vec{\mathbf{p}'}$ — імпульси початкового і розсіяного фотонів. Із трикутника імпульсів (рис. 6.3) у відповідності до теореми косинусів випливає, що

$$p_e^2 = p^2 + p'^2 - 2pp'\cos\vartheta.$$

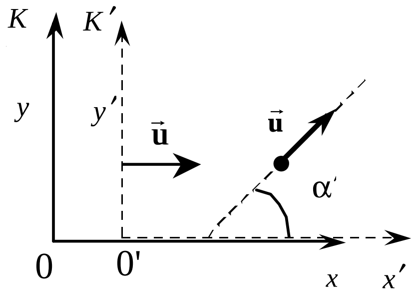

Рисунок 6.3

Підставивши сюди $p = \varepsilon/c$, $p' = \varepsilon'/c$, отримаємо

$$p_e = \sqrt{(T_e(T/c^2 + m_e)} = \sqrt{(\varepsilon - \varepsilon')(\varepsilon - \varepsilon' + 2m_e c^2)}/c,$$

де m_e – маса спокою електрона. Після нескладних перетворень отримаємо

$$\varepsilon' = \varepsilon/(1 + (2\varepsilon/m_e)\sin^2(\vartheta/2)).$$

6.3 Задачі для самостійного розв'язку

6.1 Отримати обернені перетворення Лоренца:

$$x = \frac{x' + Vt}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + x'V/c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}.$$

6.2 Стрижень рухається з деякою сталою швидкістю v. Його довжина в нерухомій системі відліку $l_1 = 2,00$ м, а в системі відліку, зв'язаній зі стрижнем, $l_2 = 5,00$ м. Визначити швидкість стрижня відносно нерухомої системи відліку.

6.3 Частинка рухається в системі K зі швидкістю $u = c/2$ під кутом $\alpha = 45^\circ$ до осі x (рис. 6.3). Знайти відповідний кут α' в системі, що рухається із швидкістю $v = c/3$.

6.4 У системі K' розміщений квадрат, сторона якого паралельна осі x'. Визначити кут φ між його діагоналями в системі K, якщо система K' рухається відносно K зі швидкістю $v = 0,95c$.

6.5 Нерухоме в K-системі тіло має густину ρ_0. Знайти густину цього тіла в K'-системі відліку, яка рухається зі швидкістю $v = 0,5c$ відносно K-системи.

6.6 Яку відстань пролітає елементарна частинка до розпаду, якщо її швидкість $u = 0,99c$, а власний час життя $t_0 = 2,7 \cdot 10^{-8}$ с? Яку відстань пролетіла б частинка, якби не було релятивістського сповільнення часу? Відстань вимірюється в лабораторній системі відліку.

6.7 Знайти власний час життя частинки, якщо її швидкість $0,85c$, а відстань, яку вона пролітає до розпаду, 400 км.

6.8 Дві релятивістські частинки рухаються в лабораторних системах відліку зі швидкостями $v_1 = 0,60c$ і $v_2 = 0,90c$ вздовж однієї прямої. Визначити їх відносну швидкість u_{21} у двох випадках: а) частинки рухаються в одному напрямку; б) частинки рухаються в протилежних напрямках.

6.9 У лабораторній системі відліку віддаляються одна від одної дві частинки з однаковими за абсолютним значенням швидкостями. Їх відносна швидкість u в тій самій системі відліку дорівнює $0,50c$. Визначити швидкості частинок.

6.10 Два прискорювача викидають назустріч один одному частинки зі швидкостями $|v| = 0,90c$. Визначити відносну швидкість u_{21} зближення частинок в системі відліку, яка рухається разом з однією із частинок.

6.11 Частинка рухається зі швидкістю $v = 0,5c$. У скільки разів релятивістська маса частинки більша від маси спокою?

6.12 З якою швидкістю v рухається частинка, якщо її релятивістська маса в три рази більша від маси спокою?

6.13 Імпульс p релятивістської частинки дорівнює m_0c (m_0 – маса спокою). Визначити швидкість частинки v в частках швидкості світла.

6.14 Відомо, що об'єм води в океані дорівнює $1,37 \cdot 10^9$ км^3. Визначити на скільки збільшиться маса води в океані, якщо температура води підвищиться на $\Delta t = 1^\circ$C. Густину води в океані взяти такою, що дорівнює $1,03 \cdot 10^3$ кг/м^3.

6.15 Оцінити масу гравітаційного поля Землі.

6.16 Кінетична енергія T електрона дорівнює 10 МеВ. У скільки разів його релятивістська маса більша від маси спокою?

6.17 При якій швидкості v кінетична енергія будь-якої частинки дорівнює її енергії спокою?

6.18 Яку роботу потрібно виконати, щоб збільшити швидкість тіла масою $m_0 = 1,00$ кг від $v_1 = 0,60c$ до $v_2 = 0,80c$? Порівняти одержаний результат зі значенням, обчисленим за нерелятивістською формулою.

6.19 Імпульс p релятивістської частинки дорівнює m_0c. Під дією зовнішньої сили імпульс частинки збільшився в два рази. У скільки разів при цьому збільшиться енергія частинки: а) кінетична; б) повна.

6.20 Показати, що кінетична енергія в релятивістському випадку

$$E_{\text{К}} = m_0c^2(1/\sqrt{1 - v^2/c^2} - 1)$$

переходить в класичний вираз для кінетичної енергії: $m_0v^2/2$.

6.21 Довести, що вираз $p = \sqrt{(2E_0 + T)T}/c$ (T − кінетична енергія частинки, E_0 − енергія спокою частинки) переходить у вираз $p = \sqrt{2mT}$ при $v \ll c$.

6.22 Частинка масою m налітає зі швидкістю $v = 0,99c$ на нерухому частинку такої самої маси. Визначити масу і швидкість частинки, що утворилась при не пружному їх зіткненні.

6.23 У K-системі відліку частинка масою спокою m_0 і кінетичною енергією T зіштовхується з іншою частинкою, що перебуває в стані спокою з такою самою масою спокою. Знайти масу спокою M_0 і швидкість частинки, що утворилася в результаті непружного зіткнення.

7 МЕХАНІКА ПРУЖНИХ ТІЛ

7.1 Видовження і стиснення стрижнів

Закон Гука $F = -kx$, де F — сила пружності; x — величина пружної деформації; k — коефіцієнт жорсткості тіла.

Силу, віднесену до одиниці площі поперечного перерізу стрижня, називають **напруженням**. Якщо стрижень розтягнутий, то це напруження називають **натягом** і визначають за формулою $T = F/S$. Якщо ж стрижень стиснутий, то напруження називають **тиском** і чисельно визначають такою самою формулою: $P = F/S$.

Нехай l_0 — довжина недеформованого стрижня. Після прикладення сили F його довжина отримає приріст Δl і буде дорівнювати $l = l_0 + \Delta l$. Відношення

$$\varepsilon = \Delta l / l_0 \tag{7.1}$$

називають відносним видовженням (стисненням) стрижня.

Закон Гука для видовження або стиснення стрижнів: для малих деформацій натяг (або тиск) пропорційний відносному видовженню (або відносному стисненню):

$$T = E\,\Delta l / l_0 \quad \text{або} \quad P = -E\,\Delta l / l_0, \tag{7.2}$$

де E — стала, що залежить тільки від матеріалу стрижня і його фізичного стану. Її називають **модулем Юнга**. Закон Гука і основані на ньому розрахунки правильні з відносною похибкою порядку ε.

Об'ємна густина пружної енергії (тобто пружна енергія, що припадає на одиницю об'єму витягнутого (або стисненого) стрижня)

$$\mathrm{w} = \frac{1}{2}T\varepsilon = \frac{1}{2}E\varepsilon^2 = \frac{T^2}{2E} = \frac{P^2}{2E}. \tag{7.3}$$

Під дією сили F розтягу або стиснення змінюються не тільки поздовжні, але й поперечні розміри стрижня. Нехай a_0 — товщина стрижня до деформації, a — після деформації. За товщину для круглого стрижня можна взяти діаметр, а для прямокутного — одну із сторін його прямокутної основи. Якщо F сила розтягу, то величину $-\Delta a/a_0 \approx -\Delta a/a$ називають відносним поперечним стисненням стрижня ($\Delta a = a - a_0$). Відношення відносного поперечного стиснення до відповідного повздовжнього видовження називають **коефіцієнтом Пуассона**:

$$\mu = -\frac{\Delta a}{a} : \frac{\Delta l}{l} = -\frac{\Delta a}{\Delta l} \cdot \frac{l}{a}. \tag{7.4}$$

Відносна зміна об'єму при повздовжній деформації

$$\frac{\Delta V}{V} = (1 - 2\mu)\frac{T}{E}. \tag{7.5}$$

7.2 Зсув і кручення

Візьмемо куб із однорідної та ізотропної речовини. Прикладемо до протилежних граней AD і BC рівні і протилежно напрямлені дотичні сили (рис. 7.1). Для усунення обертання прикладемо такі самі дотичні сили до граней AB і CD. У результаті деформації всі шари куба, паралельні основі AD, зрушуються в одному і тому самому напрямку, паралельному тій самій основі. Таку деформацію називають **зсувом**. Кут γ між гранню AB до деформації і тією самою гранню $A'B'$ після деформації називають **кутом зсуву**. Закон Гука для зсуву можна записати у вигляді

$$\tau = G\gamma, \tag{7.6}$$

де γ — дотична напруга, що діє на грані куба; G — модуль зсуву, що залежить від матеріалу, із якого виготовлено куб.

Об'єм тіла при деформації зсуву практично не змінюється.

Об'ємна густина пружної енергії при зсуві визначається за формулою (грань AD вважаємо закріпленою нерухомо, див. рис. 7.2):

$$\mathrm{w} = \tau\gamma/2 = \tau^2/(2G). \tag{7.7}$$

Візьмемо однорідну дротину, закріпимо її верхній кінець, а до нижнього прикладемо закручувальні сили, які створюють обертальний момент M відносно повздовжньої осі дротини. Дротина закрутиться — кожний радіус її нижньої основи повернеться навколо повздовжньої осі на

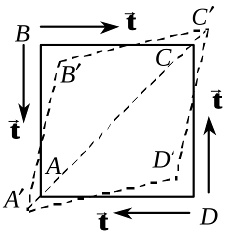

Рисунок 7.1

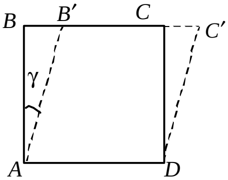

Рисунок 7.2

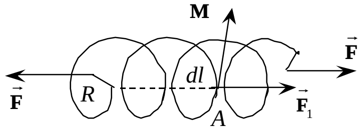

Рисунок 7.3

кут φ. Таку деформацію називають **крученням**. Закон Гука для деформації кручення має вигляд

$$M = f\varphi, \tag{7.8}$$

де f – **модуль кручення**, що залежить від матеріалу і геометричних розмірів дроту. Для суцільної дротини радіусом r $f = \pi G r^4/(2l)$.

Приклад 7.1 Визначити видовження спіральної пружини, якщо розтяжні сили направлені вздовж її осі. Вважати, що кроком спіралі можна знехтувати в порівнянні з радіусом витка R. Модуль кручення дротини, із якої виготовлено спіраль, вважати відомим.

Р о з в'я з о к. Виконаємо уявний розріз дротини пружини в довільній точці A площиною, що проходить через вісь пружини (рис. 7.3). Нехай F_1 – сила, з якою нижня частина пружини діє на верхню в місці розрізу. Для рівноваги потрібно, щоб $\vec{\mathbf{F}}_1 = -\vec{\mathbf{F}}$, де $\vec{\mathbf{F}}$ – розтяжна сила, що діє на верхню частину пружини. Оскільки сили $\vec{\mathbf{F}}$ і $\vec{\mathbf{F}}_1$ утворюють пару, то момент цієї пари не залежить від вибору точки, відносно якої він береться. Цей момент перпендикулярний до площини розрізу і дорівнює $M = FR$. Через малість кроку витка можна вважати, що момент в точці A, направлений по осі дроту. Щоб частина пружини, яку ми розглядаємо, перебувала в рівновазі, необхідне виникнення кручення дротини навколо її осі, яке б компенсувало момент $\vec{\mathbf{M}}$. Коли розтяжні сили F діють вздовж осі пружини, величина моменту M не змінюється вздовж дротини, а тому кручення її буде рівномірним. Нехай dl – елемент довжини дротини. Під дією моменту M він закрутиться на кут $d\varphi = M/f_1$, де f_1 – модуль кручення даного елемента. Позначимо f модуль

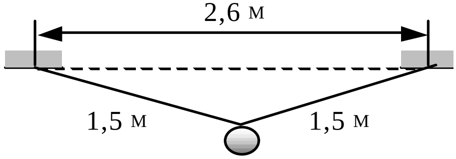

Рисунок 7.4

кручення всієї дротини (якщо її випрямити). Оскільки модуль кручення обернено пропорційний довжині дротини l_0, то $f = f_1(dl/l_0)$, а тому $d\varphi = (M/f)(dl/l_0)$. У результаті закручування елемента dl на кут $d\varphi$ нижній кінець дротини опуститься на $dx = Rd\varphi = (MR/f)(dl/l_0) = (FR^2/f)(dl/l_0)$. Інтегруючи за довжиною всієї дротини, знайдемо видовження пружини

$$x = FR^2/f.$$

Перевірка розмірності: $[x] = [F][R]^2[f]^{-1} =$ Н$\cdot$ м^2(Н$\cdot$ м)$^{-1}$ = м.

7.3 Задачі для самостійного розв'язку

7.1 Знайти відносне видовження вертикально підвішеного стрижня під дією власної ваги P. Площа поперечного перерізу дорівнює S.

7.2 Стальний канат виготовлено із 100 дротин діаметром 1,00 мм кожна. Довжина каната 3 м, відстань між точками підвісу 2,60 м (рис. 7.4). Посередині каната підвішений вантаж масою m=1,00 т. Канат зроблено з м'якої сталі. На скільки видовжиться канат? При якому навантаженні він розірветься?

7.3 Відносна зміна об'єму при повздовжній деформації стрижня дорівнює нулю. Визначити коефіцієнт Пуассона матеріалу стрижня.

7.4 Тонкий стрижень довжиною $2l$ рівномірно обертається навколо перпендикулярної до нього осі, що проходить через центр стрижня, з кутовою швидкістю ω. Показати, що натяг T, який виникає в стрижні при обертанні, задовольняє рівняння $dT/dx = -\rho\omega^2 x$, де ρ — густина матеріалу стрижня, а x — відстань від осі обертання. Інтегруючи це рівняння, знайти розподіл натягу в стрижні. В якому місці стрижня натяг максимальний і чому він дорівнює?

7.5 Стальний маховик має вигляд масивного кільця із зовнішнім діаметром 50,0 см і внутрішнім — 49,0 см. На яку максимальну частоту обертання він розрахований?

7.6 Який тиск зсередини може витримати свинцева труба, якщо її внутрішній діаметр 30,0 мм, а зовнішній — 36,0 мм? Межа міцності для свинцю $2,00 \cdot 10^7$ Па.

7.7 Мідний стрижень затиснули між двома опорами. Його температура збільшилася на 50°С. Яка напруга виникає в стрижні? Модуль Юнга для міді $E = 13 \cdot 10^{10}$ Па. Температурний коефіцієнт лінійного розширення міді $\alpha = 20 \cdot 10^{-6}$ К$^{-1}$.

7.8 На пружині, закріпленій верхнім кінцем, підвішений вантаж масою m, під дією якого пружина видовжується на Δx. Показати, що зміна потенціальної енергії пружини в два рази менша від зміни потенціальної енергії вантажу. Як це узгоджується з законом збереження енергії?

7.9 Пружний стрижень масою m, довжиною l і площею поперечного перерізу S рухається в повздовжньому напрямку з прискоренням a (однаковим для всіх точок стрижня). Знайти пружну енергію деформації, що виникає внаслідок прискореного руху.

7.10 Яку максимальну кінетичну енергію може мати маховик, об'єм якого $V = 1$ м^3, якщо міцність матеріалу на розрив $T = 10^{10}$ Н/м^2. Всю масу маховика вважати зосередженою в його ободі (тонкому відносно радіуса маховика). Показати, що при незмінній міцності матеріалу маховика максимальна кінетична енергія залежить лише від об'єму, а не від маси маховика.

7.11 Гумовий циліндр висотою h, вагою P і площею основи S поставили на горизонтальну площину. Знайти енергію пружної деформації циліндра, що виникає під дією його власної ваги. У скільки раз зміниться енергія пружної деформації циліндра, якщо на верхню основу поставити другий такий самий циліндр?

7.12 Балка з квадратним поперечним перерізом із стороною $a = 200$ мм і довжиною $l = 2,00$ м горизонтально стирчить із стіни. Обчислити прогин вільного кінця балки під дією власної ваги. Густина матеріалу $\rho = 19,3$ г/см^3, а модуль Юнга $E = 380$ ГПа.

7.13 У результаті закручування верхній переріз стального стрижня довжиною 3,00 м повернувся відносно нижнього на 2°. Радіус стрижня 50,0 мм. Знайти закручувальні момент та потенціальну енергію пружної деформації стрижня. Модуль зсуву для сталі $G = 8,20 \cdot 10^{10}$ Па.

7.14 Дві дротини однакової довжини зроблені із одного і того самого матеріалу, але діаметр другої вдвоє більший, ніж першої. В одному із дослідів нижню основу кожної дротини було закручено відносно верхньої на один і той самий кут. У другому досліді дротини було приварено своїми основами так, що вісь однієї з них зробили продовженням осі другої; потім нижню основу дротини, що утворилася, було закручено відносно верхньої на деякий кут. Знайти відношення пружних енергій дротин в обох випадках.

7.15 Яку роботу необхідно виконати, щоб стальну смугу довжиною $l = 2,00$ м, шириною $h = 6,00$ см і товщиною $\delta = 2,00$ мм зігнути в круглий обруч? Передбачається, що процес відбувається в рамках пружної деформації.

7.16 Визначити видовження спіральної пружини, якщо розтяжна сила F діє вздовж однієї із твірних циліндричної поверхні, на яку вона намотана. Вважати, що кроком спіралі можна знехтувати в порівнянні з радіусом витка R. Модуль кручення дротини f, із якої виготовлено спіраль, вважати відомим.

ВІДПОВІДІ

1.1 $\langle v \rangle = 4v_1v_2v_3v_4/(v_1v_2v_3 + v_1v_2v_4 + v_1v_3v_4 + v_2v_3v_4) = 9,60$ м/с.
1.2 8,87 м/с.
1.3 2,00 м/с.
1.5 $v = v_2/tg\alpha - v_1 = 2,50$ м/с.
1.6 $t = s(\sqrt{v_1^2 - v_2^2 \sin^2\alpha} + v_2\cos\alpha)/(v_1^2 - v_2^2) =$1 год 54 хв.
1.7 $v' = 122$ км/год, $v'' = 72,2$ км/год.
1.8 $l = 2v_0L/(v_0 + c) = 45,7$ м/с.
1.9 $L = (c + v_0)^2\tau/(2c)$.
1.10 20,0 м/с.
1.11 а) 0,1 м/с; б) 0,26 м/с; в) $t_0 = 16$ с.
1.12 б) $s = 24,0$ м, $v = 38,0$ м/с, а = 42,0 м/с^2.

1.13 $\langle v\rangle = 7,00$ м/с, $\langle \mathrm{a}\rangle = 4,00$ м/с^2.
1.14 $\langle|v|\rangle = 2,45$ м/с, $|\langle v\rangle| = 1,24$ м/с.
1.15 $\langle v\rangle = 3,50$ м/с, $s = 9,50$ м.
1.16 $x = -2,00$ м.
1.17 $\mathrm{a} = 6,72$ м/с^2, $s = 3,72$ м, $\langle v\rangle = 3,72$ м/с.
1.18 29,84 м/с.
1.19 29,0 м/с; 42,9 м.
1.20 3,00 с.
1.21 6,00 с; 78,4 м/с; 294 м.
1.22 3,70 м.
1.23 16,0 с.
1.24 а) 0,70 с; б) 0,70 і 1,30 м.
1.26 $\langle v\rangle = 88,9$ м/с.
1.27 322 м; 7 м.
1.28 $s = 25$ м.
1.29 12,4 м/с.
1.30 1,54$\cdot10^3$ м, 3,55$\cdot10^3$ м; 1,02$\cdot10^3$ м.
1.31 621 м.
1.32 а) 9,16 м/с; в) 0,50 с; г) 8,66 м; д) 25,7 м.
1.33 $v = 22,0$ м/с; $\alpha = 63°$.
1.34 35,8 м/с; 5,38 м/с^2; 8,22 м/с^2.
1.35 11,0 м/с; 12,6 м/с.
1.36 14,6 м.
1.37 $t = 0,30$ с, або $t = 1,14$ с.
1.38 $s =$53,9 м.
1.39 1,08 с.
1.40 11,3 м.
1.41 а) $7,26\cdot10^{-5}$ рад/с; б) $4,5\cdot10^{-5}$ рад/с; в) $1,74\cdot10^{-3}$ рад/с; г) $1,19\cdot10^{-3}$ рад/с; д) 7,80 км/с.
1.42 7,10$\cdot10^{-1}$ м/с^2.
1.43 3,20 рад/с^2.
1.44 1,59 об.
1.45 240 об.
1.46 11,0 обертів, $-$ 15,9 рад/с^2.
1.47 8,33 рад/с^2.
1.48 1,50 с; -6,00 м/с; $-$ 4,00 м/с^2; $-$ 9,85 м/с^2.
1.49 $v = v_0\exp(-s/r)$, $\mathrm{a} = (2v_0^2/r)\exp(-2s/r)$.
1.50 $4,30\cdot10^{-1}$ рад/с^2.
1.51 $5,8\cdot10^{-1}$.

1.52 $\upsilon = a\omega\sin(\omega t/2)$, $l = 8a$, $\text{a} = a\omega^2$.

1.53 а) $\langle\upsilon\rangle = \pi R/(6t) = 1,60 \cdot 10^{-1}$ м/с; б) $|\langle\vec{\upsilon}\rangle| = 2R\sin(\pi/6)/t = 1,50 \times \times 10^{-1}$ м/с; в) $|\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{4\pi^2/9+1} \cdot (2\pi R/3t^2) = 7,30 \cdot 10^{-1}$ м/с^2.

2.1 $F = 162$ Н; лінійно.

2.2 $F = 400$ Н.

2.3 $\vec{\mathbf{F}} = -m\omega^2\vec{\mathbf{r}}$, де $\vec{\mathbf{r}}$ – радіус вектор частинки відносно початку координат; $F = m\omega^2\sqrt{x^2+y^2}$.

2.4 $\Delta m = 2ma/(g+a) = 10$ кг.

2.5 а) 4.9 Н; б) 14.7 Н; в) 9.8 Н.

2.6 $a = m_2 g/(m_1+m_2) = 0.9g$; $T = m_1 m_2 g/(m_1+m_2) = 12$ Н.

2.7 $a \geq g(1-\mu)/(1+\mu)$.

2.8 $a_1 = [4m_1m_2 + m_0(m_1-m_2)]g\{4m_1m_2 - m_0(m_1-m_2)]^{-1}$.

2.9 а) $T = 2M(M+m)g/(2M+m)$; б) $a = mg/(2M+m)$; в) $R = 2Mmg/(2M+ + m)$; г) $F = 2T$.

2.10 $x = (m_2-m_1)^2/(m_1+m_2)^{-2}gt^2/2 = 0,54$ м; $a_c = (m_2-m_1)^2/(m_1+ + m_2)^{-2}g = 1,1$ м/с^2.

2.11 $a_1 = a = 1.96$ м/с^2; $a_2 = -a + a' = 1.96$ м/с^2; $a_3 = a - a' = -5.88$ м/с^2, де $a = (m_1m_2 + m_1m_3 - 4m_2m_3)g/M$; $a' = 2m_1(m_2-m_3)g/M$, $M = = m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3$; $T_1 = 8m_1m_2m_3g/M = 31.4$ Н; $T_2 = 0.5T_1$; $F = 2T_1$.

2.12 $a = (m_2-m_1)g/(m_1+m_2+m) = 1,40$ м/с^2; $T_1 = m_1(g+a) = 11,2$ Н; $T_2 = m_2(g-a) = 16,8$ Н.

2.13 $\mu \leq 0,07$; $a = 0,39$ м/с^2; $t = 22,7$ с; $\upsilon = 8,85$ м/с.

2.14 $\mu = tg\alpha - 2l/(gt^2\cos\alpha) = 0,35$.

2.15 $a = (m_1\sin\alpha - m_2)g/(m_1+m_2)$; $T = m_1m_2(1+\sin\alpha)g/(m_1+m_2)$.

2.16 а) $m_2/m_1 > \sin\alpha + \mu\cos\alpha$; б) $m_2/m_1 < \sin\alpha - \mu\cos\alpha$.

2.17 а) $a = (m_1\sin\beta - m_2\sin\alpha)g/(m_1+m_2) = 1,02$ м/с^2; б) $T_1 = T_2 = = m_1m_2(\sin\alpha + \sin\beta)g/(m_1+m_2) = 5,9$ Н.

2.18 $a = mg\sin 2\alpha/(2(M + m\sin\alpha))$.

2.19 $\mu = [(\eta^2-1)/(\eta^2+1)]\,\text{tg}\alpha = 0,16$.

2.20 $t = (\upsilon_B - \upsilon_A)/(g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)) \approx 0,6$ м/с.

2.21 $a = [m_2(\sin\beta - \mu_2\cos\beta) - m_1(\sin\alpha + \mu_1\cos\alpha)]g/(m_1+m_2)$; $F = = 2T\sin(\alpha+\beta)/2$; $T = [(m_2 - m_2^2/(m_1+m_2))(\sin\beta - \mu_2\cos\beta) - - m_1m_2(\sin\alpha + \mu_1\cos\alpha)/(m_1+m_2)]g$.

2.22 $F_{\max} = \mu(m_1+m_2)g = 17,7$ Н.

2.23 а) $F_1 = \mu_1(m_1+m_2)g$; б) $F_2 = (f_2-f_1)(m_2/m_1)(m_1+m_2)g$.

2.24 2,27.

2.25 $\approx 4°$.

2.26 $F = m\sqrt{a^2+g^2} = 1,45$ Н; 45°.

2.27 $\upsilon = \sqrt{gR}/3 = 10$ м/с.
2.28 $\mathrm{tg}\alpha = \mu, T_{\min} = \mu mg/\sqrt{1+\mu^2}$.
2.29 $\mu = 4\pi^2 n^2 R/g = 0.1$
2.30 $h = l(1 - F/(3mg)) = 0,26$ м.
2.31 а) $a = g\sqrt{1 + 3\cos^2\vartheta}, T = 3mg\cos\vartheta$; б) $T = mg\sqrt{3}$; в) $\cos\vartheta = 1/\sqrt{3}$.
2.32 $\vartheta = \arccos(2/3) \approx 48^\circ$.
2.33 $s = (R/2)\sqrt{(\mu g/a_\tau)^2 - 1} = 60$ м.
2.34 $x_{\min} = g(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)/[\omega^2\sin\alpha(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)] = 0,19$ м; $x_{\max} = g(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)/[\omega^2\sin\alpha(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)] = 0,42$ м.
2.35 $p = \sqrt{2}\rho Q_V^2/S = 3,5 \cdot 10^6$ Н/м^2(ρ – густина води).
2.36 $F = 2\rho S\upsilon^2\sin\varphi = 346$ Н (ρ – густина води).
2.37 $\tau = (m/r)\ln((mg + r\upsilon_0)/(mg)) = 44,5$ с.
2.38 $\upsilon = (F/r)(1 - \exp(-(r/m)\Delta t) = 6,3$ м/с.
2.39 $Q_m = m(g + a)/\upsilon$=24,5 кг/с.
2.40 $R = -Q_m\upsilon = -160$ Н; $a = -Q_m\upsilon/m = -4,5$ см/с.
2.41 $\upsilon = \sqrt{4mg/(\pi\rho)}/d = 10,2$ м/с; ρ – густина повітря.
2.42 $h = (u\Delta t/2)\ln(M/(M - Q_m\Delta t)) - gt^2/2 = 65$ км.
2.43 $\upsilon = (F/Q_m)\ln(M/(M - Q_m t)) = 6,2$ м/с.
2.44 $\upsilon = \omega R^2/s = 20$ м/с.
2.45 $s = 2\omega_0 H\sqrt{2H/g}\cos\varphi/3 = 3$ см, де ω_0 – кутова швидкість добового обертання Землі.
2.46 $s = 4\omega_0\upsilon_0^3\cos\varphi/(3g^2) = 4$ м.
2.47 $F_{\text{кор}} = 2m\omega\upsilon_0\sqrt{1 + \omega^2 t^2} = 4,2$ Н.
2.48 Якщо $\omega^2 R > g$, то два положення рівноваги: $\vartheta_1 = 0$ і $\vartheta_2 = \arccos(g/\omega^2 R)$; якщо $\omega^2 R < g$, то положення рівноваги тільки $\vartheta_1 = 0$.
2.49 $T = \sqrt{km(2gl - \upsilon^2)} = 8$ Н.
2.50 $\upsilon_{\max} = g\sqrt{(1 - 2\mu)m/2k} = 0,6$ м/с.
3.1 а) $6,30$ м/с; б) $-0,57$ м/с.
3.2 $0,76$ м/с.
3.3 $u_1 = 0,385$ м/с; $u_2 = -0,615$ м/с.
3.4 $0,40$ м/с.
3.5 114 м/с.
3.6 $u_2 = 250$ м/с, $\varphi_2 = -36,6^\circ$.
3.7 а) $1,50$ м; б) $0,50$ м; в) $1,50$ м, 0 м.
3.8 $l = mL/(M + m)$.
3.9 $0,33$ м.
3.10 $A = m(g + 2h/t^2)h = 4,72$ кДж.
3.11 $1,35$ кДж.
3.12 336 Дж.

3.13 $T = m(v_0^2 + g^2t^2)/2 = 663$ Дж.
3.14 $5,0$ Дж, $15,0$ Дж.
3.15 $3,50$ Дж.
3.16 $N = \pi\rho d^2v^3/4 = 1,26$ кВт.
3.17 $N = \sqrt{m^3g^3/(\pi\rho)}/d$; а) 139 кВт; б) 313 кВт.
3.18 320 мВт; 56, 0 Вт.
3.19 390 Дж.
3.20 $l = m_1^2v_1^2/(2\mu g m_2^2) = 6,37$ м.
3.21 $h = m^2v^2/(2gM) = 7,34$ см.
3.22 $h = l(1-\cos\alpha)m_1/(m_1+m_2) = 16,0$ см.
3.23 $\Delta U = m_1m_2(v_1-v_2)^2/(2(m_1+m_2))$; а) $9,6$ Дж; б) $86,4$ Дж.
3.24 $u = m_1v_1/(m_1+m_2)$; $\mathrm{w} = m_2/(m_1+m_2)$; а) $u = 1,00$ м/с; $\mathrm{w} = 0,80$; б) $u = 4,00$ м/с; $\mathrm{w} = 0,20$.
3.25 а) $p_1' = (m_1-m_2)p_1/(m_1+m_2) = -6,00$ кг·м/с; $p_2' = 2m_2p_1/(m_1 + m_2) = 16,0$ кг·м/с; б) $\Delta p_1 = -p_2' = -16$ кг·м/с; в) $T_1' = p_1^2(m_1 - m_2)/(2m_1(m_1+m_2)) = 9,0$ Дж, $T_2' = 2m_2p_1^2/(m_1+m_2)^2 = 16,0$ Дж; г) $|\Delta T_1| = T_2' = 16,0$ Дж; д) $\mathrm{w} = |\Delta T_1|/T_1 = 4m_1m_2/(m_1+m_2)^2 = 0,64$.
3.26 $\eta = m_2/(m_1+m_2) = 0,952$.
3.27 $-6,0$ м/с; $4,0$ м/с.
3.28 $M = m(1+\sqrt{1-\mathrm{w}})^2/\mathrm{w} = 16,2$ кг.
3.29 а) $u_1 = v_1\cos\alpha = 1,73$ м/с; $u_2 = v_1\sin\alpha = 1$ м/с; б) $\beta = \pi/2 - \alpha = 60°$.
3.30 $4,17$ м/с.
3.31 $\vec{\mathbf{M}} = -10\vec{\mathbf{e}}_x + 11\vec{\mathbf{e}}_y + 2\vec{\mathbf{e}}_z$; M =15,0 Н·м; $M_z = 2,0$ Н·м.
3.32 $L = mv_0^3\sin^2\alpha\cos\alpha/(2g) = 14,0$ кг·м^2/с.
3.33 $L = mgv_0\cos\alpha\cdot t^2/2$.
3.34 $v = 0,33$ м/с; $\omega = 0,3$ рад/с.
4.1 а) $ml^2/3$; б) $ml^2/12$.
4.2 $\mathrm{I}_z = m(a^2+b^2)/12$.
4.3 $\mathrm{I}_z = 2mR^2/3$.
4.4 $\mathrm{I} = mR^2/2$= 2,00·10^{-3} кг·м^2.
4.5 $\mathrm{I} = mR^2/2 - md^2(d^2+8l^2)/(32R^2) = 4,19\cdot10^{-2}$ кг·м^2.
4.6 $\mathrm{I}_z = 2mR^2/5$.
4.7 $\mathrm{I} = 7mR^2/5 = 0,07$ кг·м^2.
4.8 6,0·10^{-2} кг·м^2.
4.9 $\mathrm{I} = (m_1/3+m_2)l_1^2 = 1,12\cdot10^{-1}$ кг·м^2.
4.10 а) $\mathrm{I} = 5ma^2/12 = 5,00\cdot10^{-5}$ кг·м^2; б) $\mathrm{I} = ma^2/6 = 2,00\cdot10^{-5}$ кг·м^2.
4.11 $\mathrm{I} = mR^2(g-a)/a = 4,40\cdot10^{-2}$ кг·м^2.
4.12 71 рад/с^2, 113 рад/с.
4.13 $\mu = \pi mRn/(Ft) = 3,10\cdot10^{-1}$.

4.14 а) $\varepsilon = 3g/(2l) = 14,7$ рад/с^2, $a_\tau = g = 9,80$ м/с^2; б) $\varepsilon = 3g\sin\alpha/(2l) = 12,7$ рад/с^2, $a_\tau = g\sin\alpha = 8,49$ м/с^2; в) $\varepsilon = 12g\sin\alpha/(7l) = 14,6$ рад/с^2, $a_\tau = 6g\sin\alpha/7 = 7,27$ м/с^2.
4.15 а) 65,3 рад/с^2, 9,80 м/с^2; б) 32,7 рад/с^2, 4,90 м/с^2; в) 59,9 рад/с^2, 7,99 м/с^2.
4.16 $M = 4mR^2(B + 3Ct)/5$; 0,64 Н·м.
4.17 $a = (m_2 - m_1)g/(m_1 + m_2 + m/2) = 1,80$ м/с^2; $\varepsilon = a/R = 18,0$ рад/с^2.
4.18 В 1,13 разу.
4.19 $\varepsilon = 0,26$ рад/с^2; $a = 2,2$ м/с^2.
4.20 $\upsilon = (2R/r)\sqrt{hmg/(m_1 + 2m)} = 21$ м/с.
4.21 $s = m_2 g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t^2/(2m_2 + m_1) = 2,60$ м.
4.22 $a_1 = 2R_1(m_1R_1 - m_2R_2)g/((M + 2m_1)R_1^2 + 2m_2R_2^2) = 1,51$ м/с^2; $a_2 = 0,75$ м/с^2; $T_1 = 16,6$ Н; $T_2 = 31,7$ Н.
4.23 $s = 3\upsilon_0^2/(4g\sin\alpha) = 7,5$ м.
4.24 $\upsilon = 5gt\sin\alpha/7 = 5,2$ м/с.
4.25 $N = mR^2\omega^2/(4t) = 4,0$ кВт.
4.26 $T = 3m\upsilon^2/4 = 6$ Дж.
4.27 $\omega = 2m\sqrt{2gh}/(R(m_1 + 2m_2)) = 0,13$ рад/с.
4.28 $Q = 2(\pi nR)^2 m_1m_2/(m_1 + m_2) = 16$ Дж.
4.29 $n_2 = (\mathrm{I} + mR^2)n_1/\mathrm{I} = 10$ об/хв.
4.30 $n_2 = (\mathrm{I} + 2ml_1^2)n_1/(\mathrm{I} + 2ml_2^2) = 2,6$ об/хв, $A = 4\pi^2 n_1^2(\mathrm{I} + 2ml_1^2)m(l_1^2 - l_2^2)/(\mathrm{I} + 2ml_2^2) = 227$ Дж.
4.31 $\varphi = 4\pi m_2/(m_1 + 2m_2) = 2\pi/3$.
4.32 $M = m(\sqrt{3\upsilon^2/(gl(1 - \cos\alpha))} - 1) = 1,97$ кг.
4.33 $\upsilon = \sqrt{gl/6}(1 + 3M/(4m))\sin\alpha/2 = 269$ м/с.
4.34 а) 4,55 рад/с, 0,909 м/с; б) 2,27 рад/с, 0,454 м/с; в) 3,03 рад/с, 0,303 м/с; г) 1,52 рад/с, 0,202 м/с.
4.35 $s = 1,4h/\sin^3\alpha = 1,4$ м.
4.36 $N = 3Fl/(4\pi Mg\mu R)$.
4.37 $\omega = (\rho_1\omega_1 + \rho_2\omega_2)/(\rho_1 + \rho_2) = 8,8$ рад/с.
4.38 49 Н, 98 Н.
4.39 $F = 2mg\cos\alpha/2 = 85$ Н.
4.40 $m_1 = (m_2(\cos\alpha_2 - \mu\sin\alpha_2) + \mu m)/(\cos\alpha_1 + \mu\sin\alpha_1) = 7,6$ кг.
4.41 21 Н.
4.42 $h = 2R/\mathrm{tg}\alpha = 0,30$ м.
4.43 $F_\mathrm{A} = 3,7$ кН, $F_\mathrm{B} = 2,2$ кН.
4.44 а) $F = F_T\mathrm{tg}\alpha = 11$ Н; б) $\mu = 1,0$.
4.45 $\mathrm{tg}\varphi = 2\mu$, $\varphi = 31^\circ$.
4.46 $1,5 \cdot 10^3$ кг.

4.47 $F = mg\sqrt{h(2R-h)}/(R-h)$.
4.48 Вправо, на місці, вліво.
4.49 $x_0 = 0,12$ м; $y_0 = 0,058$ м.
4.50 Центр мас зміщений на 0,01 м від центра диска.
4.51 $\operatorname{tg}\beta = a^3m^2g\sin\alpha/(\mathrm{I}_{||}^2\omega^2)$.
4.52 $F_{\text{тиск}} = P + \mathrm{I}_{||}\Omega^2/r = P + m\Omega^2 r/2$.
4.53 $T = 3\pi\omega r\ \operatorname{tg}\alpha/g$, $R = 3\omega^2r^2\operatorname{tg}\alpha/(2g)$.
5.1 $x = (\rho-\rho_1)h/(\rho_2-\rho)$.
5.2 $11,6$ Н.
5.3 $0,750$ г/см^3.
5.4 $m > (\rho(H-h)\pi r^3 - M(R-2r))/(2(R-r))$.
5.5 $0,450$ м/с.
5.6 $5,00$ м/с.
5.7 $S_2 = lS_1\sqrt{\rho S_1/(2F)}/t = 0,41$ мм^2.
5.8 $R_2 = R_1\sqrt{2h_0/g}/t$.
5.9 $t = S(H-h)/(\sigma\sqrt{2gh})$.
5.10 $t = 16\pi R^2\sqrt{R/g}/(15\sigma)$.
5.11 50,0 см^2.
5.12 $Q_{\mathrm{V}} = S_1 v_1 = S_1S_2\sqrt{2g\Delta h/(S_1^2-S_2^2)} = 1,88$ л/с.
5.13 100 м/с; $5,00$ МПа.
5.14 60 кДж.
5.15 1 мм.
5.16 $F_{\text{тр}}/mg = 3$.
5.17 $v = 4,0$ м/с.
5.18 $\Delta t = 4,0$ хв.
5.19 $v_{\max} = 0,15$ м/с.
5.20 $Q_{m,\max} = \pi\eta Re_{\text{кр}}d/4 = 54,2$ г/с.
5.21 $r = \sqrt[4]{8l\eta V/(\pi\rho ght)} = 1,4$ см.
5.22 $r = \sqrt[3]{9\eta^2 Re_{\text{кр}}/(4g\rho_{\text{гл}}(\rho_{\text{ст}}-\rho_{\text{ст}}))} = 1,4$ мм.
5.23 $P = \pi\eta\omega^2R^4/h = 9$ Вт.
5.24 $v_2 = v_1r_1\rho_1\eta_2/(r_2\rho_2\eta_1) = 5,00$ мкм/с.
6.2 $v = c\sqrt{1-l_1^2/l_2^2} = 232$ Мм/с.
6.3 $\alpha' = \operatorname{arctg}\left(\sin\sqrt{1-(v/c)^2}/(\cos\alpha - v/u)\right) = 86°$.
6.4 $\varphi = \operatorname{arctg}(1-v^2/c^2)^{-1/2} \approx 73°$.
6.5 $\rho = \rho_0/(1-v^2/c^2)$.
6.6 $l_0 = ut_0 = 8$ м; $l = ut_0/\sqrt{1-(u/c)^2} = 57$ м.
6.7 $8,26\cdot 10^{-4}$ с.
6.8 а) $0,195c$; б) $0,974c$.

6.9 $0,27c$.
6.10 $0,99c$.
6.11 $1,15$.
6.12 $0,943c$.
6.13 $c/\sqrt{2} = 0,707c$.
6.14 $6,57 \cdot 10^3$ кг.
6.15 $m = 3GM^2/(5Rc^2) = 3,32 \cdot 10^{15}$ кг.
6.16 20,6.
6.17 260 Мм/с.
6.18 $A_\text{р} = 3,75 \cdot 10^{16}$ Дж, $A_\text{р}/A_\text{кл} = 2,98$.
6.19 а) 2,98; б)1,58.
6.22 $m_1 \approx 3,9m$, $v \approx 0,87c$.
6.23 $M_0 = \sqrt{2m_0(T + 2m_0c^2)}$, $V = c/\sqrt{1 + 2m_0c^2/T}$.
7.1 $(l - l_0)/l_0 = P/(2SE)$.
7.2 3,76·10^{-3} м; 2,00·10^3 кг.
7.3 0,5.
7.4 $T = \rho\omega^2(l^2 - x^2)/2$. Натяг максимальний в центрі і дорівнює $T_\text{max} = \rho\omega^2l^2/2$.
7.5 $\omega \le (2/(R+r))\sqrt{T/\rho} = 298$ с$^{-1}$; $\omega_\text{руйн} = (2/(R+r))\sqrt{T_\text{руйн}/\rho} = 563$ с$^{-1}$.
7.6 $p = 2T(R - r)/(R + r) = 3,64 \cdot 10^6$ Па.
7.7 1,3·10^8 Па.
7.9 $U = m^2a^2l/(6ES)$.
7.10 $5 \cdot 10^9$ Дж.
7.11 $\mathrm{W} = P^2h/(6ES)$; в 7 раз.
7.12 $h = 3\rho gl^4/(2Ea) = 59,79$ мкм.
7.13 9,37·10^3 Н·м; 163,4 Дж.
7.14 $\mathrm{W}_1/\mathrm{W}_2 = 1/16$; 2) $\mathrm{W}_1/\mathrm{W}_2 = 16$.
7.15 $A \approx (\pi^2/6)h\delta^3E/l \approx 80$ Дж.
7.16 $x = 3FR^2/(4f)$.

ДОДАТОК А
(обов'язковий)

Правила наближених розрахунків

1 Нулі, які стоять в числі зліва, значущими цифрами не вважаються. Нулі в середині або кінці числа (справа), які позначають відсутність в числі одиниць відповідних розрядів, — значущі цифри. Наприклад, в числі 0,08040 перші два нуля — незначущі, а третій і четвертий — значущі.

Нулі, поставлені в кінці цілого числа взамін невідомих цифр і які слугують лише для визначення розрядів решти цифр, значущими не являються. У подібних випадках нулі в кінці числа краще не писати і замінити їх відповідним степенем числа 10. Наприклад, якщо число 4200 отримане з абсолютною похибкою ± 100, то це число повинно бути записане у вигляді $42 \cdot 10^2$ або $4{,}2 \cdot 10^3$. Такий запис підкреслює, що в даному числі міститься тільки дві значущі цифри.

2 Якщо наближене значення величини має лишні або недостовірні цифри, то його округляють, користуючись такими правилами:

а) якщо перша цифра, яку відкидають, більша 4, то останню збережену цифру збільшують на одиницю. Наприклад, округляючи число $27,3763$ до сотих, слід записати $27,38$;

б) якщо перша цифра, яку відкидають, менша 4 або дорівнює 4, то остання збережена цифра не змінюється. Наприклад, округлюючи число 13847 до сотень, записують $138 \cdot 10^3$.

в) якщо частина числа, яку відкидають складається із однієї цифри 5, то число округляють так, щоб остання збережена цифра була парною. Наприклад, при округленні до десятих $23,65 \approx 23,6$, але $17,75 \approx 17,8$.

3 Виконуючи різні математичні дії з приближеними числами керуються такими правилами підрахунку цифр:

а) при додаванні і відніманні в результаті зберігають стільки значущих цифр, скільки їх міститься в числі з найменшою кількістю десятинних знаків;

б) при множенні і діленні в результаті зберігають стільки значущих цифр, скільки їх має наближене число з найменшою кількістю значущих цифр.

Винятки з цих правил допускаються в тих випадках, коли один із співмножників добутку починається з одиниці, а співмножник, який містить найменшу кількість значущих цифр, — з якоїсь іншої цифри. В цих випадках у результаті зберігають на одну цифру більше, ніж в числі з найменшою кількістю значущих цифр.

в) результат розрахунку значень функції x^n, $\sqrt[n]{x}$, $\ln x$ і т.д. деякого наближеного числа x повинен містити стільки значущих цифр, скільки їх міститься в числі x.

При розрахунку проміжних результатів зберігають на одну цифру більше, ніж рекомендують правила а — в (її називають запасною цифрою). В кінцевому результаті запасна цифра відкидається.

Якщо деяке наближене число містить більше десяткових знаків (при додаванні і відніманні) або більше значущих цифр (при множенні, діленні, піднесенні до степеня, добуття кореня і т.п.), ніж інші, то їх попередньо округлюють, зберігаючи тільки одну лишню цифру.

Приклад 1 Перед додаванням наближених чисел $0,374$; $13,1$ і $2,065$ перше і третє з них необхідно округлити до сотих, а в кінцевому результаті соті відкинути: $13,1 + 2,06 + 0,37 \approx 15,5$.

Приклад 2 Результат розрахунку виразу $68,04 \cdot 7,2/20,1$ повинен містити тільки дві значущих цифри (за їх кількістю в числі 7,2): $68,04 \times \times 7,2/20,1 \approx 68,0 \cdot 7,2/20,1 = 24,4 \approx 24$.

Приклад 3 Результат добутку чисел $13,27$ і $0,84$ можна записати з трьома значущими цифрами (див. виняток з правила б): $13,27 \cdot 0,84 \approx \approx 13,3 \cdot 0,84 \approx 11,2$ (а не 11).

Приклад 4 При піднесенні до куба наближеного числа 216 результат повинний бути записаний тільки з трьома значущими цифрами: $216^3 \approx \approx 101 \cdot 10^5$.

Основні фундаментальні фізичні сталі і довідкові дані

Таблиця А.1 — Основні фундаментальні сталі, що використовуються в механіці

Стала	Позначення	Числове значення
Прискорення вільного падіння	g	$9,81$ м/с^2
Гравітаційна стала	G	$6,67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2
Маса спокою електрона	m_e	$9,11 \cdot 10^{-31}$ кг
Маса спокою протона	m_p	$1,67 \cdot 10^{-27}$кг
Атомна одиниця маси	а.о.м.	$1,66 \cdot 10^{-27}$кг
Швидкість світла в вакуумі	c	$2,998 \cdot 10^8$ м/с

Таблиця А.2 — Густини деяких речовин ρ (кг/м^3)

Газ за нормальних умов ($T = 273,15$ К, $p_0 = 1,01 \cdot 10^5$ Па)			
Азот	$1,250$	Кисень	$1,429$
Водень	$0,089$	Метан	$0,717$
Вуглекислий газ	$1,977$	Неон	$0,900$
Гелій	$0,178$	Повітря	$1,293$
Рідина			
Бензол ($t = 20°$ C)	879	Скипидар ($t = 16°$ C)	858
Вода ($t = 4°$ C)	1000	Спирт етил. ($t = 0°$ C)	789
Вода ($t = 100°$ C)	958	Спирт метил. ($t = 0°$ C)	792
Гас ($t = 0°$ C)	800	Толуол ($t = 18°$ C)	870
Гліцерин ($t = 0°$ C)	1260	Ртуть ($t = 0°$ C)	13596
Тверде тіло при 293 К, $\times 10^3$			
Алюміній	$2,69$	Олово лите	$7,23$
Залізо, хім. чисте	$7,86$	Сталь лита	$7,9$
Латунь	$8,5$	Свинець	$11,3$
Лід ($t = 0°$ C)	$0,91$	Срібло	$10,5$
Мідь електротех.	$8,9$	Цинк	$7,0$
Нікель	$8,8$	Чавун	$7,0$

Таблиця А.3 – Основні характеристики Сонця, Землі і Місяця

Фізичний параметр	Сонце	Земля	Місяць
Маса, кг	$1,97 \cdot 10^{30}$	$5,96 \cdot 10^{24}$	$7,33 \cdot 10^{22}$
Радіус, м	$6,95 \cdot 10^{8}$	$6,37 \cdot 10^{6}$	$1,74 \cdot 10^{6}$
Середня густина, кг/м^3	1400	5518	3350
Середня відстань від Землі, км	$1,496 \cdot 10^{8}$	—	384440

Таблиця А.4 – Пружні характеристики твердих тіл

Матеріал	Модуль Юнга E, ГПа	Модуль зсуву G, ГПа	Коефіцієнт Пуассона μ	Границя міцності $T_{\max}$, МПа
Алюміній	$61-74$	$22-26$	$0,33$	$98-390$
Залізо	$200-220$	$69-83$	$0,28$	$390-590$
Сталь	$200-220$	$78-81$	$0,28$	$490-1570$
Чавун	$74-176$	49	$0,23-0,27$	$117-127$
Латунь	$78-98$	$26-36$	$0,3-0,4$	$98-490$
Мідь	$10-130$	$38-47$	$0,31-0,40$	$156-441$
Свинець	$15-17$	$5,4$	$0,44$	$1,96$
Гетинакс	$10-17$	—	—	—
Текстоліт	$1,4-2,8$	—	—	—

Таблиця А.5 – Коефіцієнти розширення твердих тіл

Лінійне розширення (К$^{-1}$)			
Алюміній	$2,4 \cdot 10^{-5}$	Мідь	$1,7 \cdot 10^{-5}$
Залізо(сталь)	$1,2 \cdot 10^{-5}$	Скло	$1,0 \cdot 10^{-5}$
Латунь	$1,9 \cdot 10^{-5}$	Цинк	$2,9 \cdot 10^{-5}$
Об'ємне розширення (К$^{-1}$)			
Вода ($5-10°$C)	$5,3 \cdot 10^{-5}$	Вода ($40-60°$ C)	$45,8 \cdot 10^{-5}$
Вода ($10-20°$C)	$15,0 \cdot 10^{-5}$	Вода ($60-80°$ C)	$58,7 \cdot 10^{-5}$
Вода ($20-40°$C	$30,2 \cdot 10^{-5}$	Ртуть($18°$C)	$19,0 \cdot 10^{-5}$

Таблиця А.6 — Множники і префікси для утворення кратних і часткових одиниць

Найменування	Позначення	Множник	Найменунування	Позначення	Множник
екса	Е	10^{18}	деци	д	10^{-1}
пета	П	10^{15}	санти	с	10^{-2}
тера	Т	10^{12}	мілі	м	10^{-3}
гіга	Г	10^{9}	мікро	мк	10^{-6}
мега	М	10^{6}	нано	н	10^{-9}
кіло	к	10^{3}	піко	п	10^{-12}
гекто	г	10^{2}	фемто	ф	10^{-15}
дека	да	10^{1}	атто	а	10^{-18}

Таблиця А.7 — Латинський і грецький алфавіти

Латинський алфавіт		Грецький алфавіт	
A, a — а	N, n — ен	A, α — альфа	N, ν — ню
B, b — бе	O, o — о	B, β — бета	Ξ, ξ — ксі
C, c — це	P, p — пе	Γ, γ — гамма	O, o — омікрон
D, d — де	Q, q — ку	Δ, δ — дельта	Π, π — пі
E, e — е	R, r — ер	E, ε — епсилон	P, ρ — ро
F, f — еф	S, s — ес	Z, ζ — дзета	Σ, σ — сигма
G, g — ге	T, t — те	H, η — ета	T, τ — тау
H, h — аш	U, u — у	$\Theta, \theta, (\vartheta)$ — тета	Υ, υ — іпсилон
I, i — і	V, v — ве	I, ι — йота	Φ, φ — фі
J, j — йот	W, w — дубль-ве	K, κ — каппа	X, χ — хі
K, k — ка	X, x — ікс	Λ, λ — ламбда	Ψ, ψ — псі
L, l — ель	Y, y — ігрек	M, μ — мю	Ω, ω — омега
M, m — ем	Z, z — зет	—	—

Таблиця А.8 — Таблиця похідних

Функція	Похідна	Функція	Похідна	Функція	Похідна
x^n	nx^{n-1}	$\cos x$	$-\sin x$	$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$	$\mathrm{tg}x$	$1/\cos^2 x$	$\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
e^x	e^x	$\mathrm{ctg}x$	$-1/\sin^2 x$	$\mathrm{arctg}\, x$	$1/(1+x^2)$
a^x	$a^x \ln a$	$\sqrt{u}$	$u'/(2\sqrt{u})$	$\mathrm{arcctg}\, x$	$-1/(1+x^2)$
$\ln x$	$1/x$	$\ln u$	u'/u	$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x$
$\sin x$	$\cos x$	u/v	$(vu'-v'u)/v^2$	$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{sh}\, x$

Таблиця А.9 — Таблиця інтегралів

$\int x^n \mathrm{d}x = x^{n+1}/(n+1), \quad n \neq -1$	$\int \mathrm{d}x/\cos^2 x = \mathrm{tg}\, x$
$\int \mathrm{d}x/x = \ln x$	$\int \mathrm{d}x/\sin^2 x = -\mathrm{ctg}\, x$
$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x$	$\int \mathrm{d}x/(1+x^2) = \mathrm{arctg}\, x$
$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x$	$\int \mathrm{d}x/\sqrt{1-x^2} = \arcsin x$
$\int \mathrm{tg}\, x \mathrm{d}x = -\ln\, \cos x$	$\int \mathrm{d}x/\sqrt{x^2-1} = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$

Таблиця А.10 — Деякі сталі і наближені формули

Стале число	Наближена формула (при $\alpha \ll 1$)
$\pi = 3,1416$	$(1 \pm \alpha)^n \approx 1 \pm n\alpha$
$\pi^2 = 9,8696$	$e^\alpha \approx 1 + \alpha$
$\sqrt{\pi} = 1,7725$	$\ln(1+\alpha) \approx \alpha$
$e = 2,7183$	$\sin \alpha \approx \alpha$
$\lg e = 0,4343$	$\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$
$\ln 10 = 2,3026$	$\mathrm{tg}\, \alpha \approx \alpha$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Савельев И.В. Курс физики.–М.: Наука,1989.–Т.1.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики.– М.: Наука, 1990.–Т.1.
3. Трофимова Т.И. Курс физики. –М.: Высшая школа, 1990.
4. Дущенко В.П., Кучерук І.М. Загальна фізика: Фізичні основи механіки: Молекулярна фізика і термодинаміка –К.: Вища школа, 1993.
5. Иродов И.Е. Основные законы механики. –М.: Высшая школа, 1975.
6. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике. –М.: Мир, 1967.
7. Коган Л.М. Учись решать задачи по физике. –М.: Высшая школа, 1993.
8. Загальна фізика. Збірник задач/Під заг. ред. І.Т. Горбачука. –К.: Вища школа, 1993.
9. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. – М.: Высшая школа, 1981.
10. Савельев И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике. – М.: Наука, 1988.
11. Сборник задач по курсу общей физики/Под ред. М.С. Цедрика. – М.: Просвещение, 1989.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Вага тіла 22
Витрата рідини 77, 78
Відносне видовження 92
Гіроскоп 63
— вимушенапрецесія 65
Другий закон Ньютона 23
— в проекціях на дотичну і нормаль 25
Дугова координата 10
Енергія
— зсуву 93
— кінетична 43
— повна 88
— потенціальна 43
— пружної деформації 92
— релятивістська 88
— спокою 88
— твердого тіла 60
Закон
— Архімеда 77
— Паскаля 77
— Кеплера 55
— Гука 92
— — для стрижнів 92
— — при зсуві 93
— — при крученні 94
Закони збереження
— енергії 44
— імпульсу 40
— моменту імпульсу 50
Зіткнення
— абсолютно непружне 45
— абсолютно пружне 45
Зсув 93
Імпульс 39
— релятивістський 87
— сили 39
Коефіцієнт Пуассона 93
Кручення 94
Кут зсуву 93
Ламінарний рух рідини 79
Модуль
— зсуву 93
— Юнга 92
Момент
— імпульсу 49
— сили 49
— інерції 56
Напруження 92
Натяг 92
Основне рівняння динаміки обертального руху 58
Переміщення 7
Перетворення Лоренца 86
Перша космічна швидкість 44
Постулати Ейнштейна 86
Потужність 42
Прискорення 8
— кутове 14
— нормальне 11
— повне 10
— тангенціальне 10

Радіус-вектор 7
Радіус кривизни 11
Рівняння Бернулі 77
— Мещерського 27
— нерозривності 77
Робота 41
— гравітаційної сили 41
— пружної сили 41
— сили тяжіння 42
Сила
— відцентрова 29
— внутрішня 43
— в’язкого тертя 79
— гіроскопічна 43
— гравітаційна 22
— дисипативна 43
— зовнішня 43
— інерції 29
— Коріоліса 29
— не потенціальна 43
— опору 23
— потенціальна 43
— пружна 22
— реактивна 27
— Стокса 80
— тертя ковзання 22
— — кочення 23
— тяжіння 22
Теорема Штейнера 57
Тиск 92
— динамічний 78
— повний 78
— статичний 78
Траєкторія 7
Умова рівноваги 63
Центр
— інерції (мас) 40
— тяжіння 40
Число Рейнольдса 80
Швидкість
— кутова 14
— миттєва 7
— середня 7
— середня шляхова 8
Шлях 7