

Из приведенных результатов следует, что вблизи нижней грани клина, на которой поддерживается постоянная температура, изотермы параллельны грани и наибольший градиент температуры наблюдается в направлении от источника по нормали к этой грани. Тепловой поток в направлении термоизолированной верхней грани клина отсутствует, что соответствует нормальному направлению линий уровня по отношению к этой грани. В среде с большим коэффициентом теплопроводности условия для передачи тепла лучше и на рисунках в такой среде наблюдаются меньшие градиенты температуры, чем в среде с меньшим коэффициентом теплопроводности (этим объясняется и преломление линий уровня на границе раздела двух сред). На рисунках 3 и 4 также хорошо просматриваются особенности в тепловом потоке при растворах клина, больших чем $\frac{\pi}{2}$.

Результаты могут иметь применение в практике проектирования композитных конструкций.

SUMMARY

This article describes one method of building of Green function of mixed boundary problem for piece-homogeneous sector area. The Green function was used to the problem of stationary heat conductivity.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аналитические, численные и аналоговые методы в задачах теплопроводности. - К.: Наукова думка, 1977.
2. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. - М.: Наука, 1974.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1972.

Поступила в редколлегию 16 октября 1998 г.

УДК 517.2

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ СОСТАВНОГО КЛИНА

Л.А.Фильштинский, проф.; А.Б.Голубовская, студ.

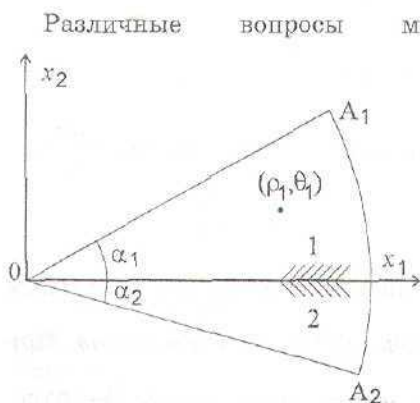


Рисунок 1

Различные вопросы механики композитных материалов, теплопроводности, электростатики, магнитостатики, математической биологии приводят к граничным задачам эллиптического типа для кусочно-однородных сред. В тех случаях, когда граница области имеет изломы (угловые точки), для корректного определения физических полей необходимо иметь информацию об особенностях полей в угловой точке. В данной статье рассматривается модельная задача теории потенциала для составного

клина. Строится функция Грина, соответствующая ситуации, когда в одной из фаз действует сосредоточенный источник.

Рассмотрим отнесенный к полярной системе координат ρ, θ кусочно-однородный клин (рис.1), составленный из двух разнородных клиновидных областей $B_1(0 \leq \theta \leq \alpha_1, 0 \leq \rho < \infty)$ и $B_2(-\alpha_2 \leq \theta < 0, 0 \leq \rho < \infty)$. Будем считать, что вдоль границы раздела имеют место условия идеального сопряжения материалов составляющих клиньев, а в точке (ρ_1, θ_1) действует сосредоточенный источник.

Полная система уравнений поставленной задачи имеет вид: дифференциальные уравнения:

$$\begin{cases} \nabla^2 U^{(1)} = \frac{P}{C^{(1)}} \delta(\rho - \rho_1) \delta(\theta - \theta_1) \frac{1}{\rho_1}; \\ \nabla^2 U^{(2)} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

условия сопряжения на линии $x_2 = 0$:

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= U^{(2)}, & C^{(1)} \partial_2 U^{(1)} &= C^{(2)} \partial_2 U^{(2)}, \\ \partial_j &= \frac{\partial}{\partial x_j}; \end{aligned} \quad (2)$$

краевые условия на гранях OA_1, OA_2 :

$$U^{(1)}|_{\theta=\alpha_1} = 0, \quad U^{(2)}|_{\theta=-\alpha_2} = 0. \quad (3)$$

Для решения задачи (1)–(3) целесообразно использовать интегральное преобразование Меллина [1]:

$$F(s, \theta) = \int_0^\infty \rho^{s-1} U(\rho, \theta) d\rho. \quad (4)$$

В плоскости изображения исходная задача преобразуется к виду: дифференциальные уравнения:

$$\begin{cases} s^2 F^{(1)}(s, \theta) + \frac{d^2 F^{(1)}(s, \theta)}{d\theta^2} = \frac{P}{C^{(1)}} \delta(\theta - \theta_1) \rho_1^s; \\ s^2 F^{(2)}(s, \theta) + \frac{d^2 F^{(2)}(s, \theta)}{d\theta^2} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

условия сопряжения на линии $x_2 = 0$:

$$F^{(1)}(s, \theta)|_{\theta=0} = F^{(2)}(s, \theta)|_{\theta=0}, \quad (6)$$

$$\frac{d}{d\theta} F^{(1)}(s, \theta)|_{\theta=0} = \lambda \frac{d}{d\theta} F^{(2)}(s, \theta)|_{\theta=0}, \quad \lambda = \frac{C^{(2)}}{C^{(1)}} \geq 0; \quad (7)$$

граничные условия:

$$F^{(1)}(s, \theta)|_{\theta=\alpha_1} = 0, \quad F^{(2)}(s, \theta)|_{\theta=-\alpha_2} = 0. \quad (8)$$

Решение уравнений (5)–(8) представим в форме:

$$F^{(1)}(s, \theta) = -\frac{P \cdot \rho_1^s}{sC^{(1)}} \cdot \frac{\sin s(\alpha_1 - \theta) \cdot \sin s\alpha_2 \cdot \sin s(\alpha_1 - \theta_1)}{\sin(s\alpha_1) \cdot \Delta}$$

$$-\frac{P \cdot \rho_1^s}{sC^{(1)}} \cdot \begin{cases} \frac{\sin(s\theta)}{\sin(s\alpha_1)} \sin s(\alpha_1 - \theta_1), \text{ при } 0 \leq \theta < \theta_1 \\ \frac{\sin(s\theta_1)}{\sin(s\alpha_1)} \sin s(\alpha_1 - \theta), \text{ при } \theta_1 < \theta \leq \alpha_1 \end{cases}, \quad (9)$$

$$F^{(2)}(s, \theta) = -\frac{P \cdot \rho_1^s \cdot \sin(s(\alpha_1 - \theta_1)) \cdot \sin(s(\alpha_2 + \theta))}{sC^{(1)} \cdot \Delta},$$

$$\Delta = \sin(s\alpha_1) \cdot 2(1 + \lambda) \cdot (\cos^2(s\alpha_1) - \mu),$$

$$\mu = \frac{\lambda}{2(1 + \lambda)}. \quad (10)$$

Рассмотрим вначале простейший случай, когда $\alpha_1 = \alpha_2$. Применяя стандартную процедуру обращения преобразования Меллина (4), находим:

$$U^{(r)}(\rho, \theta) = B_r \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k}{k} \{ \lambda_{kr0} \cdot \cos(s_k(\theta + \theta_1)) + \right. \\ \left. + \lambda_{kr1} \cdot \cos(s_k(\theta - \theta_1)) \} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{\sigma_k} J, \quad (r=1,2) \right] \quad (11)$$

$$s_k = \frac{\pi k}{2\alpha_1},$$

$$B_r = \frac{P}{2^{2-r} \pi C^{(1)} (1 + \lambda)},$$

$$\lambda_{kr0} = [1 + \lambda + (-1)^{k+1}(1 - \lambda)]^{2-r}, \quad (12)$$

$$\lambda_{kr1} = (1 - \lambda)(2 - r) + (-1)^{k+1}(1 + \lambda)^{2-r},$$

$$\sigma_k = s_k \cdot \text{sign}(\rho_1 - \rho).$$

Выражения (11) неудобны для анализа, так как фигурирующие в них ряды плохо сходятся в точке (ρ_1, θ_1) . Суммируя эти ряды, получаем окончательно:

$$U^{(r)}(z) = \text{Re } f^{(r)}(z), \quad (r=1,2),$$

$$f^{(r)}(z) = B_r \left[(1 + \lambda)^{2-r} \ln \frac{1 - \sqrt{u}}{1 + \sqrt{v}} + (2 - r)(1 - \lambda) \cdot \ln \frac{1 - \sqrt{v}}{1 + \sqrt{u}} \right], \quad (13)$$

$$u = \left(\frac{z}{z_1} \right)^{\frac{\pi}{\alpha_1}}, \quad v = \left(\frac{z}{z_1} \right)^{\frac{\pi}{\alpha_1}}.$$

Формулы (13) определяют функцию Грина задачи Дирихле для составного клина.

Введем поток гармонического поля q следующим образом:

$$q = q_1 - iq_2$$

$$q_1 = -C \cdot \partial_1 U \quad q_2 = -C \cdot \partial_2 U, \quad (14)$$

где $C > 0$ – некоторая константа.

Учитывая соотношения (13), получаем, согласно определению (14):

$$q^{(r)} = \frac{P\lambda^{r-1}}{2^{3-r}(1+\lambda)\alpha_2} \left[(1+\lambda)^{2-r} \frac{\sqrt{u} + \sqrt{v}}{(1-\sqrt{u})(1+\sqrt{v})} + (2-r)(1-\lambda) \cdot \frac{\sqrt{u} + \sqrt{v}}{(1-\sqrt{v})(1+\sqrt{u})} \right]. \quad (15)$$

Здесь $q^{(r)}$ – поток поля, соответствующий области B_r ($r = 1, 2$).

Из формулы (15) следует, что при $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq 2\pi$ в вершине составного клина имеет место степенная особенность вида $z^{-\gamma}$ ($\gamma = 1 - \frac{\pi}{2\alpha}$) у потоков поля.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда $\alpha_1 \neq \alpha_2$, например, $\alpha_2 = 2\alpha_1$. В этом случае корни знаменателя в (9) определяются равенствами:

$$\sin(s\alpha_1) = 0, \quad \cos(s\alpha_1) = \pm\sqrt{\mu}. \quad (16)$$

Поэтому потоки поля имеют вид:

$$q^{(r)} = -\frac{P}{2(2+\lambda)\alpha_1 z} \left[\lambda \left(\frac{v}{1-v} - \frac{u}{1-u} \right) + \sum_{m=1}^2 \beta_m \cdot \left[\frac{e^{-2i\chi(m)v} \frac{\chi(m)}{\pi}}{1-v} + \frac{u \frac{\chi(m)}{\pi}}{1-u} \right] \right],$$

$$\beta_m = (-\lambda)^m \frac{e^{3i\chi(m)}}{2 \cos \chi(m)} j^{r-1}, \quad (17)$$

$$\chi(1) = \arccos \sqrt{\mu}, \quad (\chi(1) > 0), \quad \chi(1) + \chi(2) = \pi.$$

В качестве приложения полученного решения рассмотрим задачу стационарной теплопроводности для составного клина с сосредоточенным тепловым источником.

Температура в любой точке клина определяется системой соотношений:

дифференциальные уравнения:

$$\begin{cases} \nabla^2 T^{(1)} = \frac{P}{\lambda^{(1)}} \delta(\rho - \rho_1) \delta(\theta - \theta_1) \frac{1}{\rho_1}; \\ \nabla^2 T^{(2)} = 0 \end{cases} \quad (18)$$

условия сопряжения на линии $x_2 = 0$:

$$T^{(1)} = T^{(2)}, \quad \lambda^{(1)} \partial_2 T^{(1)} = \lambda^{(2)} \partial_2 T^{(2)}; \quad (19)$$

граничные условия:

$$T^{(1)}|_{\theta=\alpha_1} = 0, \quad T^{(2)}|_{\theta=-\alpha_2} = 0, \quad (20)$$

где P – мощность сосредоточенного теплового источника; $\lambda^{(r)}$ ($r = 1, 2$) – коэффициент теплопроводности r -й среды.

В силу очевидной математической аналогии между задачами (1)-(3) и (18)-(20), решение задачи теплопроводности непосредственно следует из формул (13).

Аналогичное заключение можно сделать и относительно задачи электростатики для составного клина. Здесь необходимо только положить:

$$U^{(r)} = \varphi^{(r)}, \quad C^{(r)} = \varepsilon^{(r)} \quad (r = 1, 2), \quad (21)$$

где $\varepsilon^{(r)}$ - диэлектрическая проницаемость r -й среды.

Таблица 1

λ	0	1	5	10	100	1000
$\chi(1)$	$\pi/2$	$\pi/3$	$5\pi/18$	$4\pi/15$	$\pi/4$	$\pi/4$
γ	0	0.33	0.44	0.47	0.5	0.5

По полученным соотношениям были проведены расчеты, характеризующие порядок степенной особенности $\gamma = 1 - \frac{\chi(1)}{\alpha_1}$ в вершине составного клина при $\alpha_1 = \pi/2$, $\alpha_2 = \pi$ (табл.1). Для случаев $\alpha_1 = \alpha_2 = 2\pi/3$, $\rho_1 = 0.5$, $\theta_1 = \pi/3$, $\lambda = 3$ и $\lambda = 0.01$ построены изотермические линии (рис.2 и рис.3 соответственно).

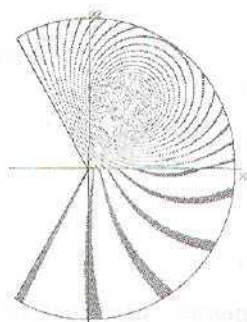


Рисунок 2

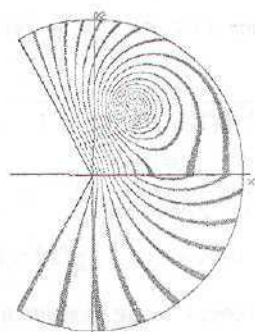


Рисунок 3

SUMMARY

Different questions mechanics of composite materials, heat conductivity, electrostatics, magnetostatics, mathematical biology result in boundary problems of elliptic type for piecewise-homogeneous mediums. When the border of area has angular points for correct determination of physical fields it is necessary to have the information about fields singularities in an angular point. It is considered a problem of the potential theory for compound wedge. Green's function is built for situation when the concentrated source works in one of phases.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арсенин В.Я., Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции. - М.: Наука, 1966.

Поступила в редколлегию 16 декабря 1998 г.

УДК 537.624

ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД ПАРАМАГНЕТИК-ФЕРРОМАГНЕТИК В СИСТЕМЕ ОДНОДОМЕННЫХ ФЕРРОМАГНИТНЫХ ЧАСТИЦ

С.И.Денисов, проф.; В.Ф.Нефедченко, асп.

Хорошо известно [1], что причиной появления дальнего магнитного порядка в большинстве известных в настоящее время магнетиков