УДК 681.51:519.2

СТАТИСТИКА ФУНКЦИОНАЛОВ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА РЕШЕНИЯХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю. П. Вирченко, *д-р физ-мат. наук, профессор;*
А. С. Мазманишвили*, *д-р физ-мат. наук, профессор,*
Институт монокристаллов НАНУ, г. Харьков;
**Сумский государственный университет, г. Сумы*

Рассмотрен многокомпонентный гауссовский случайный процесс, определенный решением линейного стохастического дифференциального уравнения. Предложен метод усреднения функционалов интегрального типа по вероятностной мере рассматриваемого процесса. Метод продемонстрирован на примерах простейших процессов, определяемых стохастическими дифференциальными уравнениями, процесса Орнштейна-Уленбека и осцилляторного процесса.

Ключевые слова: *статистика функционалов, многокомпонентный гауссовский случайный процесс, линейное стохастическое дифференциальное уравнение, метод усреднения, процесс Орнштейна-Уленбека, осцилляторный процесс.*

Розглянуто багатокомпонентний гауссівський випадковий процес, що визначений розв'язком лінійного стохастичного диференціального рівняння. Запропоновано метод усереднення функціоналів інтегрального типу за імовірнісною мірою процесу, що розглядається. Метод продемонстровано на прикладах, які отримано для простіших процесів, які визначають за стохастичними диференціальними рівняннями, процесом Орнштейна-Уленбека та осциляторним процесом.

Ключові слова: *статистика функціоналів, багатокомпонентний гауссівський випадковий процес, лінійне стохастичне диференціальне рівняння, метод усереднення, процес Орнштейна-Уленбека, осциляторний процес.*

ВВЕДЕНИЕ

Случайные процессы, моделирующие эволюцию стохастических систем, появляющихся в задачах автоматики, информатики, физики, как правило, естественным образом описываются с помощью стохастических дифференциальных уравнений. При этом многие характеристики систем такого рода определяются для каждой конкретной случайной реализации её эволюции всей траекторией в целом, а не конечным набором точек. В этой ситуации вычисление средних значений таких характеристик, а также функций их распределения представляет собой непростую задачу функционального интегрирования по вероятностной мере, определяющей случайный процесс. Это положение сохраняется, даже если процесс является марковским или еще проще – процессом диффузионного типа.

Решение большого количества задач теории управления связано с оцениванием риска. Эта величина определяется поведением законов распределения на периферийных участках значений и для оценивания степени возможного риска оказывается недостаточными сведения о статистических моментах случайных величин, а требуется информация об их законах распределения в целом.

В качестве типичного примера можно привести следующий. Пусть $V(x)$ – скалярная функция, $x \in R^d$. Требуется найти плотность распределения функционала от траекторий случайного процесса $\int_0^\infty d\tau \quad V(x(\tau))$, где траектории расположены в R^d. Или, в эквивалентной постановке, необходимо вычислить характеристическую функцию $\left\langle \exp\{i\lambda\int_0^\infty d\tau \quad V(x(\tau))\}\right\rangle$ (скобки $<\ldots>$ обозначают здесь и ниже усреднение по мере рассматриваемого процесса). Возникающий в этой задаче функциональный интеграл явно вычислить затруднительно даже в том относительно простом случае, когда рассматриваемый случайный процесс – гауссовский, а $V(x)$ является квадратичной формой, хотя структура результата интегрирования заведомо известна. Результат просто выражается через детерминант бесконечномерного оператора, связанного с квадратичной формой в показателе экспоненты. Основная трудность, таким образом, заключается в вычислении этого детерминанта.

Задачи указанного типа рассматривались ранее в различных работах как теоретико-вероятностного, так и прикладного характера. Из обширного перечня упомянем только исторически первую, насколько нам известно, работу в этом направлении, а именно монографию М. Каца «Вероятность и смежные вопросы в физике» [1], в которой четко сформулирована изложенная выше задача, а её решение сведено к анализу дифференциального параболического уравнения со специальными начальными условиями.

В настоящей работе мы предлагаем решение этих задач для ситуации, когда случайный процесс определяется решением линейного стохастического уравнения. В частности, если $V(x)$ – квадратичная форма, то решение поставленной задачи удаётся довести до конца и выразить результат в терминах некоторой *конечномерной* матрицы (её размерность совпадает с размерностью пространства значений реализаций процесса), которая является решением матричного алгебраического уравнения. Методы решения последнего достаточно хорошо разработаны [2]. Наконец, в случаях стохастического уравнения Ланжевена ($d=1$, процесс Орнштейна-Уленбека) и броуновского осциллятора ($d=2$, осцилляторный процесс) с помощью предложенного метода нами получен результат в конкретном виде.

СТАТИСТИКА ФУНКЦИОНАЛОВ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА РЕШЕНИЯХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим следующую классическую задачу [1]. Пусть $\{x_\alpha(t)\}$ – векторный случайный процесс $\left(x(t): R^d\right)$, являющийся решением векторного стохастического дифференциального уравнения

$$\dot{x}_\alpha = A_\alpha(x) + \varphi_\alpha(t), \tag{1}$$

где $A_\alpha(x): R^d \to R^d$ – векторное поле и $\varphi_\alpha(t)$ – d-мерный "белый шум" (см. Приложение 1), т. е. гауссовский марковский случайный процесс с матрицей корреляции $\sigma_{\alpha\beta}$:

$$\left\langle \varphi_\alpha(t)\varphi_\beta(t')\right\rangle = \sigma_{\alpha\beta}\delta(t-t'), \qquad \alpha,\beta = 1,\ldots,d. \tag{2}$$

Переходная функция $p(x,x';t)$ процесса $x_\alpha(t)$

$$p(x,x';t) = \left\langle \delta(x - x(t,x')) \right\rangle \tag{3}$$

удовлетворяет параболическому дифференциальному уравнению Колмогорова (см. Приложение 2)

$$\dot{p} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(A_\alpha) + \frac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} p \tag{4}$$

с начальным условием $p(x,x';0) = \delta(x - x')$ (здесь и ниже дифференцирование по времени t обозначено точкой). Пусть далее задана скалярная функция $V(x): R^d \to R^d$. Требуется определить плотность распределения вероятностей значения функционала $\int_0^t d\tau \quad V(x(\tau))$, или, что эквивалентно, найти характеристическую функцию $\left\langle \exp\left\{ i\lambda \int_0^t d\tau \quad V(x(\tau)) \right\} \right\rangle$. Покажем, как свести решение сформулированной задачи к нахождению решения некоторого вспомогательного параболического уравнения. Введем функцию $u(t) = u' + \int\limits_0^t d\tau \quad V(x(\tau)) \quad \dot{u} = V(x)$, и рассмотрим $(d+1)$-мерный векторный случайный процесс $\{x_\alpha(t), \alpha = 1,\ldots,d; u(t)\}$, являющийся решением векторного стохастического дифференциального уравнения

$$\dot{x}_\alpha = A_\alpha + \varphi_\alpha(t),$$

$$\dot{u} = V(x).$$

Это уравнение можно рассматривать как частный случай уравнения (1). Матричные элементы матрицы корреляции при этом будут совпадать с $\sigma_{\alpha\beta}$ при $\alpha,\beta = 1,\ldots,d$ либо обращаться в нуль, если хотя бы один из индексов α, β равен $d+1$. На основании этого замечания можно утверждать, что процесс $\{x_\alpha(t); u(t)\}$ диффузионный [4]. Составим согласно общей схеме (Приложение 2) для переходной функции $P'(x,u;x',u' \mid t)$ этого процесса уравнение А. Н. Колмогорова

$$\dot{P}' = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(A_\alpha P') - V(x)\frac{\partial P'}{\partial u} + \frac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} P'. \tag{5}$$

Найдя его решение с начальным условием $P'(x,u;x',u' \mid 0) = \delta(x - x')\delta(u - u')$, а затем, положив $u' = 0$ и проинтегрировав по всем $x \in R^d$, получим искомую функцию распределения вероятностей значений функционала $u = \int_0^t d\tau V(x(\tau))$ при условии, что $x(0) = x'$. В приложениях, однако, часто необходимо знать не условную функцию распределения величины u, а безусловную, т. е. полученный результат нужно дополнительно усреднить с некоторой плотностью распределения вероятностей координат x'_α. При этом естественная постановка задачи такова. Считается, что «белый» шум $\varphi_\alpha(t)$ воздействует на систему уже достаточно долго до того момента $t=0$, когда начинают наблюдать величину u, т. е. статистическая система, описываемая уравнением (1), находится в равновесном состоянии при $t=0$ (при условии, что такое равновесное состояние существует). Поэтому функция распределения $p_\infty(x')$ координат x'_α определяется по правилу

$$p_\infty(x') = \lim_{t'\to-\infty} p(x,x';t-t') \,. \tag{6}$$

Таким образом, для функции распределения $P(u)$ величины u получаем следующую формулу:

$$\int\limits_{R^d} p'(x,u;x',u' \mid t)_{u'=0}\, p_\infty(x') dx dx' = P(u) \,. \tag{7}$$

Так как в дальнейшем нам будет удобно вычислять не функцию распределения, а производящую (характеристическую) функцию

$$Q(s,t) = \int\limits_0^\infty du \quad e^{-su} P(u) = \left\langle \exp\left\{ -s\int\limits_0^t d\tau \quad V(x(\tau)) \right\} \right\rangle ,$$

приведем в заключение также формулу для $Q(s,t)$:

$$Q(s,t) = \int\limits_{R^d} dx' dx p_\infty(x') q(s;x,x';t) \,, \tag{8}$$

где

$$q(s;t) = \int\limits_0^\infty du \quad e^{-su} p'(x,u;x',0 \mid t) \,.$$

Функция $q(s;t)$ согласно (5) удовлетворяет уравнению (ср. с [1], глава IV)

$$\dot q = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(A_\alpha q) + \frac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} q - sV(x)q \tag{9}$$

с начальным условием $q(s;x,x';0) = \delta(x-x')$.

ЛИНЕЙНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

В этом разделе получим общее решение задачи, сформулированной выше, для случая, в котором векторное поле $A(x)$ сводится к линейному преобразованию Ax (здесь A – $(d\times d)$-матрица), а $V(x)$ представляет собой квадратичную форму с симметричной $(d\times d)$-матрицей B, $V(x) = (x, Bx)$. Согласно результату, полученному в разделе 1, необходимо найти функцию $q(s;x,x';0)$. На основании (9), эта функция удовлетворяет следующему уравнению:

$$\dot q = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(A_{\alpha\beta} x_\beta q) + \frac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} q - s(x,Bx)q \,. \tag{10}$$

Решение уравнения (10) ищем в виде

$$q = g\exp\left\{at - \frac{1}{2}(x, Cx)\right\}, \tag{11}$$

где $a = \mathrm{const}$; C – симметричная $(d \times d)$-матрица, не зависящая от t. Постоянную a и матрицу C выберем таким образом, чтобы уравнение для функции g не содержало членов, пропорциональных g. На основании этого условия подстановкой (11) в (10) получаем, что функция g должна удовлетворять уравнению

$$\dot{g} = \frac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}g + (Dx)_\beta \frac{\partial g}{\partial x_\beta} \tag{12}$$

и начальному условию

$$g(s; x, x'; 0) = \delta(x - x')\exp\left(\frac{1}{2}(x, Cx)\right), \tag{13}$$

где матрица D определяется так: $D = -(A + \sigma C)$. При этом постоянная a находится по формуле

$$a = -\mathrm{Sp}(A + \frac{1}{2}\sigma C), \tag{14}$$

а матрица C является одним из решений алгебраического уравнения

$$C\sigma C + (AC + CA^+) - 2sB = 0, \tag{15}$$

где A^+ – матрица, транспонированная по отношению к матрице A.

Для решения уравнения (12) сделаем замену переменных $x_\alpha = [\exp(-tD)y]_\alpha$ и определим $h(s, y; t) \equiv g(s; x, x'; t)$. Тогда подстановкой в (12) находим уравнение для $h(s, y; t)$:

$$\dot{h} = \frac{1}{2}E_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}h,$$

где матрица $E(t)$ определяется выражением $E(t) = \exp(tD)\sigma\exp(tD^+)$.

Решение последнего уравнения для h с начальным условием

$$h(s, y; 0) \equiv g(s; x, x'; 0)_{x=y} = \delta(y - x')\exp\left(\frac{1}{2}(y, Cy)\right)$$

находится известным стандартным способом с помощью Фурье-преобразования по переменным y_α:

$$h(s, y; t) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int dk \quad f(k)\exp\left\{-i(y, k) - \frac{1}{2}\int_0^t d\tau (k, E(\tau)k)\right\}. \tag{16}$$

Функция $f(k)$ определяется сравнением этого выражения для $h(s, y; t)$ с начальным условием

$$(2\pi)^{-d}\int dk \quad f(k)\exp[-i(y, k)] = \delta(y - x')\exp\left[\frac{1}{2}(y, Cy)\right].$$

Отсюда получаем, что $f(k) = \exp\left\{i(k,x') + \frac{1}{2}(x',Cx')\right\}$.

Подставляя это выражение в (16) и выполняя элементарное интегрирование, находим

$$h(s,y;t) = \left[(2\pi)^d \det F_t\right]^{-1} \exp\left\{\frac{1}{2}(x',Cx') - \frac{1}{2}\left((x'-y), F_t^{-1}(x'-y)\right)\right\}, \qquad (17)$$

где введено обозначение $F_t = \int_0^t d\tau \quad E(\tau)$.

Формулы (11), (17) и определение $h(s,y;t)$ дают нам искомое решение уравнения (10).

Для нахождения характеристической функции $Q(s,t)$ выполним сначала интегрирование по x_α в формуле (8). Так как подынтегральное выражение представляет собой гауссовскую функцию, то интегрирование выполняется элементарно. В результате получаем

$$\int_{R^d} dx \quad q(s;x,x';t) = \left[(2\pi)^d \det F_t\right]^{-1/2} \exp\left\{at + \frac{1}{2}\left(x',(C - F_t^{-1})x'\right)\right\} \times$$

$$\times \int_{R^d} dx \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x,(C + e^{tD^+}F_t^{-1}e^{tD})x\right) + \left(x, e^{tD^+}F_t^{-1}x'\right)\right\} =$$

$$= \left[\det F_t \cdot \det\left(C + e^{tD^+}F_t^{-1}e^{tD}\right)\right]^{-1/2} \exp\left\{at + \frac{1}{2}\left(x',(C - F_t^{-1} + G_t)x'\right)\right\},$$

где матрица G_t вычисляется следующим образом:

$$G_t = \left(e^{tD^+}F_t^{-1}\right)^+ \left(C + e^{tD^+}F_t^{-1}e^{tD}\right)^{-1} \left(e^{tD^+}F_t^{-1}\right) =$$
$$= \left[F_t^{-1}e^{-tD^+}\left(C + e^{tD^+}F_t^{-1}e^{tD}\right)e^{-tD^+}F_t\right]^{-1} = \left[F_t + F_t e^{tD^+}Ce^{-tD}F_t\right]^{-1}, \qquad (18)$$

здесь мы воспользовались тем обстоятельством, что $F_t^+ = F_t$, $C^+ = C$. На основании цепочки равенств

$$\det\left(C + e^{tD^+}F_t^{-1}e^{tD}\right) = \det\left(e^{tD^+}\right)\left(F_t^{-1} + e^{tD^+}Ce^{tD}\right)\det\left(e^{tD}\right) = e^{2t\mathrm{Sp}D}\det\left(F_t^{-1} + e^{-tD^+}Ce^{-tD}\right),$$

а также учитывая, что $a - \mathrm{Sp}D = 0,5\mathrm{Sp}\sigma C$, находим окончательное выражение для искомого интеграла

$$\int_{R^d} dx \quad q(s;x,x';t) = \left[\det\left(1 + F_t e^{tD^+}Ce^{tD}\right)\right]^{-1/2} \exp\left\{2t \quad \mathrm{Sp}D + \left(x',\left(C - F_t^{-1} + G_t\right)x'\right)\right\}. \qquad (19)$$

Далее для вычисления функции $Q(s,t)$ нам потребуется явное выражение для переходной функции $p(x,x';t)$ процесса $x_\alpha(t)$. Это выражение легко получить, если заметить, что уравнение для $p(x,x';t)$ следует из уравнения (10) при условии $s = 0$ (ср. (4)). Таким образом, $p(x,x';t) = q(0;x,x';t)$. Положив $s = 0$ в уравнении (15), убеждаемся, что в этом случае достаточно взять $C = 0$, и поэтому $D = -A$, $a = \mathrm{Sp}A$. Следовательно, учитывая (11) и (17), находим формулу для функции

$$p(x,x';t)=\left[(2\pi)^d \det F_{0t}\right]^{-1/2}\exp\left\{-t\mathrm{Sp}A-\frac{1}{2}\left(\left(x-e^{At}x'\right),e^{-A^+t}F_{0t}^{-1}e^{-At}\left(x-e^{At}x'\right)\right)\right\}, \quad (20)$$

где $F_{0t}=\int\limits_0^t d\tau\exp(-A\tau)\sigma\exp(-A^+\tau)$.

Потребуем теперь, чтобы матрица A была диссипативной. В противном случае система, описываемая уравнением (1), не будет устойчивой, т. е. не будет обладать состоянием равновесия и, следовательно, не существует функции распределения $p_\infty(x)$. Ввиду диссипативности матрицы A имеем $\exp(At)x'\to 0$ при $t\to\infty$ и

$$\int\limits_0^t d\tau\exp(A\tau)\sigma\exp(A^+\tau)\to\bar{\sigma}\equiv\int\limits_0^t d\tau\exp(A\tau)\sigma\exp(A^+\tau).$$

Поэтому согласно (6) и (20) получаем выражение для функции $p_\infty(x)$ в виде

$$p_\infty(x)=\left[(2\pi)^d\det\bar{\sigma}\right]^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x,\bar{\sigma}^{-1}x\right)\right\}, \quad (21)$$

так как $\exp(2t\ \ \mathrm{Sp}A)\det F_t=\det\left(e^{At}F_te^{A^+t}\right)$ и $e^{At}F_te^{A^+t}=\int_0^t d\tau\ \ e^{At}\sigma e^{A^+t}$.

Теперь мы имеем возможность вычислить согласно формуле (8) характеристическую функцию $Q(s,t)$. Пользуясь выражениями (19), (20) и тождеством $F_t^{-1}-G_t=e^{-tD^+}Ce^{-tD}\left(1+F_te^{-tD^+}Ce^{-tD}\right)^{-1}$, получаем

$$Q(s,t)=\exp\left(\frac{t}{2}\ \ \mathrm{Sp}\sigma C\right)\left[1+F_te^{-tD^+}Ce^{-tD}\right]^{-1/2}\int\limits_{R^d}dx'\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x',\left[\bar{\sigma}^{-1}-C+F_t^{-1}-G_t\right]x'\right)\right\}=$$

$$=\exp\left(\frac{t}{2}\mathrm{Sp}\sigma C\right)\left\{\det\left[(1-\bar{\sigma}C)\left(1+F_te^{-tD^+}Ce^{-tD}\right)+\bar{\sigma}e^{-tD^+}Ce^{-tD}\right]\right\}^{-1/2}. \quad (22)$$

Таким образом, решение задачи, поставленной в начале раздела, состоит в следующем: 1) по заданным матрицам A и σ вычислить $\bar{\sigma}=\int_0^\infty d\tau\exp(A\tau)\sigma\exp(A^+\tau)$; 2) при заданной матрице B найти одно из решений уравнения (15); 3) вычислить последовательно матрицы $D=-(A+\sigma C)$, $\exp(-tD)$ и $F_t=\int_0^t d\tau\exp(D\tau)\sigma\exp(D^+\tau)$; 4) вычислить функцию $Q(s,t)$ по формуле (22).

ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ. ПРОЦЕСС ОРНШТЕЙНА-УЛЕНБЕКА

Этот раздел носит методический характер. Мы покажем, как из (22) получается известная формула Лэкса [8] для характеристической функции $Q(s,t)$ в случае процесса Орнштейна-Уленбека (ОУ-процесса).

Одномерный ОУ-процесс задается уравнением

$$\dot{x}+\nu x=\varphi(t),\quad \nu>0,$$

где $\varphi(t)$ – одномерный «белый» шум,

$$\langle \varphi(t)\varphi(t')\rangle = \sigma\delta(t-t')\,. \tag{23}$$

В рассматриваемом случае все матрицы, введенные в предыдущем разделе, представляют собой числа, в частности $A \to -\nu$, а матрицу B без ограничения общности можно заменить на 1. Следовательно, $\bar{\sigma} = \sigma\int_0^\infty d\tau \exp(-2\nu\tau) = \sigma/2\nu$ и уравнение (15) имеет вид $\sigma c^2 - 2\nu c - 2s = 0$.

Одно из его решений есть

$$c = (\nu + r)/\sigma\,, \qquad r = \sqrt{\nu^2 + 2s\sigma}\,.$$

Поэтому $D = -r$ и $F_t = \sigma(1 - e^{-2rt})/2r$. Воспользовавшись формулой (22), после несложных преобразований получим

$$Q(s,t) = \left(\frac{4r\nu e^{\nu t}}{(r+\nu)^2 e^{rt} - (r-\nu)^2 e^{-rt}}\right)^{1/2},$$

что совпадает с результатом Лэкса [10].

Замечание. Точно так же несложно из формул (19) получается выражение для «условной характеристической функции» функционала $\int_0^t d\tau \quad x^2(\tau)$ от траекторий ОУ-процесса (см. [9]).

ДВУМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ. ОСЦИЛЛЯТОРНЫЙ ПРОЦЕСС. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЦЫ $\bar{\sigma}$

Рассмотрим осцилляторный процесс $x(t)$, определенный стохастическим дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = \varphi(t)\,, \tag{24}$$

где $\varphi(t)$ – одномерный «белый» шум. Введя двухкомпонентные векторы $X = (x,\ y)^{\mathrm{T}}$, $\Phi(t) = (0,\ \varphi/\omega)^{\mathrm{T}}$, где $y = \dot{x}/\omega$, и матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & -2\beta \end{pmatrix}$, получим уравнение для $X(t)$, которое показывает, что случайный процесс $X(t)$ является частным случаем $(d = 2)$ процесса, рассмотренного в разделе 2, $\dot{X}_\alpha = (AX)_\alpha + \Phi_\alpha(t)$.

Двумерный "белый шум" $\Phi_\alpha(t)$ обладает матрицей корреляции $\left(\sigma_{\alpha\beta}\right) = \frac{\sigma}{\omega^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Введем матрицы Паули ϑ_l, $l = 1,2,3$, $\vartheta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\vartheta_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\vartheta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, набор которых с I образует базис в пространстве (2×2)-матриц. Разложения матриц $A_{\alpha\beta}$ и $\sigma_{\alpha\beta}$ по этому базису имеют вид

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{\sigma}{2\omega^2}\left(1 - \vartheta_3\right)_{\alpha\beta}\,, \qquad A = -\beta\left(1 - \vartheta_3\right) + i\omega\vartheta_2\,. \tag{25}$$

В дальнейшем для расчетов нам потребуется формула разложения по базису $(I;\vartheta_l)$ экспоненты от (2×2)-матрицы M

$$\exp(Mt) = \exp(M_0 t)\left(\mathrm{ch}(\mid M \mid t) + \frac{1}{\mid M \mid}\sum_{l=1}^{3}\mathrm{sh}(\mid M \mid t)\right), \qquad (26)$$

где M_0, M_l – коэффициенты разложения матрицы M и $\mid M \mid = \left(\sum_{l=1}^{3} M_l^2\right)^{1/2}$.

Так как для любой (2×2)-матрицы M, определяемой коэффициентами разложения (M_0, M_l), её детерминант может быть вычислен по формуле

$$\det M = \det\begin{pmatrix} M_0 + M_3 & M_1 - iM_2 \\ M_1 + iM_2 & M_0 - M_3 \end{pmatrix} = M_0^2 - \mid M \mid^2, \qquad (27)$$

то для вычисления функции $Q(s,t)$ согласно (22) достаточно определить коэффициенты разложения матрицы

$$(1-\bar{\sigma}C)\ \left(1 + F_t e^{-tD^+} C e^{-tD}\right) + \bar{\sigma} e^{-tD^+} C e^{-tD}.$$

Заметим, что это вычисления удобно производить в рамках алгебры наборов коэффициентов разложения (2×2)-матриц по базису $(I;\vartheta_l)$. В этой алгебре произведения наборов $(M_0;M_l)$ и $(M_0';M_l')$ коэффициентов разложения матриц M и M' есть набор коэффициентов разложения матрицы MM', который, таким образом, имеет следующий вид $\left(M_0M_0' + (\bar{M},\bar{M}');\ M_0\bar{M}_l + \bar{M}_0 M_l + i\left[\bar{M},\bar{M}_l'\right]\right)$, где $(.\ ,.\ )$ и $[.\ ,.\ ]$ соответственно скалярное и векторное произведение векторов $\bar{M} = (M_l)$ и $\bar{M}' = (\bar{M}_l')$. Воспользовавшись указанным обстоятельством, вычислим матрицу $\bar{\sigma}$. Для этого выпишем набор коэффициентов разложения матриц $\exp(A\tau)$, σ, $\exp(A^+\tau)$. На основании (24)-(25) получаем

$$\sigma \to \frac{\sigma}{2\omega^2}(1;\ 0,\ 0,\ -1), \qquad (28)$$

$$\exp(A\tau) \to \left(e^{-\beta\tau}\mathrm{ch}(\mid A \mid \tau); e^{-\beta\tau} \mid A \mid^{-1} \mathrm{sh}(\mid A \mid \tau)(0, i\omega, \beta)\right), \qquad (29)$$

где $\mid A \mid = \sqrt{\beta^2 - \omega^2}$, и так как величина $\mid A \mid$ либо вещественна, либо чисто мнимая, то

$$\exp(A^+\tau) \to \left(e^{-\beta\tau}\mathrm{ch}(\mid A \mid \tau); e^{-\beta\tau} \mid A \mid^{-1} \mathrm{sh}(\mid A \mid \tau)(0, -i\omega, \beta)\right). \qquad (30)$$

Справедливы следующие формулы для коэффициентов разложения матрицы MNM^+ при условии, что N_0, N_l, M_0 вещественны:

$$\left(MNM^+\right)_0 = N_0\left(M_0^2 + \left(\bar{M},\bar{M}^*\right)\right) + \left(\bar{N}, 2M_0 \operatorname{Re}\bar{M} + i\left[\bar{M}^*,\bar{M}\right]\right),$$

$$\left(MNM^+\right)_l = N_0\left(2M_0 \operatorname{Re} M_l - i\left[\bar{M}^*,\bar{M}\right]_l\right) +$$

$$+ N_l\left(M_0^2 - \left(\bar{M},\bar{M}^*\right)\right) + 2\operatorname{Re} M_l\left(\bar{M}^*,\bar{N}\right) + 2M_0\left[\bar{N}, \operatorname{Im}\bar{M}\right].$$

Если выбрать векторы $\bar{N}$ и $\bar{M}$ со структурой

$$\bar{N} = (0,0,n)\,, \quad \bar{M} = (0,im',m) \tag{31}$$

и вещественными n, m, m', то получим

$$\left(MNM^{+}\right)_0 = N_0\left(M_0^2 + m^2 + m'^2\right) + 2nmM_0\,,$$

$$\left(MNM^{+}\right)_1 = -2m'\left(N_0 m + M_0 n\right),$$

$$\left(MNM^{+}\right)_2 = 0\,, \quad \left(MNM^{+}\right)_3 = 2M_0N_0m + n\left(M_0^2 + m^2 - m'^2\right). \tag{32}$$

Заметим, что согласно (27)-(29) матрицы σ и $\exp(A\tau)$ обладают свойством (30), если положить $M \to \exp(A\tau)$ и $N \to \sigma$, и поэтому мы вправе для вычисления матрицы $\exp(A\tau)\sigma\exp(A^{+}\tau)$ воспользоваться формулами (31). Тогда, полагая в формулах (31)

$$N_0 = -n = \frac{\sigma}{2\omega^2}\,,\ M_0 = e^{-\beta\tau}\mathrm{ch}(|\,A\,|\,\tau)\,,\ m' = \frac{\omega}{|\,A\,|}e^{-\beta\tau}\mathrm{sh}(|\,A\,|\,\tau)\,,$$

$$m = \frac{\beta}{|\,A\,|}e^{-\beta\tau}\mathrm{sh}(|\,A\,|\,\tau)\,,$$

получим, что

$$(\bar{\sigma})_0 = \frac{\sigma}{2\omega^2}\left(\Lambda_{11} + \frac{\beta^2+\omega^2}{|\,A\,|^2}\Lambda_{22}\right),\quad (\bar{\sigma})_1 = \frac{\sigma}{\omega\,|\,A\,|}\left(\Lambda_{12} - \frac{\beta}{|\,A\,|}\Lambda_{22}\right),$$

$$(\bar{\sigma})_2 = 0\,,\quad (\bar{\sigma})_3 = \frac{\sigma}{\omega^2}\ \frac{\beta}{|\,A\,|}\ \Lambda_{12} - \frac{\sigma}{2\omega^2}\ \left(\Lambda_{11} + \Lambda_{22}\right), \tag{33}$$

где введены обозначения для интегралов

$$\Lambda_{11} = \int_0^\infty d\tau e^{-2\beta\tau}\mathrm{ch}^2(|\,A\,|\,\tau) = \frac{\omega^2+\beta^2}{4\beta\omega^2}\,,$$

$$\Lambda_{12} = \int_0^\infty d\tau e^{-2\beta\tau}\mathrm{sh}^2(|\,A\,|\,\tau) = \frac{|\,A\,|^2}{4\beta\omega^2}\,,$$

$$\Lambda_{22} = \int_0^\infty d\tau e^{-2\beta\tau}\mathrm{ch}(|\,A\,|\,\tau)\mathrm{sh}(|\,A\,|\,\tau) = \frac{|\,A\,|}{4\omega^2}\,.$$

Отсюда находим, что матрица $\bar{\sigma}$ кратна единичной:

$$\bar{\sigma} = \left(\frac{\sigma}{4\beta\omega^2};0\right). \tag{34}$$

ОСЦИЛЛЯТОРНЫЙ ПРОЦЕСС. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА $\int_0^t d\tau\ \ \dot{x}^2(\tau)$

В этом разделе вычислим характеристическую функцию для функционала $R_t\{x(\tau)\} = \int_0^{\mathrm{t}} d\tau\ \ \dot{x}^2(\tau)$ от траекторий осцилляторного процесса. Введя двухкомпонентный марковский процесс $X(t) = (x(t),\ y(t))^{\text{т}}$, как это сделано в предыдущем разделе, запишем функционал в форме $\omega^2 \int_0^t d\tau \quad y^2(\tau)$. Следовательно, чтобы вычислить характеристическую функцию для $R_t\{x(\tau)\}$ способом, описанным в разделе 2, необходимо положить $B = \omega^2(1 - \vartheta_3)/2$. Так как матрицы σ и A определяются в этом случае формулами (24) и (25), будем искать матрицу C в виде $C = (c;0)$. Тогда $A + A^+ = -2\beta(1 - \vartheta_3)$, и уравнение (15) можно записать в виде

$$\frac{\sigma c^2}{2\omega^2} - 2c\beta - \omega^2 s = 0\,.$$

Таким образом, в качестве матрицы C можно выбрать

$$C = \left(\frac{2\omega^2}{\sigma}(r + \beta);\ \ 0\right), \tag{35}$$

где

$$r = \sqrt{\beta^2 + \sigma s/2}\,. \tag{36}$$

Следовательно, для матрицы D получаем выражение

$$D = -r(1 - \vartheta_3) - i\omega\vartheta_2\,. \tag{37}$$

Сравнив эту формулу с (25), мы видим, что для получения коэффициентов разложения матрицы F_t по базису $(I;\vartheta_l)$ достаточно в формулах (33) для коэффициентов разложения матрицы $\bar{\sigma}$ произвести замену $\beta \to r$, $\omega \to -\omega$ и интегралы Λ_{11}, Λ_{22}, Λ_{12} заменить на

$$\begin{aligned}
\Lambda_{11} &= \int_0^\infty d\tau \exp(-2\beta\tau)\mathrm{ch}^2(|\,D\,|\,\tau)\,,\\
\Lambda_{12} &= \int_0^\infty d\tau \exp(-2\beta\tau)\mathrm{ch}(|\,D\,|\,\tau)\mathrm{sh}(|\,D\,|\,\tau)\,,\\
\Lambda_{22} &= \int_0^\infty d\tau \exp(-2\beta\tau)\mathrm{sh}^2(|\,D\,|\,\tau)\,.
\end{aligned} \tag{38}$$

где

$$|\,D\,| = \sqrt{r^2 - \omega^2} \equiv \Omega\,. \tag{39}$$

Так как между интегралами (37) имеются соотношения

$$\Lambda_{12}(t) - \frac{r}{\Omega}\Lambda_{22}(t) = \exp(-2rt)\frac{\mathrm{sh}^2(\Omega t)}{2\Omega}\,,$$

$$\frac{r}{\Omega}\Lambda_{12}(t) - \frac{1}{2}\big(\Lambda_{11}(t) + \Lambda_{22}(t)\big) = -\exp(-2rt)\frac{\mathrm{sh}(2\Omega t)}{4\Omega}\,,$$

$$\Lambda_{22}(t) = \frac{\Omega^2}{4r\omega^2} + \frac{1}{4r}\exp(-2rt) - \exp(-2rt)\frac{r\mathrm{ch}(2\Omega t) + \Omega\mathrm{sh}(2\Omega t)}{4\omega^2}\,,$$

то в результате получаем

$$(F_t)_1 = -\frac{\sigma}{2\omega\Omega^2}\exp(-2rt)\mathrm{sh}^2(\Omega t), \qquad (F_t)_2 = 0,$$

$$(F_t)_3 = -\frac{\sigma}{4\omega\Omega^2}\exp(-2rt)\mathrm{sh}(2\Omega t), \tag{40}$$

$$(F_t)_0 = -(F_t)_3 + \frac{\sigma}{\Omega^2}\Lambda_{22}(t) = \frac{\sigma}{4\omega^2 r}\left(1 - e^{-2rt}\right) - \frac{r\sigma}{2\Omega^2\omega^2}\mathrm{sh}^2(\Omega t)e^{-2rt}.$$

Вычислим коэффициенты разложения матрицы $\exp(tD)\exp(tD^+)$. Заметим, что для этого можно воспользоваться формулами (31), если положить $N = 1$ (следовательно, $n = 0$, $N_0 = 1$), а также $M = \exp(tD)$, и поэтому

$$M_0 = e^{-rt}\mathrm{ch}(\Omega t), \qquad m = \frac{r}{\Omega}e^{-rt}\mathrm{sh}(\Omega t), \qquad m' = -\frac{\omega}{\Omega}e^{-rt}\mathrm{sh}(\Omega t).$$

Последние формулы получаются из (28) заменой $A \to D$, или, что то же самое, $\beta \to r$, $\omega \to -\omega$, $|A| \to \Omega$. Таким образом, коэффициенты разложения матрицы $\exp(tD)\exp(tD^+)$ имеют вид

$$\left(e^{tD}e^{tD^+}\right)_0 = e^{-2rt}\left\{\mathrm{ch}^2(\Omega t) + \frac{r^2+\omega^2}{\Omega^2}\mathrm{sh}^2(\Omega t)\right\},$$

$$\left(e^{tD}e^{tD^+}\right)_1 = \frac{2r\omega}{\Omega^2}e^{-2rt}\mathrm{sh}^2(\Omega t), \tag{41}$$

$$\left(e^{tD}e^{tD^+}\right)_2 = 0, \qquad \left(e^{tD}e^{tD^+}\right)_3 = \frac{r}{\Omega}e^{-2rt}\mathrm{sh}(2\Omega t).$$

Введем в рассмотрение матрицу $J_t = (1-\bar{\sigma}C)e^{tD}e^{tD^+} + (1-\bar{\sigma}C)CF_t + \bar{\sigma}C$. Так как матрицы $\bar{\sigma}$ и C кратны единичной и $\det\exp(tD) = \exp(\mathrm{Sp}(tD))$, $\mathrm{Sp}(\bar{\sigma}C) = 2(r+\beta)$, то функция $Q(s,t)$ связана с J_t следующим образом (см. (22)):

$$Q(s,t) = e^{(\beta-r)t}(\det J_t)^{-1/2}. \tag{42}$$

Учитывая формулы (40), (41), а также (34), (35), получим коэффициенты разложения матрицы J_t по базису $(1;\ \vartheta_l)$:

$$(J_t)_1 = -\frac{\omega(r-\beta)^2}{2\beta\Omega^2}e^{-2rt}\mathrm{sh}^2(\Omega t), \qquad (J_t)_2 = 0,$$

$$(J_t)_3 = -\frac{\omega(r-\beta)^2}{4\beta\Omega}e^{-2rt}\mathrm{sh}(2\Omega t), \tag{43}$$

$$(J_t)_0 = \frac{e^{-rt}}{4r\beta}\left\{(\beta+r)^2e^{rt} - (\beta-r)^2e^{-rt} - 2e^{-rt}\frac{r^2}{\Omega^2}(\beta-r)^2\mathrm{sh}^2(\Omega t)\right\}.$$

Воспользуемся для вычисления $\det J_t$ формулой (см. (26))

$$\det J_t = (J_t)_0^2 - (J_t)_1^2 - (J_t)_3^2. \tag{44}$$

На основании (42) можно убедиться после несложных алгебраических преобразований, что отрицательные слагаемые в формуле (43) компенсируются слагаемыми из $(J_t)_0^2$, в результате чего находим функцию $Q(s,t)$ (см. (42)) в следующем виде:

$$Q(s,t) = \frac{4\beta r e^{\beta t}}{\left[\left((\beta+r)^2 e^{rt} - (\beta-r)^2 e^{-rt}\right)^2 - 4\frac{r^2}{\Omega^2}(\beta^2 - r^2)^2 \mathrm{sh}^2(\Omega t)\right]^{1/2}} . \quad (45)$$

Выражение (45) является искомой производящей функцией плотности распределения функционала R_t :

$$Q(s,t) = \left\langle \exp\left\{-s\int_0^t d\tau \quad \dot{x}^2(\tau)\right\}\right\rangle .$$

Авторы благодарят участников семинара под руководством С. М. Рытова за полезные обсуждения.

Авторы признательны также С. В. Пелетминскому за поддержку работы.

ВЫВОДЫ

Решение большого количества задач теории автоматического управления связано с оцениванием риска. Возможным подходом при синтезе систем управления является подход, основанный на минимизации возможного риска, для оценивания которого необходима информация о поведении законов распределения в целом и, в частности, на периферийных участках значений. В работе рассмотрены многокомпонентные гауссовские случайные процессы, определенные на решениях линейного стохастического дифференциального уравнения. Предложен метод усреднения функционалов интегрального типа по вероятностной мере рассматриваемого процесса. Метод продемонстрирован на примерах простейших процессов, определяемых стохастическими дифференциальными уравнениями, процесса Орнштейна-Уленбека и осцилляторного процесса.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Введем понятие обобщенного гауссовского процесса. Частным случаем такого процесса является «белый» шум. Построение, которое будет описано ниже, представляет собой переложение на более точный математический язык подхода к этому вопросу, изложенного в [3], и отличается от традиционной конструкции Ито (см. [4]).

Каждый гауссовский стационарный процесс $\{\phi_\alpha(t), t \in (-\infty,\infty)\}$ со значениями в R^d и нулевым средним, как известно, полностью характеризуется корреляционной матрицей [5] $\sigma_{\alpha\beta}(t) = < \phi_\alpha(t)\phi_\beta(0) >$, удовлетворяющей для любого набора $x_\alpha^{(k)}$ условию

$$\sum_{j,k}\sum_{\alpha_k,\alpha_j} \sigma_{\alpha_k,\alpha_j}(t_k - t_j) x_{\alpha_k}^{(k)} x_{\alpha_j}^{(j)*} \geq 0 . \quad (\Pi 1)$$

Из этого определения видно, что $|\sigma_{\alpha\beta}(t)| < \infty$ (см. [5], 6). Пусть в силу каких-либо физических причин известно заранее, что корреляционная матрица $\sigma_{\alpha\beta}(t)$ рассматриваемого гауссовского процесса как функция t в основном сосредоточена в некоторой малой окрестности точки $t = 0$, т.е. вне этой окрестности почти равна нулю. В данном случае при вычислении средних от функционалов вида

$$F(\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_{[t_1,t_2]^n} d\tau_1 \dots d\tau_n f^{(n)}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(\tau_1, \dots, \tau_n) \phi_{\alpha_1}(\tau_1) \dots \phi_{\alpha_n}(\tau_n) \qquad (П2)$$

в первом приближении удобно записать

$$\sigma_{\alpha\beta}(t) = \sigma_{\alpha\beta}\delta(t), \qquad (П3)$$

хотя и не существует никакого гауссовского процесса с такой корреляционной матрицей. Создавшееся положение напоминает ситуацию, в которой приходится вводить обобщенные функции. Пользуясь этой аналогией, построим ниже математический объект – "белый шум", который обладает корреляционной матрицей.

Функционалы (П1) рассматриваются на выборочном пространстве Ф, которое можно считать одним и тем же для всех гауссовских процессов. Точно также общей для всех гауссовских процессов является σ-алгебра B -измеримых множеств траекторий [5]. Так как при любом выборе $f^{(n)}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(\tau_1, \dots, \tau_n)$ в Ф всегда найдутся такие «исключительные» реализации $\phi_\alpha(t)$, для которых значение функционала (П2) не существует, то необходимо гарантировать наличие множества полной меры, на котором функционалы (П2) определены, причем это множество должно быть выбрано универсальным для гауссовских процессов определенного типа.

Пусть $\tilde{F}_0$ – пространство функционалов (П2) таких, что $f^{(n)}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(\tau_1, \dots, \tau_n)$ бесконечно дифференцируемы, и для любого интервала Δ выполняется

$$\sup_n \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \int\limits_{\Delta^n} d\tau_1 \dots d\tau_n \left| f^{(n)}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(\tau_1, \dots, \tau_n) \right| < M_\Delta .$$

Пусть далее $\tilde{G}$ – пространство гауссовских стационарных процессов с нулевым средним, у которых $\sigma_{\alpha\beta}(t)$ – ограниченные непрерывные функции t. Укажем без доказательства, что для любого $F(\phi) \in \tilde{F}_0$ и $g \in \tilde{G}$ с вероятностью 1 значение $F(\phi)$ определено, измеримо относительно меры, порождаемой g, и существует среднее $< F(\phi) >_g$.

Определим обобщенные гауссовские процессы. Для этого зададим прежде всего топологию τ в пространстве корреляционных матриц $\{\sigma_{\alpha\beta}(t)\}$. Эта топология задается с помощью понятия фундаментальной последовательности. Назовем последовательность матриц-функций $\sigma_{\alpha\beta}(t)$ фундаментальной, если последовательность $\int_0^t \sigma^{(n)}_{\alpha\beta}(\tau) d\tau$ сходится на каждом конечном интервале. Топология τ корреляционных матриц $\sigma^{(n)}_{\alpha\beta}(t)$ индуцирует топологию в $\tilde{G}$. Так как пространство ограниченных, непрерывных, положительно-определенных (см. (П1)) матриц-функций $\{\sigma^{(n)}_{\alpha\beta}(t)\}$ не полно в топологии τ, то $\tilde{G}$ не полно в индуцированной топологии. Поэтому построим стандартную процедуру пополнения и назовем элементы пополнения обобщенными гауссовскими процессами.

Можно показать, что для элементов пополнения g всегда существует среднее $< F(\phi) >_g$, где $F(\phi) \in \tilde{F}_0$. Наконец, рассмотрим последовательности гауссовских процессов с корреляционными функциями $\sigma^{(n)}_{\alpha\beta}(t) \to \sigma_{\alpha\beta}\delta(t)$, т.е. фундаментальную в указанном смысле δ -последовательность, для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sigma^{(n)}_{\alpha\beta}(t)dt \underset{n\to\infty}{\to} f(0)\sigma_{\alpha\beta}.$$

Будем говорить, что $\sigma^{(n)}_{\alpha\beta}(t)$ определяет обобщенный гауссовский процесс – «белый» шум. В заключение отметим, что описанное построение позволяет устранить некоторые неопределенности, которые возникают при формальном использовании корреляционной матрицы (П3). Например, рассмотрим среднее $\left\langle \phi_\alpha(t)\int_0^t d\tau\, \phi_\beta(\tau)\right\rangle$, которое формально равно $\sigma_{\alpha\beta}\int_0^t d\tau\, \delta(t-\tau)$, в связи с чем и возникает неопределенность. Рассмотрим последний интеграл как предел последовательности средних, вычисленных с помощью обычных гауссовских процессов. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t d\tau\ \sigma^{(n)}_{\alpha\beta}(t-\tau) \ = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_0^{2t} d\tau\ \sigma^{(n)}_{\alpha\beta}(t-\tau) \ = \frac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta},$$

так как $\sigma^{(n)}_{\alpha\beta}(t-\tau)$ – не просто δ -последовательность каких-либо функций, а последовательность корреляционных функций, которые, в силу стационарности процессов из $\tilde{G}$, удовлетворяют условию $\sigma^{(n)}_{\alpha\beta}(t) = \sigma^{(n)}_{\alpha\beta}(-t)$.

Замечание. Как уже было указано выше, значения функционалов (П2) с вероятностью 1 определены для обобщенных гауссовских процессов. В частном случае, если $\varphi(t)$ – «белый» шум, то с вероятностью 1 определено значение функционала $w_\alpha(t) = w_\alpha(0) + \int_0^t d\tau\ \phi_\alpha(\tau)$.

Покажем, что $w_\alpha(t)$ – винеровский процесс. Для этого рассмотрим характеристический функционал

$$G(u) = \left\langle \exp\left\{ i\int_o^\infty d\tau\, u_\alpha(\tau) w_\alpha(\tau)\right\}\right\rangle,$$

где $u_\alpha(t)$ – произвольная финитная непрерывная вектор-функция, а усреднение производится по мере, порождаемой «белым» шумом. Воспользовавшись (П1) и свойством гауссовости «белого» шума, получим

$$G(u) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{2^l l!}\int_0^\infty d\tau_1\ldots d\tau_{2l}\delta(\tau_1-\tau_{l+1})\ldots\delta(\tau_l-\tau_{2l})\times$$
$$\times\sigma_{\alpha_1\alpha_{l+1}}\ldots\sigma_{\alpha_l\alpha_{2l}}\int_{\tau_1}^\infty dt_1\, u_{\alpha_1}(t_1)\ldots\int_{\tau_{2l}}^\infty dt_{2l}\, u_{\alpha_{2l}}(t_2) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^\infty d\tau\int_\tau^\infty dt\, dt'\left(u_\alpha(t)\sigma_{\alpha\alpha'}u_{\alpha'}(t')\right)\right\}.$$

Следовательно, корреляционный функционал $\ln G$ имеет вид

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty d\tau\int_\tau^\infty dt\, dt'\ \left(u_\alpha(t)\sigma_{\alpha\alpha'}u_{\alpha'}(t')\right).$$

Итак, получаем, что процесс $w_\alpha(t)$ обладает только второй ненулевой корреляционной функцией (полуинвариантом) в кумулянтном разложении, равном $\frac{1}{2}\sigma_{\alpha\alpha'}\min(t,t') = \langle w_\alpha(t) w_{\alpha'}(t')\rangle$, что соответствует d-мерному винеровскому процессу с матрицей диффузии $\sigma_{\alpha\alpha'}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Рассмотрим формальное выражение

$$\dot{x}_\alpha = A_\alpha(x) + \phi_\alpha(t)\,, \tag{П4}$$

где $A(x): R^d \to R^d$ и $\varphi_\alpha(t)$ – векторный "белый шум" $(\alpha = 1,\dots,d)$, с матрицей корреляции $\sigma_{\alpha\beta}$ (см. (П3)). Прежде всего отметим, что «траектории» нельзя представить себе как функции t и, следовательно, выражение (П4) нельзя понимать буквально как дифференциальное уравнение. В самом деле, так как

$$w(t) = w(0) + \int_0^t d\tau\, \phi(\tau)$$

– винеровский процесс, то естественно было бы считать, что $\dot{w} = \phi$. С другой стороны, известно [7], что с вероятностью 1 траектории $w(t)$ непрерывны и нигде не дифференцируемы, т.е. действительно “траектории” \$ $\varphi_\alpha(t)$ не являются ни в каком смысле функциями.

Для того чтобы придать смысл (П4), вспомним, что определение «белого» шума (Приложение 1) задает на самом деле не траекторию $\varphi_\alpha(t)$, а с вероятностью 1 определяет значение функционалов (П2) и средние значения этих функционалов. В частном случае таким функционалом является $\int_0^t d\tau\, \phi(\tau)$. С другой стороны, если бы (П4) имело смысл дифференциального уравнения, то его можно было бы написать в эквивалентной интегральной форме

$$x(t) = x(0) + \int_0^t d\tau\, A\big(x(\tau)\big) + \int_0^t d\tau\, \phi(x(\tau))\,. \tag{П5}$$

Так как выражение (П5) на основании вышесказанного является определенным с вероятностью 1 случайным интегральным уравнением, т.е. определенным для почти каждой «реализации» $\varphi(t)$, то мы приходим к возможности отождествить по определению «дифференциальное уравнение» (П4) с интегральным уравнением (П5). Вопрос о том, определяет ли (П5) в действительности какой-либо случайный процесс, т.е. вопрос о разрешимости с вероятностью 1 интегрального уравнения (П5), является в общем случае очень сложным (см. по этому поводу [4]). В том частном случае, с которым мы имеем дело в настоящей работе, а именно, когда $A(x)$ – линейное преобразование, этот вопрос разрешается положительно.

Покажем, что (П5) определяет марковский процесс или, более конкретно, диффузионный процесс, при условии, что решение существует. Введем переходную функцию $p(x,x';t)$ – плотность вероятности события $x(t) = x$ при условии, что $x(0) = x'$, т. е.

$$p(x,x';t) = \big\langle \delta\big(x - x(t,x')\big)\big\rangle = (2\pi)^d \int dk\, f(k,t)\, e^{i(k,x)}\,, \tag{П6}$$

где (k,x) – скалярное произведение, $dk = dk_1 \dots \cdot dk_d$, $f(k,t)$ – характеристическая функция,

$$f(k,t) = \left\langle \exp\left[-i(k, x(t))\right] \right\rangle . \qquad (\text{П7})$$

Интегрирование в (П6) производится по всему k - пространству R^d. Построим уравнение, которому удовлетворяет функция $p(x,x';t)$. Для этого продифференцируем по t характеристическую функцию (П7) и воспользуемся (П4). В результате получим для производной по времени от переходной функции следующее выражение:

$$\dot{p}(x,x';t) = -\frac{i}{(2\pi)^d}\int dk\, e^{i(k,x)} k_\alpha \left\langle \left(A_\alpha(x(t)) + \phi_\alpha(t)\right) e^{-i(k,x(t))} \right\rangle . \qquad (\text{П8})$$

Заметим сначала, что на основании (П6)

$$\frac{i}{(2\pi)^d}\int dk \left\langle A_\alpha(x(t)) e^{-i(k,x(t))} \right\rangle e^{+i(k,x(t))} = \left\langle A_\alpha(x(t))\delta(x - x(t,x')) \right\rangle = A_\alpha(x) p(x,x';t) \qquad (\text{П9})$$

Ниже будем показано также, что имеет место формула усреднения

$$\left\langle \phi_\alpha(t)\, e^{-i(k,x(t))} \right\rangle = \frac{1}{2i}\sigma_{\alpha\beta} k_\beta f(k,t) \qquad (\text{П10})$$

Тогда следствием (П8)-(П10) является искомое уравнение

$$\dot{p}(x,x';t) = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[A_\alpha x(t) p(x,x';t)\right] + \frac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} p(x,x';t) . \qquad (\text{П11})$$

Для доказательства (П11) прежде всего покажем, что для любого функционала $\tilde{P}\{x(t)\}$, представимого в виде

$$\tilde{P}\{x(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_0^{\infty}\tilde{P}(\tau_1,\dots,\tau_n) x(\tau_1)\dots x(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n , \qquad (\text{П12})$$

выполняется равенство

$$\left\langle \phi_\alpha(t)\tilde{P}\{x(t)\} \right\rangle = \int_0^{\infty} dt' \left\langle \frac{\delta \tilde{P}}{\delta x_\beta(t')} \right\rangle \left\langle \phi_\alpha(t) x_\beta(t') \right\rangle . \qquad (\text{П13})$$

В самом деле, если $A(x)$ – линейна, то решение уравнения (П4) существует и $x(t)$ представляет собой линейный функционал $\mathrm{X}\{t,\varphi\}$. Заметим далее, что в силу гауссовости «белого» шума справедлива формула

$$\left\langle \phi(t)\prod_{i=1}^{n}\phi(t_i) \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\left\langle \phi(t)\phi(t_i) \right\rangle \left\langle \prod_{j\neq i}^{n}\phi(t_j) \right\rangle$$

и, следовательно, в результате разложения $\tilde{P}'\{\phi\} \equiv \tilde{P}\{x(t)\}$ в ряд убеждаемся, что

$$\left\langle \phi_\alpha(t)\tilde{P}'\{x(t)\} \right\rangle = \int_0^{\infty} dt' \left\langle \frac{\delta \tilde{P}'}{\delta x_\beta(t')} \right\rangle \left\langle \phi_\alpha(t) x_\beta(t') \right\rangle . \qquad (\text{П14})$$

Используя правило дифференцирования

$$\frac{\partial \tilde{P}'}{\partial \phi_\beta(t)} = \int_0^\infty d\tau \frac{\delta \tilde{P}}{\delta x_\gamma(\tau)} \frac{\delta \mathrm{X}_\gamma(\tau;\phi)}{\delta \phi_\beta(t')}$$

и равенство

$$\left\langle \phi_\alpha(t) \mathrm{X}_\gamma(\tau;\phi) \right\rangle = \int_0^\infty dt' \left\langle \varphi_\alpha(t) \phi_\beta(t') \right\rangle \frac{\delta \mathrm{X}_\gamma}{\delta \phi_\beta(t')}, \qquad (\text{П}15)$$

которое следует из (П14) при замене $\tilde{P}'\{\phi\}$ на $\mathrm{X}\{t,\phi\}$, получим (П13).

Вычислим теперь двухточечную функцию $\left\langle \varphi_\alpha(t) x_\beta(t') \right\rangle$. Сразу заметим, что при $t' < t$, в силу статистической независимости величин $\varphi_\alpha(t)$, $x_\beta(t')$ и $\left\langle \varphi(t) \right\rangle = 0$, рассматриваемая двухточечная функция равна нулю. В этом можно убедиться также с помощью (П15), если воспользоваться (П3) и заметить, что $\delta \mathrm{X}(\tau;\phi) / \delta \phi_\beta(t') = 0$ при $t' > \tau$.

Проанализируем теперь равенство

$$\left\langle \phi_\alpha(t) x_\beta(t) \right\rangle = \left\langle \phi_\alpha(t) x_\beta(0) \right\rangle + \int_0^t d\tau \left\langle \phi_\alpha(t) A_\beta(x(\tau)) \right\rangle + \int_0^t d\tau \left\langle \phi_\alpha(t) \phi_\beta(\tau) \right\rangle,$$

которое справедливо в силу (П5). Первое слагаемое в правой части равно нулю по вышеуказанной причине. Подынтегральное выражение во втором слагаемом также равно нулю, поскольку на основании (П13)

$$\left\langle \phi_\alpha(t) A_\beta(x(\tau)) \right\rangle = \left\langle \phi_\alpha(t) x_\gamma(\tau) \right\rangle \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\gamma}(\tau)$$

и $\tau < t$. Последнее же слагаемое равно $\frac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta}$ (см. Приложение 1), и поэтому

$$\left\langle \phi_\alpha(t) x_\beta(t) \right\rangle = \frac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta}. \qquad (\text{П}16)$$

Подставляя это выражение в (П13) и положив $\tilde{P}\{x(t)\} = \exp\{-i(k, x(t))\}$, получим формулу (П10).

SUMMARY

STATISTICS OF FUNCTIONALS, DETERMINED ON SOLVING THE STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

Y. P. Virchenko*, A. S. Mazmanishvili,
**Single Crystal Institute of NASU, Kharkiv;*
Sumy State University, Sumy

A multicomponent Gaussian random process determined by a solution of the linear stochastic differential equation is considered. The method of averaging integral type functionals over the probability measure of the considered process is proposed. The procedure has been demonstrated on the examples of the simplest processes determined by stochastic differential equations for the Ornstein-Uhlenbeck and oscillatory processes.

Key words: *statistics of functionals, multicomponent Gaussian random process, linear stochastic differential equation, method of averaging, Ornstein-Uhlenbeck processs, oscillatory process.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике/ М. Кац. – М.: Мир, 1965. – 406 с.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1967. – 20 с.
3. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике / Р. Л. Стратонович. – М.: Советское радио, 1961. – 356 с.
4. Гихман И.И. Теория случайных процессов. / И. И. Гихман, А. В. Скороход. – М.: Наука, 1975. - Т. III.– 486 с.
5. Ибрагимов И. А. Гауссовские случайные процессы / И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов. – М.: Наука, 1970. – 384 с.
6. Антосик П. Теория обобщенных функций / П. Антосик, Я. Микусинский, Р. Сикорский. – М.: Мир, 1976. – 210 с.
7. Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы / Дж. Л. Дуб. – М.: Издательство иностранной литературы, 1956. – 240 с.
8. Лэкс М. Флуктуации и когерентные явления / М. Лэкс. – М.: Мир, 1974. – 299 с.
9. Ласкин Н. В. Функционалы от траекторий процесса Орнштейна-Уленбека / Н. В. Ласкин, А. С. Мазманишвили: препринт ХФТИ АН УССР. – Харьков, 1983. – № 1. – 32 с.
10. Лэкс М. Флуктуации и когерентные явления / М. Лэкс. – М.: Мир, 1974. – 299 с.

Поступила в редакцию 28 июля 2009 г.