

Калинкевич Н.В., Гусак А.Г. ¶

ТЕОРИЯ ¶
ТУРБОКОМПРЕССОРОВ



Н.В. Калининевич, А.Г. Гусак

ТЕОРИЯ ТУРБОКОМПРЕССОРОВ

Учебное пособие

*Рекомендовано ученым советом
Сумского государственного университета*

Сумы
Сумский государственный университет
2011

УДК 621.515:533.6

К 17

Рецензенты:

А.П. Кононенко - доктор технических наук, профессор Донецкого национального технического университета;

Д.А. Семин - доктор технических наук, профессор Восточнoукраинского национального университета имени Владимира Даля

*Рекомендовано ученым советом
Сумского государственного университета как учебное пособие
(протокол № 6 от 18.11.2010 г.)*

Калинкевич Н.В.

К 17 Теория турбокомпрессоров: учебное пособие /Н.В. Калинкевич,

А.Г. Гусак. – Сумы: Сумский государственный университет, 2011. - 221 с.

Пособие предназначено для изучения студентами основ теории турбокомпрессоров.

В пособии приведены основные термины и определения, принцип действия, области применения турбокомпрессоров, термодинамические и газодинамические основы теории турбокомпрессоров, газодинамическое подобие турбокомпрессоров. Рассмотрены вопросы течения газа в каналах турбокомпрессоров, обтекание профилей и решеток профилей. Даны основные определения турбулентности, указаны принципы моделирования турбулентных течений.

Для студентов высших учебных заведений III-IV уровней аккредитации направлений подготовки «Энергомашиностроение», «Энергетика», «Механика».

Посібник призначений для вивчення студентами основ теорії турбокомпресорів.

У посібнику наведені основні терміни і визначення, принцип дії, галузі застосування турбокомпресорів, термодинамічні та газодинамічні основи теорії турбокомпресорів, газодинамічна подібність турбокомпресорів. Розглянуті питання течії газу в каналах турбокомпресорів, обтікання профілів і решіток профілів. Подані основні визначення турбулентності, зазначені принципи моделювання турбулентних течій.

Для студентів вищих навчальних закладів III-IV рівнів акредитації напрямків підготовки «Енергомашинобудування», «Енергетика», «Механіка».

УДК 621.515:533.6

© Калинкевич Н.В., Гусак А.Г., 2011
Сумский государственный университет, 2011

СОДЕРЖАНИЕ

	С.
ПРЕДИСЛОВИЕ	6
УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ	7
ВВЕДЕНИЕ	14
РАЗДЕЛ 1. ОСНОВНЫЕ ТЕРМИНЫ. ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ	
ТУРБОКОМПРЕССОРОВ	15
1.1 Основные термины и определения	15
1.2 Классификация компрессоров	17
1.3 Принцип действия	18
1.3.1 Принцип действия осевого компрессора	19
1.3.2 Принцип действия центробежного компрессора	21
1.3.3 Принцип действия вихревого компрессора	23
1.4 Основные эксплуатационные параметры компрессоров	24
1.5 Характеристики турбокомпрессоров	27
1.6 Области применения турбокомпрессоров	28
1.6.1 Применение турбокомпрессоров в разных отраслях промышленности .	30
1.7 Сравнение турбокомпрессоров с поршневыми компрессорами	43
Список литературы к разделу 1	45
Вопросы для самопроверки	45
РАЗДЕЛ 2. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ	
ТУРБОКОМПРЕССОРОВ	46
2.1 Основные физические свойства газов	46
2.2 Модель сплошной среды	51
2.3 Модель идеального газа	52
2.3.1 Уравнение состояния Менделеева – Клапейрона	53
2.3.2 Уравнение политропного процесса	53
2.4 Реальный газ	55
2.4.1 Закон соответственных состояний	56
2.4.2 Уравнения состояния в вириальной форме	61
2.4.3 Уравнение Бенедикта – Вебба – Рубина	62
2.4.4 Дифференциальные уравнения термодинамики	66
2.4.5 Термодинамические процессы реальных газов	66
Список литературы к разделу 2	70
Вопросы для самопроверки	71
РАЗДЕЛ 3. ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ	
ТУРБОКОМПРЕССОРОВ	72
3.1 Уравнение неразрывности	73
3.2 Уравнение импульса	73
3.2.1 Уравнение движения Навье – Стокса	74
3.2.2 Уравнение Рейнольдса	75
3.3 Уравнение момента импульса	75

3.3.1 Уравнение Эйлера для турбомашин	76
3.4 Уравнение энергии	77
3.4.1 Первый закон термодинамики для потока газа	77
3.4.2 Уравнение Бернулли	78
3.5 Схематизация характера течения газа в турбокомпрессорах	79
3.6 Осреднение параметров потока.....	82
3.7 Газодинамические функции.....	85
Список литературы к разделу 3	87
Вопросы для самопроверки	88
РАЗДЕЛ 4. ОБТЕКАНИЕ ПРОФИЛЕЙ И РЕШЕТОК ПРОФИЛЕЙ	89
4.1 Профиль, решетка профилей	92
4.2 Задачи и методы теории решеток	95
4.2.1 Сеточный метод построения течения	97
4.2.2 Метод интегральных уравнений	99
4.2.3 Метод конформного отображения	100
4.2.4 Метод годографа скорости	102
4.2.5 Метод дискретных вихрей	106
4.3 Обтекание профилей	107
4.3.1 Обтекание пластинки	108
4.3.2 Возникновение подъемной силы. Постулат Жуковского – Чаплыгина ..	111
4.3.3 Обтекание симметричного профиля	115
4.3.4 Ударное и безударное обтекание изогнутого профиля	118
4.4 Сила взаимодействия профиля с потоком	121
4.4.1 Теорема Жуковского	122
4.4.2 Аэродинамические коэффициенты	126
Список литературы к разделу 4	128
Вопросы для самопроверки	129
РАЗДЕЛ 5. ТЕЧЕНИЕ ГАЗА В КАНАЛАХ ТУРБОКОМПРЕССОРОВ	130
5.1 Типы каналов в проточной части турбокомпрессоров	131
5.2 Течение газа в трубах	131
5.3 Течение газа в прямоосных диффузорах	138
5.3.1 Предотрывные диффузоры	142
5.4 Течение газа в криволинейных каналах	147
5.4.1 Течение газа в криволинейных осесимметричных каналах	152
5.5 Течение в межлопаточных каналах центробежных рабочих колес	155
5.6 Классификация потерь по физической природе	158
Список литературы к разделу 5	160
Вопросы для самопроверки	161
РАЗДЕЛ 6. ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЕ ПОДОБИЕ ТУРБОКОМПРЕССОРОВ	162
6.1 Основные положения теории подобия	162
6.1.1 Анализ размерностей	163
6.2 Виды подобия	164

6.2.1 Геометрическое подобие	165
6.2.2 Кинематическое подобие	166
6.2.3 Динамическое подобие	166
6.3 Теоремы подобия	166
6.3.1 π –теорема	167
6.4 Критерии подобия.....	171
6.4.1 Определение критериев из дифференциальных уравнений	172
6.4.2 Основные критерии подобия газодинамических процессов	175
6.5 Моделирование процессов	178
6.5.1 Приближенное моделирование	178
6.5.2 Понятие об автомодельности	179
6.6 Характеристики турбокомпрессоров	180
6.6.1 Связь расходов, напоров и мощностей подобных турбокомпрессоров ..	184
Список литературы к разделу 6	187
Вопросы для самопроверки	188
РАЗДЕЛ 7. ТУРБУЛЕНТНОСТЬ	189
7.1 Механизмы турбулентности	190
7.1.1 Масштабы турбулентности.....	192
7.1.2 Уравнения для характеристик турбулентности	193
7.2 Моделирование турбулентности	194
7.2.1 Гипотеза Буссинеска	194
7.2.2 Алгебраические модели турбулентности	195
7.2.3 Модели турбулентности с одним дифференциальным уравнением	196
7.2.4 Модели турбулентности с двумя дифференциальными уравнениями	197
7.3 Структура турбулентного пограничного слоя	199
7.3.1 Моделирование турбулентного пограничного слоя	200
Список литературы к разделу 7	203
Вопросы для самопроверки	204
ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК	205
Приложение А. Краткие биографические сведения об ученых	207
Бернулли Даниил	208
Ван–дер–Ваальс	209
Жуковский Николай	208
Клапейрон Эмиль	210
Мах Эрнст	210
Ньютон Исаак	211
Рейнольдс Осборн	212
Стокс Джордж	213
Эйлер Леонард	214
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	216

ПРЕДИСЛОВИЕ

Турбокомпрессоры – энергетические машины, которые используются во всех базовых отраслях промышленности. Турбокомпрессоры для газовой, химической, холодильной промышленности имеют значительную мощность (десятки мегаватт), и поэтому большое значение приобретают вопросы экономичности их эксплуатации.

Для оптимального проектирования и рациональной эксплуатации турбокомпрессоров требуется хорошее понимание рабочих процессов, которые происходят в этих машинах. Характер движения газа в проточной части турбокомпрессоров весьма сложный, в общем случае поток нестационарный, вязкостный, пространственный. Изучение физики процессов требует знания основных положений термодинамики и газодинамики. Следует отметить, что техническая термодинамика в учебниках для вузов излагается в основном для модели идеального газа, а методы расчета реальных газов обычно рассматриваются в специальной литературе. Учет реальных свойств газов имеет большое значение при проектировании турбокомпрессоров, поэтому в данном пособии приводятся сведения о некоторых методах расчета термодинамических свойств реальных газов и их смесей.

Развитие численных методов исследования течений газа в турбокомпрессорах позволяет определять картину течения качественно, но надежное проектирование машин все еще базируется на использовании результатов экспериментальных исследований турбомашин или их моделей на специальных исследовательских стендах (например, метод универсального моделирования [1]). Моделирование процессов выполняется на основе теории подобия, что определяет важность изучения теории газодинамического подобия.

Течение газа в турбокомпрессорах преимущественно турбулентное, и поэтому необходимы знания современных моделей турбулентности и их свойств.

Таким образом, можно видеть, что теория турбокомпрессоров базируется на основных положениях термодинамики, газодинамики, теории подобия, теории решеток турбомашин. По каждому из указанных направлений учебная литература существует, но издана более двадцати лет назад.

Авторы считают, что изложение основных положений указанных выше направлений в одном учебном издании является удобным при изучении теории турбокомпрессоров.

При подборе материалов и иллюстраций использованы публикации периодических изданий, научно-технических конференций, презентаций. Ссылки на использованные источники приведены в перечне литературы. Чтобы не загромождать текст пособия большим количеством ссылок, ссылки на публикации в периодических изданиях и на интернет-материалы авторами не приводятся.

Особо авторы отмечают использование ими при подготовке данного пособия учебно-методических и научных материалов кафедры компрессорной, вакуумной и холодильной техники Санкт – Петербургского государственного политехнического университета и выражают свою глубокую признательность сотрудникам и заведующему кафедрой КВХТ профессору Юрию Борисовичу Галеркину.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

r	– радиус, m ;
\bar{m}	– массовая производительность, $кг/с$;
\bar{V}	– объемная производительность, $м^3/с$;
ρ	– плотность, $кг/м^3$;
c	– скорость, $м/с$; – удельная теплоемкость, $Дж/кг \cdot K$;
f	– площадь поверхности, $м^2$; – коэффициент; – функция;
P	– отношение давлений (степень повышения давления);
p	– давление, $Па$;
Δp	– разница давлений, $Па$;
N	– мощность, $Вт$;
h	– напор, $Дж / кг$; – размер стороны клетки, $м$;
h_i	– внутренний (полный) напор, $Дж / кг$;
η	– коэффициент полезного действия; – безразмерная координата закона стенки;
k	– показатель адиабаты; – коэффициент; – постоянная Больцмана, $k = 1,38 \cdot 10^{-23} Дж / K$; – кривизна, $м^{-1}$; – кинетическая энергия турбулентности; $Дж / кг$;
R	– газовая постоянная, $Дж/кг \cdot K$; – радиус кривизны, $м$; – радиус, $м$; – аэродинамическая сила, H ;
T	– температура, K ;
ω	– угловая скорость, $рад/с$; – коэффициент ацентричности; – удельная скорость диссипации энергии; – вектор завихренности;
n	– частота вращения, $об / мин$; – показатель политропы; – нормаль к линии тока;
t	– время, $с$; – шаг , $м$;

τ	– касательное напряжение, $Па$; – газодинамическая функция температуры;
μ	– коэффициент динамической вязкости, $Па \cdot с$; – молярная масса, $кг/моль$;
ν	– коэффициент кинематической вязкости, $м^2/с$; – угол раскрытия диффузора, $град$;
Re	– число Рейнольдса;
d	– диаметр, $м$;
a	– скорость звука, $м/с$; – коэффициент; – площадь поперечного сечения, $м^2$;
β_T	– изотермический коэффициент сжимаемости;
V	– объем, $м^3$;
M	– число Маха; – момент, $Н \cdot м$; – момент импульса, $Н \cdot м \cdot с$; – главный момент внешних сил, $Н \cdot м$;
Kn	– число Кнудсена;
l	– длина, $м$; – удельная работа, $Дж/кг$;
v	– удельный объем, $м^3/кг$;
F	– сила, $Н$;
S	– площадь поверхности, $м^2$; – критическая точка;
$\langle \varepsilon \rangle$	– средняя кинетической энергии поступательного движения молекул, $Дж$;
a_0, a_1, a_2, a_3	– коэффициенты;
i	– удельная энтальпия, $Дж/кг$;
σ	– газодинамическая функция;
q	– удельная теплота, $Дж/кг$; – скоростной напор, $Па$; – газодинамическая функция расхода;
α	– изобарный коэффициент расширения; – угол атаки, $град$; – угол потока, $град$; – коэффициент теплоотдачи, $Вт/м^2 \cdot К$;
γ	– изохорный коэффициент давления; – интенсивность вихря;
s	– удельная энтропия, $Дж/кг \cdot К$;

u	– удельная внутренняя энергия, Дж/кг ; – окружная скорость, м/с ; – скорость, м/с ;
z	– коэффициент сжимаемости; – количество лопаток; – комплексная переменная;
x	– мольная концентрация; – функция сжимаемости;
y	– функция сжимаемости;
b	– коэффициент;
B, C, D, γ	– коэффициенты уравнения состояния;
Φ	– функция взаимодействия;
a, b, c, d, e	– коэффициенты уравнения состояния;
A	– параметр;
m	– газодинамическая функция; – масса, кг ;
\vec{c}	– вектор скорости, м/с ;
K	– импульс массы в объеме V , $H \cdot c$;
\vec{F}	– вектор массовых сил;
x, y, z	– оси координат;
X, Y, Z	– проекции массовых сил, H ;
\bar{c}	– средняя скорость, м/с ;
c'	– пульсационная скорость, м/с ;
\vec{r}	– радиус-вектор;
z, r, u	– оси координат;
λ	– скоростной коэффициент; – коэффициент трения;
π	– газодинамическая функция давления; – безразмерный комплекс;
ε	– газодинамическая функция плотности; – скорость диссипации энергии, m^2/c^2 ;
l_r	– потери энергии, Дж/кг ;
B	– хорда, м ;
δ	– толщина, м ;
χ	– угол профиля, град ;
β	– угол, град ;
θ	– угол изогнутости профиля, град ; – центральный угол, град ;
n, s	– криволинейные координаты;

W	– комплексный потенциал;
φ	– потенциал скорости;
	– коэффициент;
	– безразмерная координата закона стенки;
ψ	– функция тока;
ζ	– комплексная переменная;
	– коэффициент потерь;
D, d	– диаметры характерных сечений, m ;
C	– константа;
Γ	– циркуляция, m^2/c ;
ξ, η	– координаты;
a, b	– коэффициенты;
L	– контур;
	– длина, m ;
k_u	– высота неровностей поверхности, m ;
δ^*	– толщина вытеснения, m ;
P	– сила, аэродинамическая сила, Pa ;
w	– скорость, m/c ;
c_a	– коэффициент подъемной силы;
c_w	– коэффициент профильного сопротивления;
U	– периметр, m ;
C_p	– коэффициент давления;
Ro	– число Россби;
η	– безразмерное расстояние от стенки;
η_k	– линейный масштаб турбулентности;
V_η	– скоростной масштаб турбулентности;
t_η	– временной масштаб турбулентности;
w_*	– динамическая скорость, m/c ;
$\Phi, P, D, \Gamma_\phi, A$	– коэффициенты уравнений переноса;
a_{ij}	– компоненты тензора анизотропии;
l_m	– длина пути смешения, m .
δ_{ij}	– коэффициент Кронекера;
κ	– число Кармана;
C_μ^*	– эмпирическая функция;
S_{ij}	– тензор деформаций;
Ω_{ij}	– тензор завихренности;

D_{VD}	– демпфирующий множитель ван Дриста;
F_{Kleb}	– функция перемежаемости Клебанова;
$k - \varepsilon$	– модель турбулентности;
$k - \omega$	– модель турбулентности.

Индексы:

i	– i -й параметр; i -я координата;
n	– начальный;
k	– конечный;
$расх$	– расходный;
$дв$	– двигатель;
$мех$	– механический;
n	– политропный;
	– нормальная проекция параметра;
	– в проекции на n ;
$пр$	– приведенный;
	– профильный;
$ном$	– номинальный;
a	– атмосферный;
$ид$	– идеальный;
p	– при постоянном давлении;
$0, 1, 2, 3, 4, 5$	– обозначение характерных сечений проточной части;
v	– при постоянном объеме;
T	– при постоянной температуре;
	– теоретический;
s	– при постоянной энтропии;
r	– приведенный параметр;
	– в проекции на ось r ;
	– потери;
$кр$	– критический;
j	– j -я координата; j -й параметр;
o	– основной;
ε	– эталонный;
*	– адиабатически заторможенный поток;
y	– условный;
$ср$	– среднее значение параметра; параметры на средней линии канала;
x, y, z	– в проекции на оси;
u	– в проекции на ось u ;
z	– относительно оси z ;

	– пьезометрический;
<i>внеш</i>	– внешний;
<i>д</i>	– динамический;
	– давления;
	– диффузор;
<i>рк</i>	– рабочее колесо;
<i>р</i>	– расходный;
	– расчетный;
Δ	– разность величин;
<i>сп</i>	– спинка;
<i>кор</i>	– корытце;
<i>л</i>	– лопатка;
<i>ц</i>	– центр;
	– центробежный;
∞	– бесконечность;
<i>вихр</i>	– вихревой ;
<i>вып</i>	– выпуклый ;
<i>вог</i>	– вогнутый ;
<i>пс</i>	– пограничный слой ;
<i>я</i>	– ядро потока ;
<i>w</i>	– сопротивление трения ;
<i>г</i>	– гидравлический;
<i>экв</i>	– эквивалентный;
<i>тр</i>	– трения;
<i>расш</i>	– расширения;
<i>вт</i>	– вторичные;
<i>отр</i>	– отрывные;
<i>волн</i>	– волновые;
<i>min</i>	– минимальный;
<i>max</i>	– максимальный;
<i>отн</i>	– относительный.
<i>t</i>	– турбулентный;
<i>v</i>	– вязкостный;
<i>эф</i>	– эффективный.

Сокращения:

ISO	– International Organization for Standardization
КПД	– коэффициент полезного действия;
РА	– рабочий аппарат;
ВНА	– входной направляющий аппарат;
ПНА	– промежуточный направляющий аппарат;
ГПА	– газоперекачивающий агрегат;
ТРД	– турбореактивный двигатель;
ГТД	– газотурбинный двигатель;
ДВС	– двигатель внутреннего сгорания;
БВР	– Бенедикта-Вебба-Рубина;
РК	– рабочее колесо;
БЛД	– безлопаточный диффузор;
ЛД	– лопаточный диффузор;
ОНА	– обратный направляющий аппарат;
3D	– 3 Dimension (трехмерный);
ЦАГИ	– центральный аэрогидродинамический институт;
RANS	– Reynolds averaged Navier-Stokes;
LES	– Large Eddy Simulation;
DES	– Detached Eddy Simulation;
DNS	– Direct Numerical Simulation;
ТПС	– турбулентный пограничный слой;
SST	– shear stress transport.

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Теория турбокомпрессоров» является базовой для изучения специальных дисциплин, связанных с проектированием, математическим моделированием и проведением испытаний турбокомпрессоров.

Содержание пособия в наибольшей степени соответствует программе подготовки студентов специальности «Компрессоры, пневмоагрегаты и вакуумная техника», но пособие может быть полезным для студентов смежных специальностей профессиональных направлений «Энергомашиностроение», «Энергетика» и «Механика».

Для успешного изучения учебного материала дисциплины «Теория турбокомпрессоров» необходимы знания основных разделов дисциплин, указанных ниже:

- Высшая математика: дифференциальное и интегральное исчисления, дифференциальные уравнения, аналитическая геометрия, векторная алгебра, теория рядов;
- Физика: физические основы механики, молекулярно-кинетическая теория газов;
- Теоретическая механика: статика, кинематика и динамика точки и твердого тела;
- Техническая термодинамика: термодинамика идеальных и реальных газов;
- Газодинамика: газодинамика сжимаемой жидкости, основы теории пограничного слоя, расчет одно-, двух- и трехмерных течений сжимаемой жидкости.

В пособии рассматриваются: основные термины и определения, принцип действия, области применения, термодинамические и газодинамические основы теории турбокомпрессоров, обтекание профилей и решеток профилей турбокомпрессоров, течение газа в каналах турбомашин, газодинамическое подобие турбокомпрессоров, турбулентность.

В пособии принята такая последовательность изложения учебного материала: дифференциальные уравнения в общем виде, полученные из основных законов сохранения механики, рассматриваются кратко без подробностей вывода уравнений и их анализа. Затем показывается получение уравнений в более простой форме при тех или иных допущениях. Те вопросы термодинамики и газодинамики, которые не входят в программу изучения соответствующих дисциплин, излагаются в данном пособии более детально.

В начале каждого раздела приводится перечень основных вопросов, которые рассматриваются в данном разделе.

В конце каждого раздела приведен список литературы, рекомендуемой для углубленного изучения темы раздела, а также даны вопросы для самопроверки.

Следует отметить, что в данном пособии не рассматриваются методики расчета элементов турбокомпрессоров при их проектировании и вопросы, связанные с конструированием машин.

Пособие может использоваться магистрами и аспирантами при подготовке к сдаче экзаменов.

РАЗДЕЛ 2

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТУРБОКОМПРЕССОРОВ

Основные физические свойства газов. Модель сплошной среды. Уравнение состояния. Идеальный газ. Реальный газ. Использование закона соответственных состояний. Уравнение Загорученко. Уравнение Бенедикта-Вебба-Рубина (метод Ли-Кеслера). Дифференциальные уравнения термодинамики. Процессы реальных газов

2.1 Основные физические свойства газов

Физические свойства газов определяются их молекулярной структурой.

Характерными физическими свойствами газов являются *текучесть, вязкость, сжимаемость*.

Текучесть – свойство газа заполнять весь объем, в который помещен газ. Это свойство объясняется слабыми силами взаимодействия молекул газа между собой.

Вязкость – свойство газа сопротивляться деформации. Величина сопротивления зависит от скорости деформации. Это свойство (как и текучесть) объясняется силами взаимодействия молекул газа между собой.

Касательные напряжения от сил вязкости согласно закону Ньютона пропорциональны градиенту скорости по нормали к направлению движения

$$\tau = \mu \cdot \frac{dc}{dn} . \quad (2.1)$$

Динамический коэффициент вязкости μ имеет размерность $Па \cdot с$. Динамический коэффициент вязкости слабо зависит от давления и характера движения газа.

Наряду с динамическим коэффициентом вязкости используется кинематический коэффициент вязкости

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} . \quad (2.2)$$

Кинематический коэффициент вязкости имеет размерность $м^2/с$.

Для определения динамического коэффициента вязкости в зависимости от температуры используется формула Сазерленда

$$\mu = \mu_0 \cdot \frac{T_0 + C}{T + C} \cdot \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1,5}, \quad (2.3)$$

где μ_0 – коэффициент вязкости при 273 К и 0,1013 МПа; С – константа Сазерленда.

Закон Ньютона можно сформулировать в молекулярно- кинетической теории газов как закон переноса импульса молекул.

Процессы переноса тепла, вещества и импульса (количества движения) имеют место вследствие неоднородности параметров газа. Процессы переноса тепла и вещества происходят как в неподвижной, так и в движущейся среде. Перенос импульса, являясь следствием вязкости, имеет место только в движущихся газах.

При движении вязких газов получается разная структура потока.

Режим течения связывают со значениями чисел Рейнольдса: при малых числах Рейнольдса течение ламинарное, при больших – турбулентное.

Число Рейнольдса – безразмерная величина, которая показывает соотношение сил инерции и вязкости.

Число Рейнольдса определяется по формуле

$$Re = \frac{c \cdot d}{\nu}, \quad (2.4)$$

где c – скорость; d – характерный размер; ν – коэффициент вязкости.

Большое количество визуализаций различных течений представлено в альбоме Ван Дайка «An album of fluid motion».

Ниже приведены в качестве примера несколько фотографий из этого альбома.

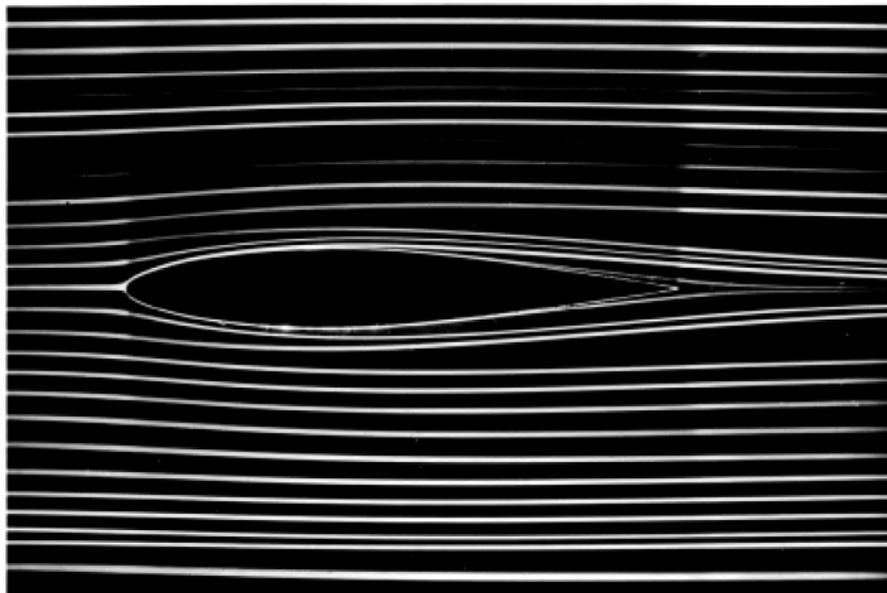


Рисунок 2.1 – Симметричное обтекание профиля плоским потоком

На рисунке 2.1 показан профиль, который помещен в гидродинамическую трубу при нулевом угле атаки. Число Рейнольдса, рассчитанное по хорде, равно 7000. Линии тока визуализировались с помощью подкрашенной жидкости. Течение, очевидно ламинарное, безотрывное.

На рисунке 2.2 показано обтекание симметричного профиля под углом атаки.

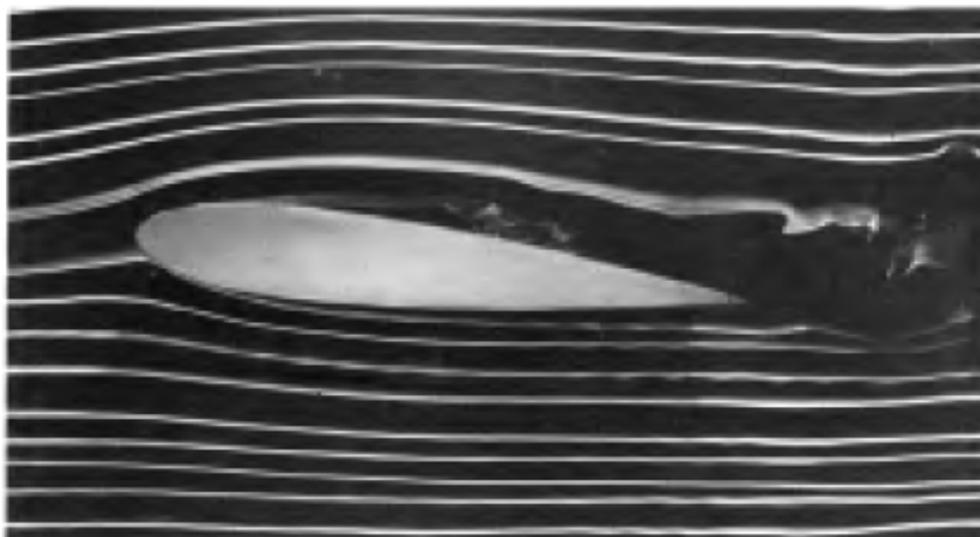


Рисунок 2.2 – Симметричный профиль под углом атаки

Дым в аэродинамической трубе показывает отрыв на верхней поверхности профиля, установленного под углом атаки 6° , при числе Рейнольдса 20000.

Показанный на рисунке 2.3 турбулентный пограничный слой развивается естественным образом на пластинке длиной 3,3 м, подвешенной в аэродинамической трубе. Линии меченых частиц, идущие от дымовой проволоочки, установленной вблизи острой передней кромки, освещаются световым ножом. Число Рейнольдса, рассчитанное по толщине потери импульса, равно 3500.

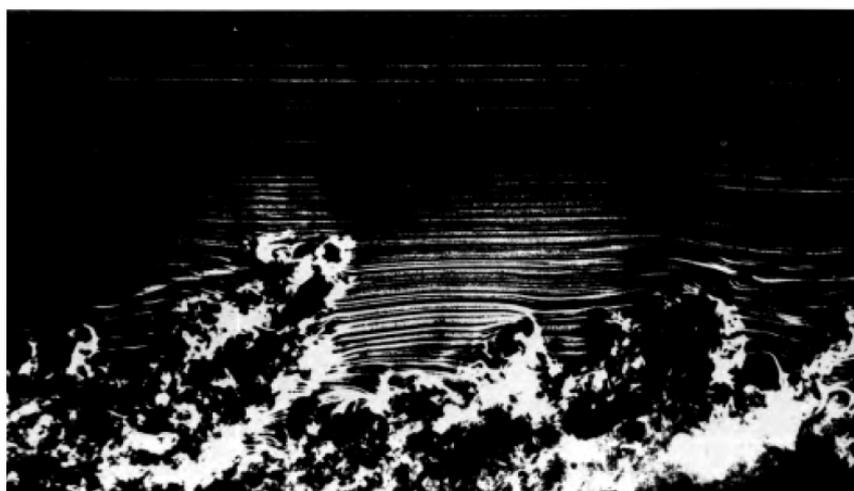


Рисунок 2.3 – Турбулентный пограничный слой

При обтекании шара (рис. 2.4) ламинарный пограничный слой отрывается перед экватором, причем этот слой остается ламинарным на длине, почти равной радиусу. Затем слой становится неустойчивым и быстро превращается в турбулентный.

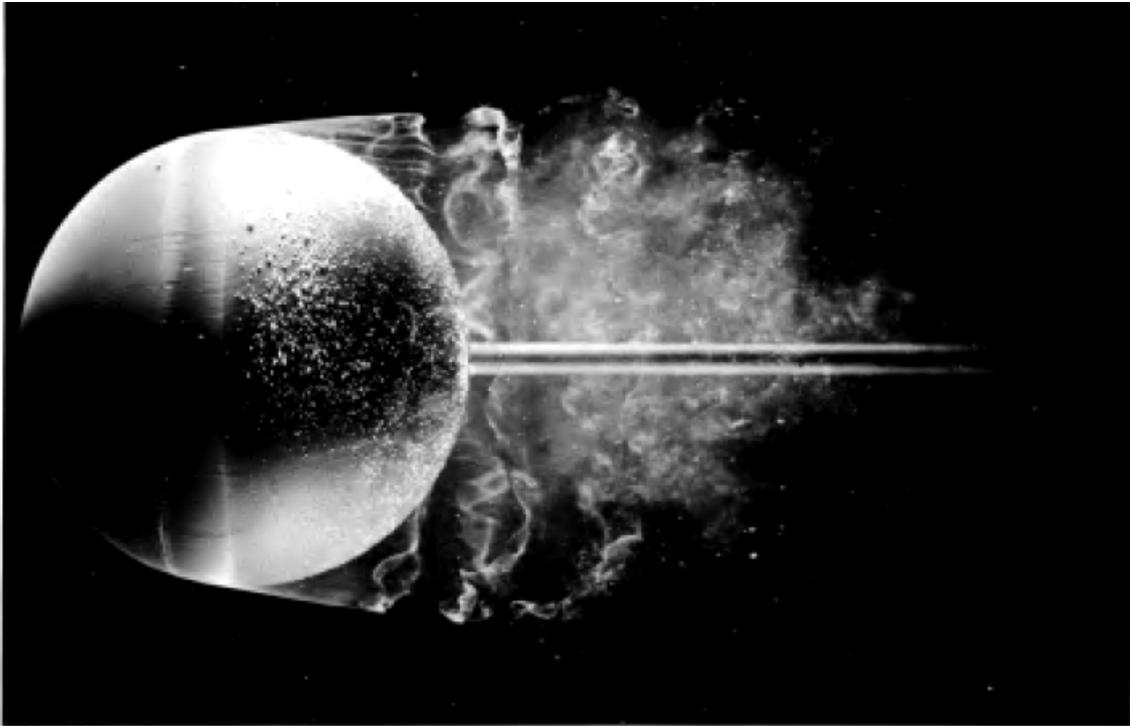


Рисунок 2.4 – Обтекание шара при $Re=15000$

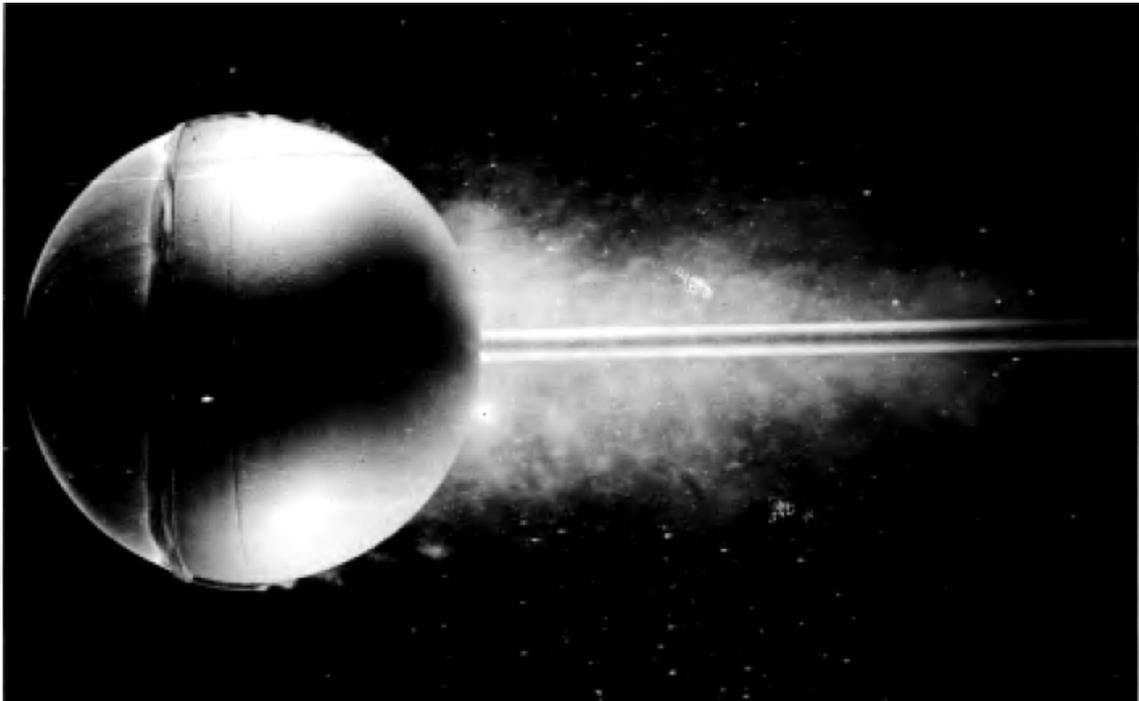


Рисунок 2.5 – Обтекание шара с турбулизирующей проволокой при $Re=30000$

На рисунке 2.5 показано, как с помощью визуализации воздушными пузырьками в воде повторен классический эксперимент Прандтля и Визельсбергера. Проволочный обруч, надетый на шар перед экватором, возмущает пограничный слой. Слой становится турбулентным и поэтому отрывается ниже по потоку, чем ламинарный. Сопротивление при этом значительно уменьшается до значения, достигаемого на гладком шаре только при числе Рейнольдса, в десять раз превышающем существующее в потоке.

Сжимаемость – способность газа под действием внешних сил изменять свой объем. Количественно сжимаемость среды определяется изменением ее плотности $\Delta\rho$ по отношению к изменению давления Δp . В физике пользуются обратной величиной $\frac{\Delta p}{\Delta\rho} = a^2$. Здесь a – скорость звука в данной среде. Для малосжимаемых жидкостей изменение плотности мало даже при больших изменениях давления, для газов изменение плотности большое. Скорость звука является характеристикой сжимаемости для жидкостей и газов в состоянии покоя.

Сжимаемость жидкостей и газов характеризуется изотермическим коэффициентом сжимаемости

$$\beta_T = -\frac{1}{V} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T. \quad (2.5)$$

Для потоков газа для оценки сжимаемости используется отношение скорости потока к скорости звука при тех же параметрах газа. Это отношение называют *числом Маха*

$$M = \frac{c}{a}. \quad (2.6)$$

Скорость звука можно определить по формуле

$$a = \sqrt{\frac{p}{\rho}}. \quad (2.7)$$

Для идеального газа формула (2.7) может быть записана в виде $a = \sqrt{k \cdot R \cdot T}$. Здесь k – показатель адиабаты; R – газовая постоянная; T – температура газа.

Для дозвуковых течений $M < 1$, для сверхзвуковых $M > 1$. $M = 1$ показывает, что скорость потока равна местной скорости звука.

При $M < 0,3$ принято считать, что сжимаемостью газа можно пренебрегать, т.е. принимать $\rho = const$.

2.2 Модель сплошной среды

Газы состоят из молекул, которые расположены на относительно больших расстояниях друг от друга. В то же время количество молекул в объемах, малых по сравнению с размерами сосудов, очень большое. Например, в одном кубическом миллиметре воздуха при нормальных условиях содержится $2,7 \cdot 10^{16}$ молекул. Когда мы говорим «большой» или «малый», то всегда имеем в виду: по сравнению с чем большой или по сравнению с чем малый. В данном случае при рассмотрении возможности представления газа, имеющего молекулярную структуру, в виде сплошной среды, сравниваются размеры каналов с длиной свободного пробега молекул. Критерием того, можно ли считать газ сплошной средой, служит число Кнудсена

$$Kn = \frac{l_a}{l} \cdot \frac{p_a}{p}, \quad (2.8)$$

где l_a – длина свободного пробега молекул при давлении окружающей среды p_a ; l – характерный размер проточной части; p – давление газа.

При $Kn \leq 0,01$ газ можно рассматривать как сплошную среду. В энергетических машинах это условие практически всегда выполняется.

Использование модели сплошной среды позволяет использовать математический аппарат дифференциального и интегрального исчисления. Уравнения термодинамики и газодинамики получены при использовании модели сплошной среды.

Модель сплошной среды позволяет рассматривать такие макроскопические параметры газа, как давление, температура, плотность, непрерывно распределенными в объеме газа.

Плотность характеризует распределение массы в пространстве, занятом газом. Плотность находится как отношение массы Δm , заключенной в объеме ΔV , к самому объему ΔV :

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}. \quad (2.9)$$

Размерность плотности $\text{кг}/\text{м}^3$. Величина, обратная плотности, называется *удельным объемом*

$$v = \frac{1}{\rho}. \quad (2.10)$$

Давление – величина, которая равна отношению нормальной силы к площади поверхности, на которую действует сила

$$p = \frac{F_n}{S}. \quad (2.11)$$

Температура – мера нагретости тела.

С точки зрения молекулярно-кинетической теории (МКТ) температура – это мера средней кинетической энергии поступательного движения молекул:

$$T = \frac{2}{3 \cdot k} \cdot \langle \varepsilon \rangle. \quad (2.12)$$

В формуле (2.12) $\langle \varepsilon \rangle$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул; k – постоянная Больцмана, $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} / \text{К}$.

Давление, температуру и удельный объем связывает между собой термическое уравнение состояния.

2.3 Модель идеального газа

Термин «идеальный газ» широко используется в физике, но в различных разделах физики свойства газа, которые подразумеваются при использовании этого термина, часто различаются. Поэтому рассмотрим вопросы, связанные с использованием термина «идеальный газ», подробнее.

В термодинамике термин «идеальный газ» связывают только с определением термодинамических свойств газа. В газовой динамике «идеальный газ» - это невязкий газ.

Физическая модель идеального газа предполагает следующие допущения:

- объём частицы газа равен нулю (то есть диаметр молекулы пренебрежимо мал по сравнению со средним расстоянием между молекулами);
- импульс передается только при соударениях (то есть силы притяжения между молекулами не учитываются, а силы отталкивания возникают только при соударениях);
- суммарная энергия частиц газа постоянна (то есть нет передачи энергии за счет передачи тепла или излучением).

Согласно молекулярно-кинетической теории в этом случае частицы газа движутся независимо друг от друга, давление газа на стенку равно сумме импульсов в единицу времени, переданной при столкновении частиц со стенкой, энергия — сумме энергий частиц газа.

Модель идеального газа чрезвычайно удобна во многих случаях. Для турбомашин одинаково важным является учет и термодинамических, и газодинамических свойств. Однако иногда удобно рассматривать невязкий газ, но термодинамические свойства определять как для реального газа. В иных случаях можно считать термодинамические параметры как для идеального газа, но газ считать вязким.

2.3.1 Уравнение состояния Менделеева-Клапейрона

При давлениях газа p , существенно меньших критического давления $p_{кр}$, и температурах T , больших, чем критическая температура $T_{кр}$, можно считать, что газ находится в идеальном газовом состоянии и использовать для расчетов уравнение состояния Менделеева-Клапейрона

$$p \cdot v = R \cdot T . \quad (2.13)$$

В системе СИ единица измерения давления $Па$, удельного объема - $м^3/кг$, температуры - $К$, газовой постоянной - $Дж/кг К$.

Теплоемкость идеального газа c_p считается не зависящей от давления, т.е. является функцией температуры $c_p^{уд} = f(T)$ и может быть вычислена по формуле

$$c_p^{уд} = a_0 + a_1 \cdot T + a_2 \cdot T^2 + a_3 \cdot T^3 . \quad (2.14)$$

Единица измерения теплоемкости - $Дж/кг К$.

Для идеального газа справедливым является уравнение Майера $c_p - c_v = R$. Показатель адиабаты определяется по формуле $k = \frac{c_p}{c_v}$.

Формулы для расчета термических и калорических параметров идеального газа имеют простую форму (например, энтальпия идеального газа $i^{уд} = \int c_p^{уд} \cdot dT$ - является функцией только температуры), поэтому использование уравнения состояния Менделеева-Клапейрона в тех случаях, когда обеспечивается приемлемая точность расчетов, является удобным.

2.3.2 Уравнение политропного процесса

Политропным называют процесс, при котором теплоемкость постоянна. Политропными являются все основные термодинамические процессы идеального газа: изобарный, изохорный, изотермический, адиабатный.

Уравнение политропного процесса

$$\frac{dp}{p} + n \cdot \frac{dv}{v} = 0 , \quad (2.15)$$

или в интегральном виде

$$p \cdot v^n = const \quad (\text{или} \quad \frac{p}{\rho^n} = const) . \quad (2.16)$$

Уравнение процесса является пятипараметрическим, т.е. позволяет определить неизвестный пятый параметр, если известны остальные четыре. Обычно используется для определения температуры газа в конце процесса сжатия:

$$T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}}, \quad (2.17)$$

где n – показатель политропы.

При проведении экспериментальных исследований показатель политропы можно определить, используя уравнение (2.15): $n = \frac{\ln(p_2/p_1)}{\ln(v_1/v_2)}$. Выполнить измерение температуры проще, чем удельного объема, поэтому обычно определяется газодинамическая функция

$$\sigma = \frac{n}{n-1} = \frac{\ln(p_2/p_1)}{\ln(T_2/T_1)}. \quad (2.18)$$

Для идеального газа газодинамическую функцию σ можно определять по формуле

$$\sigma = \frac{n}{n-1} = \frac{k}{k-1} \cdot \eta_n, \quad (2.19)$$

где η_n – политропный коэффициент полезного действия.

Теплоемкость политропного процесса определяется по формуле

$$c_n = c_v \frac{n-k}{n-1}, \quad (2.20)$$

а теплота политропного процесса рассчитывается по формуле

$$q = c_n \cdot (T_2 - T_1). \quad (2.21)$$

Удельная работа (Дж/кг) политропного процесса сжатия определяется по формуле

$$l_n = \int_{p_1}^{p_2} v \cdot dp = \frac{n}{n-1} \cdot R \cdot T_1 \cdot \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right] = \frac{n}{n-1} \cdot R \cdot (T_2 - T_1). \quad (2.22)$$

Термодинамические уравнения для идеального газа используются при расчетах воздушных турбокомпрессоров, т. е. для небольших давлений.

Свойства реального газа при больших давлениях или низких температурах значительно отличаются от свойств идеального, поэтому использование уравнений для идеального газа дает большую погрешность. Ниже приводятся некоторые методы расчета свойств реального газа.

2.4 Реальный газ

Термическое уравнение состояния реального газа $v = v(p, T)$ в дифференциальной форме имеет вид

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = -1. \quad (2.23)$$

Уравнение (2.23) иногда записывают в виде

$$\alpha = \beta_T \cdot \gamma \cdot p, \quad (2.24)$$

где $\alpha = \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ – изобарный коэффициент расширения; $\beta_T = -\frac{1}{v} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T$ – изотермический коэффициент сжимаемости; $\gamma = \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$ – изохорный коэффициент давления.

Дифференциальные уравнения, связывающие калорические и термические свойства газа, определяются из термодинамического тождества с использованием уравнений Максвелла.

Термодинамическое тождество

$$Tds = du + pdv = di - vdp, \quad (2.25)$$

где s – энтропия; u – внутренняя энергия; $i = u + pv$ – энтальпия.

Уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p &= \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s, & \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_s &= -\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_v, \\ \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p &= -\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T, & \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_T &= \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Используя уравнения (2.25) и (2.26) для основных термодинамических величин, можно составить несколько сотен частных производных первого порядка и десятки тысяч частных производных второго порядка. Для получения наиболее употребляемых дифференциальных уравнений можно пользоваться таблицами Бриджмена [4].

2.4.1 Закон соответственных состояний

В общем виде термическое уравнение состояние реального газа записывается обычно так :

$$p \cdot v = z \cdot R \cdot T, \quad (2.27)$$

где z – коэффициент сжимаемости, который может быть определен с использованием какого-либо уравнения состояния реального газа.

Широко используется в инженерных расчетах метод обобщенных зависимостей, который основан на использовании закона соответственных состояний.

Закон соответственных состояний гласит, что все вещества подчиняются одному уравнению состояния, если это уравнение выразить через приведенные переменные. Этот закон является приближенным и позволяет достаточно просто оценивать свойства плотного газа или жидкости с точностью порядка 10–15%.

Термодинамические свойства газовых смесей определяются с помощью обобщенных таблиц и графиков коэффициентов сжимаемости z , энтальпий i и теплоемкостей c_p в зависимости от приведенных температур и давлений.

Приведенные параметры состояния определяются соотношениями $p_r = \frac{p}{p_{кр}}$, $T_r = \frac{T}{T_{кр}}$,

где $p_{кр}$ и $T_{кр}$ – критические давление и температура вещества, или псевдокритические параметры газовой смеси.

Псевдокритические параметры газовой смеси обычно определяются по методу Кея, который является наиболее простым:

$$p_{кр} = \sum x_i \cdot p_{кри} , \quad T_{кр} = \sum x_i \cdot T_{кри} , \quad \rho_{кр} = \sum x_i \cdot \rho_{кри} . \quad (2.28)$$

Для смеси газов из k компонентов с мольной концентрацией i -го компонента x_i

$$c_p^{уд} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i \cdot \mu_i \cdot c_{pi}^{уд}}{\mu} . \quad (2.29)$$

Молярная масса смеси газов

$$\mu = \sum_{i=1}^k x_i \cdot \mu_i \quad (2.30)$$

Значения коэффициента сжимаемости находятся с использованием номограммы, показанной на рисунке 2.6.

Изобарная теплоемкость определяется по формуле

$$c_p = c_p^{ид} + \Delta c_p \quad (2.31)$$

где $c_p^{ид}$ определяется по формуле (2.14); поправка к теплоемкости Δc_p определяется по номограмме, показанной на рисунке 2.7.

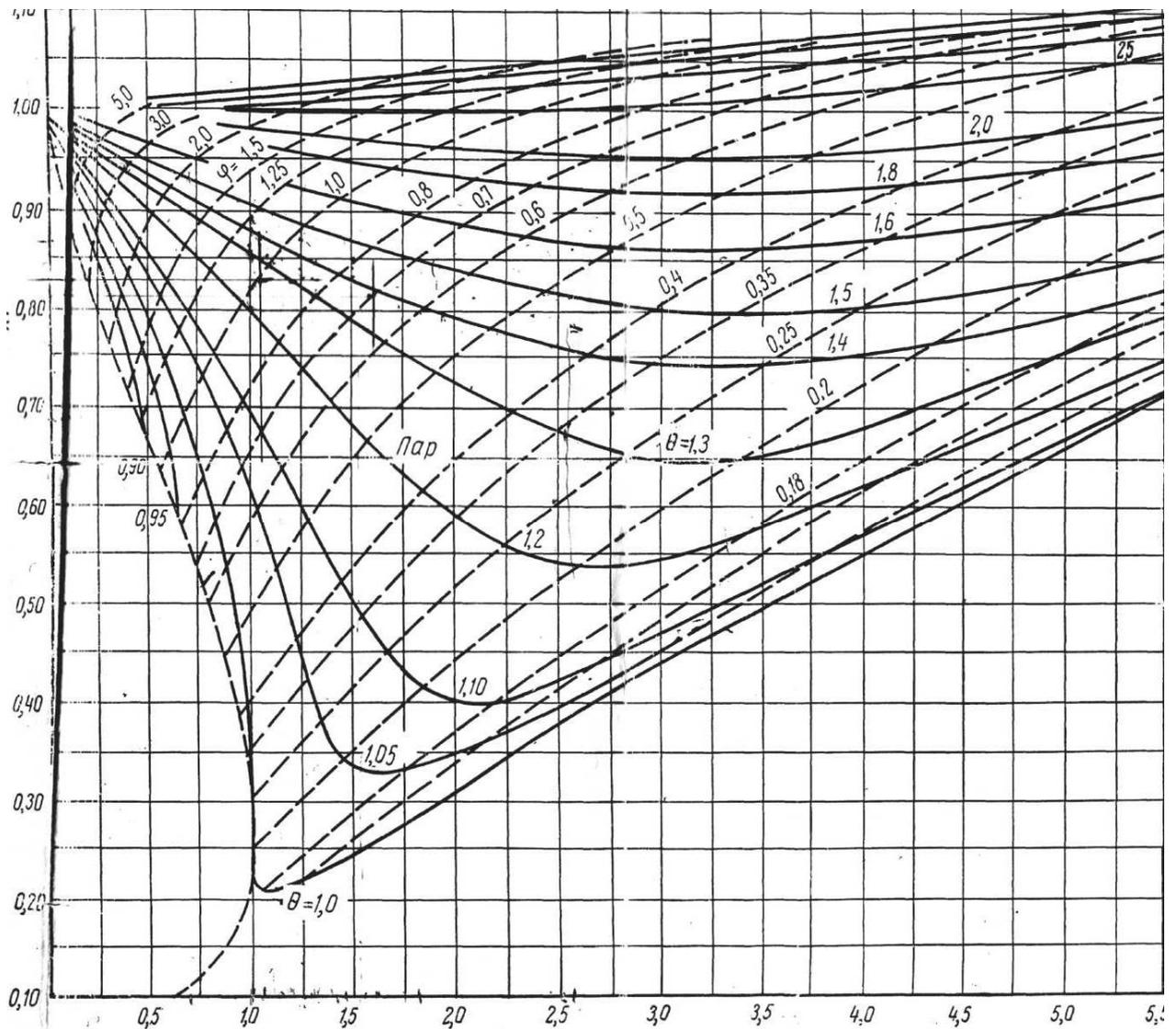


Рисунок 2.6 – Номограмма для определения значений коэффициента сжимаемости z

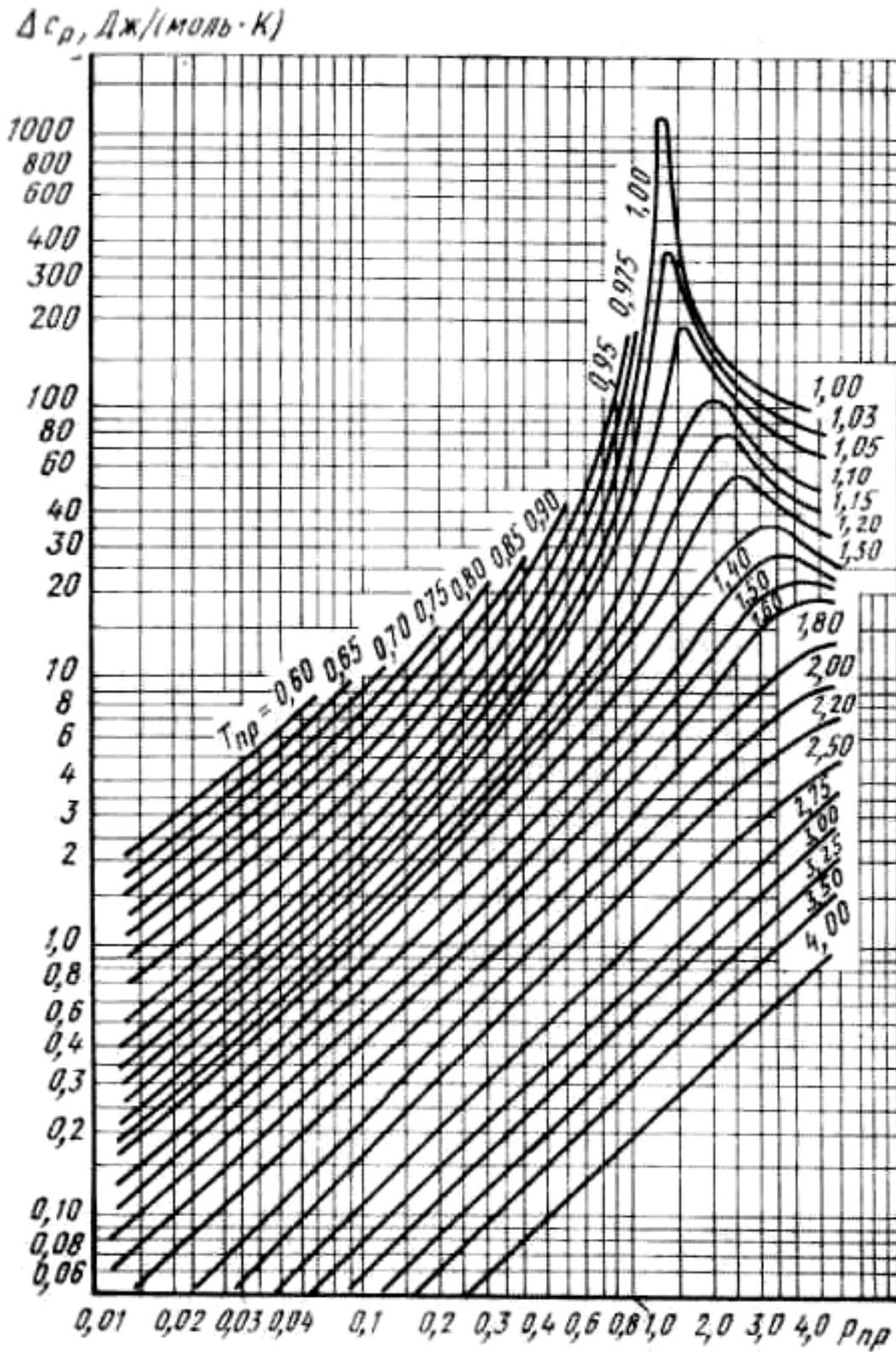


Рисунок 2.7 – Поправка к теплоемкости Δc_p

Значения коэффициентов a_0, a_1, a_2, a_3 для некоторых газов приведены в [4].

Теплоемкость при постоянном объеме определяется по формуле

$$c_v = c_p - R \cdot z \cdot \frac{(1+X)^2}{Y}, \quad (2.32)$$

где X и Y – функции сжимаемости, которые определяются в зависимости от p_r и T_r с использованием номограмм, показанных на рисунках 2.8 и 2.9.

Метод определения термодинамических свойств газовых смесей по обобщенным таблицам и графикам, кроме недостаточной точности получаемых результатов, имеет и другие существенные недостатки. Основные из них: 1) отсутствие увязки между значениями плотности ρ , энтальпии i , энтропии s , теплоемкости c_p ; 2) трудность автоматизации расчетов.

Закон соответственных состояний первоначально был сформулирован Ван-дер-Ваальсом в 1873 году. Уравнение *Ван-дер-Ваальса* получило большое распространение вследствие простоты и физической наглядности:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right) \cdot (v - b) = R \cdot T. \quad (2.33)$$

Константы уравнения *Ван-дер-Ваальса* определяются, как правило, по известным критическим параметрам из условий

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{T_{кр}} = 0; \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_{T_{кр}} = 0. \quad (2.34)$$

Совместное решение этих уравнений дает $v_{кр} = 3 \cdot b$; $p_{кр} = \frac{a}{27 \cdot b^2}$; $T_{кр} = \frac{8 \cdot a}{27 \cdot R \cdot b}$. Тогда

критический коэффициент сжимаемости $z_{кр} = \frac{p_{кр} \cdot v_{кр}}{R \cdot T_{кр}} = \frac{3}{8} = 0,375$.

Значение $z_{до}$ для реальных газов заметно меньше (0,27-0,3), чем получается из уравнения *Ван-дер-Ваальса*. Как и другие простые уравнения состояния с двумя индивидуальными параметрами, уравнение *Ван-дер-Ваальса* является неточным. В практических расчетах данное уравнение, как правило, не используется, но имеет принципиальное значение, потому что:

- 1) уравнение было получено из модельных представлений о свойствах реальных газов и жидкостей, а не явилось результатом эмпирического подбора функции $f(p, v, T)$;
- 2) на основе этого уравнения построено много других уравнений состояния;

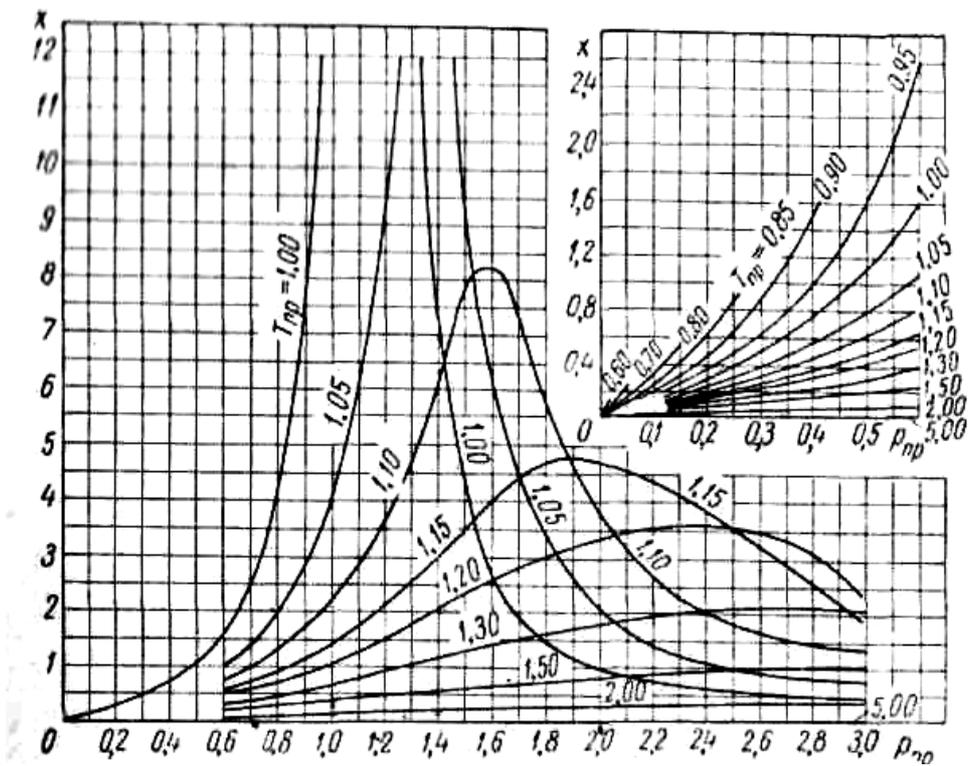


Рисунок 2.8 – Функция сжимаемости X

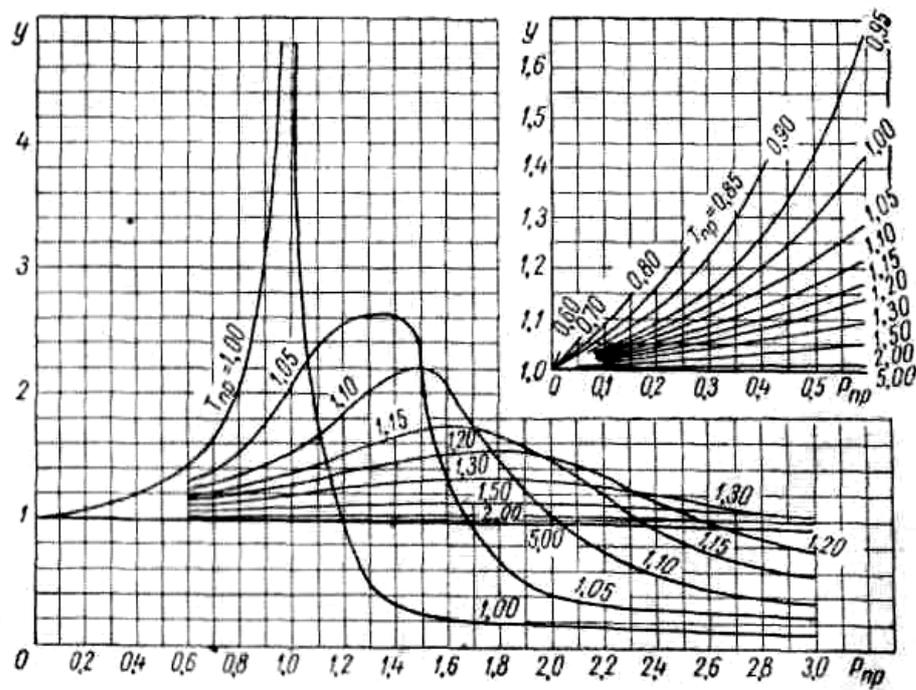


Рисунок 2.9 – Функция сжимаемости Y

3) с помощью уравнения *Ван-дер-Ваальса* впервые удалось описать явление перехода газа в жидкость и проанализировать критические явления. В этом отношении уравнение *Ван-дер-Ваальса* имеет преимущество перед более точными уравнениями в вириальной форме.

2.4.2 Уравнения состояния в вириальной форме

Существует значительное количество (более ста) уравнений состояния для определения термодинамических свойств реальных газов. Начиная с простых уравнений состояния Дюпре (1864), Гирна (1865), Ван-дер-Ваальса (1873), были получены уравнения, которые позволяли определять термодинамические свойства газов все с большей точностью. Уравнения состояния в вириальной форме – Тиссена (1885), Камерлинг-Оннеса (1901) и др. содержат коэффициенты (так называемые *вириальные* коэффициенты), которые зависят только от температуры. Уравнения состояния в вириальной форме записываются либо относительно удельного объема (2.35), либо давления (2.36):

$$z = \frac{p \cdot v}{R \cdot T} = 1 + \frac{B}{v} + \frac{C}{v^2} + \frac{D}{v^3} + \dots, \quad (2.35)$$

$$z = \frac{p \cdot v}{R \cdot T} = 1 + B' \cdot p + C' \cdot p^2 + D' \cdot p^3 + \dots. \quad (2.36)$$

Вириальное уравнение состояния Боголюбова-Майера, справедливое как для области пара, так и для области жидкости, широко используется при определении свойств воды и водяного пара.

Использование уравнений состояния Битти-Бриджмена, Загорученко, Редлиха-Квонга и др. возможно, если известны значения индивидуальных коэффициентов компонентов газовой смеси и коэффициентов, учитывающих взаимодействие компонентов.

Рассмотрим более подробно *метод Загорученко*, который используется при расчетах свойств углеводородных смесей.

Общее выражение для составления уравнения состояния многокомпонентной смеси согласно методу Загорученко записывается так:

$$z_{см} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot z_i + \sum_i \sum_j x_i \cdot x_j \cdot \Phi_{ij}, \quad (2.37)$$

где x_i – мольные доли компонентов смеси;

z_i – коэффициенты сжимаемости компонентов смеси;

Φ_{ij} – функция взаимодействия i -го и j -го компонентов смеси.

Коэффициенты сжимаемости компонентов смеси определяются из уравнения состояния чистых газов, которое имеет следующий вид:

$$z = 1 + B \cdot \rho_r + C \cdot \rho_r^2 + D \cdot \rho_r^3 + E \cdot \rho_r^4 + F \cdot \rho_r^5 + G \cdot \rho_r^6, \quad (2.38)$$

$$\text{где } B = a_1 \cdot T_r^{-1} + b_1 + c_1 \cdot T_r^{-3}; \quad C = a_2 \cdot T_r^{-1} + b_2 + c_2 \cdot T_r^{-3};$$

$$D = a_3 \cdot T_r^{-1} + b_3 + c_3 \cdot T_r^{-3}; \quad E = a_4 \cdot T_r^{-1} + b_4 + c_4 \cdot T_r^{-3};$$

$$F = a_5 \cdot T_r^{-1} + b_5 + c_5 \cdot T_r^{-3}; \quad G = a_6 \cdot T_r^{-1} + b_6 + c_6 \cdot T_r^{-3}.$$

Значения коэффициентов уравнения состояния для основных компонентов природных газов (метан, этан и т.д.) известны, уравнение Загорученко используется при расчетах свойств углеводородных смесей.

Функцию взаимодействия для бинарной смеси можно определить по формуле

$$\Phi_{ij} = B'_{ij} \cdot \rho_r + C'_{ij} \cdot \rho_r^2 + D'_{ij} \cdot \rho_r^3 + E'_{ij} \cdot \rho_r^4 + F'_{ij} \cdot \rho_r^5 + G'_{ij} \cdot \rho_r^6, \quad (2.39)$$

$$\text{где } B'_{ij} = d_1 \cdot T_r^{-1} + e_1; \quad C'_{ij} = d_2 \cdot T_r^{-1} + e_2; \quad D'_{ij} = d_3 \cdot T_r^{-1} + e_3;$$

$$E'_{ij} = d_4 \cdot T_r^{-1} + e_4; \quad F'_{ij} = d_5 \cdot T_r^{-1} + e_5; \quad G'_{ij} = d_6 \cdot T_r^{-1} + e_6.$$

Применительно к природным газам принято считать, что достаточно учитывать взаимодействие метана с компонентами, содержание которых в смеси более 1%. Значения коэффициентов d_i, e_i для ряда бинарных смесей метана с другими компонентами природных газов приведены в [5]. Значения псевдокритических параметров T_r и ρ_r определяются по методу Кея.

2.4.3 Уравнение Бенедикта-Вебба-Рубина

Метод Ли–Кеслера, основанный на использовании модифицированного уравнения Бенедикта-Вебба-Рубина (БВР), для практического применения требует значительно меньшего объема информации о рассматриваемых веществах. Согласно данному методу термодинамические параметры определяются по формуле

$$A = A^o + \frac{\omega}{\omega^o} \cdot (A^s - A^o), \quad (2.40)$$

где A – рассматриваемый параметр; ω – коэффициент ацентричности.

Индексом o обозначаются величины для "основного" вещества, для которого $\omega = 0$, а индексом s – для "эталонного" вещества, в качестве которого выбран н-октан, $\omega^s = 0,3978$. По формуле (2.40) определяются термодинамические параметры, такие, как коэффициент

сжимаемости z , изотермические поправки к удельной энтальпии $\Delta i = i - i^{ид}$, удельной энтропии $\Delta s = s - s^{ид}$, изобарной теплоемкости $\Delta c_p = c_p - c_p^{ид}$ и др.

Модифицированное уравнение БВР имеет вид

$$\frac{P_r}{T_r \cdot \rho_r} = 1 + B \cdot \rho_r + C \cdot \rho_r^2 + D \cdot \rho_r^5 + \frac{c_4}{T_r^3} \cdot \rho_r^2 \cdot (\beta + \gamma \cdot \rho_r^2) \cdot e^{-\gamma \cdot \rho_r^2}, \quad (2.41)$$

где индекс r относится к приведенным параметрам состояния рассматриваемого вещества.

Коэффициенты уравнения (2.41) определяются по формулам

$$B = b_1 - \frac{b_2}{T_r} - \frac{b_3}{T_r^2} - \frac{b_4}{T_r^3}, \quad C = c_1 - \frac{c_2}{T_r} - \frac{c_3}{T_r^3}, \quad D = d_1 + \frac{d_2}{T_r}. \quad (2.42)$$

Приведенная плотность $\rho_r = \frac{P_r}{z \cdot T_r}$, поэтому уравнение (2.41) можно записать в форме,

удобной для вычисления z методом последовательных приближений:

$$z = 1 + B \cdot \frac{P_r}{T_r \cdot z} + C \cdot \left(\frac{P_r}{T_r}\right)^2 \cdot \frac{1}{z^2} + D \cdot \left(\frac{P_r}{T_r}\right)^5 \cdot \frac{1}{z^5} + \frac{c_4}{T_r^3} \cdot \left(\frac{P_r}{T_r}\right)^2 \cdot \frac{1}{z^2} \cdot \left[\beta + \gamma \cdot \left(\frac{P_r}{T_r}\right)^2 \cdot \frac{1}{z^2} \right] \cdot e^{-\gamma \cdot \left(\frac{P_r}{T_r}\right)^2 \cdot \frac{1}{z^2}}. \quad (2.43)$$

По формуле (2.43) определяется z^0 для “основного” вещества, затем z^3 для “эталонного” вещества и по формуле (2.40) определяется z для рассматриваемого вещества.

Значения коэффициентов для “основного” и “эталонного” веществ приведены в таблице 2.1.

При отсутствии справочных данных по коэффициенту ацентричности величина этого коэффициента может быть подсчитана по формуле

$$\omega = [\ln p_{кр} + f_0(T_{sr})] / f_1(T_{sr}), \quad (2.44)$$

где $T_{sr} = T_s / T_{кр}$ - приведенная температура кипения;

$p_{кр}$ - берется в физических атмосферах;

$$f_0(T_r) = 5,92714 - \frac{6,096448}{T_r} - 1,28862 \cdot \ln T_r + 0,169347 \cdot T_r^6;$$

$$f_1(T_r) = 15,2518 - \frac{15,6875}{T_r} - 13,472 \cdot \ln T_r + 0,43677 \cdot T_r^6. \quad (2.45)$$

Для газовой смеси из k компонентов с мольной концентрацией j -го компонента x_j коэффициент ацентричности

$$\omega = \sum_{j=1}^k x_j \cdot \omega_j, \quad (2.46)$$

где ω_j – коэффициент ацентричности j -го компонента.

Таблица 2.1 – Значения коэффициентов для «основного» и «эталонного» веществ

Коэффициент	«Основное» вещество	«Эталонное» вещество
b_1	0,1181193	0,2026579
b_2	0,265728	0,331511
b_3	0,154790	0,027655
b_4	0,030323	0,203488
c_1	0,0236744	0,0313385
c_2	0,0186984	0,0503618
c_3	0	0,016901
c_4	0,042724	0,041577
$d_1 \cdot 10^4$	0,155488	0,48736
$d_2 \cdot 10^4$	0,623689	0,0740336
β	0,65392	1,226
γ	0,060167	0,03754
ω	0	0,3978

Псевдокритические параметры газовой смеси определяются по формулам:

– плотность
$$\rho_{кр} = 8 / \left\{ \sum_i^k \sum_j^k x_i \cdot x_j \cdot (\rho_{кри}^{-1/3} + \rho_{крj}^{-1/3})^3 \right\}; \quad (2.47)$$

– температура
$$T_{кр} = \frac{\rho_{кр}}{8} \cdot \sum_i^k \sum_j^k x_i \cdot x_j \cdot (\rho_{кри}^{-1/3} + \rho_{крj}^{-1/3}) \cdot (T_{кри} \cdot T_{крj})^{1/2};$$

(2.48)

– давление $P_{кр} = (0,2905 - 0,085 \cdot \omega) \cdot \rho_{кр} \cdot R \cdot T_{кр}$. (2.49)

В уравнениях (2.47), (2.48) и (2.49) критическая плотность j -го компонента

$$\rho_{крj} = P_{крj} / \left[(0,2905 - 0,085 \cdot \omega_j) \cdot R_j \cdot T_{крj} \right] . \quad (2.50)$$

Калорические параметры газовой смеси определяются суммированием значения параметра в идеально-газовом состоянии и значения соответствующей поправки. Например, энтальпия газовой смеси $i = i^{uo} + \Delta i$, где поправка к энтальпии определяется из выражения

$$\begin{aligned} \frac{\Delta i}{R \cdot T_{кр}} = & T_r \cdot z - T_r - \left[b_2 + \frac{2 \cdot b_3}{T_r} + \frac{3 \cdot b_4}{T_r^2} \right] \cdot \rho_r - \left[c_2 - \frac{3 \cdot c_3}{T_r^2} \right] \cdot \frac{\rho_r^2}{2} + \\ & + \frac{d_2}{5} \cdot \rho_r^5 + \frac{3 \cdot c_4}{2 \cdot T_r^2 \cdot \gamma} \left[\beta + 1 - (\beta + 1 - \gamma \cdot \rho_r^2) \cdot e^{-\gamma \cdot \rho_r^2} \right] . \end{aligned} \quad (2.51)$$

Изотермическая поправка к изобарной теплоемкости

$$\frac{\Delta c_p}{R} = \left[\frac{\partial}{\partial T_r} \left(\frac{\Delta i}{R T_{кр}} \right) \right]_{P_r} . \quad (2.52)$$

Энтропийная поправка согласно [6] находится по формуле

$$\begin{aligned} \frac{\Delta s}{R} = & \ln \frac{p^{uo}}{p} + \ln z - \left(b_1 + \frac{b_3}{T_r^2} + \frac{2 \cdot b_4}{T_r^3} \right) \cdot \rho_r - \left(c_1 - \frac{2 \cdot c_3}{T_r^3} \right) \cdot \frac{\rho_r^2}{2} - \\ & - \frac{d_1}{5} \cdot \rho_r^5 + \frac{c_4}{T_r^3 \cdot \gamma} \cdot \left[\beta + 1 - (\beta + 1 + \gamma \cdot \rho_r^2) \cdot e^{-\gamma \cdot \rho_r^2} \right] . \end{aligned} \quad (2.53)$$

Изменение удельной энтальпии при изменении состояния газа от начального до конечного определяется по формуле

$$i_k - i_n = \left[\left(\frac{\Delta i}{R \cdot T_{кр}} \right)_k - \left(\frac{\Delta i}{R \cdot T_{кр}} \right)_n \right] \cdot R \cdot T_{кр} + \int_{T_H}^{T_K} c_p^{uo} \cdot dT . \quad (2.54)$$

Изменение удельной энтропии при изменении состояния газа от начального до конечного определяется по формуле

$$s_k - s_H = \left[\left(\frac{\Delta s}{R} \right)_k - \left(\frac{\Delta s}{R} \right)_H \right] \cdot R + \int_{T_H}^{T_k} c_p^{uo} \cdot \frac{dT}{T} . \quad (2.55)$$

Для выполнения расчетов термодинамических свойств газов или смесей газов методом Ли–Кеслера разработана программа DPG (eff) на языке программирования Object Pascal в среде Delphi, в которой реализован представленный выше метод расчета. База данных включает сведения более чем для 400 веществ [6]. Инструкция для работы с программой DPG (eff) приведена в [7].

2.4.4 Дифференциальные уравнения термодинамики

Калорические параметры определяются на основании дифференциальных уравнений термодинамики:

$$\text{– внутренняя энергия} \quad u = u^{uo} + \int_{v_0}^v \left[T \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p \right] dv ; \quad (2.56)$$

$$\text{– энтальпия} \quad i = i^{uo} + \int_{p_0}^p \left[v - T \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right] dp ; \quad (2.57)$$

$$\text{– изобарная теплоемкость} \quad c_p = c_p^{uo} - T \cdot \int_{p_0}^p \left(\frac{\partial^2 v}{\partial T^2} \right)_p dp ; \quad (2.58)$$

$$\text{– изохорная теплоемкость} \quad c_v = c_v^{uo} + T \cdot \int_{v_0}^v \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2} \right)_v dv ; \quad (2.59)$$

$$\text{– энтропия} \quad s = s^{uo} - \int_{p_0}^p \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dp . \quad (2.60)$$

2.4.5 Термодинамические процессы реальных газов

Для реального газа отношение теплоемкостей изменяется в процессе сжатия, причем отношение $c_p/c_v \neq k$. Расчет параметров газа с помощью уравнений политропного процесса идеального газа может приводить к заметным погрешностям.

При использовании дифференциальных уравнений для определения параметров газа при его сжатии требуется задать характер диссипации энергии в процессе сжатия. Сравнительно просто определяются параметры газа по заданному значению изэнтропийного КПД η_s .

Изоэнтروпийный и действительный процессы сжатия газа в i, s – координатах показаны на рисунке 2.10. Изоэнтропийный КПД $\eta_s = \frac{i_{2s} - i_1}{i_2 - i_1}$, где i_1, i_2 – энтальпии в начале и конце действительного процесса сжатия; i_{2s} – энтальпия в конце изоэнтропийного процесса.

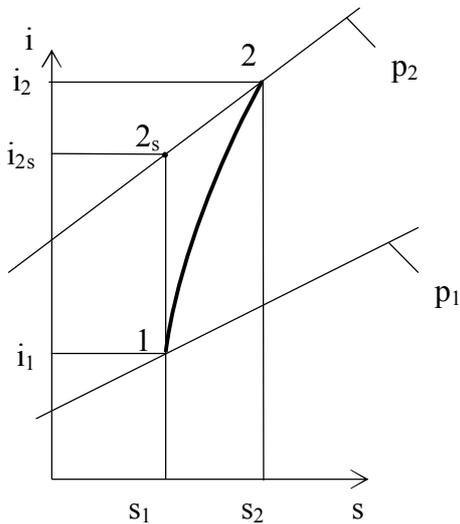


Рисунок 2.10 – i - s диаграмма процесса сжатия газа

Энтальпия в конце изоэнтропийного процесса определяется для условия $s = const$ с помощью дифференциальных уравнений. Затем определяется энтальпия для действительного процесса по формуле

$$i_2 = i_1 + \frac{(i_{2s} - i_1)}{\eta_s}. \quad (2.61)$$

Теперь, используя уравнения, приведенные в п. 2.4.3 и 2.4.4, можно определить все термодинамические параметры для рассматриваемого процесса.

Однако дифференциальные уравнения термодинамики в инженерной практике широкого применения не нашли.

Рассмотрим еще один метод расчета параметров реального газа, в котором определяются два показателя политропы – объемный и температурный.

Устанавливается связь между температурами и давлениями аппроксимацией процесса с постоянным значением показателя степени – n_T :

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n_T - 1}{n_T}} \quad \text{и} \quad \frac{p \cdot dT}{T \cdot dp} = \frac{n_T - 1}{n_T}. \quad (2.62)$$

Связь между удельными объемами и давлениями устанавливается аппроксимацией процесса с постоянным значением показателя степени – n_v :

$$\frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{n_v}} \quad \text{и} \quad \frac{p \cdot dv}{v \cdot dp} = \frac{1}{n_v}. \quad (2.63)$$

Для определения взаимосвязи между n_v и n_T используется условие [8], которое считается единым и для идеальных, и для реальных газов:

$$\frac{v \cdot dp}{di} = \eta_n = const. \quad (2.64)$$

В международном стандарте ИСО 5389 политропный КПД предлагается определять по формуле

$$\eta_n = \frac{\int_1^2 v \cdot dp}{h_i - \frac{c_2^2 - c_1^2}{2}}, \quad (2.65)$$

где $h_i = i_2 - i_1 + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} = i_2^* - i_1^*$.

Дифференциал энтальпии в общем виде $di = \left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T \cdot dp + \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p \cdot dT$. Тогда производная от энтальпии по давлению равна

$$\frac{di}{dp} = \left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T + \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p \cdot \frac{dT}{dp}. \quad (2.66)$$

С учетом того что $\left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p = c_p$ и $p \cdot v = z \cdot R \cdot T$, после преобразований получается [9]:

$$m = \frac{n_T - 1}{n_T} = \frac{p \cdot dT}{T \cdot dp} = \frac{z \cdot R}{c_p} \left[\frac{1}{\eta_n} + \frac{T}{z} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_p \right] = \frac{z \cdot R}{c_p} \left[\frac{1}{\eta_n} + X \right], \quad (2.67)$$

где $X = \frac{T}{z} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_p = \frac{T}{v} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_p - 1$.

Показатель n_v определяется по формуле

$$n_v = \frac{1}{Y - m \cdot (1 + X)}, \quad (2.68)$$

где $Y = \frac{p}{v} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = 1 - \frac{p}{z} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)_T$.

При вычислении функций сжимаемости X и Y частные производные определяются из уравнения состояния.

Параметры потока и напоры определяются по формулам для идеального газа, но с использованием условных величин: условного показателя адиабаты k_y , условной газовой постоянной R_y , условной теплоемкости c_{py} .

Условный показатель адиабаты находится из уравнения

$$\frac{k_y - 1}{k_y} = m \cdot \eta_n . \quad (2.69)$$

Условная газовая постоянная $R_y = z \cdot R$, условная теплоемкость $c_{py} = \frac{k_y}{k_y - 1} \cdot R_y$.

Внутренний напор определяется по формуле

$$h_i = \frac{k_y}{k_y - 1} \cdot R_y \cdot (T_2 - T_1) . \quad (2.70)$$

Политропный напор определяется по формуле

$$h_n = \eta_n \cdot h_i . \quad (2.71)$$

Список литературы к разделу 2

1. Алабовский А.Н. Теплотехника / А.Н. Алабовский, С.М. Константинов, И.А. Недужий: под редакцией С.М. Константинова. – К.: Вища школа, 1988. – 256 с.
2. Андриященко А.И. Основы технической термодинамики реальных процессов: учебное пособие для вузов / А.И. Андриященко. – М., Высшая школа, 1975. – 264 с.
3. Галеркин Ю.Б. Методы расчета, обработки экспериментальных данных и проектирования центробежных компрессоров промышленного назначения: учебное пособие / Ю.Б. Галеркин, Л. Я. Стрижак – Санкт-Петербургский государственный политехнический университет. – 2003. – 93 с.
4. Ден Г.Н. Проектирование проточной части центробежных компрессоров / Г.Н. Ден. – Л.: Машиностроение, 1980. – 232 с.
5. Калінкевич М.В. Варіантний розрахунок відцентрового компресора: навчальний посібник / М.В. Калінкевич. – Суми: Вид-во СумДУ, 2008. – 55 с.
6. Ландау Л.Д. Теоретическая физика: учебное пособие: в 10 т. Том VI. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 1988. – 736 с.
7. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1973. – 847 с.
8. Рид Р. Свойства газов и жидкостей /Р. Рид, Дж. Праусниц, Т. Шервуд. – Л.: Химия, 1982. – 582с.
9. Рис В.Ф. Центробежные компрессорные машины / В.Ф. Рис. – М.; Л.: Машгиз, 1963. – 335 с.
10. Седов Л.И. Механика сплошной среды / Л.И. Седов. – М.: Наука, 1983. – т.1 – 528 с.
11. Селезнев К.П. Центробежные компрессоры / К.П. Селезнев, Ю.Б. Галеркин. – Л.: Машиностроение, 1982. – 271 с.
12. Теоретические основы теплотехники. Теплотехнический эксперимент: справочник / под общей редакцией В.А. Григорьева, В.М. Зорина. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 560 с.
13. Теория и расчет турбокомпрессоров / К.П. Селезнев, Ю.Б. Галеркин, С.А. Анисимов и др. – Л.: Машиностроение, 1986. – 392 с.
14. Теплотехнические расчеты процессов транспорта и регазификации природных газов / В.А. Загорученко, Р.Н. Бикчентай, А.А. Вассерман и др. Справочное пособие. – М.: Недра, 1980. –320 с..
15. Техническая термодинамика : учеб. для маш. вузов / под ред. В.И. Крутова. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Вища школа, 1991. – 384 с.
16. Шульц Д. Политропический анализ центробежного компрессора: труды американского общества инж.-механиков / Д. Шульц // Энергетические машины и установки. – 1962. – № 1. – С. 87– 100.
17. «An album of fluid motion» assembled by Milton van Dyke, Department of mechanical engineering Stanford University.

Вопросы для самопроверки

- 1 Сформулируйте закон Ньютона для касательных напряжений.
- 2 Как связаны между собой кинематический и динамический коэффициенты вязкости?
- 3 Напишите формулу Сазерленда.
- 4 Чем отличается структура потока при ламинарном и турбулентном режимах течения?
- 5 Как определяется число Рейнольдса?
- 6 Чем характеризуется сжимаемость газов?
- 7 Как определяется число Маха?
- 8 В чем заключается модель сплошной среды?
- 9 Какие параметры газа называют термическими?
- 10 В чем заключается модель идеального газа?
- 11 Что характеризует уравнение Менделеева-Клапейрона?
- 12 Как определяется политропный напор?
- 13 Что характеризует уравнение состояния реального газа?
- 14 Что характеризует закон соответственных состояний?
- 15 Как записывается уравнение состояния в вириальной форме?
- 16 Что характеризует уравнение Бенедикта-Вебба-Рубина?
- 17 В чем заключается метод Ли-Кеслера?
- 18 Как записываются дифференциальные уравнения термодинамики?
- 19 Как выполняется расчет параметров процесса сжатия реального газа?
- 20 В чем заключается методика расчета параметров реального процесса с использованием двух показателей политропы?

РАЗДЕЛ 3

ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТУРБОКОМПРЕССОРОВ

Уравнение неразрывности. Уравнение импульса. Уравнение Навье–Стокса. Уравнение Рейнольдса. Уравнение момента импульса. Уравнение Эйлера для турбомашин. Уравнение энергии. Схематизация характера течения газа в проточной части турбокомпрессоров. Осреднение параметров потока. Газодинамические функции

Течение вязкого газа в проточных частях турбокомпрессоров в общем случае характеризуется дифференциальными уравнениями, полученными из основных законов сохранения механики. Моделирование потока газа сопряжено с рядом трудностей, связанных как со сложностью физических процессов, происходящих в исследуемых аппаратах, так и с проблемами адекватности математических моделей.

Развитие вычислительной техники и создание новых программных комплексов (ANSYS CFX, Flow Vision) позволяют, используя численные методы, получать данные о структуре потока в проточной части турбомашин, но требуют для этого значительных затрат времени. В этих программных комплексах расчет течения газа выполняется с использованием уравнения Навье–Стокса, осредненного по Рейнольдсу, а моделирование турбулентности осуществляется с помощью дифференциальных моделей.

Решение системы уравнений, включающей в себя дифференциальные уравнения газодинамики, термодинамики, сохранения энергии с учетом внутреннего и внешнего теплообмена, как для элементов турбомашин, так и для проточной части в целом, без принятия тех или иных упрощающих математическую модель допущений на сегодняшний момент не осуществлено.

Сопоставление расчетных и экспериментальных данных показывает, что результаты расчета существенно зависят от способа задания граничных условий и от выбранной модели турбулентности.

Остаются востребованными методы расчета элементов проточных частей турбомашин, основанные на использовании уравнения Эйлера в интегральной форме и применении полуэмпирических теорий турбулентного пограничного слоя.

Для получения уравнений, характеризующих процессы сжатия и перемещения газа в турбокомпрессорах, используются законы сохранения механики: закон сохранения импульса, закон сохранения момента импульса, закон сохранения энергии. Вывод дифференциальных уравнений на основе этих законов рассматривается при изучении дисциплины «Газовая динамика».

В данном пособии эти уравнения рассматриваются кратко, без подробностей их вывода. Вывод уравнений приведен в литературе, указанной в конце раздела.

3.1 Уравнение неразрывности

Уравнение неразрывности (уравнение сплошности) получается из закона сохранения массы конечного объема V сплошной среды

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \cdot dV = 0. \quad (3.1)$$

Выполнив дифференцирование, после преобразований получаем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{c}) = 0. \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) справедливо как для установившегося, так и для неустановившегося движений сжимаемой и несжимаемой жидкости. Уравнение (3.2) относится к числу фундаментальных уравнений механики жидкости.

Для установившегося течения $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, тогда уравнение неразрывности принимает вид

$$\operatorname{div}(\rho \cdot \vec{c}) = 0. \quad (3.3)$$

Для струйки тока с площадью сечения df

$$\rho \cdot c \cdot df = d\bar{m} = \text{const}. \quad (3.4)$$

Для канала с ортогональной площадью сечения f

$$\int_f \rho \cdot c \cdot df = \bar{m} = \rho_{cp} \cdot c_{cp} \cdot f. \quad (3.5)$$

Принимая плотность постоянной по сечению - $\rho = \text{const}$, осредненную по расходу скорость определяют по уравнению

$$c_{cp} = \frac{1}{f} \cdot \int_f c \cdot df. \quad (3.6)$$

3.2 Уравнение импульса

Согласно закону сохранения импульса изменение импульса изолированной системы равно импульсу сил, действующих на эту систему.

Для объема V , ограниченного поверхностью f , уравнение импульса имеет вид

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \int_f \rho \cdot c_n \cdot \vec{c} \cdot df = \int_V \rho \cdot \vec{F} \cdot dV + \int_f \vec{p}_n \cdot df, \quad (3.7)$$

где $K = \int_V \rho \cdot \vec{c} \cdot dV$ – количество движения (импульс) массы в объеме V ; c_n – нормальная к поверхности f составляющая скорости; \vec{p}_n – напряжение поверхностных сил.

Для установившегося движения $\frac{\partial K}{\partial t} = 0$.

3.2.1 Уравнение движения Навье – Стокса

Уравнения движения Навье-Стокса представляют собой систему дифференциальных уравнений движения вязкой среды. Являясь, по существу, уравнениями импульса, уравнения движения Навье-Стокса в прямоугольной системе координат записываются следующим образом:

$$(3.8)$$

Аналогичный вид имеют уравнения движения вдоль осей y и z .

Более компактную запись уравнений Навье-Стокса можно получить, используя векторную форму

$$\frac{\partial \vec{c}_i}{\partial t} + \vec{c}_j \cdot \frac{\partial \vec{c}_i}{\partial x_j} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} + \Delta(\nu \cdot \vec{c}) + \frac{1}{3} \cdot \nu \cdot \text{grad}(\text{div} \vec{c}). \quad (3.9)$$

В этом уравнении \vec{F} – массовая сила; p – давление;

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа; $\text{div} \vec{c} = \frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{\partial c_z}{\partial z}$ - дивергенция скорости.

3.2.2 Уравнение Рейнольдса

Уравнения Рейнольдса – уравнения Навье-Стокса, осредненные по Рейнольдсу (англ. *RANS* (Reynolds-averaged Navier-Stokes)).

Используются для описания турбулентных течений. Метод осреднения Рейнольдса заключается в замене случайно изменяющихся характеристик потока (скорость, давление, плотность) суммами осредненных и пульсационных составляющих.

Мгновенные значения скоростей можно представить в виде суммы осредненных и пульсационных величин

$$\bar{c}_i = \bar{c}_i + c'_i. \quad (3.10)$$

Осредненная во времени скорость

$$\bar{c} = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} c \cdot dt. \quad (3.11)$$

Уравнение движения Навье–Стокса, осредненное по Рейнольдсу (*уравнение Рейнольдса*), имеет вид

$$\frac{\partial \bar{c}_j}{\partial t} + \bar{c}_j \cdot \frac{\partial \bar{c}_i}{\partial x_j} = \bar{F} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \cdot \frac{\partial \bar{c}_j}{\partial x_k} - \bar{c}'_j \bar{c}'_k \right), \quad (j = 1, 2, 3). \quad (3.12)$$

Уравнение Рейнольдса отличается от уравнения Навье–Стокса наличием последнего компонента $-\frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{c}'_j \bar{c}'_k)$.

Величины $\tau_{ij} = -\rho \cdot \bar{c}'_i \bar{c}'_j$ называются турбулентными напряжениями. Связь между ними и скоростями деформаций устанавливается на основе полуэмпирических теорий турбулентности.

3.3 Уравнение момента импульса

Согласно закону сохранения момента импульса изменение момента импульса изолированной системы равно главному моменту сил, действующих на эту систему.

Уравнение имеет вид

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \int_f [\vec{r} \times \vec{c}] \cdot \rho \cdot c_n \cdot df = \int_V [\vec{r} \times \vec{F}] \cdot \rho \cdot dV + \int_f [\vec{r} \times \vec{p}_n] \cdot df, \quad (3.13)$$

где $M = \int_V [\vec{r} \times \vec{c}] \cdot \rho \cdot dV$ – момент импульса.

3.3.1 Уравнение Эйлера для турбомашин

Рассмотрим установившееся движение газа в струйке тока. Струйка тока произвольной формы вращается с постоянной угловой скоростью ω относительно оси z прямоугольной декартовой системы координат (рис. 3.1).

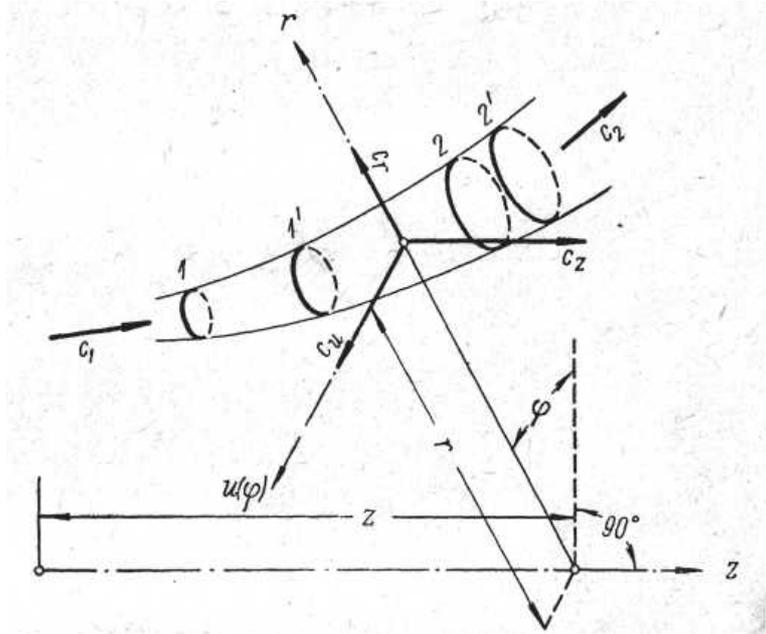


Рисунок 3.1 – К выводу уравнения Эйлера

Объем газа в струйке тока, ограниченный сечениями 1 и 2, за малый промежуток времени $d\tau$ перемещается в положение $1'-2'$. Масса газа, заключенная в объемах $1-1'$ и $2-2'$, равна $dm_1 = dm_2 = dm$.

Изменение момента импульса за время dt будет равно разности моментов импульса для объема $2-2'$ и объема $1-1'$:

$$dm \cdot (r_2 \cdot c_{u2} - r_1 \cdot c_{u1}) / dt. \quad (3.14)$$

Согласно закону сохранения момента импульса изменение момента импульса относительно некоторой неподвижной оси равно главному моменту всех внешних сил, приложенных к данной массе, относительно той же оси:

$$d \cdot (m \cdot \vec{c} \cdot \vec{r}) / dt = M_z. \quad (3.15)$$

Умножаем правую и левую части уравнения на угловую скорость ω и делим на массовый расход $\bar{m} = dm / dt$. Получаем

$$(c_{u2} \cdot \omega \cdot r_2 - c_{u1} \cdot \omega \cdot r_1) = \frac{M_z \cdot \omega}{\bar{m}}. \quad (3.16)$$

$\frac{M_z \cdot \omega}{\bar{m}} = h_T$ – теоретический (Эйлеров) напор имеет размерность удельной энергии Дж/кг. Так как $\omega \cdot r = u$, получаем уравнение

$$h_T = (c_{u2} \cdot u_2 - c_{u1} \cdot u_1). \quad (3.17)$$

Это уравнение называют уравнением Эйлера для турбомашин.

Уравнение Эйлера устанавливает связь между энергетическими показателями турбомашин и кинематическими параметрами потока газа в проточной части этой турбомашин.

3.4 Уравнение энергии

Закон сохранения энергии – фундаментальный закон природы, установленный эмпирически и заключающийся в том, что энергия изолированной (замкнутой) системы сохраняется во времени. Другими словами, энергия не может возникнуть из ничего и не может исчезнуть в никуда, она может только переходить из одной формы в другую. Закон сохранения энергии встречается в различных разделах физики и проявляется в сохранении различных видов энергии. Например, в термодинамике закон сохранения энергии называется первым началом термодинамики.

Уравнение энергии в интегральной форме имеет вид

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \cdot \left(u + \frac{c^2}{2} \right) \cdot dV = \int_f [\vec{p}_n \cdot \vec{c}] \cdot df + \int_V [\vec{F} \cdot \vec{c}] \cdot \rho \cdot dV + \int_V \rho \cdot q \cdot dV, \quad (3.18)$$

где u – удельная внутренняя энергия; q – количество теплоты, подводимой к единице массы за единицу времени.

3.4.1 Первый закон термодинамики для потока газа

В дифференциальном виде первый закон термодинамики для потока газа имеет вид

$$dl_i = di + d \frac{c^2}{2} - dq_{\text{внеш}}, \quad (3.19)$$

где l_i – полная (внутренняя) удельная энергия;

i – энтальпия (удельная);

$q_{внеи}$ – количество теплоты (удельное), подведенное к газу.

В интегральном виде первый закон термодинамики для потока газа имеет вид

$$l_i = \Delta i + \Delta \frac{c^2}{2} - q_{внеи}. \quad (3.20)$$

Обычно при работе турбокомпрессоров теплота отводится от сжимаемого газа в окружающую среду, и тогда в уравнении (3.20) теплота берется со знаком минус, то есть прибавляется к изменению энтальпии.

3.4.2 Уравнение Бернулли

Другой формой представления закона сохранения энергии является уравнение Бернулли. Уравнение Бернулли иногда называют механической формой уравнения энергии. В дифференциальной форме уравнение Бернулли имеет вид

$$dl_i = v \cdot dp + d \frac{c^2}{2} + dl_r + dh_z. \quad (3.21)$$

Изменением пьезометрического напора для газовых машин обычно пренебрегают $dh_z \rightarrow 0$.

В интегральном виде уравнение Бернулли имеет вид

$$h_i = h_n + h_o + h_r, \quad (3.22)$$

где h_i – полный напор;

$$h_n = \int_1^2 v \cdot dp \text{ политропный напор;}$$

$$h_o = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \text{ - динамический напор;}$$

$$h_r = \int_1^2 dl_r \text{ - «потери» напора.}$$

Термин «потери» используется для краткости названия. Потерями называют ту часть энергию, которая затрачивается на преодоление вязкостного трения различного рода, и потому правильнее было бы называть эту энергию энергией диссипации.

3.5 Схематизация характера течения газа в турбокомпрессорах

В общем случае поток газа является нестационарным, пространственным (трехмерным), вязкостным. Сложность действительного характера течения газа в турбокомпрессорах делает необходимым для выполнения расчетов принятие тех или иных допущений, упрощающих физическую картину процесса сжатия газа, т. е. схематизацию.

Рассмотрим, какое влияние на структуру потока оказывают указанные свойства действительного потока газа, и какие допущения принимаются при создании расчетных моделей.

Нестационарность потока. Значения давлений, температур, плотностей, скоростей газа в одних и тех же точках проточной части изменяются во времени. Пульсации давлений и плотностей создают дополнительные динамические нагрузки на детали турбомашин, пульсации скоростей могут приводить к возникновению неустойчивости потока, образованию завихренности и отрыву потока от обтекаемых поверхностей. В любом случае изменение значений параметров потока во времени вызывает значительные сложности при изучении течения газа в турбомашинах.

На рисунке 3.2 показаны пульсации давлений в характерных точках центробежной ступени при различных режимах работы, а на рисунке 3.3 осциллограммы пульсаций статического давления в рабочем колесе и в безлопаточном диффузоре.

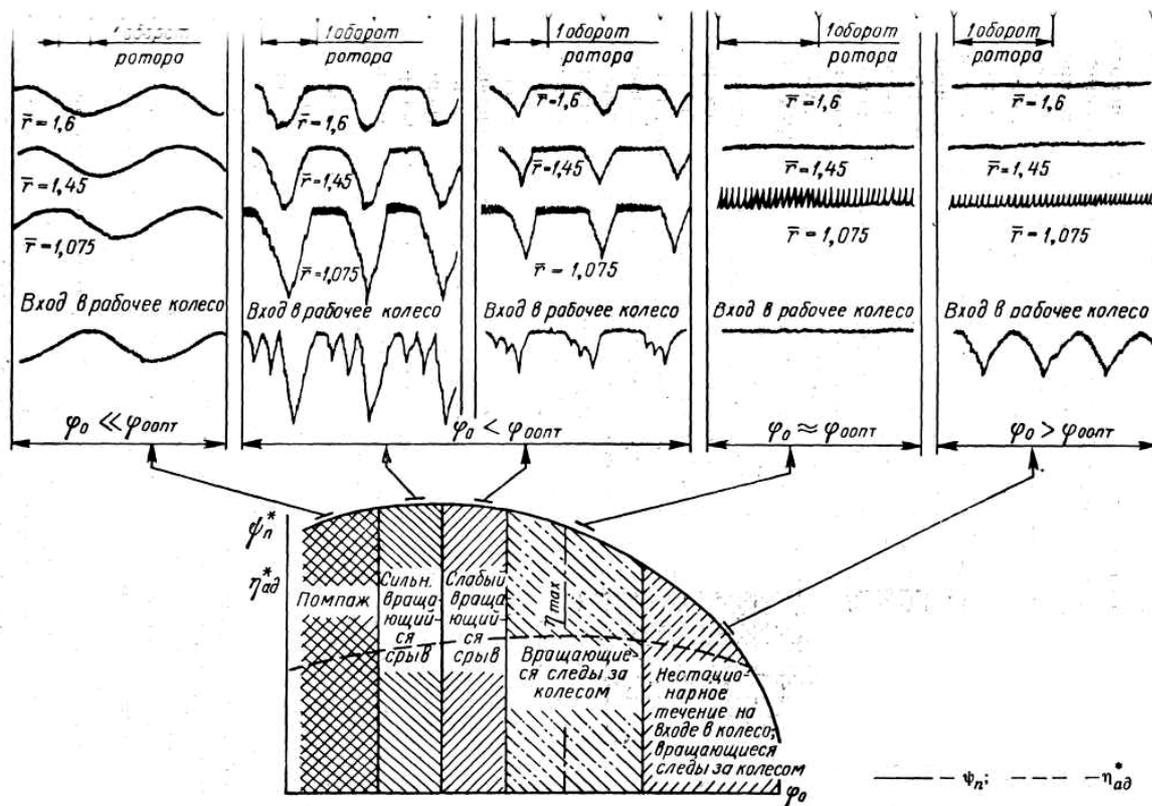


Рисунок 3.2 – Пульсации давления при различных режимах работы центробежной ступени [10]

Лопаточные решетки являются источниками периодической нестационарности. Решетка рабочего колеса при вращении создает в диффузоре периодическую нестационарность с частотой $\omega \cdot z_{рк}$. Поле давлений вокруг лопаток диффузора при дозвуковых скоростях, в свою очередь, вызывает периодическую нестационарность в рабочем колесе с частотой $\omega \cdot z_0$.

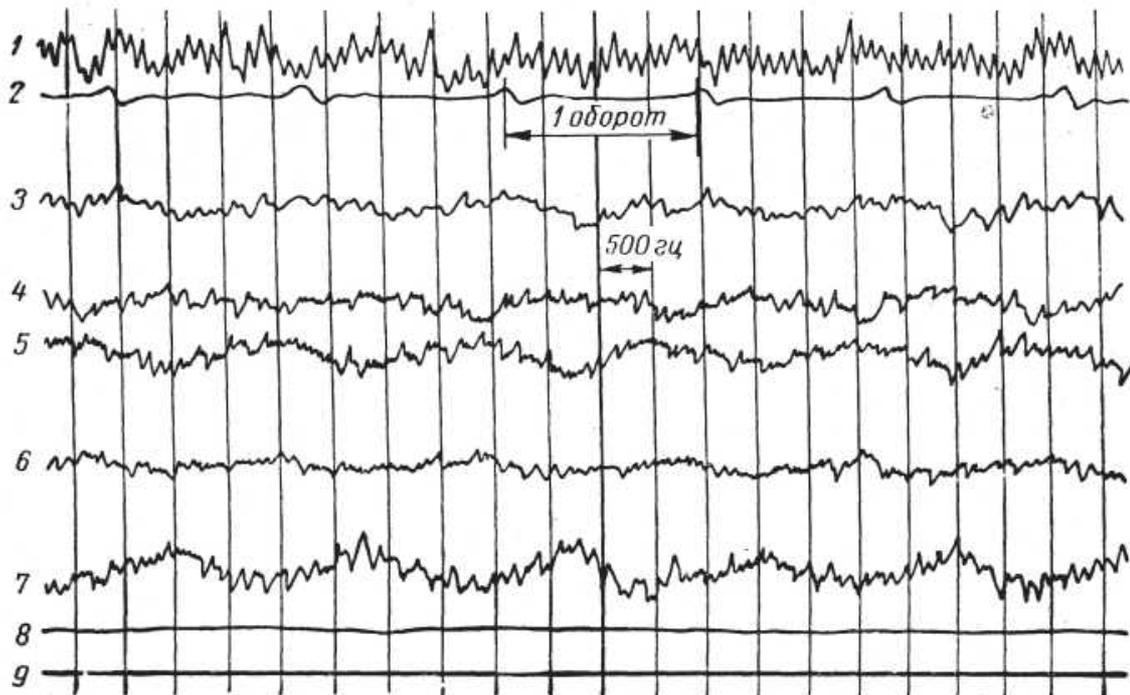


Рисунок 3.3 – Осциллограммы пульсаций статического давления в каналах рабочего колеса и в безлопаточном диффузоре:

1 – вход в БЛД; 2 – отметка оборотов; 3 – вход в межлопаточный канал РК; 4, 5 – рабочая сторона лопатки; 6, 7 – нерабочая сторона лопатки; 8, 9 – «глухие» датчики [10]

Изучение нестационарных процессов является важным направлением исследований турбомашин и имеет большое практическое значение. Тем не менее при решении многих задач газовой динамики можно рассматривать стационарное течение газа вместо нестационарного без потери существенных свойств потока. Поэтому модель стационарного течения является часто используемой в теории турбомашин.

Вязкость газа. Особую сложность структуры потока создает вязкость газа. На обтекаемых поверхностях образуются пограничные слои, на диффузорных участках течения возможен отрыв потока. Отрыв потока неизбежен и при натекании потока на лопатки с большими значениями углов атаки. Образование вихревых зон является дополнительным источником нестационарности. Расчет вязких течений весьма сложен. Существует и используется целый ряд моделей, упрощающих расчет характеристик течения вязкого газа.

Одной из широко применяемых моделей является следующая: область течения разделяется на ядро потока и пограничный слой. В ядре потока рассматривается невязкое

течение, а вязкость учитывается при расчете пограничного слоя. Течение газа в турбокомпрессорах, как правило, турбулентное, поэтому и пограничный слой - турбулентный. Расчет турбулентных пограничных слоев выполняется с помощью какой-либо полуэмпирической теории.

Еще большее упрощение достигается, если рассматривается течение невязкого газа. При использовании такой модели диссипация энергии не может быть рассчитана, но расчетные поля давлений могут быть близкими к действительным.

Пространственность течения. Расчет трехмерного стационарного течения невязкого газа все еще остается сложной задачей. В связи с пространственностью течения существуют следующие модели: квазитрехмерный поток; двухмерный поток; одномерный поток. Для оценки этих моделей и сравнения их между собой рассмотрим схемы ступеней центробежного компрессора и контрольные сечения, которые используются для разделения элементов ступени.

Схемы ступеней центробежного компрессора промежуточного и концевой типов показаны на рисунке 3.4. На рисунках указаны контрольные сечения.

В каждом контрольном сечении определяются параметры потока, осредненные по времени и площади сечения, а затем рассматривается изменение параметров потока от одного контрольного сечения к другому. Таким образом, пространственный поток приводится к одномерному.

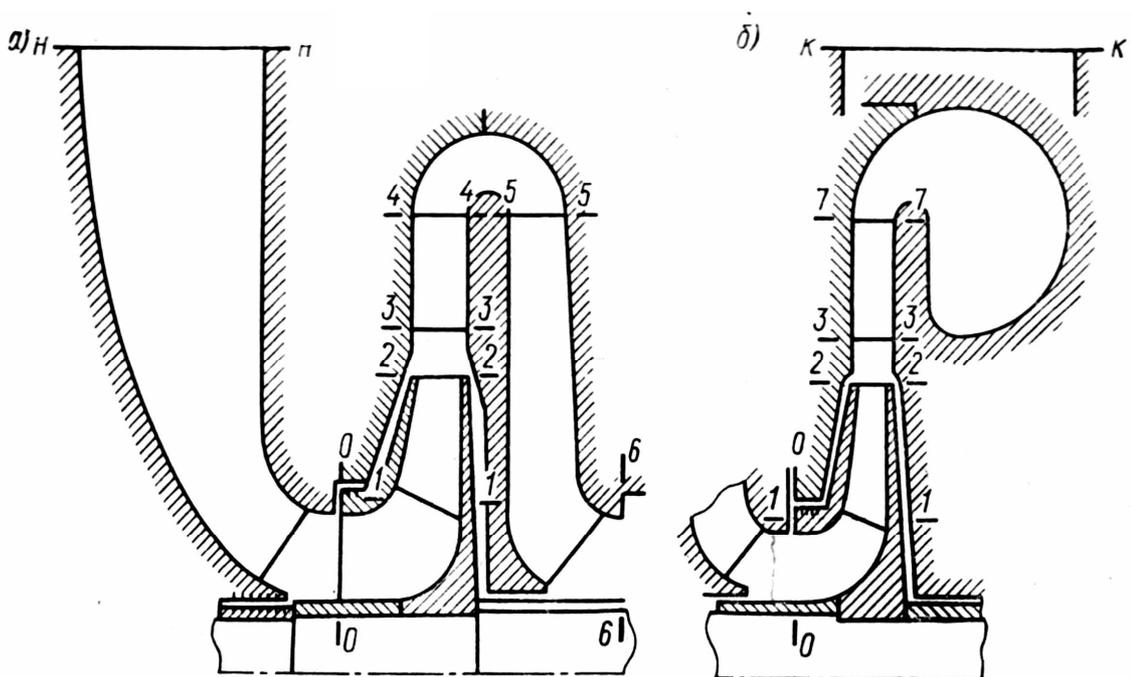


Рисунок 3.4 – Газодинамическая схема промежуточной (а) и концевой ступеней (б) центробежного компрессора

Одномерный подход широко используется при расчете центробежных компрессоров. Однако в настоящее время одномерный подход можно рассматривать только как первый этап при расчете течения газа.

Двухмерный поток рассматривается при расчете течения газа в лопаточных решетках. В этом случае учитывается изменение параметров потока вдоль двух координат. Для круговой решетки это радиальная и окружная координаты. Изменение параметров вдоль третьей координаты (в данном случае это ширина решетки) не рассматривается, т.е. рассматривается течение как бы на срединной поверхности тока.

Совокупность двухмерных течений на нескольких осесимметричных поверхностях называют квазитрехмерным потоком.

3.6 Осреднение параметров потока

Действительный поток газа в турбомашине является неравномерным. При исследовании газодинамических процессов часть параметров, имеющих неосновное значение в рассматриваемой задаче, заменяются их осредненными значениями. Осреднение представляет собой замену неоднородного потока однородным при условии сохранения наиболее существенных для данной задачи свойств течения. При этом возникает задача об осреднении параметров газа в поперечном сечении неравномерного потока.

Часто в качестве средних значений параметров потока принимаются средние по площади сечения величины давления, скорости, температуры, плотности и т.д. Такое простейшее осреднение является неправильным и может приводить к заметным ошибкам при определении интегральных характеристик потока, если исходная неравномерность значительна.

Следует выполнять осреднение таким образом, чтобы сохранить неизменными суммарные характеристики потока. Но при осреднении не могут быть сохранены все свойства потока, и поэтому часть информации о потоке неизбежно теряется.

Состояние одномерного потока определяется тремя независимыми параметрами (например, давлением торможения p^* , температурой торможения T^* и скоростным коэффициентом λ), и потому при осреднении можно сохранить только три суммарные характеристики действительного течения.

Рассмотрим распространенный метод определения средних значений параметров \bar{p}^* , \bar{T}^* и $\bar{\lambda}$, при котором сохраняются одинаковыми для действительного и осредненного потоков величины расхода, импульса и энергии. Если в поперечном сечении исходного неравномерного потока известны (например, измерены) поля температур, полного и статического давлений, то это позволяет считать, что в каждой точке сечения известны давление и температура торможения и скоростной коэффициент. Для потока в целом величины расхода, импульса и энергии определяются интегрированием соответствующих элементарных величин по сечению.

Массовый расход определяется по формуле

$$\bar{m} = \int_f d\bar{m} = \int_f b \cdot \frac{p^* \cdot q(\lambda)}{\sqrt{T^*}} df, \quad (3.23)$$

$$\text{где } b = \sqrt{\frac{k}{R} \cdot \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}}.$$

Аналогично определяются суммарные значения импульса и энергии.

Получим уравнения для определения \bar{p}^* , \bar{T}^* и $\bar{\lambda}$ из уравнений для расхода, импульса и энергии.

Запишем уравнение для энергии, определенной по истинным и по средним значениям параметров газа:

$$\bar{m} \cdot c_p \cdot \bar{T}^* = \int_f c_p \cdot T^* d\bar{m} = E. \quad (3.24)$$

Считаем теплоемкость газа постоянной по сечению. Используя уравнение (3.23), получаем формулу для определения средней температуры торможения

$$\bar{T}^* = \frac{E}{\bar{m} \cdot c_p} = \frac{\int_f p^* \cdot q(\lambda) \cdot \sqrt{T^*} df}{\int_f \frac{p^* \cdot q(\lambda)}{\sqrt{T^*}} df}. \quad (3.25)$$

По средней температуре торможения вычисляется среднее значение критической скорости звука

$$\bar{a}_{кр} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} \cdot R \cdot \bar{T}^*}. \quad (3.26)$$

Среднее значение скоростного коэффициента потока находится из условия равенства действительного импульса потока и импульса, вычисленного по средним значениям параметров. Уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{k+1}{2k} \cdot \bar{a}_{кр} \cdot \bar{m} \cdot z(\bar{\lambda}) = \int_f p^* \cdot f(\lambda) \cdot df, \quad (3.27)$$

откуда

$$z(\bar{\lambda}) = \frac{2k}{k+1} \cdot \frac{1}{\bar{a}_{кр} \cdot \bar{m}} \cdot \int_f p^* \cdot f(\lambda) \cdot df. \quad (3.28)$$

Здесь $z(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda} + \frac{1}{\bar{\lambda}}$, и $f(\lambda) = (\lambda^2 + 1) \cdot \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}$.

Давление торможения можно найти по формуле

$$\bar{p}^* = \frac{\bar{m} \cdot \sqrt{\bar{T}^*}}{b \cdot f \cdot q(\bar{\lambda})}. \quad (3.29)$$

Для дозвуковых и небольших сверхзвуковых скоростей давление торможения можно определять по формуле

$$\bar{p}^* = \frac{\int p^* \cdot df}{f}. \quad (3.30)$$

По найденным значениям \bar{p}^* , \bar{T}^* и $\bar{\lambda}$ однозначно определяются все остальные параметры осредненного потока.

Следует учитывать, что при таком способе осреднения не сохраняется постоянной суммарная величина энтропии. Поэтому значение КПД, вычисленное по найденным этим способом средним параметрам потока, будет меньше, чем для действительного потока.

В работе [11] предлагается еще один способ осреднения параметров потока, который рекомендуется для расчета характеристик центробежных компрессоров.

Здесь также, как и выше, формулы осреднения получаются из условия обеспечения равенства расходов, импульсов и энергий для действительного и осредненного потоков.

Объемный расход определяется по формуле

$$\bar{V} = c_{pcp} \cdot f = \int_f c_p \cdot df. \quad (3.31)$$

Из (3.31) получаем формулу для определения средней расходной проекции скорости

$$c_{pcp} = \frac{\int_f c_p \cdot df}{f}. \quad (3.32)$$

Массовый расход находится по формуле

$$\bar{m} = c_{pcp} \cdot \rho_{cp} \cdot f = \int_f c_p \cdot \rho \cdot df. \quad (3.33)$$

Средняя плотность определяется из формулы (3.33):

$$\rho_{cp} = \frac{\int c_p \cdot \rho \cdot df}{\int c_p \cdot df} . \quad (3.34)$$

Для определения окружной составляющей скорости используется условие равенства теоретических напоров рабочего колеса для осредненного и действительного потоков

$$h_T = c_{u2cp} \cdot u_2 = \frac{N_T}{\bar{m}} = \frac{\int c_{u2} \cdot c_{p2} \cdot \rho_2 \cdot u_2 \cdot df}{\bar{m}} . \quad (3.35)$$

Отсюда

$$c_{u2cp} = \frac{\int c_{u2} \cdot c_{p2} \cdot \rho_2 \cdot df}{\bar{m}} = \frac{\int c_2^2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot \rho_2 \cdot df}{\bar{m}} . \quad (3.36)$$

Кинетическая энергия находится по формуле

$$\frac{\rho_{cp} \cdot c_{cp0}^2}{2} = \frac{\int c^2 \cdot c_p \cdot \rho \cdot df}{2 \cdot \bar{V}} = \frac{\int c^3 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \rho \cdot df}{2 \cdot \bar{V}} . \quad (3.37)$$

Из формулы (3.37) находим скорость, осредненную по кинетической энергии:

$$c_{cp0} = \left(\frac{\int c^3 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \rho \cdot df}{\bar{m}} \right)^{0,5} . \quad (3.38)$$

3.7 Газодинамические функции

Газодинамические функции получены из уравнения энергии путем его преобразования с помощью уравнения изоэнтропы. Газодинамические функции представляют собой отношения параметров движущегося и адиабатически заторможенного потоков. Функции зависят только от физических свойств газа (k) и скоростного коэффициента $\lambda = c/a_{кр}$ (или числа Маха M).

Здесь $a_{кр}$ - критическая скорость звука. Критической называют скорость потока, равную местной скорости звука, т.е. скорость при $M = 1$.

Критическая скорость звука определяется по формуле

$$a_{кр} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} \cdot R \cdot T^*} . \quad (3.39)$$

Во многих задачах использование скоростного коэффициента вместо числа Маха является более удобным. Критическая скорость в энергетически изолированных потоках постоянна. Между числом Маха и скоростным коэффициентом существует однозначная зависимость

$$M^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{c^2}{a_{кр}^2} \cdot \frac{a_{кр}^2}{a^2} = \frac{2 \cdot \lambda^2}{(k+1) - (k-1) \cdot \lambda^2} , \quad (3.40)$$

или

$$\lambda^2 = \frac{(k+1) \cdot M^2}{(k-1) \cdot M^2 + 2} . \quad (3.41)$$

Формулы для определения газодинамических функций в зависимости от относительной скорости и от числа Маха имеют следующий вид:

– газодинамическая функция температуры

$$\tau(\lambda) = \frac{T}{T^*} = 1 - \frac{k-1}{k+1} \cdot \lambda^2 = \frac{1}{1 + \frac{k-1}{2} \cdot M^2} ; \quad (3.42)$$

– газодинамическая функция давления

$$\pi(\lambda) = \frac{p}{p^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \cdot \lambda^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{k-1}{2} \cdot M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}} ; \quad (3.43)$$

– газодинамическая функция плотности

$$\varepsilon(\lambda) = \frac{\rho}{\rho^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \cdot \lambda^2 \right)^{\frac{1}{k-1}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{k-1}{2} \cdot M^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}} . \quad (3.44)$$

Эти функции связаны между собой: $\varepsilon(\lambda) = [\tau(\lambda)]^{\frac{1}{k-1}}$, $\pi(\lambda) = [\varepsilon(\lambda)]^k = [\tau(\lambda)]^{\frac{k}{k-1}}$, $\pi(\lambda) = \tau(\lambda) \cdot \varepsilon(\lambda)$.

Еще одна газодинамическая функция – это функция расхода. Функция расхода через относительную скорость или через число Маха выражается следующим образом:

$$q = \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \lambda \cdot \varepsilon(\lambda) \quad (3.45)$$

и

$$q = \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \cdot \left(1 + \frac{k-1}{2} \cdot M^2 \right)^{\frac{k+1}{2(1-k)}} \cdot M. \quad (3.46)$$

Газодинамические функции позволяют в уравнениях, характеризующих движение газа, вместо температуры T , давления p , плотности ρ и скорости c использовать один параметр – скоростной коэффициент λ , что упрощает нахождение решения.

Значения газодинамических функций температуры, давления и плотности находятся в диапазоне 0-1: $0 \leq \pi(\lambda) \leq \varepsilon(\lambda) \leq \tau(\lambda) \leq 1$.

Список литературы к разделу 3

1. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика / Г.Н. Абрамович. – М.: Наука, 1976.– 888 с.
2. Галеркин Ю.Б. Методы исследования центробежных компрессорных машин / Ю.Б. Галеркин, Ф.С. Рекстин. – Л.: Машиностроение, 1969. – 303 с.
3. Ден Г.Н. Проектирование проточной части центробежных компрессоров / Г.Н. Ден. – Л.: Машиностроение, 1980. – 232 с.
4. Ландау Л.Д. Теоретическая физика: учебное пособие: в 10 т. Том VI. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 1988. – 736 с.
5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1973. – 847 с.
6. Повх И.Л. Техническая гидромеханика / И.Л. Повх. – Л.: Машиностроение, 1976. – 504 с.
7. Рис В.Ф. Центробежные компрессорные машины / В.Ф. Рис. – Л.: Машгиз, 1963. – 335 с.
8. Самарский А.А. Разностные методы решения задач газовой динамики / А.А. Самарский, Ю.П. Попов. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
9. Самойлович Г.С. Газодинамика: учебник для вузов / Г.С. Самойлович. – М.: Машиностроение, 1990. – 384 с.
10. Седов Л.И. Механика сплошной среды / Л.И. Седов. – М.: Наука, 1983. – Т.1 – 528 с.
11. Селезнев К.П. Центробежные компрессоры / К.П. Селезнев, Ю.Б. Галеркин. – Л.: Машиностроение, 1982. – 271 с.
12. Теоретические основы теплотехники. Теплотехнический эксперимент: справочник / под общей редакцией В.А. Григорьева, В.М. Зорина. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 560 с.
13. Теория и расчет турбокомпрессоров / К.П. Селезнев, Ю.Б. Галеркин, С.А. Анисимов и др. – Л.: Машиностроение, 1986. – 392 с.

Вопросы для самопроверки

- 1 Какой физический закон описывает уравнение неразрывности?
- 2 Какой физический закон описывает уравнение импульса?
- 3 Запишите уравнение движения Навье – Стокса для декартовой и цилиндрической систем координат, а также в векторной форме.
- 4 Как получается уравнение Рейнольдса?
- 5 Какой физический закон описывает уравнение момента импульса?
- 6 Сделайте вывод уравнения Эйлера для турбомашин.
- 7 Запишите уравнение энергии в дифференциальной и интегральной формах.
- 8 Какой физический смысл имеет первый закон термодинамики для потока газа?
- 9 Какой физический смысл имеет уравнение Бернулли?
- 10 Какие суммарные характеристики потока сохраняются неизменными при осреднении течения?
- 11 Какими способами выполняется осреднение параметров потока?
- 12 Как определяются газодинамические функции?
- 13 Что подразумевается под схематизацией течения газа в турбокомпрессорах?

РАЗДЕЛ 4

ОБТЕКАНИЕ ПРОФИЛЕЙ И РЕШЕТОК ПРОФИЛЕЙ

Типы решеток турбокомпрессоров. Круговая, кольцевая и плоская решетки. Геометрические параметры профиля и решетки профилей. Задачи и методы теории решеток. Метод интегральных уравнений. Метод конформного отображения. Метод годографа скорости. Метод дискретных вихрей. Обтекание тонкой пластинки и дужки. Возникновение подъемной силы. Постулат Жуковского-Чаплыгина. Невязкое и вязкое обтекание профиля. Ударное и безударное обтекание профиля. Сила взаимодействия профиля с потоком. Теорема Жуковского. Коэффициент подъемной силы. Коэффициент сопротивления

В разделе 1 отмечалось, что принцип действия турбокомпрессоров основан на силовом взаимодействии потока газа с вращающимися лопатками. В лопаточных аппаратах рабочих колес турбокомпрессоров механическая энергия ротора преобразуется в кинетическую и потенциальную энергию газа, а в неподвижных лопаточных аппаратах (диффузорах) происходит преобразование кинетической энергии газа в потенциальную.

Характеристики турбокомпрессоров в значительной степени зависят от геометрических параметров лопаточных решеток. Поэтому изучение течения газа в лопаточных решетках турбокомпрессоров является важной частью дисциплины «Теория турбомашин».

Лопаточные аппараты турбокомпрессоров имеют сложную пространственную форму и представляют собой лопаточные решетки, состоящие из равномерно расположенных по окружности лопаток.

Для примера на рисунке 4.1 показан ротор осевого компрессора. Помимо подвижного (рабочего) лопаточного аппарата, в ступени осевого компрессора имеется направляющий аппарат, который представляет собой неподвижную лопаточную решетку, расположенную за рабочим аппаратом (рис. 1.4).

Течение газа в проточной части осевого компрессора имеет сложный характер, обусловленный нестационарностью, вязкостью и пространственностью потока.

При изучении характера течения газа в лопаточных аппаратах принимаются те или иные упрощения. Так, при рассмотрении течения газа в решетках осевых компрессоров поверхностью тока часто считают боковую поверхность цилиндра.

Другой тип лопаточных решеток получается из лопаточных аппаратов центробежных компрессоров. Основное отличие таких решеток от решеток осевых компрессоров заключается в том, что течение газа в них происходит в основном в радиальной плоскости.

На рисунке 4.2 показана 3D-модель рабочего колеса с радиальными лопатками. Движение газа в лопаточной решетке такого рабочего колеса происходит в радиальной плоскости.



Рисунок 4.1 – Ротор осевого компрессора

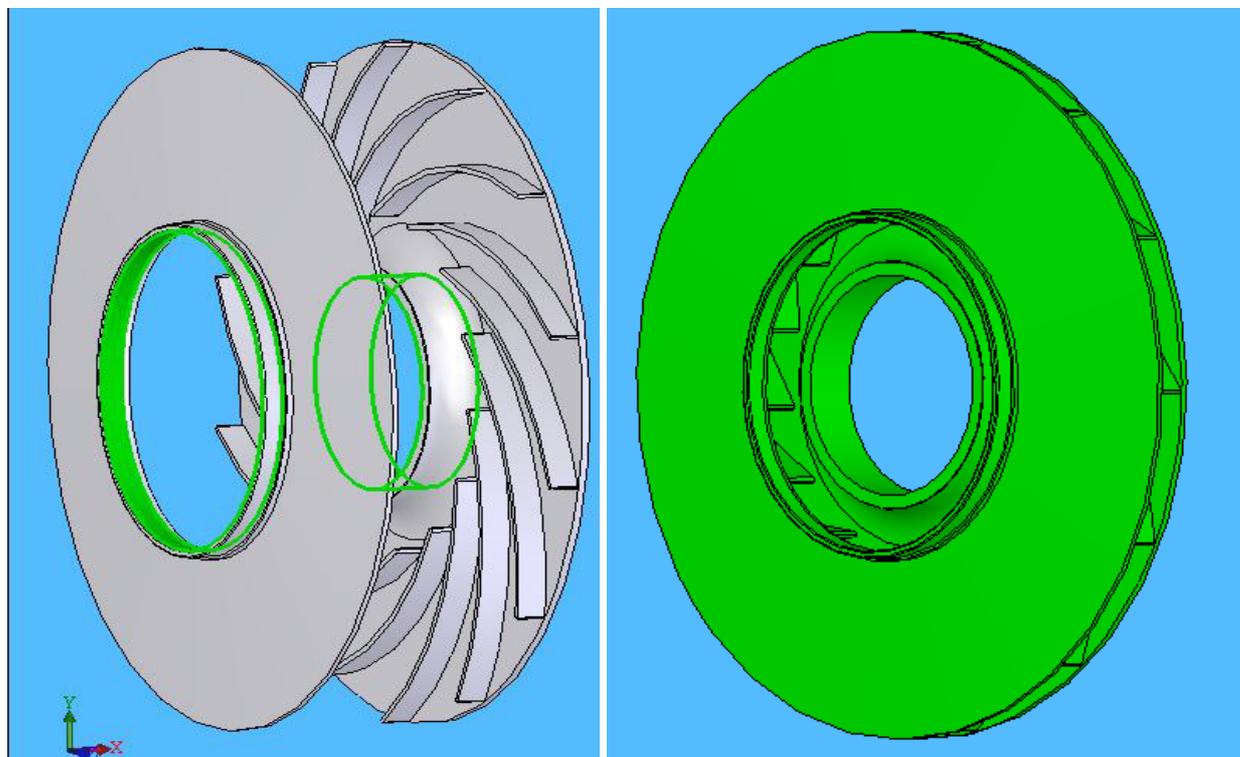


Рисунок 4.2 – 3D-модель рабочего колеса с радиальными лопатками

Более сложный вид имеют решетки для рабочих колес с пространственными лопатками. Поверхность тока в таком рабочем колесе представляет собой осерадиальную поверхность. Рабочее колесо полуоткрытого типа показано на рисунке 4.3.

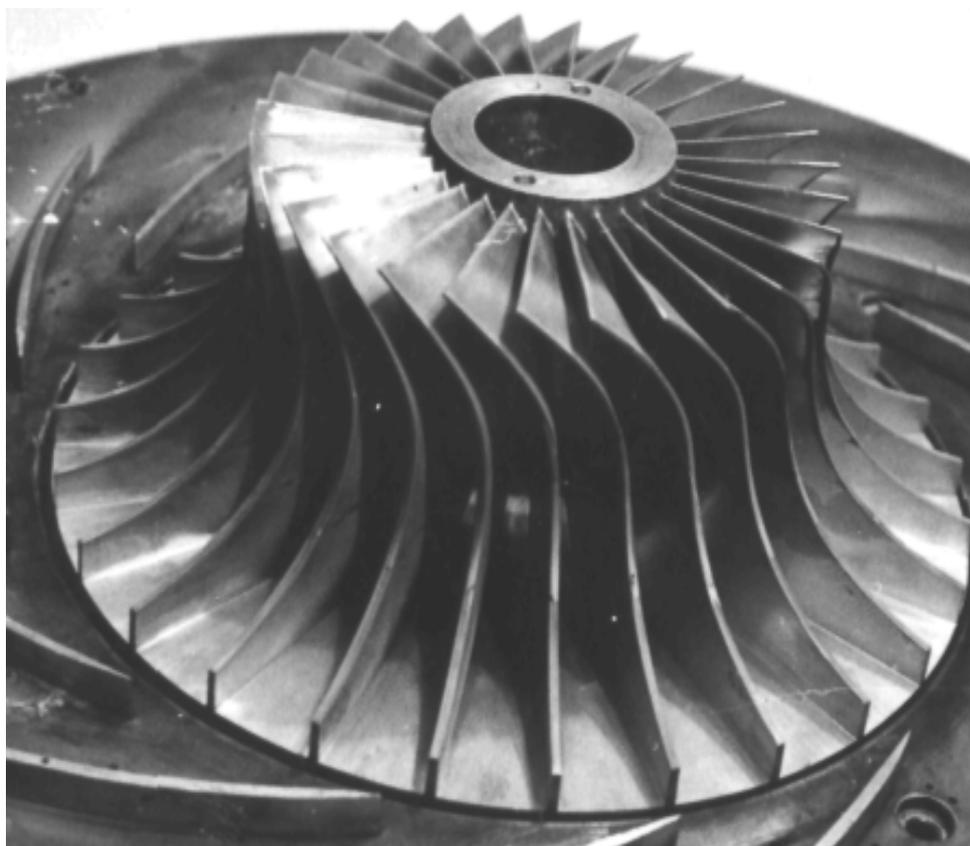


Рисунок 4.3 – Рабочее колесо центробежного компрессора

При благоприятном натекании потока на входные кромки лопаток движение газа в межлопаточных каналах в основном безотрывное, но пограничные слои имеют трехмерный характер и возможно образование отрывных зон на выходе из каналов.

Движение газа в лопаточных элементах турбокомпрессоров может рассматриваться двумя различными способами. При первом способе рассматривается течение газа в межлопаточном канале, образованном поверхностями двух соседних лопаток и двумя ограничивающими поверхностями. При втором способе рассматривается обтекание профиля.

На рисунке 4.4 показана схема межлопаточного канала, а на рисунке 4.5 показан профиль, входящий в состав решетки.

Методы расчета течения газа в турбокомпрессорах в соответствии с первым способом называются канальными, в соответствии со вторым - методами теории решеток.

Каждому из способов представления лопаточной решетки присущи свои достоинства и недостатки. Канальные методы расчета являются более простыми, но при этом, как правило, параметры потока на входной кромке лопатки не определяются. При использовании методов теории решеток имеют место проблемы с учетом влияния соседних лопаток на обтекание профиля.

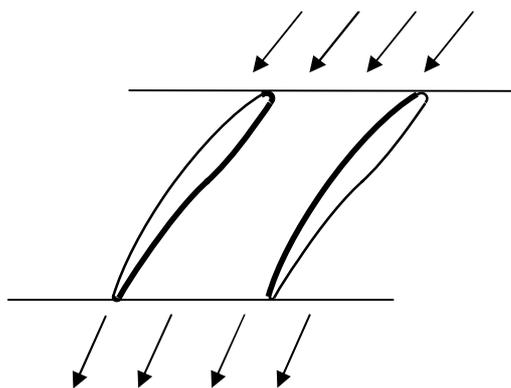


Рисунок 4.4 – Межлопаточный канал

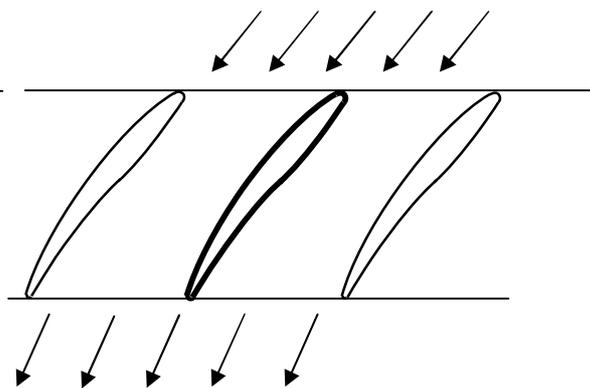


Рисунок 4.5 – Плоская решетка профилей

В данном разделе рассматриваются методы теории решеток. (Канальные методы изучения течения газа будут рассматриваться в следующем разделе).

Рассмотрение проточной части как совокупности профилей позволяет проанализировать условия течения на входе и выходе из лопаточных аппаратов, установить причины отставания потока на выходе из решеток. Анализ условий на входе показывает, при каком направлении потока лопатки обтекаются наиболее благоприятно, что равнозначно анализу работы турбокомпрессора при различных расходах газа.

4.1 Профиль, решетка профилей

Профилем называется сечение лопатки поверхностью тока. Для турбомашин различного типа форма поверхности тока также различна: в осевом компрессоре поверхности тока близки к форме круглого цилиндра, в центробежном компрессоре профили получаются пересечением лопаток плоскостью, перпендикулярной к оси вращения. Для осерадиальных рабочих колес поверхностью тока является криволинейная осесимметричная поверхность.

Профиль лопатки показан на рисунке 4.6. На этом рисунке указаны основные геометрические параметры, характеризующие профиль.

Выпуклая поверхность лопатки называется спинкой, а вогнутая корытцем. Часто координаты профиля задаются зависимостями $\bar{y}_{cn} = f(\bar{x})$, $\bar{y}_{кор} = f(\bar{x})$ в табличном виде. Обычно задаются безразмерные координаты $\bar{x} = x/B$, $\bar{y}_{cn} = y_{cn}/B$ и $\bar{y}_{кор} = y_{кор}/B$, где B - хорда профиля.

Другой способ задания координат профиля основан на использовании аналитических зависимостей для выпуклой и вогнутой поверхностей профиля. Могут задаваться аналитическая зависимость для средней линии профиля (например, дуга окружности) и распределение толщины профиля вдоль его длины $\delta = f(l)$.

Толщина профиля может задаваться также в виде распределения диаметров вписанных окружностей вдоль хорды $d = f(B)$.

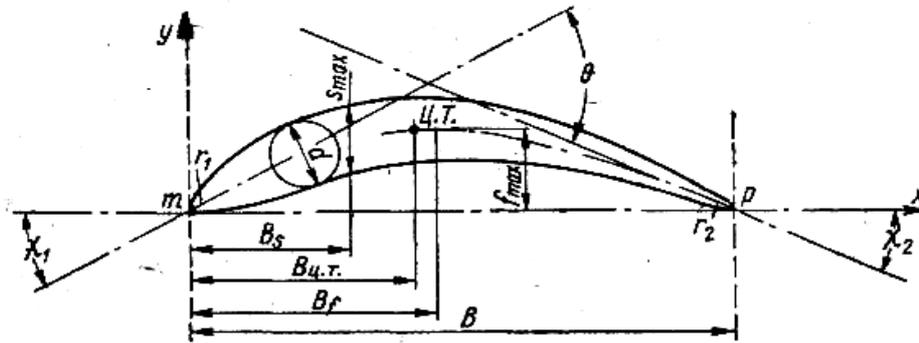


Рисунок 4.6 – Профиль лопатки [12]

Угол изогнутости профиля определяется как сумма углов на входе и на выходе $\theta = \chi_1 + \chi_2$.

Для осевых компрессоров пересечение рабочих и направляющих аппаратов поверхностью тока образует **кольцевую решетку** профилей (рис. 4.7).

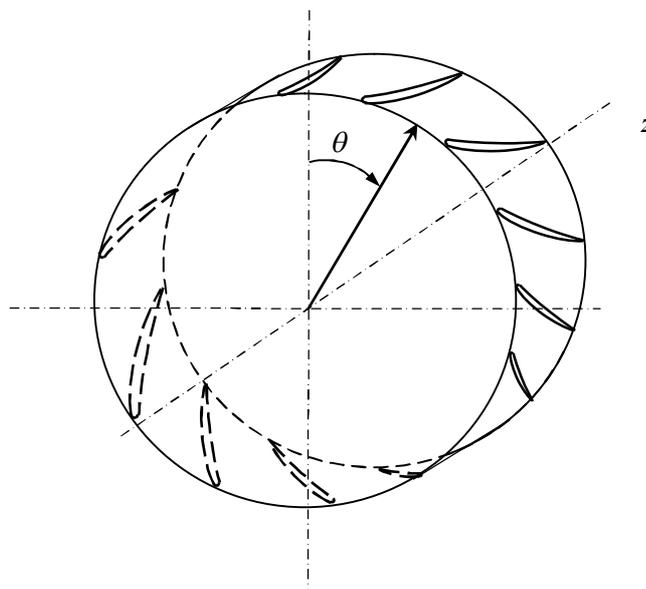


Рисунок 4.7 – Кольцевая решетка профилей

Развертка кольцевой решетки называется **плоской решеткой** (рис. 4.5). Поскольку радиус поверхности тока r значительно больше шага $t = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{z}$, где z – количество лопаток в кольцевой решетке, профили лопаток кольцевой и плоской решеток различаются незначительно.

Силы инерции, действующие на газовые частицы в элементарных кольцевых и аналогичных плоских решетках, практически совпадают, и поэтому характер

взаимодействия потока с лопатками на цилиндрической поверхности тока такой же, как и в плоскости. Это позволяет исследование течения газа проводить в плоской решетке профилей.

Простота конструкций моделей лопаточных аппаратов на основе плоских решеток позволила выполнить многочисленные испытания решеток в аэродинамических трубах и использовать результаты испытаний при проектировании осевых компрессоров.

При пересечении лопаток рабочих колес, диффузоров и обратных направляющих аппаратов центробежных компрессоров плоскостью, перпендикулярной оси вращения, получаются **круговые решетки** профилей. Круговая решетка профилей показана на рисунке 4.8.

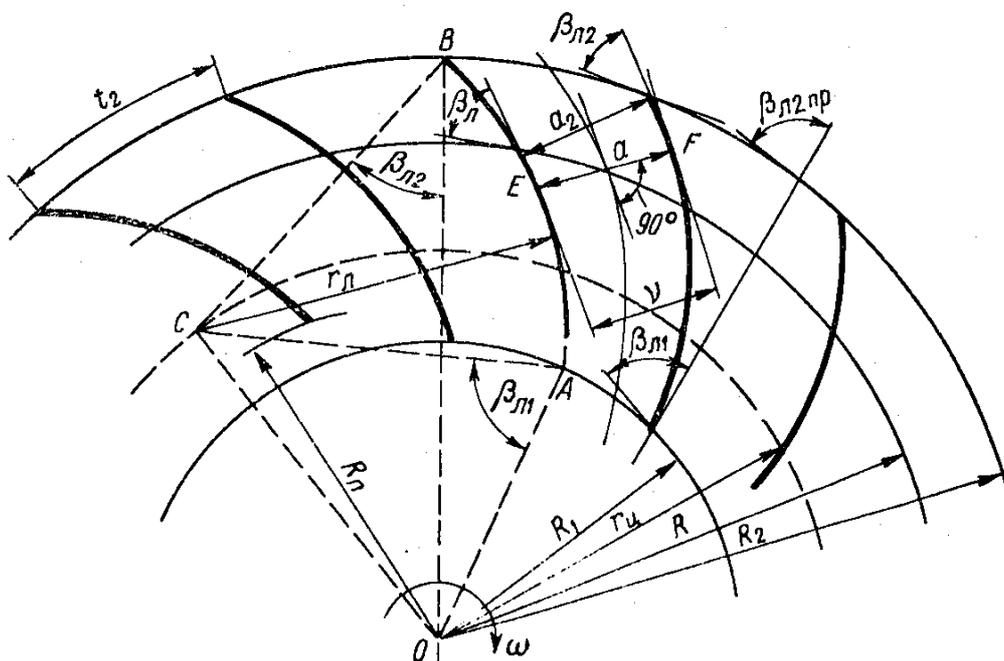


Рисунок 4.8 – Круговая решетка профилей [12]

Основные геометрические параметры круговой решетки:

$\beta_{л1}$ и $\beta_{л2}$ – входной и выходной углы лопатки;

R_1 и R_2 – радиус расположения входных и выходных кромок лопаток;

t – шаг решетки, $t = \frac{2\pi \cdot R}{z}$, где z – количество лопаток.

Угол лопатки – это угол между касательной к средней линии лопатки и перпендикуляром к рассматриваемому радиус-вектору профиля R .

Густотой решетки называется отношение хорды или длины лопатки к шагу – B/t или l/t .

Шаг определяется на среднем радиусе решетки. Иногда густота решетки характеризуется отношением a_{cp}/t , где a_{cp} – диаметр вписанной в межлопаточный канал окружности на среднем радиусе решетки R_{cp} .

Если средняя линия профиля круговой решетки выполнена по дуге окружности, то радиус средней линии профиля r_n и радиус центров r_u определяют по формулам:

$$r_n = \frac{(D_2^2 - D_1^2)}{4 \cdot (D_2 \cdot \cos \beta_{n2} - D_1 \cdot \cos \beta_{n1})}, \quad (4.1)$$

$$r_u = \sqrt{r_n^2 + D_2^2 / 4 - r_n \cdot D_2 \cdot \cos \beta_{n2}}. \quad (4.2)$$

Местный угол раскрытия эквивалентного конического диффузора определяется по формуле

$$v = \frac{2 \cdot \pi}{z} \cdot \left(1 - \frac{R \cdot \cos \beta_n}{r_n} \right). \quad (4.3)$$

Следует отметить, что течение газа в круговых решетках происходит в принципиально других условиях, чем в кольцевых и плоских из-за наличия сил Кориолиса. При рассмотрении течения газа в круговых решетках требуется учитывать закрутку потока из-за действия центробежных сил, связанных с вращением ротора.

4.2 Задачи и методы теории решеток

Параметры газа в лопаточных аппаратах турбокомпрессоров определяются с использованием уравнений, полученных из законов сохранения в механике (раздел 3).

В теории решеток (как в газодинамике вообще) различают прямую и обратную задачи. Прямая задача заключается в определении параметров потока (давлений и скоростей) для заданной решетки профилей. Обратная задача состоит в построении решетки, которая обеспечивает заданные свойства, например, распределение скоростей вдоль профиля. Прямая и обратная задачи являются важными для проектирования решеток турбомашин. При проектировании определяются аэродинамические силы взаимодействия потока с лопатками и проекции этих сил на окружное и осевое направления.

Знание аэродинамических сил, давлений и скоростей позволяет определить интегральные характеристики турбомашин и выполнить прочностные расчеты. Аэродинамические силы и распределения давлений на профиле с приемлемой точностью можно рассчитать, рассматривая обтекание профилей потенциальным потоком идеального газа. Для определения сопротивления рассчитывается вязкий пограничный слой, который практически для всех элементов турбомашин является турбулентным.

Зависимости для определения сил взаимодействия решетки профилей с потоком сравнительно просто можно получить с помощью теоремы Жуковского. Однако при этом останутся невыясненными причины возникновения подъемной силы, влияния на величину аэродинамических сил формы профиля, угла атаки.

В теории решеток широко используются методы, основанные на потенциальном течении идеальной несжимаемой жидкости, с помощью этой модели получены решения для циркуляционного и безциркуляционного обтекания геометрически простых тел – пластины, круглого цилиндра.

Весьма эффективным способом анализа плоских потоков является использование комплексного потенциала

$$W(z) = \varphi + i\psi, \quad (4.4)$$

где $z = x + iy$ – комплексная переменная.

Вещественная и мнимая части комплексного потенциала $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ – это потенциал скорости и функция тока, для которых справедливо уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (4.5)$$

Производная от комплексного потенциала называется комплексной скоростью

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = c_x + ic_y, \quad (4.6)$$

где c_x и c_y – проекции скорости. Модуль комплексной скорости равен значению скорости

$$\left| \frac{dW}{dz} \right| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} = c. \quad (4.7)$$

Существуют различные способы расчета обтекания профилей потенциальным потоком несжимаемой жидкости: разнообразные сеточные методы, метод интегральных уравнений, метод конформного преобразования, метод годографа скорости, метод дискретных вихрей и др. Все методы имеют определенные преимущества и недостатки. Некоторые методы в настоящее время практически не используются при выполнении расчетов, но знакомство с основными положениями этих методов представляется полезным с методической точки зрения. (Для более подробного ознакомления с указанными методами можно использовать рекомендуемую к данному разделу литературу).

Следует отметить терминологическую особенность, используемую в теории решеток. Часто профилем называют элементарную лопатку единичной высоты.

Это позволяет определять площади поверхностей, силы и расход газа.

4.2.1 Сеточный метод построения течения

Уравнения Лапласа (4.5) записываются в форме конечных разностей, например, для сетки в координатах x, y :

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4} [\varphi(x+h, y) + \varphi(x, y+h) + \varphi(x-h, y) + \varphi(x, y-h)], \quad (4.8)$$

и аналогично

$$\psi(x, y) = \frac{1}{4} [\psi(x+h, y) + \psi(x, y+h) + \psi(x-h, y) + \psi(x, y-h)], \quad (4.9)$$

где h – размер стороны клетки.

В области течения наносится сеть линий тока $\psi = const$ и эквипотенциальных линий $\varphi = const$ (рис. 4.9).

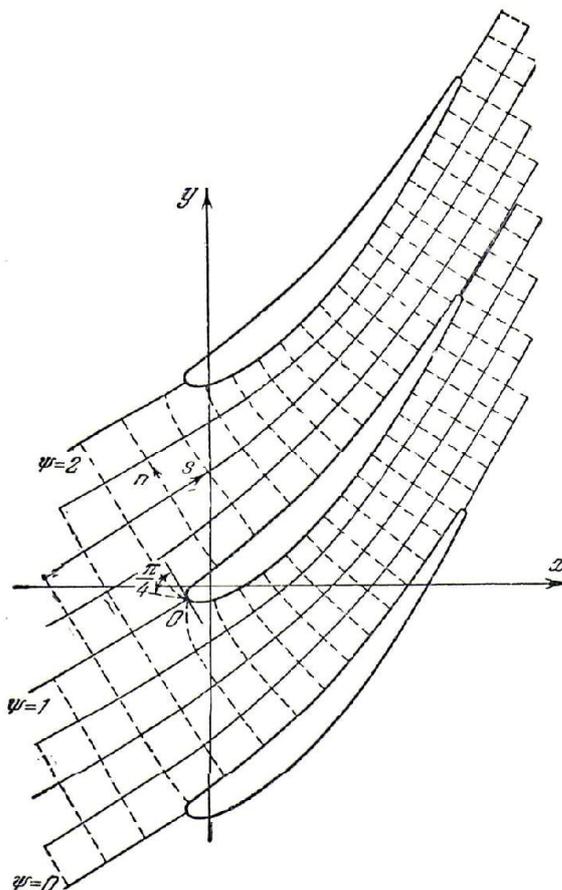


Рисунок 4.9 – Сетка линий тока $\psi = const$ и эквипотенциалей $\varphi = const$

Напоминаем основные свойства такой сетки. Касательные к линиям тока совпадают с направлениями векторов скорости; эквипотенциальные линии пересекают линии тока под прямым углом. Исключения составляют критические точки, в которых линия тока, разветвляющаяся на гладком контуре, подходит к нему под прямым углом, а эквипотенциальная линия – под углом $\pi/4$.

В соответствии с определением потенциала скорости и функции тока:

$$c_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad c_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4.10)$$

Величина скорости $c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2}$.

Для заданной скорости перед решеткой выполняются следующие граничные условия:

$$1) \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ на контуре профиля, } \psi = C \text{ на нижнем профиле и } \psi = C + tc_1 \cos \alpha_1$$

на верхнем профиле (условие обтекания);

2) $\varphi_A - \varphi_B = tc_1 \sin \alpha_1$ на границах полосы перед решеткой, $\varphi_A - \varphi_B = const$ на границах полосы за решеткой, $\psi_A - \psi_B = tc_1 \cos \alpha_1$ на всех границах полосы (условие периодичности);

$$3) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = c_{1x} = c_1 \cos \alpha_1 \text{ и } \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = c_{1y} = c_1 \sin \alpha_1 \text{ при } x = -\infty ;$$

$$4) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = c_1 \cos \alpha_1 \text{ и } \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = const \text{ при } x = \infty ;$$

$$5) \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \text{ в задних критических точках;}$$

$$6) \varphi = \psi = 0 \text{ в определенной точке потока.}$$

Указанные условия необходимы и достаточны для однозначного определения функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$.

С приемлемой для практических задач точностью условия 3) и 4) выполняются уже на расстоянии 0,5-1 шага t от входных и выходных кромок профилей.

Задача вычисления $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ сводится к задаче Дирихле.

Вычисления выполняются путем последовательных приближений. Возможны различные способы определения «невязок» и уточнения значений искомой функции.

В современных компьютерных комплексах, которые используются в вычислительной газодинамике (например, ANSYS CFX; FlowVision и др.), построение расчетных сеток выполняется с помощью специальных программ. Выбор сеток и способы отыскания решений существенно влияют на точность получаемых результатов.

Следует отметить, что подробное рассмотрение вопросов подобного рода не является содержанием данного пособия.

4.2.2 Метод интегральных уравнений

Метод интегральных уравнений основан на возможности представления аналитической в некоторой области функции по значениям этой функции на границах. Метод интегральных уравнений применяется в различных видах в зависимости от выбора функции течения, геометрических особенностей решетки и способа решения интегральных уравнений.

Метод интегральных уравнений можно трактовать как метод наложения равномерного потока на поток вихрей, непрерывно распределенных вдоль контура с интенсивностью $\gamma = d\Gamma/ds$.

Выражение для комплексного потенциала циркуляционного течения через любую решетку имеет вид

$$W(z) = \frac{I}{2\pi i} \oint_L \frac{dW(\zeta)}{d\zeta} \ln \frac{\text{sh}\chi(z-\chi)}{\chi} d\zeta + \bar{c}_\infty z + C, \quad (4.11)$$

где $\chi = \frac{\pi}{t}$; $\bar{c} = 0,5(\bar{c}_1 + \bar{c}_2)$; C – постоянная.

Предельное значение комплексного потенциала в точке z_0 на контуре L_0 определяется формулой

$$W(z_0) = \frac{I}{2\pi i} \oint_L \bar{c}(\zeta) \ln \frac{\text{sh}\chi(z_0-\chi)}{\chi} d\zeta + \bar{c}_\infty z_0 + C. \quad (4.12)$$

На контуре $\bar{c}(\zeta)d\zeta = \bar{c}(s)ds$, где s – длина дуги контура. Можно записать для потенциала скорости и функции тока:

$$\varphi(s) = \int_L c(\sigma) \varphi_\Gamma(x_0 - \xi, y_0 - \eta) d\sigma + c_{\infty x} x_0 + c_{\infty y} y_0 + C, \quad (4.13)$$

$$\psi(s) = \int_L c(\sigma) \psi_\Gamma(x_0 - \xi, y_0 - \eta) d\sigma + c_{\infty x} y_0 + c_{\infty y} x_0 + C, \quad (4.14)$$

В формулах (4.13) и (4.14) σ – переменная интегрирования вдоль контура профиля ($d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2$); x_0 и y_0 – координаты контура; $c_{\infty x} = c_{1x} = c_{2x}$, $c_{\infty y} = 0,5(c_{1y} + c_{2y})$. Для определения φ_Γ и ψ_Γ используются следующие зависимости:

$$\begin{aligned} \varphi_\Gamma &= \frac{I}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\chi(y-\eta)}{\operatorname{th}\chi(x-\xi)}, \\ \psi_\Gamma &= \frac{I}{4\pi} \ln \frac{\operatorname{ch}2\chi(x-\xi) - \cos 2\chi(y-\eta)}{2\chi^2}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Для решения приведенных уравнений используется какой-либо численный метод. Поскольку для гладкого профиля функция $c(s)$ дважды дифференцируема, то ограничений на выбор численного метода нет.

4.2.3 Метод конформного отображения

Применение метода конформного отображения области течения позволяет упростить вычисление комплексного потенциала и свести расчет периодического течения через решетку к расчету течения в односвязной области. При решении прямой задачи внешность заданной решетки отображается на простую (каноническую) область, после чего определение комплексного потенциала производится по простым формулам при любых условиях обтекания.

Основное свойство конформного отображения состоит в том, что при отображении сохраняется подобие малых элементов, т.е. если две линии пересекаются в плоскости z под некоторым углом, то соответствующие им линии в плоскости ζ будут пересекаться под тем же углом. Значит, ортогональная сетка эквипотенциалей $\varphi(x, y) = const$ и линий тока $\psi(x, y) = const$, расположенных в плоскости z , переходит в ортогональную сетку $\varphi(\xi, \eta) = const$, $\psi(\xi, \eta) = const$ в плоскости ζ .

Пусть профиль, расположенный в плоскости ζ (рис. 4.10), обтекается потенциальным потоком идеального несжимаемого газа.

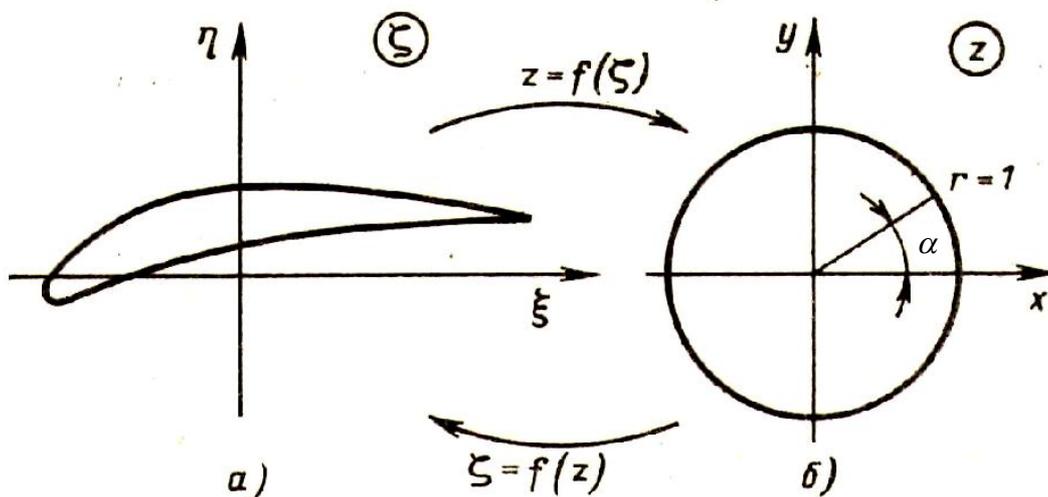


Рисунок 4.10 – Конформное преобразование плоскостей:
а) плоскость профиля; б) плоскость окружности

Комплексный потенциал в плоскости профиля $W(\zeta) = \varphi(\xi, \eta) + i\psi(\xi, \eta)$. Комплексную скорость можно найти через его производную $dW(\zeta)/d\zeta = c_x(\xi, \eta) + ic_y(\xi, \eta)$. Так как переменная ζ является функцией переменной z , то по правилам дифференцирования сложной функции получим формулу для пересчета скоростей в плоскостях z и ζ :

$$\bar{c}(\zeta) = \frac{dW(\zeta)}{d\zeta} = \frac{dW(z)}{dz} \frac{dz}{d\zeta} = \frac{dW(z)}{dz} \frac{1}{\frac{d\zeta}{dz}}. \quad (4.16)$$

Задача обтекания произвольного профиля в принципе может быть всегда сведена к решенной задаче обтекания окружности. Сложность заключается в нахождении такой функции $z = f(\xi + i\eta)$, которая преобразует поток вокруг профиля заданной формы в поток вокруг окружности. Практически удобнее искать обратную ей функцию, которая преобразует поток вокруг окружности в поток вокруг профиля $\zeta = \xi + i\eta = f(z)$. Это объясняется тем, что в этом случае искомую функцию легко строить в виде ряда Лорана.

Ряд Лорана по переменной z в первой степени обеспечивает условие $\zeta = \infty$ при $z = \infty$ и $d\zeta/dz \neq \infty$:

$$\zeta = Az + A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots \quad (4.17)$$

Для точек на окружности единичного радиуса $z = Ae^{i\alpha}$. С учетом $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ после отделения в уравнении (4.17) действительной и мнимой частей получаем параметрическое представление профиля в таком виде:

$$\begin{aligned} \xi &= a_0 + (a_1 + a) \cos \alpha + (b_1 - b) \sin \alpha + \sum_{n=2}^N a_n \cos n\alpha + \sum_{n=2}^N b_n \sin n\alpha, \\ \eta &= b_0 + (b_1 + b) \cos \alpha - (a_1 - a) \sin \alpha + \sum_{n=2}^N b_n \cos n\alpha - \sum_{n=2}^N a_n \sin n\alpha. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Частный случай конформного преобразования имеет место при использовании функции

$$\zeta = z + \frac{a^2}{z}. \quad (4.19)$$

С помощью этой функции получают профиль Жуковского.

Конформные отображения используются также и при проектировании решеток на осесимметричных поверхностях тока (круговых в том числе). При этом вначале выполняется конформное отображение осесимметричной поверхности на вспомогательную плоскость.

4.2.4 Метод годографа скорости

Метод годографа скорости заключается в переходе из физической плоскости, в которой происходит течение, в плоскость с координатами c_x и c_y – плоскость годографа скорости. Рассмотрим соответствие между этими плоскостями. Пусть в физической плоскости известна линия тока, на которой отметим точку A (рис. 4.11). Скорость в этой точке равна c , проекции скорости – c_x и c_y , угол между вектором скорости и осью x – α . Точке A соответствует в плоскости годографа скорости точка A' с координатами c_x и c_y . В плоскости годографа скорости все векторы скорости откладываются из одной точки – из начала координат. Линия, которая соединяет концы векторов, называется годографом скорости. Годограф скорости соответствует линии тока в физической плоскости.

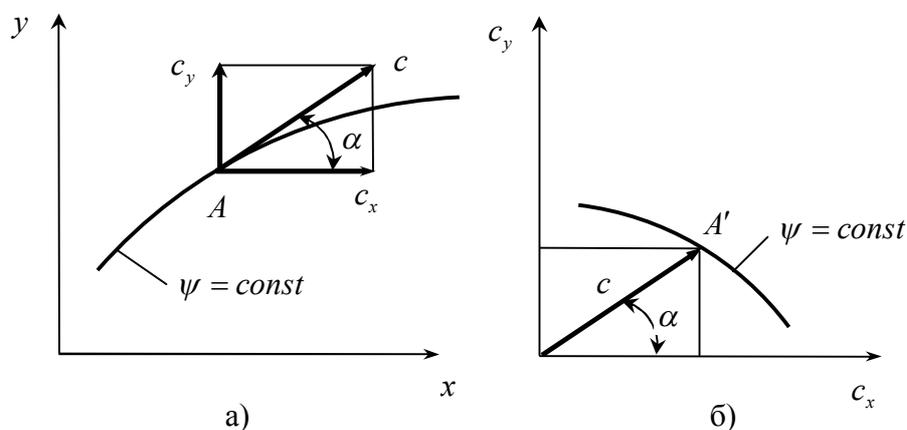


Рисунок 4.11 – Соответствие между физической плоскостью и плоскостью годографа скорости:

а) – физическая плоскость; б) – плоскость годографа скорости

Связь между потенциалом скорости и функцией тока имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (4.20)$$

где $\bar{\rho} = \rho / \rho^*$, ρ – плотность потока; ρ^* – плотность адиабатически заторможенного потока (плотность торможения).

Уравнения (4.20) нелинейны, так как плотность газа зависит от скорости, что вызывает трудности при решении задач с использованием этих уравнений.

Переход из физической плоскости в плоскость годографа скорости приводит к замечательному результату: нелинейные уравнения газовой динамики становятся линейными. (Такие преобразования были применены в газовой динамике С.А. Чаплыгиным в 1902 г.). Идея преобразования заключается в следующем. В уравнениях для физической плоскости независимыми переменными являются координаты x и y , а функциями –

скорости потока c_x и c_y , функция тока $\psi = \psi(x, y)$ и потенциал скорости $\varphi = \varphi(x, y)$. Из этих зависимостей можно исключить x , y и считать, что функция тока и потенциал скорости являются функциями скоростей $\psi = \psi(c_x, c_y)$, $\varphi = \varphi(c_x, c_y)$.

Получим основные уравнения в плоскости годографа скорости:

$$\begin{aligned} d\varphi + i \frac{d\psi}{\bar{\rho}} &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \right) + i \frac{1}{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right) = \\ &= (c_x dx + c_y dy) + i(-c_y dx + c_x dy) = (c_x - ic_y) dz, \end{aligned} \quad (4.21)$$

где $z = x + iy$.

В полярных координатах можно записать $c_x - ic_y = ce^{-i\alpha}$. Тогда

$$dz = \frac{1}{c} e^{i\alpha} \left(d\varphi + i \frac{d\psi}{\bar{\rho}} \right). \quad (4.22)$$

Принимаем за независимые переменные c и α и находим:

$$\frac{dz}{dc} = \frac{1}{c} e^{i\alpha} \left(\frac{d\varphi}{dc} + i \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\psi}{dc} \right), \quad \frac{dz}{d\alpha} = \frac{1}{c} e^{i\alpha} \left(\frac{d\varphi}{d\alpha} + i \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\psi}{d\alpha} \right). \quad (4.23)$$

Чтобы исключить из (4.23) переменную z , дифференцируем первое уравнение по α , а второе по c и результаты вычитаем друг из друга:

$$\frac{1}{\bar{\rho}c} \frac{\partial \psi}{\partial c} + \frac{i}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial c} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + i \frac{d}{dc} \left(\frac{1}{\bar{\rho}c} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}. \quad (4.24)$$

Сопоставляя действительные и мнимые части, получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial c} = \frac{\bar{\rho}}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial c} = \frac{d}{dc} \left(\frac{1}{\bar{\rho}c} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}. \quad (4.25)$$

Производная $\frac{d}{dc} \left(\frac{1}{\bar{\rho}c} \right) = -\frac{1}{\bar{\rho}^2 c^2} \left(\bar{\rho} + c \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial c} \right)$. С учетом того что процесс изэнтропийный,

имеем

$$\frac{d}{dc} \left(\frac{l}{\bar{\rho}c} \right) = -\frac{1-M^2}{\bar{\rho}c^2}. \quad (4.26)$$

Уравнения годографа (уравнения Чаплыгина) принимают вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial c} = -\frac{1-M^2}{\bar{\rho}c} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial c} = \frac{\bar{\rho}}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}. \quad (4.27)$$

Для несжимаемой жидкости ($M = 0$, $\bar{\rho} = 1$) уравнения годографа (4.27) преобразуются в соотношения Коши–Римана.

Метод годографа скорости может использоваться для решения как прямой, так и обратной задачи.

Для примера рассмотрим построение годографа скорости течения газа через плоскую решетку профилей (рис. 4.12).

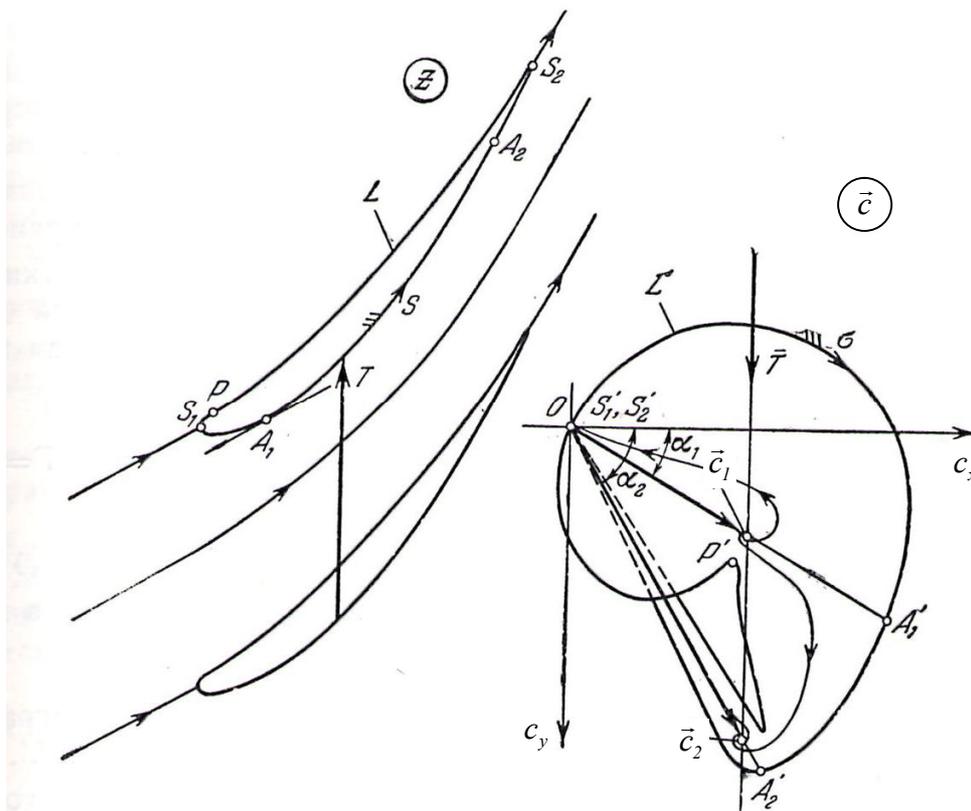


Рисунок 4.12 – Годограф скорости течения через плоскую решетку [13]

Область годографа является областью изменения комплексного потенциала $W = \varphi + i\psi$. Граница области годографа представляет собой замкнутый контур L' , который соответствует контуру профилей L , и является геометрическим местом концов векторов скорости на профиле. Модуль c и аргумент α комплексной скорости \bar{c} принимают

максимальные и минимальные значения на границах области (т.е. на профиле). Внешняя область профилей L преобразуется во внутренность годографа L' . Скорость на контуре гладкого профиля дважды (в критических точках) обращается в нуль, соответственно контур годографа дважды проходит через точку $\bar{c} = 0$.

Функцию $W(\bar{c})$ можно считать комплексным потенциалом фиктивного течения от вихреисточника и вихресточка, помещенных в концах векторов \bar{c}_1 и \bar{c}_2 в области годографа скорости. Интенсивности вихреисточника и вихресточка определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 + iQ_1 &= c_1 t \sin \alpha_1 + ic_1 t \cos \alpha_1, \\ \Gamma_2 + iQ_2 &= -c_2 t \sin \alpha_2 - ic_2 t \cos \alpha_2. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Причем $Q_1 + Q_2 = 0$, $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$.

Критические точки S'_1 и S'_2 фиктивного течения в области годографа соответствуют критическим точкам S_1 и S_2 на профиле и поэтому совпадают с точкой $\bar{c} = 0$ контура годографа.

Значение метода годографа скорости обуславливается тем, что при задании годографа скорости можно обеспечить выполнение важных требований к распределению скорости на профиле, а именно ограничить ее максимальную величину или изменение \bar{c} по определенному закону.

После определения $W(\bar{c})$ можно определить $z = \int \frac{dW}{\bar{c}}$. Вдоль любой линии тока $\psi = const$, и в частности на границах профилей

$$z = \int \frac{d\varphi}{\bar{c}} = \int \frac{d\varphi}{c} e^{i\alpha}. \quad (4.29)$$

Координаты контура профиля определяются по формулам:

$$x = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{1}{c} \frac{d\varphi}{d\sigma} \cos \alpha d\sigma + x_0, \quad y = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{1}{c} \frac{d\varphi}{d\sigma} \sin \alpha d\sigma + y_0, \quad (4.30)$$

где σ – переменная интегрирования вдоль контура годографа.

Важное свойство метода годографа скорости состоит в том, что метод позволяет просто определять параметры струйных течений.

Метод может применяться для построения круговых решеток [13].

4.2.5 Метод дискретных вихрей

Основой метода дискретных вихрей является замена действия обтекаемого тела нормальными напряжениями, распределенными по контуру тела.

Скорость потока направлена по касательной к поверхности тела, а силы давления – нормальны к этой поверхности. По теореме Жуковского сила, действующая на вихрь, нормальна к скорости основного потока в точке расположения вихря. Это позволяет рассматривать вместо обтекаемого тела вихревую пелену соответствующей интенсивности. Вихревая пелена обычно заменяется дискретными вихрями, которые называются присоединенными вихрями Жуковского.

Рассмотрим простой пример. Пусть плоская пластина шириной b обтекается потенциальным потоком, имеющим скорость c_∞ . Угол между вектором скорости \vec{c}_∞ и пластиной α . Требуется найти подъемную силу и момент аэродинамических сил, действующих на пластину.

Разбиваем пластину на N отрезков и в середине каждого помещаем вихрь. Пластина непроницаема, нормальные проекции скоростей равны нулю. Число уравнений для определения циркуляции должно быть равно числу вихрей. Помещаем контрольные точки между вихрями на равных расстояниях. На задней острой кромке должно выполняться условие Жуковского – Чаплыгина, поэтому помещаем на заднюю кромку контрольную точку.

Возьмем пластину с тремя вихрями, расположенными, как это показано на рисунке 4.13.

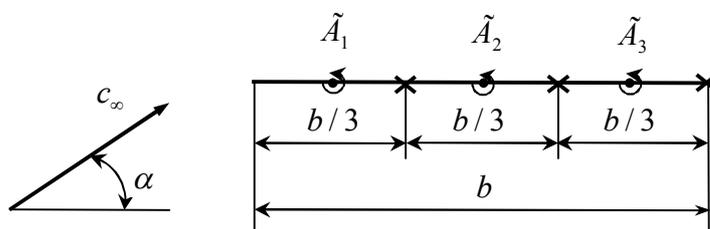


Рисунок 4.13 – Присоединенные вихри на пластине

Крестиками отмечены места, где удовлетворяются граничные условия. Уравнение для удовлетворения граничных условий в первой точке (крайняя слева) имеет вид

$$c_\infty \sin \alpha + \frac{\Gamma_1}{2\pi} \frac{1}{b/6} - \frac{\Gamma_2}{2\pi} \frac{1}{b/6} - \frac{\Gamma_3}{2\pi} \frac{1}{b/2} = 0. \quad (4.31)$$

Первое слагаемое в этом уравнении – проекция скорости набегающего потока на нормаль к пластине. Остальные составляющие равны нормальным скоростям, которые вызваны вихрями. Аналогично составляются уравнения для других точек. Решая систему уравнений, определяются циркуляции вихрей. Полная циркуляция равна сумме циркуляций вихрей.

При расчете параметров потока в решетке профилей на каждом профиле в сходственных точках z_k размещаются N вихрей с циркуляцией Γ_k ($k = 1, 2, 3, \dots, N$). Комплексная скорость, индуцированная такой системой вихрей, определяется по формуле

$$c_x - ic_y = \frac{I}{2it} \sum_{k=1}^N \Gamma_k \operatorname{cth} \left[\frac{\pi}{t} (z - z_k) \right]. \quad (4.32)$$

Комплексная скорость суммарного потока, образованного системой вихрей и плоскопараллельным потоком:

$$c_x - ic_y = c_{x0} - ic_{y0} + \frac{I}{2it} \sum_{k=1}^N \Gamma_k \operatorname{cth} \left[\frac{\pi}{t} (z - z_k) \right]. \quad (4.33)$$

Комплексная постоянная $c_{x0} - ic_{y0}$ неизвестна. Ее можно выразить через скорость набегающего потока и тогда

$$c_x - ic_y = c_{x1} - ic_{y1} + \frac{I}{2it} \sum_{k=1}^N \Gamma_k \operatorname{cth} \left[\frac{\pi}{t} (z - z_k) + I \right]. \quad (4.34)$$

Неизвестные Γ_k находятся с помощью граничных условий путем решения системы N уравнений. Если задняя кромка не абсолютно острая, то в систему уравнений следует включить условие

$$\sum_{k=1}^N \Gamma_k = \Gamma. \quad (4.35)$$

Циркуляция Γ выбирается так, чтобы скорость на кромке была равна нулю.

Если систему уравнений решить для двух случаев: поперечного обтекания решетки ($c'_x = I$ и $c'_y = 0$); продольного обтекания решетки ($c''_x = 0$ и $c''_y = I$), то параметры любого другого режима обтекания находятся простым пересчетом.

4.3 Обтекание профилей

Для лучшего понимания процесса взаимодействия потока газа с лопатками в аппаратах турбомашин используется принцип перехода от простейших моделей к более сложным, вначале рассматривается потенциальное течение несжимаемого идеального газа. Влияние сжимаемости и вязкости рассматривается впоследствии. Профиль сначала уподобляется прямой тонкой пластинке, возникновение подъемной силы при обтекании профиля рассмотрено на примере обтекания тонкой дужки. Затем рассматриваются особенности обтекания изогнутого профиля и решетки профилей.

Понимание качественного характера взаимодействия профиля с потоком газа позволяет перейти к количественным соотношениям, используемым при проектировании турбомашин.

4.3.1 Обтекание пластинки

Рассмотрим обтекание тонкой пластины невязким газом, при этом силы вязкости отсутствуют. Так как направление скорости невозмущенного потока c_∞ (рис. 4.14) совпадает с направлением поверхности тонкой пластинки, поток не отклоняется от инерциального направления, давление во всех точках пространства одинаково. Сила давления на поверхности пластинки не возникает. Таким образом, тонкая пластинка при невязком обтекании не воздействует на поток, и на нее не действуют силы от обтекания газом.

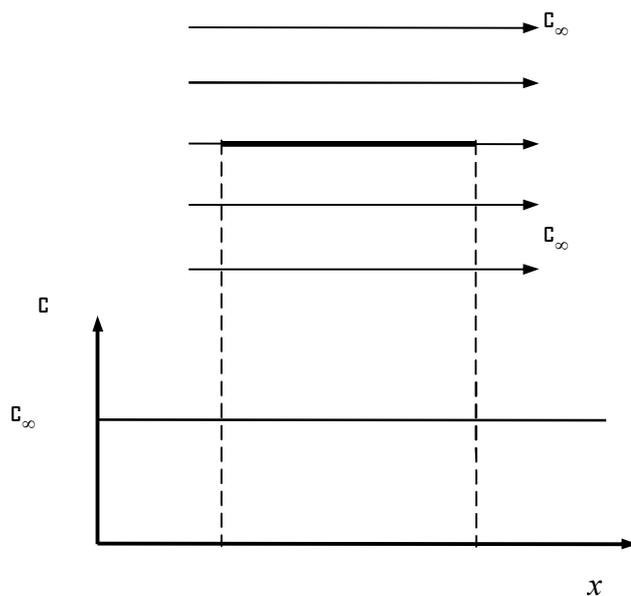


Рисунок 4.14 – Обтекание пластинки невязким газом

При движении реального вязкого газа частицы, находящиеся непосредственно на поверхности «прилипают» к ней, они неподвижны. Сила вязкости быстро убывает в направлении, перпендикулярном к поверхности, и на некотором расстоянии практически незаметна. Соответственно, и скорость потока равна скорости невозмущенного потока c_∞ . Тонкая область, в которой скорость возрастает от нуля до $0,99c_\infty$ (одно из возможных условий определения границы вязкой и невязкой областей течения), – это пограничный слой.

На рис. 4.15 зона, в которой заметно проявление вязкости потока, выделена штриховыми линиями. Из-за скольжения слоев газа образуется сила вязкости, пропорциональная касательному напряжению, т.е. силе, отнесенной к единице поверхности:

$$\tau_t = (\mu + \mu_t) \frac{\partial c}{\partial n}, \quad (4.36)$$

где τ_t – напряжение трения турбулентного потока; μ ($Па \cdot c$) – динамическая вязкость газа, величина которой зависит в основном от свойств газа; μ_t – турбулентная (кажущаяся) вязкость из-за обмена импульсами между частицами, движущимися с разными скоростями.

Касательное напряжение создает сопротивление движению газа. Сопротивление преодолевается за счет потери (преобразования в тепло) части механической энергии газа, складывающейся из потенциальной энергии давления и кинетической энергии движения.

В пограничном слое давление практически не отличается от давления невозмущенного потока, поэтому сопротивление преодолевается за счет потери кинетической энергии в пограничном слое. Потеря напора растет по длине пластинки, поэтому толщина пограничного слоя растет от ее начала к концу. После схода потока с пластинки скорость в следе постепенно увеличивается за счет трения о более быстро движущиеся слои, и на некотором расстоянии от пластинки эпюра скоростей практически выравнивается.

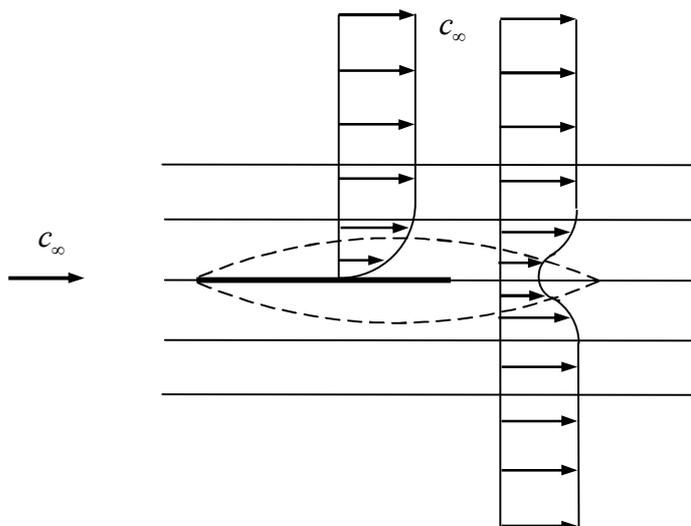


Рисунок 4.15 – Обтекание пластинки вязким газом

Сопротивление трения пластинки характеризуется безразмерным коэффициентом силы сопротивления

$$C_f = \frac{P_f}{\rho \frac{c_\infty^2}{2} B}, \quad (4.37)$$

где P_f (н/м) – сила сопротивления, которая может быть определена экспериментально (например, продувкой установленной на специальных весах пластинки в аэродинамической трубе); ρ (кг/м³) – плотность газа; c_∞ (м/с) – скорость невозмущенного потока (скорость на бесконечности); B (м) – длина пластинки.

Как известно, обтекаемая поверхность считается гидравлически гладкой, если тонкий ламинарный подслой закрывает неровности поверхности.

Ламинарный подслой образуется потому, что поверхность подавляет поперечные турбулентные пульсации. Сопротивление гидравлически гладкой поверхности уменьшается с ростом числа Рейнольдса.

Коэффициент сопротивления гидравлически гладкой поверхности можно определить по формуле

$$C_f = \frac{0,0307}{Re_w^{1/7}}. \quad (4.38)$$

С ростом числа Рейнольдса ламинарный подслой становится тоньше, вплоть до того, что перестает закрывать пики шероховатости (рис. 4.16).



Рис. 4.16 – Схема гидравлически гладкой (слева) и шероховатой (справа) поверхностей

При этом сопротивление определяется не сопротивлением скольжения турбулентного слоя по ламинарному подслою, а вихреобразованием на выступающих неровностях поверхности. Такая поверхность является гидравлически шероховатой, и ее сопротивление перестает зависеть от критерия Рейнольдса – так называемая «автомодельность по числу Рейнольдса». В этом случае коэффициент сопротивления определяется по формуле

$$C_f = 0,0162 \left(\frac{k_u}{B} \right)^{1/7}, \quad (4.39)$$

где k_u – высота неровностей поверхности.

Отметим, что формулы (4.38) и (4.39) выведены приемами теории пограничного слоя с использованием экспериментальных данных, т.е. формулы носят полуэмпирический характер.

Формула (4.39) предложена для равномерной «песочной» шероховатости. Для поверхностей со структурной шероховатостью следует учитывать при расчете коэффициента сопротивления направление течения относительно рельефа шероховатостей.

При безударном обтекании пластинки в направлении нормали к ее поверхности сил не возникает, т.е. подъемная сила равна нулю. При ударном обтекании пластины вязким газом с плавным сходом струй с задней кромки подъемная сила равна

$$R = \rho B |c_\infty|^2 \sin \alpha, \quad (4.40)$$

где ρ – плотность газа; B – хорда; α – угол атаки.

Угол атаки равен углу между вектором скорости набегающего потока и направлением поверхности пластинки.

4.3.2 Возникновение подъемной силы. Постулат Жуковского-Чаплыгина

Рассмотренная выше простейшая схема профиля в виде прямой пластинки объясняет природу возникновения сопротивления трения, но не дает ответа на вопрос, как возникает сила взаимодействия между профилем и потоком. Для возникновения силы взаимодействия аэродинамические профили должны отклонять поток газа от инерциального направления.

Сила взаимодействия профиля и потока определяется разностью давлений на нижней и верхней поверхностях профиля. В потенциальном потоке величина полного давления $p^* = p + \rho c_\infty^2 / 2 = const$ одинаковая для всех газовых частиц. Скорость на поверхности профиля можно определить по формуле

$$c_\infty = \sqrt{\frac{2(p_\infty^2 - p)}{\rho}}. \quad (4.41)$$

Суммарной характеристикой различия скоростей является круговой интеграл по поверхности профиля – **циркуляция скорости**: $\Gamma = \oint c \cdot ds$, где ds – элемент поверхности профиля.

Потенциальное течение по определению является безциркуляционным, т.е. $\Gamma = 0$. Поэтому для обтекания профиля любой формы потенциальным потоком получается парадоксальная картина – сила взаимодействия газа с профилем не возникает. Для того чтобы при безударном натекании потока обеспечивалось условие $\Gamma = 0$, задняя критическая точка располагается на верхней поверхности профиля (рис. 4.17).

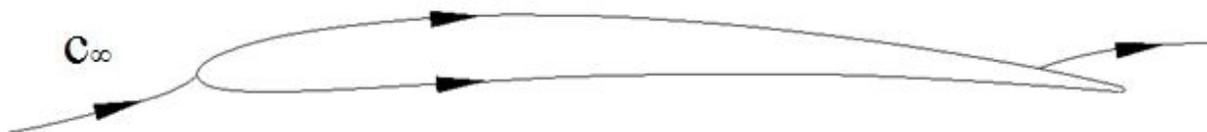


Рисунок 4.17 – Схема безциркуляционного обтекания профиля невязким потоком

Струйка тока с нижней поверхности огибает острую заднюю кромку и движется против направления невозмущенного потока к задней критической точке на верхней стороне. При движении с крайне малым радиусом кривизны на задней кромке давление резко падает и поток разгоняется до высокой скорости.

Для вязкого газа такая схема обтекания невязким потоком – поток не огибает острую кромку, происходит сход потока с кромки. При этом на выпуклой поверхности профиля (**поверхность разрежения**) скорость потока больше скорости невозмущенного потока, на вогнутой поверхности профиля (**поверхность давления**) скорость потока меньше скорости невозмущенного потока.

Чтобы использовать для расчета подъемной силы сравнительно простую модель потенциального течения невязкого газа, Жуковский и Чаплыгин предложили следующее: из всех возможных обтеканий крыла с задней острой кромкой в природе реализуется только то, в котором скорость в заднем острие конечна. Иными словами, **точка схода потока находится на задней кромке профиля и направление покидающей профиль струйки тока совпадает с направлением касательной к средней линии профиля в задней кромке**. Данное условие получило название **постулата Жуковского – Чаплыгина**.

Рассмотрим обтекание дужки невязким газом. На рис. 4.18 показаны картины обтекания дужки при трех различных, наиболее характерных направлениях скорости на бесконечности, совпадающей с направлением хорды (это прямая, соединяющая начало и конец дужки, ее входную и выходную кромки).

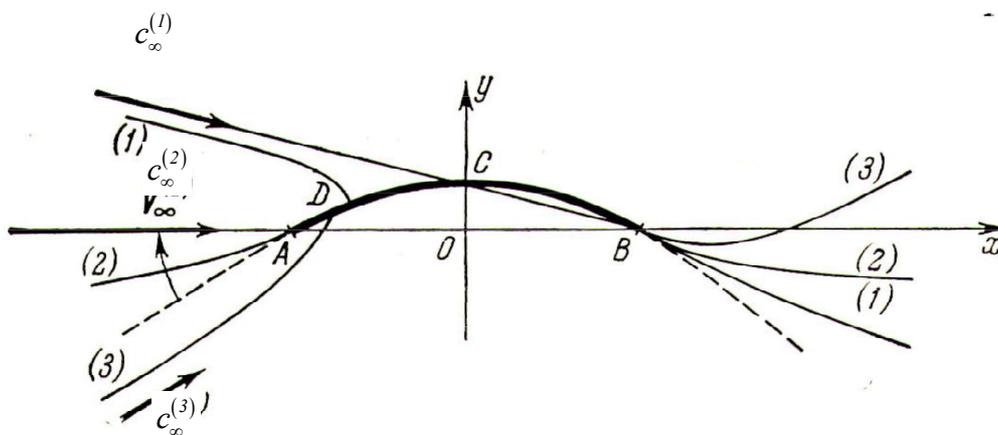


Рисунок 4.18 – Обтекание тонкой дужки невязким потоком с соблюдением постулата Жуковского – Чаплыгина [14]

В связи с перестройкой потока на входе из-за разности давлений на нижней и на верхней поверхностях профиля для получения безударного обтекания поток должен быть направлен по хорде (на рисунке 4.18 это вариант 2). На задней кромке дужки выполняется условие Жуковского-Чаплыгина.

При подходе к поверхности газовые частицы тормозятся до нулевой скорости на поверхности дужки. Параметры газа в критической точке – это параметры торможения $T_{кр} = T^* = T_\infty + c_\infty^2 / 2c_p$, $p_\infty^* = p_\infty + \rho c_\infty^2 / 2$. В критической точке поток делится на две области.

На рисунке 4.19 показаны дужка и графики изменения скоростей и давлений вдоль верхней и нижней поверхностей дужки.

Так же, как и при обтекании симметричного профиля, линии тока вблизи дужки искривляются, на частички газа, которые двигаются по криволинейным траекториям, действуют центробежные силы F_u , которые уравниваются силами давления F_o .

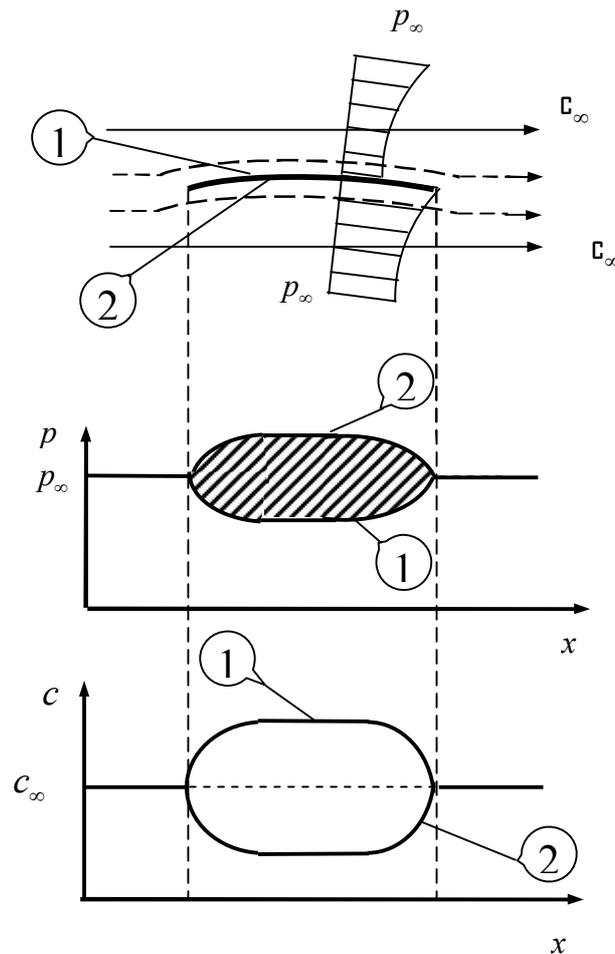


Рисунок 4.19 – Безударное обтекание дужки

Давление на верхней поверхности дужки будет меньше, чем вдали от дужки $p_1 < p_\infty$, а скорость вблизи профиля будет больше, чем скорость невозмущенного потока $c_1 > c_\infty$.

Так как вблизи нижней поверхности дужки центробежная сила направлена к поверхности, давление становится больше, чем в невозмущенном потоке, а скорость соответственно меньше: $c_2 < c_\infty$. Разность давлений (заштрихованная область на рисунке 4.13) создает подъемную силу.

Понятие о циркуляции используется при рассмотрении невязкого обтекания при изменении величины или (и) направления скорости. Понятно, что на лопатках неподвижного ротора турбокомпрессора циркуляция скорости отсутствует, поэтому при разгоне до расчетной скорости вращения она приобретает некоторое конечное значение. Однако согласно положениям теоретической аэродинамики циркуляция скорости не может возникнуть (если ее не было) или исчезнуть. Рассмотрение картины реального обтекания с разной скоростью разрешает это противоречие.

На рис. 4.20 представлена визуализация обтекания профиля, приведенного в движение и затем остановленного в момент начала движения.

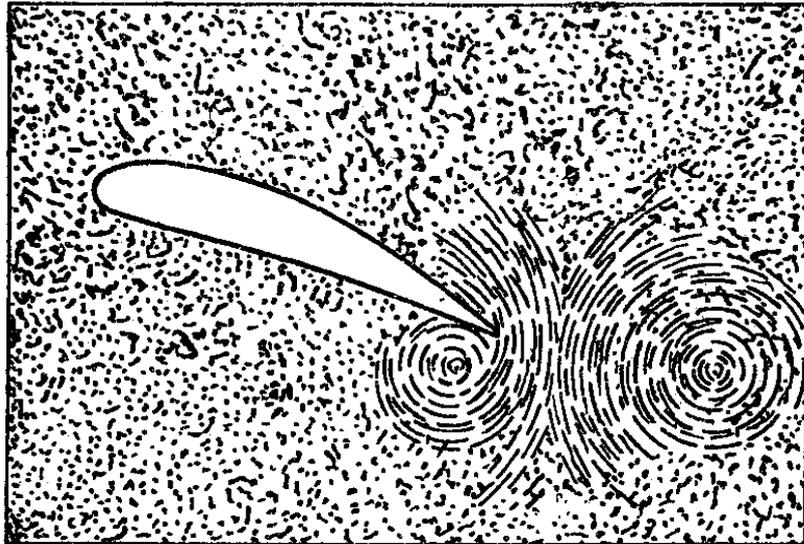


Рисунок 4.20 – Разгонный и остановочный вихри, образующиеся при начале движения и последующей остановке профиля

Изображенная на рис. 4.20 картина течения объясняется следующим. В момент начала движения условие схода Жуковского — Чаплыгина не выполняется (рис. 4.21).

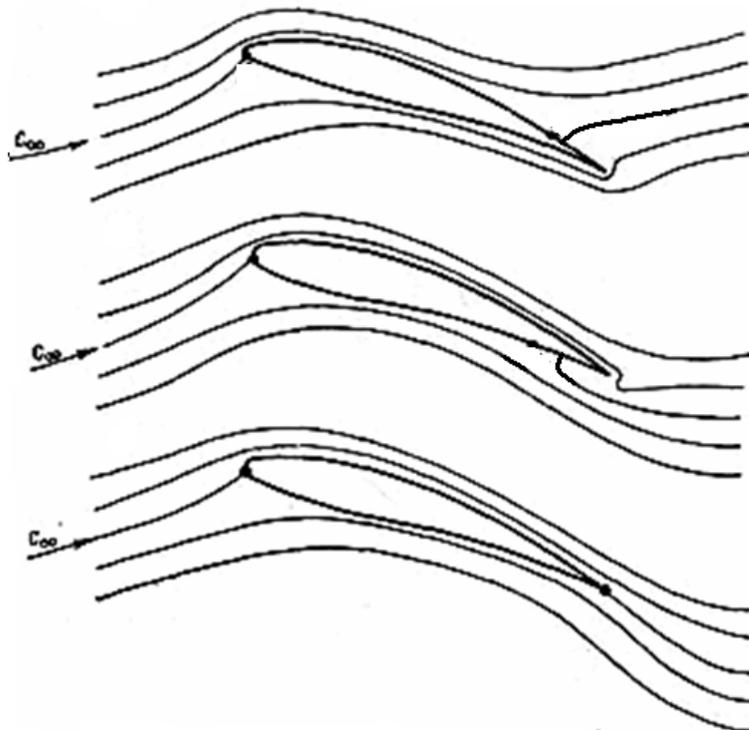


Рисунок 4.21 – Положение задней критической точки: – вверху при увеличении скорости обтекания, – в середине при уменьшении скорости обтекания, – внизу при установившемся движении с соблюдением постулата Жуковского – Чаплыгина [12]

Обтекание соответствует нулевой циркуляции. Струйка тока с поверхности давления огибает острую заднюю кромку и движется против направления невозмущенного потока к задней критической точке на стороне разрежения. При движении с крайне малым радиусом кривизны на задней кромке давление резко падает и поток разгоняется до высокой скорости. Следуя навстречу основному потоку к критической точке, где скорость равна нулю, критическая струйка тока не в состоянии преодолеть встречное давление. Она отрывается, образуя отчетливо видимый на рис. 4.20 вихрь с вращением против часовой стрелки. Затем вихрь сносится потоком с поверхности профиля.

При возникновении отрыва и образовании вихря точка схода занимает свое положение на выходной кромке, выполняя условие схода – нижняя часть рис. 4.21. На профиле возникает циркуляция, равная циркуляции сошедшего с профиля вихря с обратным знаком:

$$\Gamma = \Gamma_{np} + \Gamma_{вихр} = 0. \quad (4.42)$$

Если увеличение скорости продолжается, образуется и сносится по потоку новый вихрь, что сопровождается ростом циркуляции на профиле. При этом сумма циркуляции на профиле и циркуляции сошедших вихрей остается равной нулю, как того и требуют законы аэродинамики.

Итак, циркуляционное обтекание профиля в соответствии с постулатом Жуковского – Чаплыгина возникает в результате схода с профиля ряда **разгонных вихрей**.

При уменьшении скорости движения критическая точка смещается с задней кромки на вогнутую поверхность профиля – средняя часть рис. 4.21. На поверхности давления возникают и сносятся вниз по потоку **остановочные вихри** с положительной циркуляцией. Таким образом, условие (4.42) выполняется и при движении с уменьшением циркуляции на профиле.

При образовании разгонных и остановочных вихрей направленная кинетическая энергия потока приобретает вихревую форму. Продолжая движение в вязкой среде, вращательное движение вихрей тормозится трением о частицы потенциального потока, кинетическая энергия преобразуется в тепло. То есть образование разгонных и остановочных вихрей сопровождается появлением соответствующих потерь напора. Такие потери возникают при пуске и остановке ТК, при изменении скорости вращения и изменении противодействия, ведущему к изменению расхода. Во всех этих случаях меняется циркуляция скорости на рабочих лопатках и возникают эти вихри. У промышленных турбокомпрессоров такие переходные режимы работы не занимают много времени, поэтому их энергетические аспекты не привлекают внимания.

4.3.3 Обтекание симметричного профиля

Рассмотрим безударное обтекание симметричного профиля невязким газом (рис.4.22). Вблизи входной кромки профиля скорость течения резко снижается, на входной кромке образуется критическая точка, в которой скорость равняется нулю. Потом скорость потока,

который обтекает входную кромку, стремительно возрастает, так как кривизна поверхностей большая.

Линии тока вблизи симметричного профиля искривляются. На частички газа, которые двигаются по криволинейным траекториям, действуют центробежные силы F_u , которые уравниваются силами давления F_o .

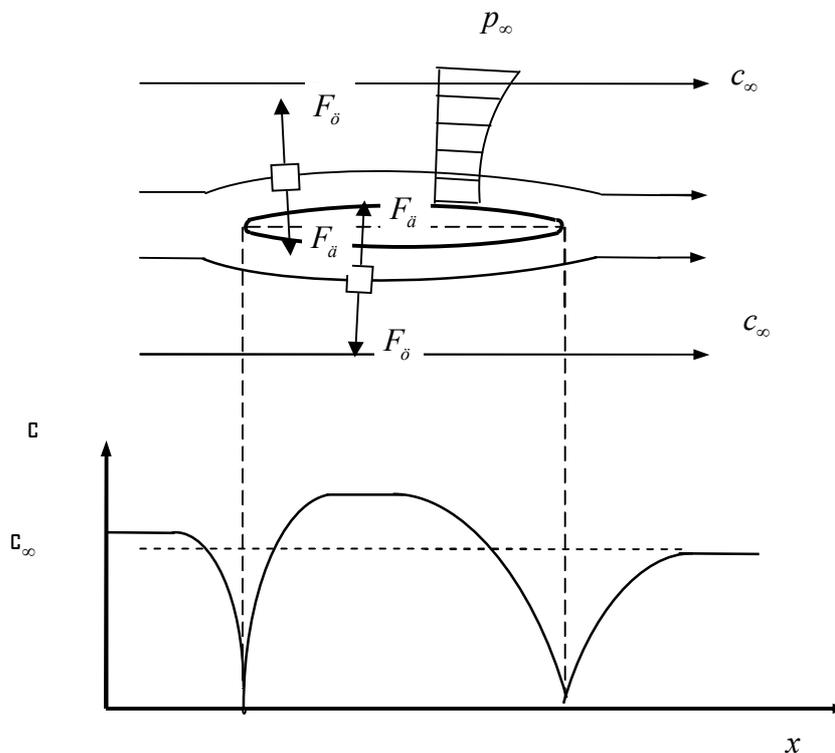


Рисунок 4.22 – Безударное обтекание симметричного профиля и график изменения скоростей вдоль его поверхностей

Таким образом, давление на поверхности профиля становится меньшим, чем давление p_∞ вдали от профиля. В соответствии с уравнением Бернулли скорость вблизи профиля будет больше, чем скорость невозмущенного потока c_∞ .

Вследствие симметричности профиля скорости вдоль верхней и нижней поверхностей профиля будут одинаковыми, тогда и давления на эти поверхности будут одинаковыми. Это означает, что в данном случае подъемная сила равняется нулю. Нулю равняется также суммарная сила в направлении течения, так как силы давления, которые действуют на профиль в направлении оси x , уравниваются.

Теперь рассмотрим обтекание симметричного профиля вязким газом.

При вязком обтекании симметричного профиля подъемная сила по-прежнему не возникает из-за симметричности верхней и нижней поверхностей прямого профиля. В направлении скорости на бесконечности возникает сила сопротивления, вызываемая

вязкостью потока. При этом надо иметь в виду различия в проявлении вязкости по сравнению с рассмотренным выше обтеканием тонкой пластинки.

При обтекании профиля вязким потоком на обтекаемой поверхности образуется пограничный слой, который оттесняет внешний потенциальный поток от поверхности профиля.

На рисунке 4.23 показана толщина вытеснения δ^* , δ_∞^* – толщина вытеснения на удалении от профиля. В результате поток взаимодействует не с поверхностью профиля, а с так называемым «эффективным контуром». Эффективный контур показан штриховыми линиями.

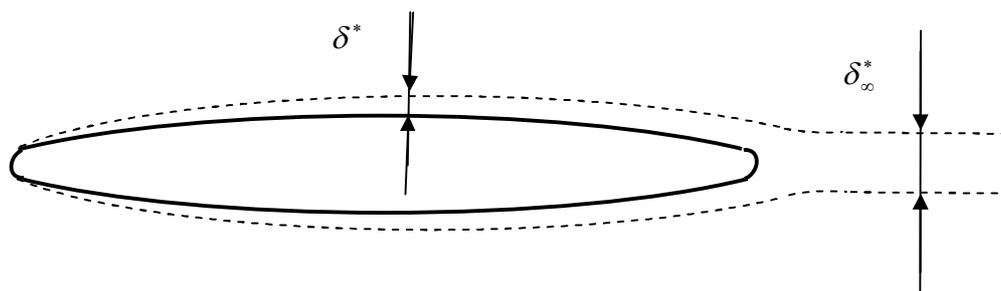


Рисунок 4.23 – Толщина вытеснения на профиле

Как следствие, в кормовой части профиля давление меньше, чем в лобовой, и к сопротивлению трения добавляется **сопротивление давления**.

Экспериментальные исследования показывают, что обе составляющие сопротивления больше у более толстых профилей. Понятно, что у тонкой пластинки сопротивления давления быть не может, и оно тем больше, чем больше поперечное сечение профиля, т.е. его максимальная толщина.

Сопротивление трения также больше у более толстых профилей по двум причинам:

- смачиваемая поверхность больше у более толстых профилей,
- поверхностные скорости больше у толстых профилей, так как такие профили сильнее отклоняют поток от направления невозмущенной скорости. Всегда надо иметь в виду, что при прочих равных условиях потери пропорциональны кинетической энергии.

При вязком обтекании на выходной кромке неизбежен отрыв потока со сходом пелены вихрей. В реальном потоке на кромке давление в точке отрыва значительно меньше, чем давление торможения при невязком обтекании. В результате имеет место дополнительное сопротивление давления. Эти потери называют **кромочными**.

Если отрыв потока происходит на поверхности профиля (это возможно при значительной местной диффузорности потока), то потери существенно возрастают, распределение скоростей и давлений на профиле по сравнению с безотрывным обтеканием заметно изменяется.

4.3.4 Ударное и безударное обтекание изогнутого профиля

Характер обтекания профилей зависит в значительной степени от направления набегающего потока, характеризуемого углом α между направлением потока и хорды профиля – углом атаки.

На рисунке 4.24 показаны распределения скоростей при безударном обтекании профиля невязким газом с выполнением постулата Жуковского – Чаплыгина. Безударному обтеканию профиля, как и для дужки, соответствует направление набегающего потока, совпадающее с направлением хорды.

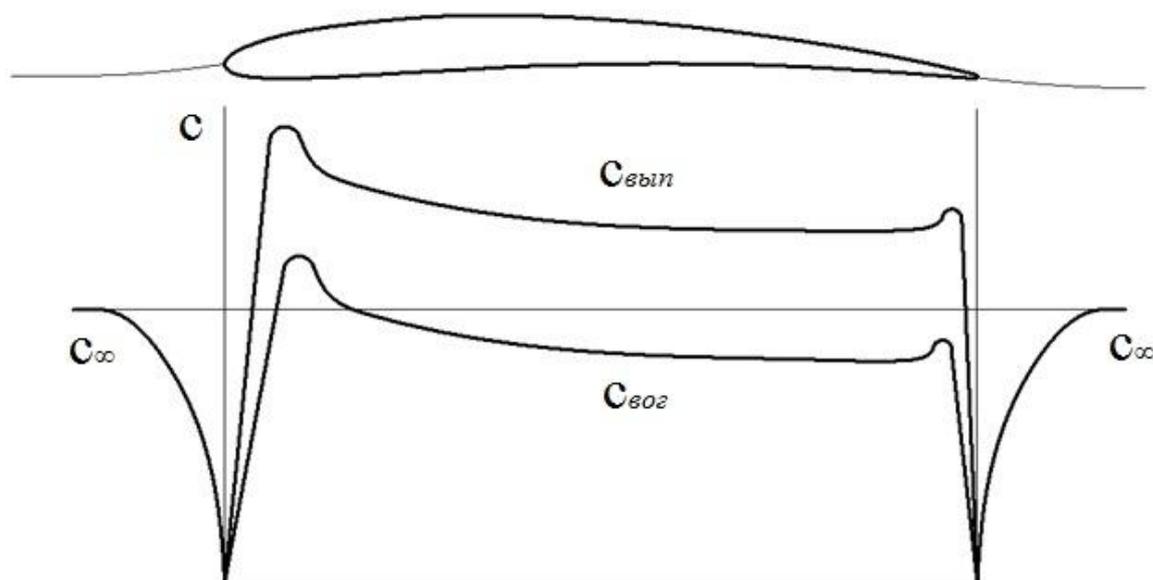


Рисунок 4.24 – Диаграмма скоростей при безударном обтекании профиля невязким газом

На передней кромке профиля возникает критическая точка. Далее диаграммы скоростей разделяются на поверхностях давления и разрежения. Пики скорости имеют место при обтекании передней и задней кромок на обеих поверхностях, но уровни скоростей разные. Вдоль всей поверхности профиля имеется положительная нагрузка $\Delta c = c_{выт} - c_{возг}$.

Как и при обтекании прямого профиля, на скругленной задней кромке возникнет отрыв с появлением кромочных потерь. Существенное различие связано с тем, что замедление на поверхности разрежения тем больше, чем больше изогнутость профиля. Если даже очень толстые прямые профили обтекаются безотрывно, то значительный изгиб средней линии неизбежно приведет к отрыву потока.

При $\alpha > 0$ передняя критическая точка оказывается на нижней («вогнутой») поверхности (рис. 4.25). Струйки тока левее критической точки разворачиваются для движения в противоположном направлении и попадают на верхнюю поверхность профиля, обтекая входную кромку. На передней кромке давление резко падает, а скорость возрастает

из-за движения газа по сильно искривленным линиям тока. После попадания на выпуклую поверхность с небольшой кривизной скорость снижается. На входной кромке возникает пик скорости – область с резким ее увеличением и последующим замедлением.

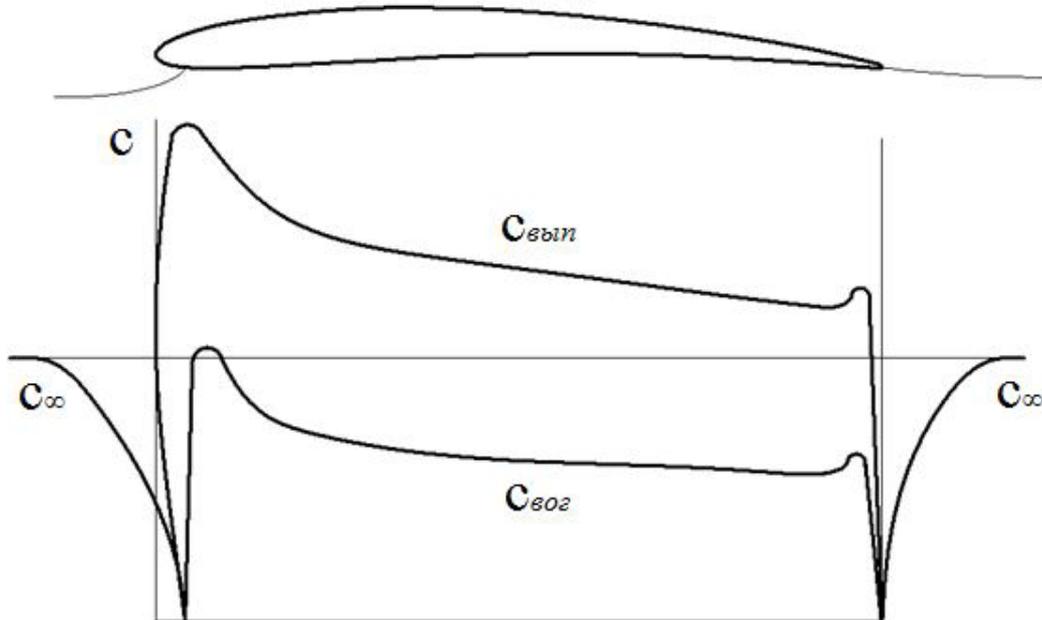


Рисунок. 4.25 – Линии тока и диаграмма скоростей при невязком обтекании профиля с положительным углом атаки

Положительный угол атаки приводит к падению давления на выпуклой поверхности вблизи входной кромки, в результате чего возрастает подъемная сила на профиле, т.е. лопадки компрессора передают газу большую механическую работу. Однако при вязком обтекании растут профильные потери. При небольших углах атаки этот рост связан:

- с увеличением потерь поверхностного трения, пропорциональных кинетической энергии потока. Эта энергия больше, чем при безударном обтекании из-за пика скорости у входной кромки;

- с увеличением потерь давления из-за более толстого пограничного слоя на выпуклой поверхности. Рост толщины слоя связан с дополнительным (по сравнению с безударным обтеканием) замедлением потока на выпуклой поверхности.

При больших положительных углах атаки пик скорости увеличивается настолько, что отрыв потока на выпуклой поверхности неизбежен. Скорость потока в зоне отрыва мала по сравнению со скоростью потока на его границе. Поэтому статическое давление на поверхности в зоне отрыва равно давлению в точке отрыва, а скорость вдоль границы отрыва – скорости в точке отрыва.

При расходе больше расчетного профили лопаток ОК обтекаются с отрицательным углом атаки. У крыльев летательных аппаратов небольшие отрицательные углы атаки используются для уменьшения подъемной силы (при снижении, например – рис. 4.26).

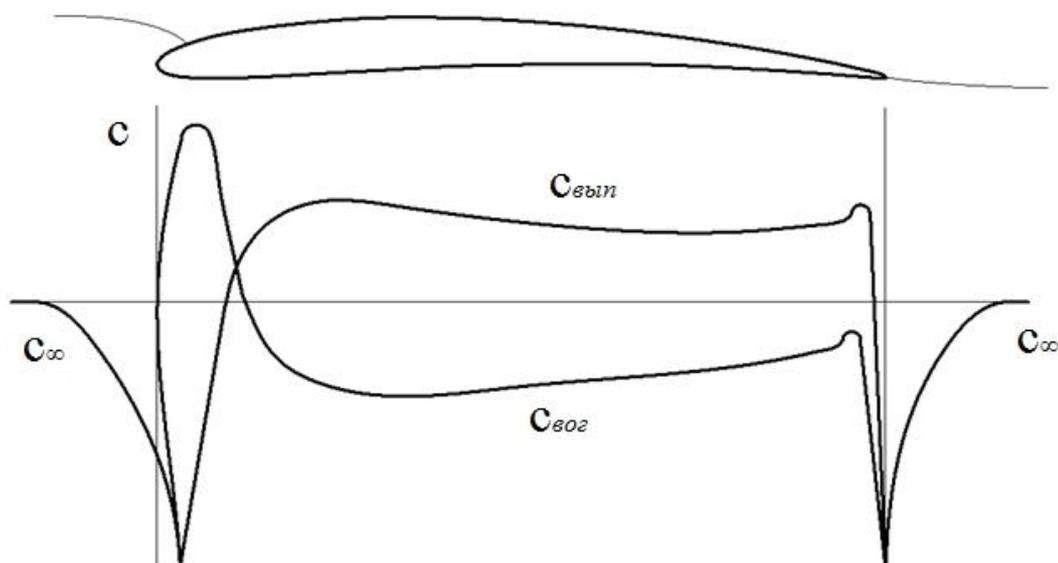


Рисунок 4.26 – Обтекание профиля с отрицательным углом атаки – диаграмма поверхностных скоростей невязкого потока

При отрицательных углах атаки пик скорости на входной кромке приводит к резкому замедлению на нижней (вогнутой) поверхности профиля. На выпуклой поверхности диаграмма скоростей приобретает благоприятный характер. Рост сопротивления при $\alpha < 0$ происходит по тем же причинам, что и при положительных углах атаки. Отличие заключается в том, что в начале профиля скорость потока больше, а давление ниже на нижней поверхности профиля. Аэродинамическая нагрузка в начале профиля отрицательная $\Delta c = c_{вып} - c_{вогн} < 0$, что и ведет к уменьшению подъемной силы.

От угла атаки в наибольшей степени зависят подъемная сила и сила сопротивления. Зависимости безразмерных коэффициентов подъемной силы и силы сопротивления от угла атаки называются аэродинамическими характеристиками профилей, которые будут рассмотрены ниже.

4.4 Сила взаимодействия профиля с потоком

Силу взаимодействия профиля с потоком можно определить как сумму проекций нормальных сил давления и касательных напряжений на направления z и u :

$$\vec{R} = \vec{R}_z + \vec{R}_u . \quad (4.43)$$

Составляющие суммарной аэродинамической силы по соответствующим осям на единицу высоты лопатки:

$$R_u = \int_{\text{вып}} (p \sin \beta_s + \tau \cos \beta_s) ds + \int_{\text{вог}} (p \sin \beta_s + \tau \cos \beta_s) ds , \quad (4.44)$$

$$R_z = \int_{\text{вып}} (p \cos \beta_s + \tau \sin \beta_s) ds + \int_{\text{вог}} (p \cos \beta_s + \tau \sin \beta_s) ds . \quad (4.45)$$

Интегралы берутся по выпуклой и вогнутой поверхностям профиля, где ds – элементарная площадка поверхности профиля; β_s – угол касательной к элементарной площадке поверхности профиля.

Окружная составляющая силы R_u позволяет определить мощность, необходимую для вращения рабочего колеса:

$$N = \omega \cdot M_z = \omega \cdot z_l \int_{r_{\text{вн}}}^{r_{\text{нар}}} r \cdot R_u dr , \quad (4.46)$$

где ω – угловая скорость ротора; dr – элементарная высота лопатки между наружным и втулочным радиусами, z_l – число лопаток рабочего колеса.

Осевая составляющая силы R_z позволяет определить величину осевого усилия, действующего на рабочее колесо:

$$F_z = z \int_{r_{\text{вн}}}^{r_{\text{нар}}} R_z dr . \quad (4.47)$$

Суммарная сила R позволяет определить величину изгибных напряжений лопаток рабочего колеса.

Схематизация реального течения потенциальным потоком дает приемлемую точность при определении давлений, сил и моментов сил, действующих на профиль в решетке.

Результаты испытаний решеток профилей в аэродинамических трубах показывают, что по сравнению с силами давления силы трения газа о поверхность невелики, имея порядок 1–2%. В инженерных расчетах допустимо пренебрегать силами трения, тогда:

$$\vec{P} = \vec{P}_u + \vec{P}_z , \quad (4.48)$$

$$P_u = \int_{\text{вып}} p \sin \beta_s ds + \int_{\text{вог}} p \sin \beta_s ds , \quad (4.49)$$

$$P_z = \int_{\text{вып}} p \cos \beta_s ds + \int_{\text{вог}} p \cos \beta_s ds. \quad (4.50)$$

Использование формул (4.48), (4.49) и (4.50) возможно, если известны распределения давлений на поверхностях профиля. Определение распределений давлений и скоростей на поверхностях лопаток турбомашин путем измерений или расчета является сложной и трудоемкой задачей. Удобнее пользоваться теоремой Жуковского, которая связывает аэродинамическую силу с сравнительно легко определяемыми параметрами потока перед решеткой и за решеткой.

4.2.1 Теорема Жуковского

Теорему о подъемной силе лопатки в решетке Н.Е. Жуковский доказал в 1912 году. В настоящее время теорему можно доказать различными способами, наиболее простым из которых будет способ, основанный на использовании закона сохранения импульса.

Рассмотрим обтекание аэродинамической решетки установившимся плоским потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости (рис. 4.27). Для определения силы, действующей на лопатку, выберем контур $abcd$, который состоит из двух отрезков, параллельных фронту решетки, и двух линий, расположенных на расстоянии шага t (например, средние линии соседних каналов).

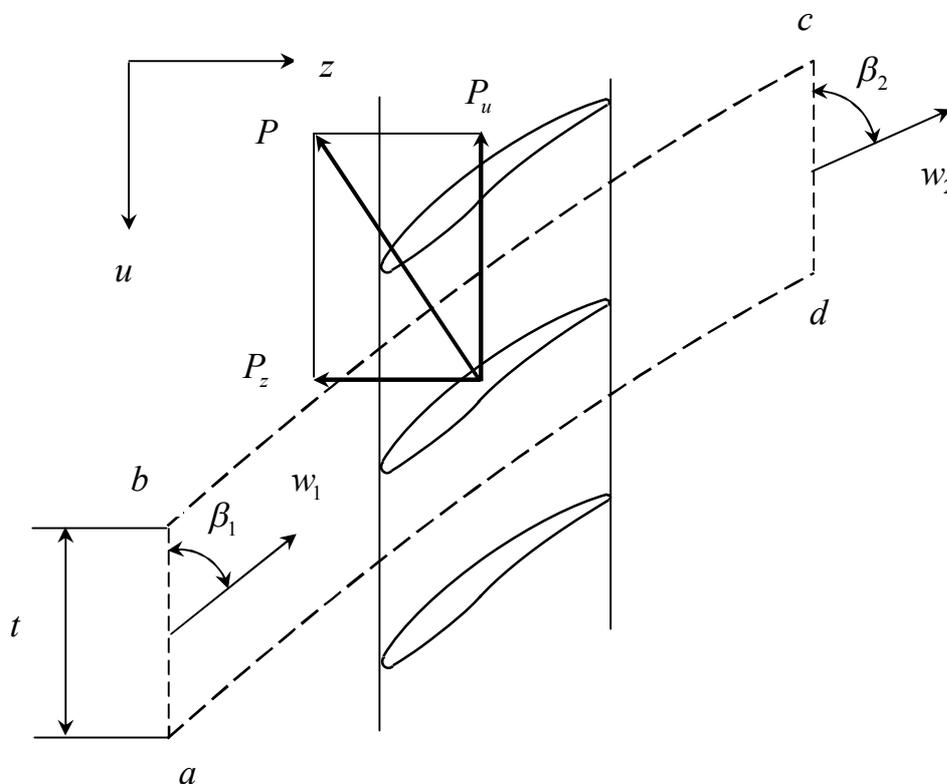


Рисунок 4.27 – Обтекание аэродинамической решетки профилей потоком невязкого газа

Отрезки ab и cd расположены на достаточном удалении от решетки, чтобы считать параметры потока вдоль этих отрезков постоянными. Поток набегаёт на решетку со скоростью w_1 , давление газа p_1 . Вектор скорости направлен под углом β_1 к оси z . Аналогичные параметры потока за решеткой – w_2, p_2, β_2 .

Элементы контура bc и da проведены по линиям тока, поэтому расход газа через них отсутствует, а силы давления на эти элементы равны по величине и противоположны по знаку. Значит, проекции этих сил в направлении осей z и u равны нулю.

При движении несжимаемого газа через плоскую решетку единичной высоты $w_{z1} = w_{z2} = w_z$. Из уравнения неразрывности для рассматриваемого контура следует

$$\bar{m} = \rho \cdot t \cdot w_z. \quad (4.51)$$

Применим теорему об изменении импульса к газу, заключенному внутри объема, ограниченного контуром $abcd$:

$$\bar{m} \cdot (w_{u2} - w_{u1}) = -P_u, \quad (4.52)$$

$$\bar{m} \cdot (w_{z2} - w_{z1}) + t \cdot (p_2 - p_1) = -P_z. \quad (4.53)$$

Здесь P_u и P_z – проекции силы, действующей на лопатку со стороны газа.

Уравнение (4.53) с учетом равенства осевых проекций скоростей $w_{z1} = w_{z2}$ принимает вид $P_z = t \cdot (p_1 - p_2)$. Заменяя разность давлений с помощью уравнения Бернулли, получаем

$$P_z = t \cdot 0,5 \cdot \rho (w_{u2}^2 - w_{u1}^2). \quad (4.54)$$

Разность квадратов скоростей можно представить в виде $(w_{u2}^2 - w_{u1}^2) = (w_{u2} - w_{u1})(w_{u2} + w_{u1})$, и тогда проекция аэродинамической силы

$$P_z = t \rho (w_{u2} - w_{u1}) w_{ucp}. \quad (4.55)$$

Суммарная аэродинамическая сила, которая действует на лопатку единичной высоты в прямой решетке, равна

$$P = \sqrt{P_u^2 + P_z^2} = t \rho (w_{u2} - w_{u1}) \sqrt{w_z^2 + \left(\frac{w_{u2} + w_{u1}}{2} \right)^2}. \quad (4.56)$$

В теореме Жуковского используется понятие **циркуляции скорости**.

Согласно теореме Стокса в безвихревом потоке циркуляция скорости не зависит от формы контура, охватывающего профиль, и равна циркуляции скорости на самом профиле.

Найдем циркуляцию скорости по выбранному замкнутому контуру $abcd$. Циркуляция по контуру равна сумме циркуляций для участков контура:

$$\Gamma = \Gamma_{ad} + \Gamma_{dc} + \Gamma_{cb} + \Gamma_{ba}. \quad (4.57)$$

Циркуляции для участков ad и cb равны по величине, но направления обхода противоположны, поэтому $\Gamma_{ad} = -\Gamma_{cb}$. тогда

$$\Gamma = t(w_{u2} - w_{u1}). \quad (4.58)$$

Таким образом, циркуляция скорости для профиля в решетке равна произведению разности окружных проекций скоростей за и перед решеткой на шаг решетки.

Обозначим $w_{cp} = \sqrt{w_z^2 + \left(\frac{w_{u2} + w_{u1}}{2}\right)^2}$, и тогда формулу (4.55) можно записать в виде

$$P = \rho \Gamma w_{cp}. \quad (4.59)$$

Проекции аэродинамической силы, выраженные через циркуляцию, имеют вид $P_u = \rho \Gamma w_z$ и $P_z = \rho \Gamma w_{ucp}$.

Вектор аэродинамической силы \vec{P} направлен перпендикулярно направлению вектора скорости \vec{w}_{cp} :

$$\operatorname{tg} \beta_{cp} = \frac{|w_z|}{|w_{ucp}|} = \frac{\rho \Gamma |w_z|}{\rho \Gamma |w_{ucp}|} = \frac{|P_u|}{|P_z|}. \quad (4.60)$$

Теорема Жуковского о подъемной силе для лопатки в решетке формулируется так: подъемная сила P , с которой поток действует на лопатку единичной длины, равна произведению плотности газа ρ , циркуляции скорости вокруг профиля Γ и средней векторной скорости w_{cp} .

Теорема Жуковского относится в равной мере как к неподвижной, так и к вращающейся решетке.

Учет сжимаемости газа. Учет сжимаемости газа может быть сделан следующим путем. В формуле (4.59) следует использовать среднюю арифметическую величину плотности газа $\rho_{cp} = (\rho_1 + \rho_2) / 2$.

Теорема Жуковского для потока вязкого газа. В тех случаях, когда целью расчета является определение сопротивления движению газа в решетках турбомашин, теория идеального газа не приемлема. В отличие от течения невязкого газа при течении вязкого газа на лопатки действуют силы трения, что приводит к появлению касательных напряжений, а также изменяется величина давления газа за решеткой.

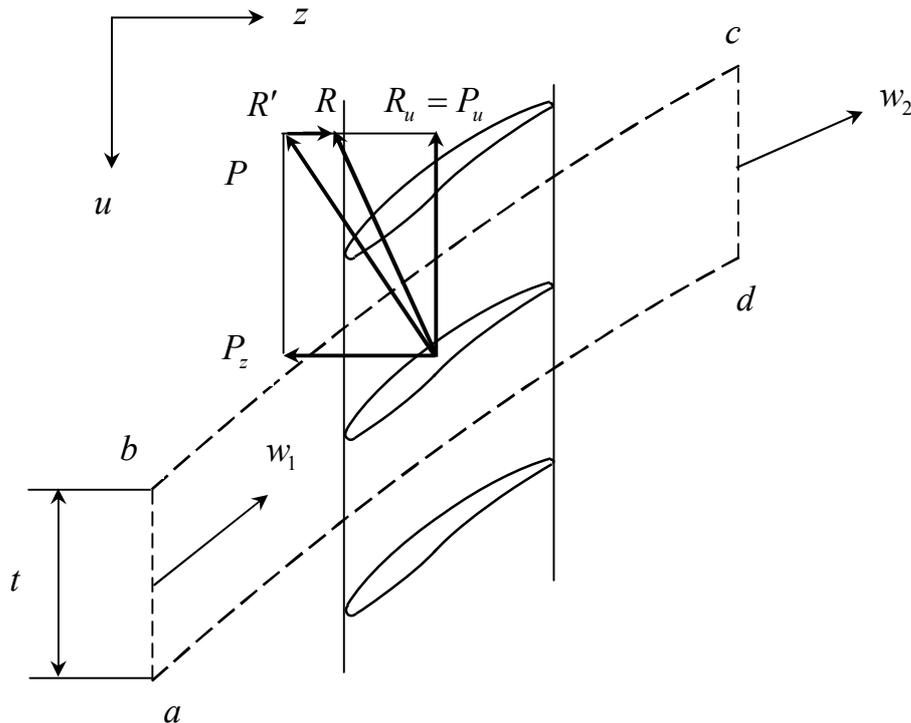
Для того чтобы различать аэродинамические силы для вязкого и невязкого течения газа в решетке, силы для вязкого течения будут обозначаться R .

Как и для невязкого потока, используя теорему об изменении импульса, запишем выражения для окружной и осевой составляющих аэродинамической силы, действующей на лопатку со стороны газа (рис. 4.28):

$$\bar{m} \cdot (w_{u2} - w_{u1}) = -R_u, \quad (4.61)$$

$$\bar{m} \cdot (w_{z2} - w_{z1}) + t \cdot (p_2 - p_1) = -R_z. \quad (4.62)$$

Рисунок 4.28 – Обтекание аэродинамической решетки профилей потоком вязкого газа



Вследствие влияния вязкости изменение давления в решетке меньше, чем изменение динамического напора на величину потерь Δp_w :

$$p_2 - p_1 = \rho \cdot \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} - \Delta p_w. \quad (4.63)$$

Тогда $R_z = t \cdot 0,5 \cdot \rho (w_{u2}^2 - w_{u1}^2) + \Delta p_w \cdot t$, т.е.

$$R_z = \rho \Gamma w_{ucp} + \Delta p_w \cdot t = P_z + R' . \quad (4.64)$$

Так как $R_u = P_u$, получаем

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{R}' . \quad (4.65)$$

Итак, силу R взаимодействия потока вязкого газа с профилем решетки можно представить как сумму силы Жуковского P и силы сопротивления $R' = \Delta p_w \cdot t$, равной произведению потерянного в решетке давления на шаг решетки и направленной по оси z (рис. 4.28).

4.4.2 Аэродинамические коэффициенты

Аэродинамические силы удобно представлять в безразмерном виде. Для этого силы делятся на характерную площадь и на характерное давление, в результате чего получаются соответствующие аэродинамические коэффициенты.

В качестве характерной площади принято использовать однозначно и легко определяемую величину $S = B \cdot l$, или применительно к плоской решетке $S = B \cdot l$ м. За характерное давление принимают скоростной напор $q = \frac{1}{2} \rho w_{cp}^2$. Тогда полная сила взаимодействия

потока с профилем решетки выразится формулой $R = c_R \rho \frac{w_{cp}^2}{2} S$, где c_R – коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом полной аэродинамической силы. Величина c_R зависит от формы профиля, угла его установки в решетке $c_R \beta_B$, шага t , угла атаки i и других параметров решетки. Силу \vec{R} удобно представить как сумму двух составляющих:

- подъемной силы \vec{R}_a , перпендикулярной средневекторной скорости \vec{w}_{cp} ,
- профильного сопротивления \vec{R}_w , параллельного скорости \vec{w}_{cp} .

По аналогии с R составляющие R_a и R_w представляются для лопатки единичной высоты в виде

$$R_a = c_a \rho \frac{w_{cp}^2}{2} B ; R_w = c_w \rho \frac{w_{cp}^2}{2} B , \quad (4.66)$$

где c_a – коэффициент подъемной силы; c_w – коэффициент профильного сопротивления.

Аэродинамические силы P, R, R_a, R_w, R_u показаны на рисунке 4.29. Эти силы связаны между собой следующим соотношением:

$$R_u = P \sin \beta_{cp} = R_a \sin \beta_{cp} + R_w \cos \beta_{cp}. \quad (4.67)$$

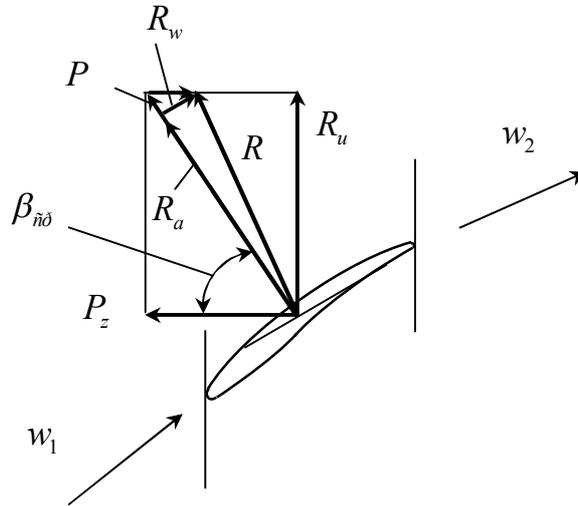


Рисунок 4.29 – К определению аэродинамических коэффициентов

Выразим силы в уравнении (4.67) с помощью ранее полученных формул:

$$\rho \Gamma w_z = \rho \frac{w_{cp}^2}{2} B \sin \beta_{cp} = c_a \rho \frac{w_{cp}^2}{2} B \sin \beta_{cp} + c_w \rho \frac{w_{cp}^2}{2} B \cos \beta_{cp}. \quad (4.68)$$

Последним слагаемым в формуле (4.68) в силу его малости можно пренебрегать. Тогда получим формулу для связи коэффициента подъемной силы с циркуляцией:

$$\Gamma = \frac{l}{2} c_a B w_{cp}. \quad (4.69)$$

Качеством профиля называется отношение аэродинамических коэффициентов c_a/c_w . Величина, обратная качеству профиля, называется коэффициентом скольжения $\mu = c_w/c_a$. Коэффициент скольжения равен тангенсу угла между подъемной силой \vec{R}_a и результирующей силой \vec{R} .

Список литературы к разделу 4

1. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика / Г.Н. Абрамович. – М.: Наука, 1976. – 888 с.
2. Викторов Г.В. Гидродинамическая теория решеток: учебное пособие для вузов / Г.В. Викторов – М., Высшая школа, 1969. – 368 с.
3. Галеркин Ю.Б. Теория, расчет и конструирование компрессорных машин динамического действия: учебное пособие / Ю. Б. Галеркин, Л. И. Козаченко. Санкт-Петербургский государственный политехнический университет. – СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2007. – 60 с.
4. Ден Г.Н. Проектирование проточной части центробежных компрессоров / Г.Н. Ден – Л.: Машиностроение, 1980. – 232 с.
5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1973. – 847 с.
6. Повх И.Л. Техническая гидромеханика / И.Л. Повх. – Л.: Машиностроение, 1976. – 504 с.
7. Самарский А.А. Разностные методы решения задач газовой динамики / А.А. Самарский, Ю.П. Попов. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
8. Самойлович Г.С. Газодинамика: учебник для вузов / Г.С. Самойлович. – М.: Машиностроение, 1990. – 384 с.
9. Селезнев К.П. Центробежные компрессоры / К.П. Селезнев, Ю.Б. Галеркин. – Л.: Машиностроение, 1982. – 271 с.
10. Степанов Г.Ю. Гидродинамика решеток турбомашин / Г.Ю. Степанов. – М.: Физматгиз, 1962. – 512 с.
11. Теория и расчет турбокомпрессоров / К.П. Селезнев, Ю.Б. Галеркин, С.А. Анисимов и др. – Л.: Машиностроение, 1986. – 392 с.
12. Фабрикант Н.Я. Аэродинамика / Н.Я. Фабрикант. – М.: Наука, 1964. – 816 с.

Вопросы для самопроверки

- 1 Какие типы решеток турбокомпрессоров рассматриваются?
- 2 Какие решетки называются круговыми, кольцевыми и плоскими?
- 3 Укажите геометрические параметры профиля.
- 4 Укажите геометрические параметры решетки профилей.
- 5 Назовите свойства потенциального потока.
- 6 Как связаны между собой потенциал скорости и функция тока?
- 7 Укажите граничные условия для решения уравнения Лапласа.
- 8 В чем сущность сеточных методов расчета течений?
- 9 В чем сущность метода интегральных уравнений?
- 10 В чем сущность метода годографа скорости?
- 11 В чем сущность метода конформного отображения?
- 12 В чем сущность метода дискретных вихрей?
- 13 Сравните обтекание тонкой пластинки невязким и вязким газом.
- 14 Объясните возникновение подъемной силы.
- 15 В чем сущность постулата Жуковского-Чаплыгина?
- 16 Сравните ударное и безударное обтекание профиля.
- 17 Как влияет значение угла атаки на величину подъемной силы?
- 18 Как определяется сила взаимодействия профиля с потоком?
- 19 Теорема Жуковского.
- 20 Как определяется циркуляция скорости?
- 21 В чем отличие обтекания решетки профилей от обтекания профиля?
- 22 Что называют коэффициентом профильного сопротивления.
- 23 Как определяется коэффициент подъемной силы.

РАЗДЕЛ 5

ТЕЧЕНИЕ ГАЗА В КАНАЛАХ ТУРБОКОМПРЕССОРОВ

Типы каналов в проточной части турбокомпрессоров. Течение газа в трубах. Течение газа в прямоосных диффузорах. Течение газа в криволинейных каналах. Вторичные течения. Течение газа в осесимметричных каналах. Классификация потерь. Течение газа в межлопаточных каналах центробежных рабочих колес

Течение газа в проточной части турбокомпрессоров с точки зрения газодинамики относится к внутренним течениям. Характер движения газа в проточной части весьма сложен, при моделировании течения необходимо принимать те или иные допущения (см. раздел 3).

Проточная часть турбокомпрессоров может быть представлена как последовательность каналов различной формы. Рассмотрение течения газа в каналах сравнительно простой формы позволяет упростить моделирование физических процессов, происходящих в элементах проточной части турбокомпрессора.

Уравнения, которые используются для определения параметров потока газа в проточной части турбокомпрессоров, рассмотрены в предыдущих разделах пособия. Весьма распространенной в инженерной практике является модель одномерного установившегося течения газа. Данная модель широко применяется для расчета течений газов в каналах, поэтому в данном пособии ей уделяется соответствующее внимание.

Как и в предыдущем разделе, используется принцип перехода от простейших моделей к более сложным. В начале раздела рассматривается течение в трубах, и хотя каналы такой формы для проточной части турбокомпрессоров не характерны, это способствует лучшему пониманию физических процессов течения газа в каналах более сложной формы.

В данном пособии рассматриваются только дозвуковые течения газа, поэтому вопросы, связанные с особенностями сверхзвуковых течений (скачки уплотнения, сопло Лаваля и т.д.), не рассматриваются.

Интегральными характеристиками течений газа в каналах являются расход газа и сопротивление движению. Для решения инженерных задач плодотворной явилась введенная Эйлером струйная модель потока. Согласно этой модели поток представляется состоящим из множества струек жидкости. Поперечные сечения в потоке выбираются так, чтобы пересекающие их линии тока были нормальны к ним. Очевидно, что если линии тока параллельны, то поперечное сечение будет плоским.

Понимание характера влияния изменения площади поперечного сечения, кривизны канала на структуру потока позволяет перейти к количественным соотношениям, используемым при проектировании турбокомпрессоров.

5.1 Типы каналов в проточной части турбокомпрессоров

Каналы в проточной части турбокомпрессоров можно классифицировать по различным признакам: по геометрической форме; являются ли каналы подвижными (роторными) или неподвижными (статорными); относятся к лопаточному аппарату или являются безлопаточными.

По геометрической форме каналы разделяют на следующие виды:

- прямоосные каналы. К ним относятся патрубки входных и выходных устройств турбокомпрессоров;
- криволинейные межлопаточные каналы. Это межлопаточные каналы рабочих колёс, лопаточных диффузоров и обратных направляющих аппаратов центробежных компрессоров. В осевом компрессоре это межлопаточные каналы рабочих и направляющих аппаратов;
- осесимметричные безлопаточные каналы. К таким каналам относятся безлопаточные диффузоры центробежных компрессоров;
- осесимметричные криволинейные каналы. Это радиально-осевые каналы входных устройств, осерадиальные каналы на входе в рабочие колеса, поворотные колена между диффузором и обратным направляющим аппаратом;
- пространственные каналы, не обладающие осевой симметрией. Это входные и выходные устройства турбокомпрессоров.

В данном разделе заметное внимание уделяется течению газа в трубах. Это связано с тем, что течение в трубах хорошо изучено, проведены обширные экспериментальные исследования течений жидкости и газов, получены относительно простые зависимости для расчета коэффициентов сопротивлений и потерь [15]. Эти зависимости часто используются для ориентировочного расчета потерь в каналах сложной формы, и поэтому их знание является полезным с практической точки зрения.

5.2 Течение газа в трубах

Простейший характер имеет движение газа в неподвижном прямолинейном канале. При движении невязкого газа взаимодействие с прямолинейным каналом отсутствует: силы вязкости отсутствуют по определению, а так как прямой канал не изменяет направления движения, то инерциальные силы не возникают.

При движении вязкого газа на стенках канала частицы неподвижны, в середине канала движутся с максимальной скоростью. Распределение скоростей в поперечном сечении трубопровода (эпюра скорости) будет иметь вид, показанный на рисунке 5.1.

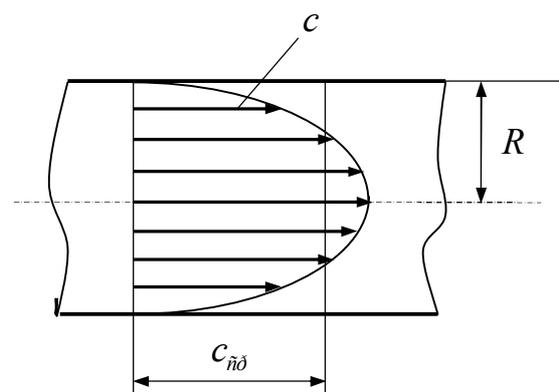


Рисунок 5.1 – Эпюра скоростей в сечении трубы

В соответствии со струйной моделью массовый расход потока

$$\bar{m} = \int_f \rho \cdot c \cdot df, \quad (5.1)$$

где f – площадь сечения канала; ρ – плотность газа; c – скорость в сечении струйки, df – площадь ее поперечного сечения.

В цилиндрических координатах

$$df = r \cdot dr \cdot d\theta. \quad (5.2)$$

Для симметричного относительно оси потока несжимаемой жидкости ($\rho = const$):

$$\bar{m} = 2\pi \cdot \rho \int_r c \cdot r \cdot dr. \quad (5.3)$$

Скорости в сечении трубы изменяются по радиусу. Для того чтобы вычислить расход по (5.3), необходимо знать уравнение эпюры скорости $c(r)$. Эпюры скорости зависят от значений числа Рейнольдса. Для ламинарного и турбулентного течений они различаются.

Для невязкого потока силы вязкого трения отсутствуют, поэтому все частицы жидкости двигаются с одинаковой скоростью. Скорость невязкого потока, при которой расход равен расходу вязкого потока, называют **среднерасходной (средней) скоростью**. Тогда

$$\bar{m} = 2\pi \cdot \rho \cdot c_{cp} \cdot \frac{R^2}{2} = c_{cp} \cdot f. \quad (5.4)$$

Следовательно, формально средняя скорость может быть определена как фиктивная скорость, с которой должны были бы двигаться все частицы жидкости для того, чтобы расход был равен его истинному значению.

Среднерасходная скорость используется для определения потерь напора.

Для ламинарного течения в трубе (*течение Хагена – Пуазейля*) перепад давлений определяется по формуле

$$\Delta p = 8\mu \cdot \frac{l}{R^2} \cdot c_{cp}, \quad (5.5)$$

где l – длина трубы.

Для потерь напора с учетом того, что $\Delta p = \rho \cdot \Delta h$, формула принимает вид

$$\Delta h = 32 \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{l}{d^2} \cdot c_{cp}. \quad (5.6)$$

Вывод, следующий из этого соотношения, можно сформулировать так: потери давления (напора) при ламинарном течении в круглых трубах линейно зависят от средней скорости.

Выполним некоторые формальные преобразования формулы Хагена-Пуазейля, которые окажутся полезными в дальнейшем. Умножим числитель и знаменатель (5.6) на $2c_{cp}$, что дает

$$\Delta h = 32 \frac{2 \cdot \nu}{c_{cp} \cdot d} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{c_{cp}^2}{2} = \frac{64}{Re} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{c_{cp}^2}{2}. \quad (5.7)$$

Максимальная скорость движения частиц будет на оси трубы, ее величина

$$c_{max} = \frac{\Delta p \cdot R^2}{4 \cdot \mu \cdot l}. \quad (5.8)$$

После преобразований получаем

$$c = c_{max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \text{ или } \frac{u}{u_{max}} = 1 - \frac{r^2}{R^2}. \quad (5.9)$$

Из формулы (5.9) следует, что в поперечном сечении трубы скорости распределены по параболическому закону и отношение скорости в любой точке к скорости на оси не зависит от расхода, рода жидкости и материала стенок трубы: при всех значениях $Re < Re_{кр}$ оно одинаково.

В восьмидесятых годах 19-го века работы, связанные с изучением сопротивления движению жидкости при течении в трубах, зашли в тупик. Опыты, выполненные Хагеном и Пуазейлем, показали, что сопротивление линейно зависит от скорости. В то же время не менее тщательные и точные опыты Дарси свидетельствовали, что сопротивление пропорционально квадрату скорости.

Возникшее противоречие было устранено путем использования **модели турбулентного течения**. Эта гипотеза нашла блестящее подтверждение в опытах английского физика Осборна Рейнольдса, результаты которых были опубликованы в 1883-1884 годах и имели далеко идущие последствия для всей механики жидкости.

Как было показано ранее, выражение для турбулентных касательных напряжений (напряжений Рейнольдса) имеет вид $\tau_{ij} = -\rho \cdot \overline{c_i' c_j'}$.

Между средней скоростью и касательным напряжением на стенке трубы существует связь вида

$$\tau_0 = k \cdot \rho \cdot c_{cp}^2, \quad (5.10)$$

где k – коэффициент пропорциональности.

Уравнение для перепада давления при турбулентном течении в трубе имеет вид

$$\Delta p = 8k \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\rho \cdot c_{cp}^2}{2}. \quad (5.11)$$

Выражение $\frac{\rho \cdot c_{cp}^2}{2}$ имеет четкий физический смысл. Это кинетическая энергия потока, заключенная в единице объема.

Обозначим величину $8k = \lambda$ и назовем ее гидравлическим коэффициентом трения, тогда

$$\Delta p = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\rho \cdot c_{cp}^2}{2}. \quad (5.12)$$

Для потери напора имеем

$$\Delta h = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{c_{cp}^2}{2}. \quad (5.13)$$

Полученное соотношение носит название формулы Дарси.

Отметим попутно, что если в преобразованной формуле Хагена – Пуазейля (5.7) обозначить величину $\frac{64}{Re}$ буквой λ , то она превращается в формулу Дарси. В этом смысле формула Дарси может быть названа универсальной, поскольку пригодна как для ламинарного, так и для турбулентного течений.

При течении газа в каналах следует выделять **начальный участок течения**. В начале канала изменение скорости от нуля до конечного значения происходит в относительно тонком слое, за пределами которого поле скоростей остается практически равномерным. В пристеночном слое, называемом пограничным слоем, возникает касательное напряжение трения, которое в соответствии с законом Ньютона равно произведению динамической вязкости на градиент скорости по нормали к поверхности.

По мере удаления от начала канала происходит увеличение толщины пограничного слоя. Постепенно невязкое ядро потока перестает существовать, так как пограничный слой смыкается в середине канала. Под начальным участком (разгонным) подразумевается участок трубы, в котором равномерный профиль скоростей на входе уступает место профилю развитого течения, в котором невязкое ядро отсутствует.

На элементарном участке канала длиной dl возникает сила трения $dR_w = \tau \cdot dl \cdot U$, где τ – касательное напряжение; U – смоченный периметр канала, равный πd для круглой трубы. Сила сопротивления движения преодолевается за счет механической энергии газа.

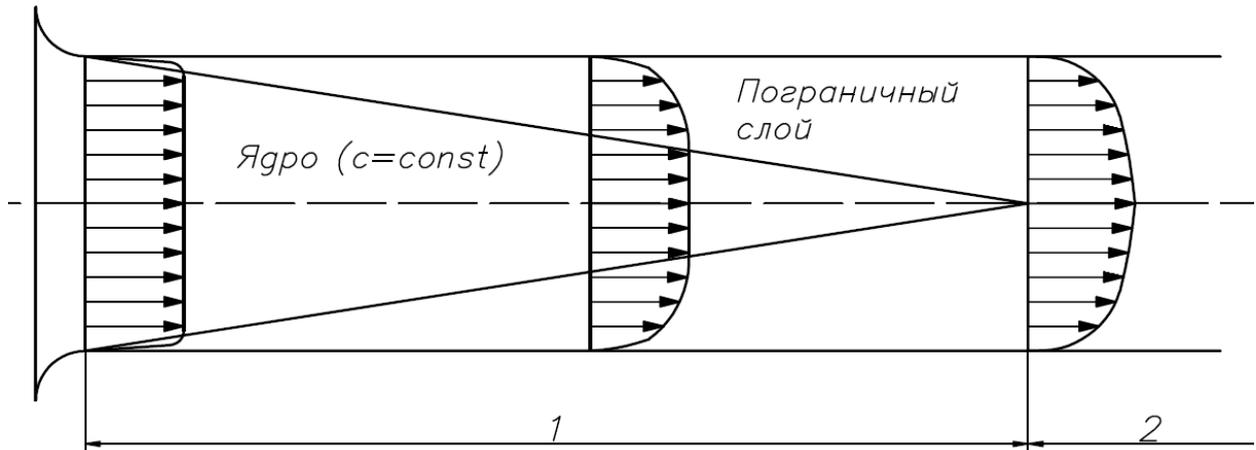


Рисунок 5.2 – Эпюры скоростей на начальном и основном участках в прямой трубе:
1 – начальный (разгонный) участок; 2 – основной участок

Так как за пределами пограничного слоя скорости остаются равномерными, силы вязкости там отсутствуют. Поток разделяется на вязкий пограничный слой и **невязкое ядро** потока. В поперечном сечении поле статических давлений остается равномерным, поскольку поток не отклоняется от прямолинейного направления. Поэтому в пограничном слое полное давление меньше полного давления в ядре потока $p_{nc}^* = p + 0,5c^2 < p + 0,5C^2 = p_a^*$ – здесь скорость в пограничном слое обозначается строчными, а в ядре – прописными буквами.

Преодоление сопротивления трения происходит за счет падения кинетической энергии в пограничном слое. Так как по мере продвижения вглубь канала потеря механической энергии нарастает $N_w = (c \times R_w)_l = U \int_0^l c \times \tau \times dl$, то увеличивается масса газа с пониженной кинетической энергией, т.е. пограничный слой по мере продвижения вглубь канала занимает все большую часть поперечного сечения. Толщина пограничного слоя – это условная величина. Допустимо принимать ее равной расстоянию от поверхности стенки до точки в потоке, в которой величина скорости меньше скорости основной части (ядра) потока на 1%. Более строгой является другая интегральная характеристика пограничного слоя – толщина вытеснения.

Второе название начального участка – разгонный участок – связано с тем, что максимальная скорость в середине канала возрастает из-за увеличения толщины вытеснения. Максимальная скорость увеличивается при ламинарном пограничном слое в два раза - по сравнению со скоростью на входе в канал.

На последующем, основном участке силы вязкости проявляются по всему сечению, деление потока на ядро и пограничный слой здесь становится неравномерным.

В турбомашине длина каналов обычно меньше длины разгонного участка. В их каналах обычно можно выделить ядро потока и пограничные слои на стенках.

Зависимость коэффициента трения от числа Рейнольдса и относительной шероховатости. Использование двухслойной модели, т.е. разделение потока на ядро и пристенный слой, приводит к специфической классификации стенок труб. Если толщина пристенного слоя больше выступов шероховатости, трубы называют гидравлически гладкими, в противном случае – шероховатыми.

На рисунке 5.3 приведена экспериментальная зависимость коэффициента трения от числа Рейнольдса и от величины относительной шероховатости по данным Никурадзе. **Относительная шероховатость** поверхностей $\bar{k}_{ш} = k_{ш}/d_2$ – это отношение высоты неровностей к гидравлическому диаметру.

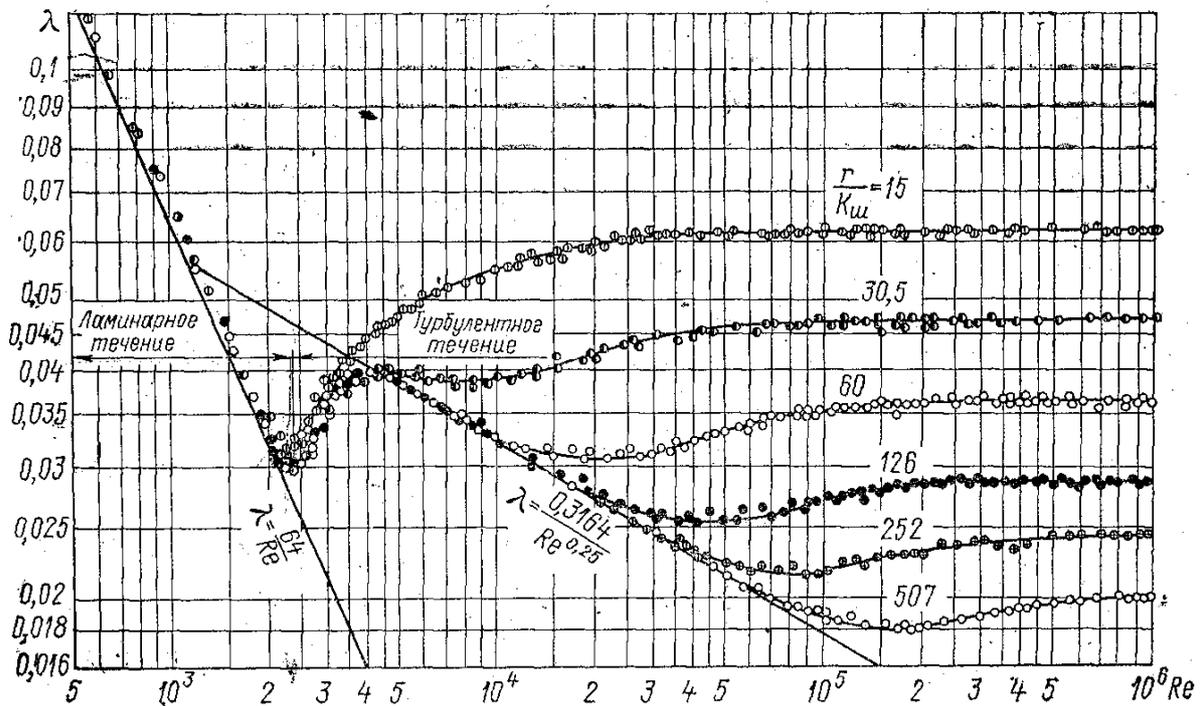


Рисунок 5.3 – Зависимость коэффициента трения λ для круглой трубы от числа Рейнольдса и относительной шероховатости по данным Никурадзе [14];

$$Re = \frac{c_{cp} \cdot d_2}{\nu}; k_{ш} - \text{высота бугорков шероховатостей}; r = \frac{d_2}{2} - \text{радиус трубы}$$

Экспериментальные данные показывают, что при ламинарном режиме течения ($Re < 2300$) коэффициент трения не зависит от шероховатости труб и связан только со значением числа Рейнольдса. Экспериментальные данные при $Re < 2300$ хорошо аппроксимируются простым соотношением $\lambda = 64/Re$.

Отсутствие влияния шероховатости на сопротивление связано с тем, что неровности поверхностей закрыты слоем практически неподвижного газа (жидкости). Сопротивление определяется трением движущегося газа о практически неподвижный пристеночный слой (см. рис. 4.16).

Коэффициент трения λ обратно пропорционален числу Рейнольдса. Поэтому при увеличении Re коэффициент трения уменьшается при движении в канале с **гидравлически гладкой** поверхностью.

В зоне перехода от ламинарного к турбулентному режиму сопротивление возрастает, так как поперечные турбулентные пульсации способствуют возрастанию градиента скорости у стенок канала и касательное напряжение возрастает.

При турбулентном течении в непосредственной близости от поверхности поперечные турбулентные пульсации не могут существовать, так как поверхность для них непроницаема. Непосредственно у поверхности существует **ламинарный подслоя**. Поверхность является гидравлически гладкой при условии, что этот подслон покрывает неровности поверхности. Сопротивление определяется скольжением турбулентного потока по ламинарному подслою, и шероховатость не оказывает влияния на коэффициент трения. Для турбулентного течения в канале с гидравлически гладкими стенками коэффициент трения обычно оценивают по наиболее популярной формуле Блазиуса:

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{0,25}}. \quad (5.14)$$

С ростом числа Рейнольдса толщина ламинарного подслоя уменьшается. Любая гидравлически гладкая поверхность становится шероховатой, когда вершины неровностей поверхности начинают выступать за пределы ламинарного подслоя. При этом вершины неровностей обтекаются турбулентным потоком. При обтекании неровностей происходит отрыв потока и образование вихрей, кинетическая энергия которых безвозвратно преобразуется в тепло. Сопротивление определяется потерей механической энергии в результате вихреобразования перестает зависеть от числа Рейнольдса. Область режимов течения, в которой коэффициент сопротивления не зависит от числа Рейнольдса, называется **областью автомодельности** по числу Рейнольдса. Коэффициент трения λ шероховатых каналов в области автомодельности зависит от относительной шероховатости.

Для расчета коэффициента трения канала с шероховатой поверхностью рекомендуется формула, удовлетворительно аппроксимирующая экспериментальные данные Никурадзе [15]:

$$\lambda = \left(\frac{1}{2 \cdot \lg \left(\frac{1}{2 \cdot \bar{k}_{ин}} \right) + 1,74} \right)^2. \quad (5.15)$$

Чем больше относительная шероховатость, тем при меньшем числе Рейнольдса гидравлически гладкая поверхность становится шероховатой. Процесс перехода от гидравлически гладкой к шероховатой поверхности соответствует значению такого числа Рейнольдса R_0 , в котором за характерный линейный размер принимается средняя высота неровностей:

$$R_0 = \frac{c \cdot k_w}{\mu} \rho. \quad (5.16)$$

Граница между «гидравлически гладким» и «шероховатым» режимами обтекания поверхности определяется значением $R_0 = 100$.

Если $R_0 < 100$ – поверхность обтекается как гидравлически гладкая. При $R_0 > 100$ наступает область автомодельности.

Следует обратить внимание на то, что характерные для течения в турбомашинах значения Re обычно велики и соответствуют турбулентному режиму.

Выводы по движению газа в прямолинейных каналах постоянного сечения

1 Сопротивление трения неизбежно возникает при движении вязкого газа относительно твердых поверхностей. Соответствующий вид потерь напора – потери трения – неизбежно присутствует в проточной части турбомашин. По этой причине, несмотря на возрастающее совершенство методов газодинамического проектирования, КПД, равный 100%, не может быть достигнут в любом случае.

2 Движение газа в каналах турбомашин, как правило, аналогично течению в начальном (разгонном) участке канала. Существование невязкого ядра потока позволяет применять для качественного анализа каналов турбомашин сравнительно простые приемы расчета невязкого потока.

3 Простой характер движения газа (жидкости) на основном участке прямолинейных каналов позволил хорошо изучить природу сопротивления трения и получить простые формулы для расчета коэффициента трения $\lambda = f(Re, \bar{k}_w)$.

5.3 Течение газа в прямоосных диффузорах

В предыдущем подразделе рассматривалось течение газа в прямолинейных каналах постоянного сечения. Теперь рассмотрим течение в каналах с переменной площадью сечения.

Для турбокомпрессоров характерны течения с уменьшением скорости, то есть диффузорные течения, поэтому будем рассматривать преимущественно течения диффузорные. Площади поперечного сечения канала связаны со скоростями уравнением Гюгонио

$$(M^2 - 1) \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{dc}{dx} = \frac{1}{f} \cdot \frac{df}{dx}, \quad (5.17)$$

где M – число Маха.

Из зависимости (5.17) следует, что для дозвукового течения ($M < 1$) знаки df/dx и dc/dx противоположны. Следовательно, для уменьшения скорости потока $dc/dx < 0$ площади в направлении течения должны возрастать $df/dx > 0$.

При малых M относительное изменение плотности газа намного (в M^2 раз) меньше относительного изменения скорости потока $\left(\frac{|\Delta\rho|}{\rho} \ll \frac{|\Delta V|}{V}\right)$, что дает основание для использования при этом модели несжимаемой жидкости.

Диффузорность потока является важным фактором, который существенно влияет на структуру потока и на величину потерь напора в каналах. Особенность течения газа в диффузорных каналах – это течение в направлении повышения статического давления – так называемое *градиентное течение*.

В соответствии с уравнением Бернулли в невязком ядре потока

$$\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{c^2}{2}\right) = 0, \quad \frac{dp}{\rho} = -cdc. \quad (5.18)$$

Диффузоры предназначены для снижения скорости, т.е. $dc/dx < 0$. Тогда $dp/dx > 0$, т.е. градиент давления положительный.

В ядре потока газовые частицы движутся в область высокого давления за счет снижения своей кинетической энергии.

Преодоление сил сопротивления движению частицами пограничного слоя происходит как за счет собственной кинетической энергии, так и за счет касательного напряжения со стороны более быстро движущихся частиц, расположенных дальше от стенки.

Отрыв потока в диффузорах. Для образования отрыва потока необходимо два условия – вязкость газа и положительный градиент давления. Толщина пограничного слоя в диффузорах нарастает значительно быстрее, чем в разгонном участке прямой трубы. При увеличении толщины пограничного слоя происходит уменьшение касательного напряжения, то есть уменьшается способность быстро движущихся частиц увлекать за собой частицы, расположенные ближе к стенке диффузора. В результате характерный для начального участка прямой трубы профиль скорости меняет форму, как показано на рисунке 5.4. Вблизи стенки частицы движутся все медленнее. Профиль у стенки приобретает вогнутую форму, что еще больше снижает касательное напряжение.

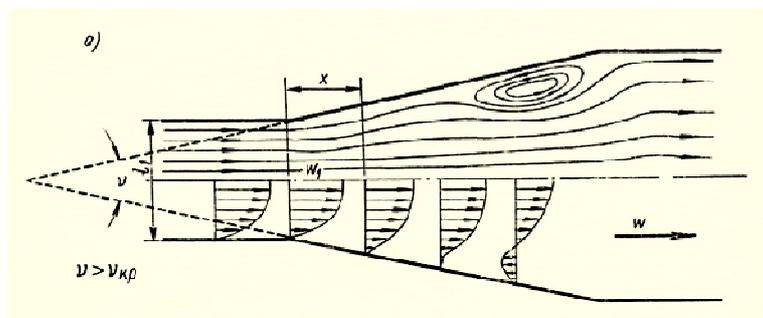


Рисунок 5.4 – Распределение скоростей в пограничном слое в различных по длине диффузора сечениях [12]

Вскоре после этого градиент скорости по нормали непосредственно на поверхности стенки исчезает $\partial c / \partial y|_{y=0} = 0$, частицы вблизи стенки останавливаются. При этом они уже не в состоянии противостоять увеличивающемуся по длине диффузора давлению. Далее у стенки возникает обратное движение, называемое **отрывом пограничного слоя**. Точнее, нужно говорить об **отрыве потока**, так как это явление может возникнуть и при развитом движении в диффузоре, где деление потока на невязкое ядро и вязкий пограничный слой теряет смысл. Отрыв приводит к образованию вихрей, в которых направленная кинетическая энергия потока приобретает вихревую форму. Эта энергия как механическая энергия потеряна – появляются **вихревые потери**, иначе – **потери отрыва**.

Наиболее простая модель реальных каналов турбокомпрессоров – это прямоосный диффузор круглого или прямоугольного сечения с прямолинейными образующими стенок. Такие диффузоры применяются в разных технических устройствах для снижения скорости и повышения давления. Часто диффузоры соединяют участки трубопроводов с разным поперечным сечением.

Форма диффузора круглого сечения определяется его длиной и углом раскрытия ν . Диффузоры прямоугольного сечения, у которых размеры сечения изменяются только в одной плоскости, называются плоскими диффузорами.

На рисунке 5.5 показана схема диффузоров с одинаковыми площадями на входе и выходе, но с различной длиной и соответственно с различным углом раскрытия.

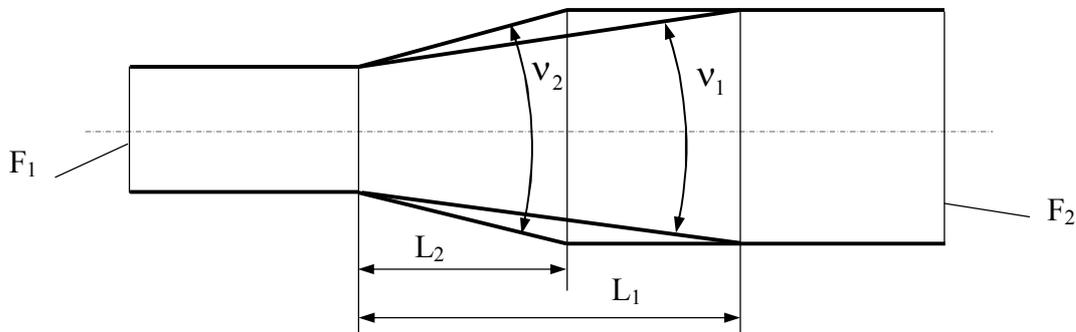


Рисунок 5.5 – Схема диффузоров

Угол раскрытия конического диффузора определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = \frac{r_2 - r_1}{L} = \frac{\sqrt{F_2} - \sqrt{F_1}}{\sqrt{3,14} \cdot L}. \quad (5.19)$$

Для каналов сложной формы (в том числе криволинейных) используется **эквивалентный угол раскрытия**, который определяется по формуле, аналогичной (5.19):

$$\operatorname{tg} \frac{\nu_{\text{экв}}}{2} = \frac{\sqrt{F_2} - \sqrt{F_1}}{\sqrt{3,14} \cdot L_{\text{экв}}} = \frac{r_{2\text{экв}} - r_{1\text{экв}}}{L_{\text{экв}}}. \quad (5.20)$$

Каналу сложной формы ставится в соответствие конический диффузор с длиной, равной длине рассматриваемого канала, и с одинаковыми площадями входного и выходного сечений: $L_{\text{экв}} = L$, $F_{1\text{экв}} = \pi r_{1\text{экв}}^2 = F_1$, $F_{2\text{экв}} = \pi r_{2\text{экв}}^2 = F_2$. Потери в канале произвольной формы можно рассчитать приближенно по формулам для конического диффузора. Вероятнее всего, действительные потери будут больше, так как усложнение формы канала ведет к росту потерь.

Приближенные инженерные методы определения потерь и оптимальных геометрических соотношений диффузоров базируются на обширных экспериментах, понятных физических моделях течения и состоят из системы достаточно простых алгебраических соотношений.

Потери в диффузорах условно делят на потери трения и потери расширения, под которыми понимаются потери, связанные с вихреобразованием при наличии отрывов, то есть, применяется условная схема деления действительных потерь на две группы:

$$h_o = h_{mp} + h_{расш}, \quad (5.21)$$

или в безразмерном виде

$$\zeta_o = \zeta_{mp} + \zeta_{расш}. \quad (5.22)$$

Потери трения в диффузоре рассчитывают упрощенно, принимая значение коэффициента трения λ постоянным и равным коэффициенту трения труб:

$$h_{mp} = \int_1^2 \lambda \cdot \frac{dl}{d_2} \cdot \frac{c^2}{2}. \quad (5.23)$$

Следует четко представлять условность этого приема, так как в диффузоре касательные напряжения и скорости по длине трубы уменьшаются, поэтому величина λ уменьшается по длине диффузора.

Интегрирование уравнения (5.23) для конического диффузора приводит к формуле

$$\zeta_{mp} = \frac{\lambda}{8 \sin(\nu / 2)} \cdot \left[1 - \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \right]. \quad (5.24)$$

Для коэффициента потерь расширения $\zeta_{расш}$ в [15] предложена следующая эмпирическая формула:

$$\zeta_{расш} = k_1 \cdot \varphi_{расш} \left(1 - \frac{c_2}{c_1} \right)^2 = k_1 \cdot \varphi_{расш} \left(1 - \frac{F_1}{F_2} \right)^2, \quad (5.25)$$

где k_1 – эмпирический коэффициент, учитывающий состояние поля скоростей и пограничного слоя на входе в диффузор. Коэффициент $\varphi_{расш}$ для углов $\nu = 0 - 40^\circ$ определяется по формуле

$$\varphi_{расш} \approx 3,2k_2 [tg(\nu_3 / 2)]^{1,25}, \quad (5.26)$$

где k_2 – коэффициент, характеризующий форму поперечного сечения диффузора. Значение коэффициента k_2 равно единице для конических диффузоров, а для диффузоров другой формы определяются с помощью эмпирических формул [15].

Опыты показывают, что диффузоры наиболее эффективно преобразовывают кинетическую энергию в давление при небольших углах раскрытия. Сумма потерь трения и расширения минимальна при углах раскрытия примерно $6 - 8^\circ$ для конических диффузоров, и $10 - 12^\circ$ для плоских диффузоров.

По возможности следует применять диффузоры именно с такими углами раскрытия. При необходимости затормозить поток при ограниченной длине диффузора приходится применять большие углы раскрытия.

При проектировании диффузора не всегда удаётся обеспечить оптимальный угол раскрытия по конструктивным соображениям. При заданных площадях на входе и выходе из диффузора и ограничении его длины угол раскрытия может оказаться значительно больше оптимального значения. В этом случае произойдет отрыв потока и потери в диффузоре будут значительными.

При ограниченных осевых размерах диффузора уменьшить потери (в частности, достичь безотрывного течения) можно путем установки разделительных стенок, направляющих лопаток, применением криволинейных образующих стенок диффузора, воздействием на пограничный слой для уменьшения его толщины. Цель всех этих методов – сместить точку отрыва вниз по потоку. Суть изложенных приемов, их эффективность и способ расчёта подробно изложены в [15].

5.3.1 Предотрывные диффузоры

Используя критерий отрыва, можно выбрать форму основного тела таким образом, чтобы напряжение поверхностного трения в направлении потока все время оставалось близким к нулю. При выполнении этого условия течение, находясь на грани отрыва, все еще остается присоединенным к поверхности тела. Это позволяет получить не только минимальное сопротивление, но и очень низкий тепловой поток, поскольку конвективный теплообмен связан с поверхностным трением. В точке отрыва достигается максимальный местный градиент давления. Следовательно, для заданного начального пограничного слоя выполнение условия нулевого трения позволяет получить заданное допустимое повышение давления на самом коротком участке, и, видимо, с наименьшей диссипацией энергии.

Стрэтфорд предложил метод определения контура нулевого поверхностного трения и разработал методику численного расчета и проектирования поверхности, на которой трение

равно нулю [16]. В методе Стрэтфорда используются уравнения движения и результаты анализа характеристик турбулентности с помощью теории размерностей или теории пути перемешивания. Для удобства пограничный слой на участке возрастания давления делится на две разные области: внешнюю и внутреннюю. С ростом давления снижается скоростной напор во внешней области, и можно считать, что потери, обусловленные напряжением трения, примерно такие же, как при обтекании плоской пластины. С другой стороны, во внутренней области силы инерции малы, и профиль скорости изменяется под действием продольного градиента давления до тех пор, пока последний не уравнивается градиентом напряжения трения в поперечном направлении.

Условие нулевого поверхностного трения (условие отрыва) достигается, если противодействующая потоку сила $y_i \cdot \Delta p$ уравнивается разностью напряжений трения $\tau_i - \tau_w$ при $\tau_w = 0$ (рис. 5.6).

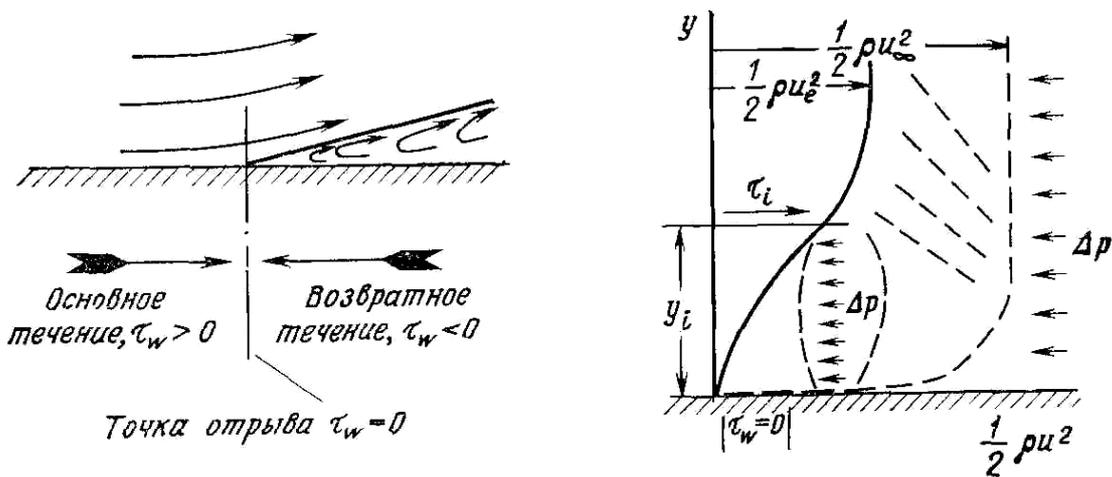


Рисунок 5.6 – Характеристики пограничного слоя в окрестности точки отрыва [17]

Внешняя область. Если давление возрастает быстро, силы трения во внешней области пограничного слоя малы по сравнению с силами инерции или силами давления. С ростом давления уменьшается скоростной напор, потери, обусловленные силами трения, можно считать такими же, как для течения на плоской пластине. Поэтому Стрэтфорд принял, что характеристики течения во внешней области можно описать следующим образом: до точки $x = x_0$ профиль скорости не изменяется; при $x > x_0$ давление можно считать постоянным, т. е. $p = p'$. (Штрихом обозначены параметры потока за точкой $x = x_0$). Можно предполагать, что полное давление остается приблизительно постоянным на всей длине; следовательно:

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u^2(x, \psi) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u'^2(x, \psi) - (p - p_0) \text{ при } \psi \geq \psi_i, \quad (5.27)$$

где $\psi = \int_0^y u dy$ ($\psi \geq \psi_i$), а условие $\psi \geq \psi_i$ означает, что рассматривается только

внешняя часть профиля скорости (ψ_i – это величина ψ на границе внутренней области).

Снижение местного скоростного напора $0,5 \cdot \rho \cdot u^2$ по сравнению с начальной величиной $0,5 \cdot \rho \cdot u_\infty^2$ обусловлено тремя факторами: возрастанием статического давления, действием сил вязкости на участке от $x = 0$ до $x = x_0$ и действием сил вязкости на участке за точкой $x = x_0$. Первые два из этих факторов учтены в соотношении (5.27). Влияние третьего фактора, которое мало во внешней части пограничного слоя при отрыве, можно оценить приближенно. Скорость в пограничном слое при отсутствии градиента давления u' определяется выражением

$$\frac{u}{u_\infty} = \left(\frac{y'}{\delta'} \right)^{1/n}, \quad (5.28)$$

$$\text{где } \delta' = \left[(n+1) \cdot \frac{n+2}{n} \right] \cdot \theta'; \quad \theta' = 0,036 \cdot Re_e^{-1/5}.$$

Величина n слабо изменяется при изменении числа Рейнольдса и обычно близка к 7. Общее решение для внешней области пограничного слоя можно получить из соотношений (5.27) и (5.28). Если уравнение (5.27) продифференцировать по ψ и производные $\partial/\partial\psi$ заменить на $\partial/\partial y$, то общее решение примет вид

$$\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(x,\psi)} = \left| \frac{\partial u'}{\partial y'} \right|_{(x,\psi)} \quad \text{при } \psi \geq \psi_i. \quad (5.29)$$

Внутренняя область. Считается, что во внешней области пограничного слоя рост давления вызывает снижение скоростного напора вдоль каждой линии тока, а противодействующие течению силы давления уравниваются силами инерции. Однако во внутренней области силы инерции слишком малы, чтобы мог осуществляться подобный механизм; силы инерции на стенке равны нулю, и поэтому силы давления уравниваются силами трения. Во внутренней области происходит переход от течения на стенке, для которого силы давления полностью уравниваются силами трения, к течению во внешней области, где рост давления вызывает снижение скоростного напора. Стрэтфорд с помощью теории размерностей получил следующее решение для внутренней области (которое можно получить и с помощью теории пути перемешивания):

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u^2 = \frac{2}{(0,41 \cdot \beta)^2} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot y \quad \text{при } \tau_\omega = 0 \text{ и } y < y_i. \quad (5.30)$$

Коэффициент $0,41$ – постоянная Кармана для пограничного слоя на плоской пластине, а β – эмпирический коэффициент, зависящий от величины второй производной давления по x :

$$\beta = 0,66 \text{ при } \frac{d^2 p}{dx^2} < 0, \quad (5.31)$$

$$\beta = 0,73 \text{ при } \frac{d^2 p}{dx^2} \geq 0.$$

Величина $d^2 p/dx^2$ вычисляется непосредственно перед точкой отрыва.

Сопряжение решений. На границе между внутренней и внешней областями величины ψ , u и $\partial u/\partial y$ должны быть непрерывными. В этой точке сопряжения значения ψ и $\partial u/\partial y$ для внутренней и внешней областей должны быть равными между собой. На основании соотношения (5.29) значения ψ и $\partial u/\partial y$ для внутренней области в точке сопряжения должны быть равны значениям ψ (или ψ') и $\partial u'/\partial y'$ для соответствующей точки «внешнего» профиля. Приравнявая величины $\psi(\partial u/\partial y)^3$, вычисленные по формулам (5.28) и (5.30), находим условие сопряжения в точке отрыва:

$$\left(\frac{y'}{\delta'}\right)^{(2n-4)/n} = \frac{3 \cdot (0,41 \cdot \beta)^4}{(n+1) \cdot (n \cdot \delta' dC_p/dx)^2} \text{ при } \psi = \psi_i. \quad (5.32)$$

Сравнивая величины $u^2/(\psi \partial u/\partial y)$, рассчитанные по формулам (5.28) и (5.30), получаем еще одно условие в точке сопряжения:

$$\frac{u^2}{u'^2} = \frac{3}{n+1} \text{ при } \psi = \psi_i. \quad (5.33)$$

Критерий отрыва можно найти из соотношений (5.27) и (5.28):

$$C_p = \left(\frac{y'}{\delta'}\right)^{2/n} \cdot \frac{1-u^2}{u'^2} \text{ при } \psi \geq \psi_i, \quad C_p \leq \frac{1-u^2}{u'^2}, \quad (5.34)$$

где $C_p = (p - p_0)/\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u^2$.

Используя значения параметров потока в точке сопряжения, определенные соотношениями (5.32) и (5.33), и выражая δ' с помощью формулы (5.28), получаем:

$$2 \cdot C_p^{(n-2)/4} \cdot \left(x \cdot \frac{dC_p}{dx}\right)^{1/2} = 1,06 \cdot \beta \cdot (Re \cdot 10^{-6})^{1/10} \text{ при } C_p \leq \frac{n-2}{n+1}, \quad (5.35)$$

где Re – число Рейнольдса, рассчитанное по местному значению x и максимальной скорости u_{e0} . Величина n определяется равенством $n = \lg Re_s$, где $Re_s = x_s \cdot u_\infty/\nu$ (x_s – координата точки отрыва).

На рисунке 5.7 показан контур канала, сконструированного Стрэтфордом, верхняя стенка которого является поверхностью нулевого трения.

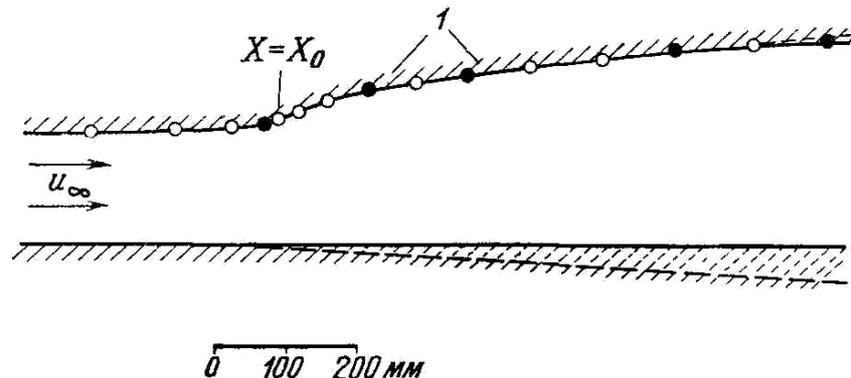


Рисунок 5.7 – Контур канала с нулевым поверхностным трением

Стрэтфорду не удалось добиться нулевого напряжения трения, но были достигнуты низкие значения напряжений, что подтверждает перспективность рассмотренного метода для проектирования диффузорных каналов.

В ЦАГИ Гиневским А.С. и Бычковой Л.А. были спроектированы и исследованы диффузоры круглого и квадратного поперечного сечений, с использованием условия предотрывности пограничного слоя на всем протяжении канала (поверхностное трение отсутствует). Геометрические и аэродинамические характеристики диффузоров определялись на основе полуэмпирического метода расчета предотрывного турбулентного пограничного слоя [18]. Спроектированные таким образом диффузоры имеют колоколообразную форму, т. е. углы наклона контура наиболее значительны вблизи входного сечения.

Как показывают расчеты и экспериментальное исследование, предотрывные диффузоры оказываются эффективнее обычных диффузоров с прямыми стенками: выигрыш может заключаться либо в уменьшении потерь, либо в сокращении осевых габаритов.

Выводы по движению газа в прямоосных диффузорах:

1 В диффузорных каналах, в том числе в диффузорных элементах проточной части турбокомпрессоров, к неизбежным в любом случае потерям трения могут прибавиться потери другого вида – **вихревые потери, они же потери отрыва, или потери расширения**. Суммарные потери при этом сильно возрастают.

2 Возникновение отрыва делает поток нестационарным. Изменение силы воздействия потока на поверхности каналов во времени может вызвать опасные вибрации технических устройств и привести к развитию усталостных напряжений.

3 Для исключения отрыва потока следует избежать условия его возникновения, т.е. избежать уменьшения до нуля касательного напряжения на поверхности канала. В прямоосных диффузорах для этого нужно ограничивать замедление потока.

4 При невозможности избежать отрыва следует стремиться к тому, чтобы точка отрыва была максимально удалена от начала диффузорного канала. Меньшая кинетическая энергия

в точке отрыва означает меньшие вихревые потери. В диффузорах для этого следует выбирать оптимальный угол раскрытия.

5 Негативное влияние на эффективность диффузоров оказывают наличие толстого пограничного слоя на входе и неравномерность потока. И то, и другое приводит к более раннему отрыву. По причине более толстых пограничных слоев ламинарное движение в диффузоре сопровождается более ранним отрывом и большими потерями. При турбулентном движении потери отрыва считаются автомодельными по отношению к критерию Рейнольдса, т.е. не зависят от его значения.

6 Большие перспективы имеют методы проектирования диффузоров с управлением отрывом потока.

5.4 Течение газа в криволинейных каналах

Изучение влияния кривизны канала на структуру потока и на величину потерь напора является необходимой составляющей данного раздела.

Простейшей моделью криволинейного канала проточной части является поворотное колено, соединяющее два прямых трубопровода – рисунок 5.8. Оно представляет интерес и само по себе, являясь составной частью трубопроводов самых различных технических устройств.

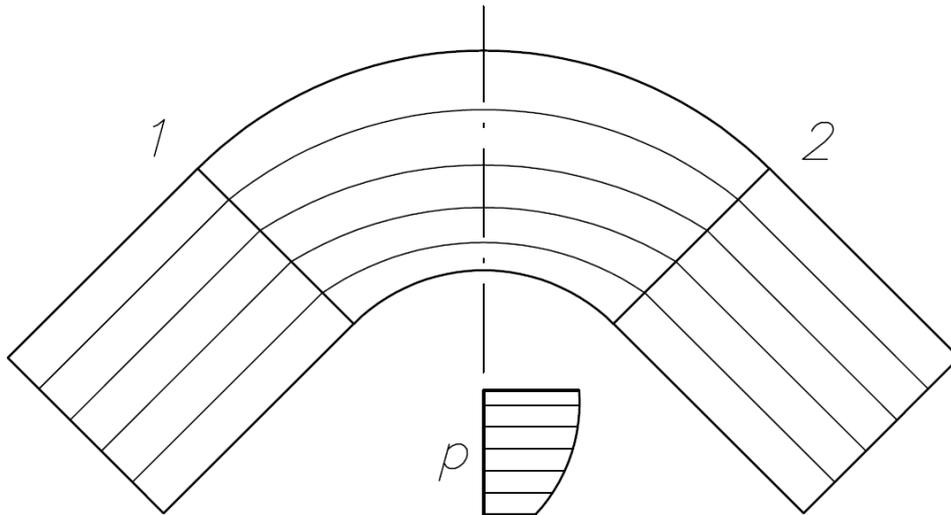


Рисунок 5.8 – Схема движения невязкого газа в криволинейном колене

В соответствии с принятым принципом рассмотрим сначала невязкое течение. Анализ невязкого течения позволяет более просто выявить главные закономерности. Будем иметь в виду также, что ядро потока на входе в турбокомпрессор и в большинстве его каналов – невязкое, потенциальное. Последнее означает, что полная механическая энергия газовых частиц одинакова во всем объеме: $p^* = p + 0,5 \rho c^2 = const$.

В поворотном колене газовые частицы движутся по криволинейной траектории. Элементарная частица с размерами ds, dn, db (db – размер частицы в плоскости,

перпендикулярной чертежу) испытывает воздействие центробежной силы $dP_u = dm \frac{c^2}{R}$, где масса частицы, равная произведению плотности на объем частицы, $dm = \rho \cdot ds \cdot dn \cdot db$.

Для того чтобы газовая частица могла двигаться по криволинейной траектории, массовая центробежная сила должна уравниваться силой реакции со стороны внешних сил, действующих на частицу. На поверхность газовых частиц действуют две внешние силы – сила давления по нормали и сила трения по касательной. В невязком потоке сила трения отсутствует по определению. Однако и в вязком потоке она слишком мала для того, чтобы заметно повлиять на условие равновесия. Итак, центробежная сила должна уравниваться внешней силой, возникающей из-за разности давлений на гранях частицы:

$$dP_u = dP_o, \text{ или } dm \frac{c^2}{R} = ds \cdot db \cdot \frac{\partial p}{\partial n} dn.$$

Таким образом, условие равновесия газовой частицы на криволинейной траектории обеспечивается тем, что давление на ее грани, обращенной к выпуклой поверхности колена, меньше, а на противоположной – больше. Поворот потока неизбежно вызывает появление градиента давления от выпуклой к вогнутой поверхности:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho \frac{c^2}{R}. \quad (5.36)$$

Вблизи выпуклой поверхности градиент давления больше, так как радиус кривизны здесь меньше. Принципиально важен тот факт, что появление градиента давления вызывает появление градиента скорости, так как полное давление у всех частиц одинаковое. Тогда уравнение равновесия (5.36) можно представить так:

$$\frac{\partial(p^* - 0,5\rho c^2)}{\partial n} = \rho \frac{c^2}{R}, \text{ или } \frac{\partial c}{c} = -\frac{\partial n}{R}. \quad (5.37)$$

Из приведенного следует, что области минимального давления соответствует область максимальной скорости. На выпуклой поверхности давление меньше, а скорость больше, чем в среднем по сечению, на вогнутой поверхности – наоборот.

Из условий равновесия следует, что в прямолинейном канале при потенциальном течении градиентов давления и скорости по нормали быть не может. Итак, равномерный в поперечном сечении поток в прямой трубе подходит к поворотному колену. Под действием разрежения на выпуклой поверхности приближающиеся к ней частицы начинают ускоряться еще в прямой трубе, а вблизи вогнутой поверхности – тормозиться. На выходе из колена происходит противоположный процесс – газовые частицы начинают выравнивать скорости и давления по нормали. Траектории газовых частиц в колене и сопряженных трубопроводах показаны на рисунке 5.8.

Видно, что радиусы кривизны траекторий вблизи выпуклой и вогнутой поверхностей больше $R_{вып}$ и $R_{вог}$, так как искривление их траекторий начинается и заканчивается в прямолинейных каналах. Для струек у стенок наблюдается различный характер движения.

Вдоль выпуклой стенки сначала наступает ускоренное (конфузорное) течение (область «конф» на рис. 5.9), а затем – диффузорное (область «диф»). У внешней (вогнутой) поверхности имеем обратную картину: сначала диффузорное, а затем конфузорное течение вне зависимости от характера течения в среднем.

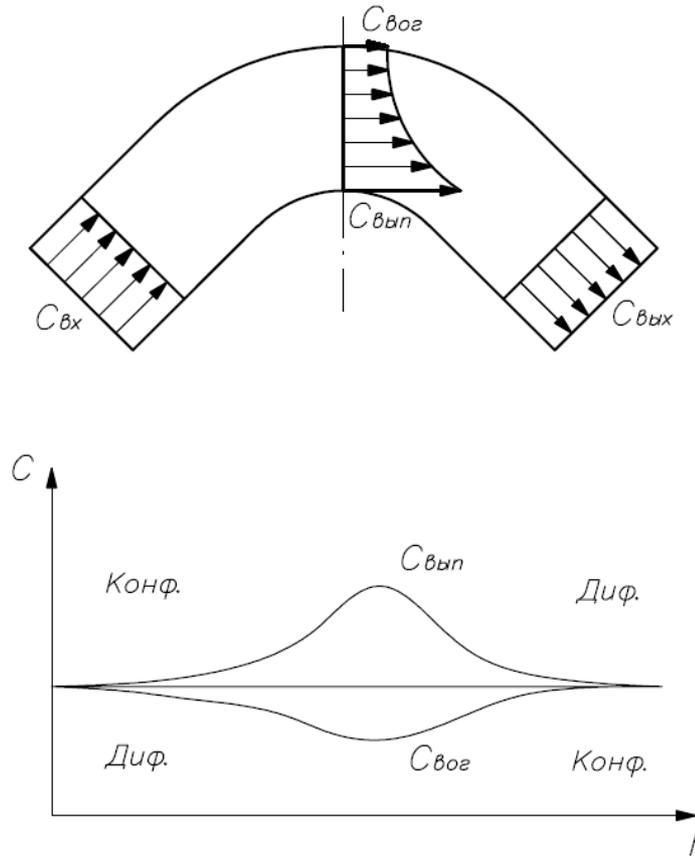


Рисунок 5.9 - Эпюры скоростей в колене и сопряженных трубопроводах и диаграмма скоростей на поверхностях

Характер изменения средней скорости по каналу будет либо содействовать, либо ослаблять местную диффузорность или местную конфузорность на отдельных участках.

При рассмотрении вязкого потока наличие местных диффузорных зон имеет принципиальное значение, так как в этих областях может возникнуть условие отрыва подобно рассмотренным выше диффузорам. При сильном повороте потока отрывы и возникают. Понятно, что наиболее опасен отрыв в диффузорной зоне на выпуклой поверхности, где скорости заметно больше, чем в диффузорной зоне на поверхности вогнутой.

Поскольку скорости в пограничном слое меньше, чем в ядре, в пограничном слое частицы движутся по более криволинейным траекториям. Чем ближе к ограничивающей

поверхности газовая частица, тем меньше радиус кривизны траектории, и тем сильнее направление частиц в пограничном слое отличается от направления потока в ядре. На рис. 5.10 показано изменение вектора скорости на разных расстояниях от ограничивающей поверхности, вплоть до ядра потока.

В наибольшей степени направление потока отличается от направления в ядре у самых близких к стенке частиц – направление так называемой **донной линии тока**. В отличие от плоских пограничных слоев в рассмотренных ранее случаях (векторы скорости вне зависимости от расстояния от стенки лежат в одной плоскости) такой **пограничный слой является трехмерным**.

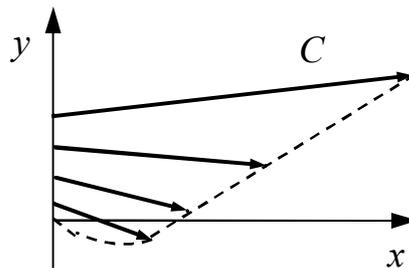


Рисунок 5.10 - Изменение вектора скорости в криволинейном колене на разных расстояниях от ограничивающей поверхности

Широко использовавшиеся в прошлом приемы теории пограничного слоя были наиболее трудно применимы в отношении таких течений. Поэтому для практических приложений была предложена схема **вторичных течений**. Вектор скорости в пограничном слое проектируется на два направления:

- проекция на направление основного потока представляет как бы обычный пограничный слой;
- проекция на направление, перпендикулярное основному потоку – это вторичное течение.

Вторичные течения проявляются во всех случаях течения с отклонением потока от инерциального направления.

Стабилизация – дестабилизация течения в криволинейных каналах. Число Россби. Потенциальное ядро потока в прямолинейном канале равномерно в направлении нормали. Отклонение от инерциального направления вызывает появление сил инерции, действующих по нормали – перпендикулярно направлению движения. При этом возникают градиенты давления и скорости. В рассматриваемых неподвижных коленах нормальная сила инерции – это центробежная сила от движения по криволинейной траектории. При рассмотрении потока внутри центробежных РК нужно учитывать и так называемую силу Кориолиса (вопрос обсуждается далее). В любом случае отклонение потока сопровождается изменением скорости потока по нормали. Слои газа движутся с разной скоростью, сдвигаясь друг относительно друга. Движение с отклонением от инерциального направления иногда называют сдвиговыми течениями.

Взаимное смещение слоев газа в ядре, которое считается невязким, фактически приводит к появлению касательных напряжений и возникновению потерь трения. Но

поскольку градиент скорости в ядре много меньше, чем в пограничных слоях, потерями трения в ядре принято пренебрегать. Однако сдвиговый характер приводит к более значительным последствиям.

Наблюдения показывают, что при одинаковом усилении местного замедления отрыв потока произойдет раньше на поверхности разрежения – выпуклой поверхности колена. Простые соображения делают эту картину понятной. Образование вихревой зоны в начале вогнутой поверхности заставляет поток сильнее отклоняться от инерциального направления. Кинетическая энергия вихревого течения в зоне отрыва слишком мала, чтобы противостоять давлению набегающего потока, и вихревая зона подавляется. При отрыве в конце выпуклой поверхности разрежения вихревая зона уменьшает отклонение потока. Поток движется как бы по инерции, что убыстряет возникновение отрыва.

Замеченная особенность поведения пограничных слоев при сдвиговом течении находит объяснение и с другой позиции. Тщательные измерения турбулентности в пограничных слоях показали следующее:

- на стороне давления поперечные турбулентные пульсации усиливаются, так как нормальные силы инерции способствуют турбулентному проникновению частиц, расположенных дальше от поверхности, в заторможенные пристеночные слои. Это способствует увеличению градиента скорости в пограничном слое. Условие отрыва $\tau = 0$ возникает только при очень сильном замедлении потока вдоль поверхности:

- на стороне разрежения поперечные пульсации более быстро движущихся частиц при перемещении к поверхности должны преодолеть нормальную силу инерции. Эта сила подавляет поперечные пульсации. Пограничный слой становится как бы ламинарным, утолщается и легко отрывается. Продольные пульсации остаются, но они не ведут к обмену импульсами между слоями.

Процесс усиления поперечных турбулентных пульсаций иногда называют дестабилизацией течения. Процесс ослабления поперечных турбулентных пульсаций, ламинаризация пограничного слоя соответственно называют стабилизацией течения, которая ведет к более раннему отрыву и росту вихревых потерь.

При одинаковом замедлении потока на выходе из поворота на выпуклой и вогнутой поверхностях параметры пограничного слоя существенно различаются. На вогнутой поверхности (поверхности давления) тонкий турбулентный пограничный слой поддерживает высокие касательные напряжения. На выпуклой поверхности (поверхности разрежения) ситуация противоположная.

В качестве безразмерного критерия для характеристики воздействия нормальных сил инерции на пограничные слои введен безразмерный критерий – число Россби:

$$Ro = -\frac{\partial C / \partial n}{\partial c / \partial n}, \quad (5.38)$$

где C – скорость в ядре потока; c – скорость в пограничном слое.

Смысл критерия заключается в том, что силы вязкости являются причиной возникновения турбулентности, а нормальные силы инерции в зависимости от своего направления либо подавляют поперечные пульсации – стабилизация пограничного слоя

(сторона разрежения, $Ro > 0$), либо способствуют усилению поперечных пульсаций – дестабилизация (усиление турбулентности) пограничного слоя (сторона давления, $Ro < 0$).

Знак минус в выражении для числа Россби выбран с тем, чтобы его величина была положительной на поверхности разрежения, где его влияние проявляется наиболее опасно.

5.4.1 Течение газа в криволинейных осесимметричных каналах

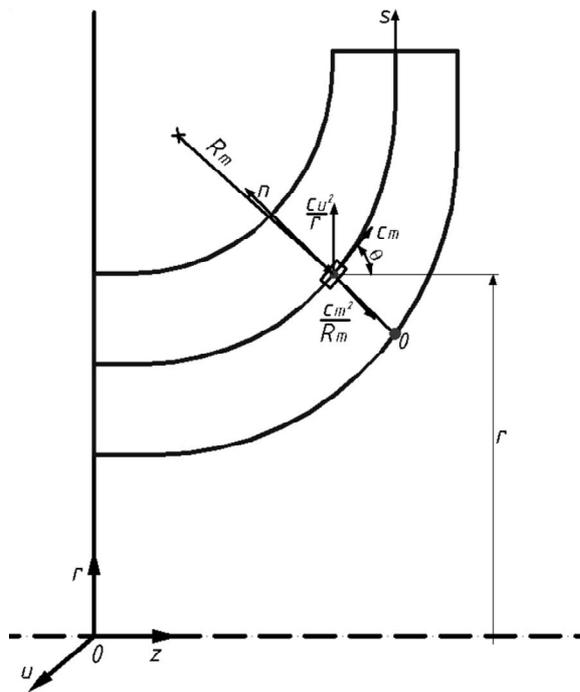


Рисунок 5.11 – Схема течения газа в осесимметричном криволинейном канале

При рассмотрении течения в осесимметричном криволинейном канале используем две системы координат. Прямоугольная декартова система координат z, r, u , где ось z направлена вдоль оси симметрии канала, ось r – вдоль радиуса, а ось u ортогональна осям z и r . Криволинейная система координат состоит из меридиональных проекций линий тока s и ортогоналей к ним n ; c_m – меридиональная проекция скорости; c_u – окружная проекция скорости; R_m – радиус кривизны линии тока в меридиональной плоскости; θ – угол между направлением вектора скорости c_m и направлением оси z . На рисунке 5.11 показаны центробежные силы c_u^2/r и c_m^2/R_m , действующие на частицу газа единичной массы.

Дифференциальные уравнения движения для невязкой жидкости:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} - c_m \cdot \frac{\partial c_m}{\partial s} + \frac{c_u^2}{r} \cdot \sin \theta &= 0, \\ -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial n} + \frac{c_u^2}{r} \cdot \cos \theta - \frac{c_m^2}{R_m} &= 0. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Уравнение Бернулли для невязкой жидкости

$$\frac{1}{\rho} \cdot p + \frac{c_u^2}{2} + \frac{c_m^2}{2} = const. \quad (5.40)$$

После дифференцирования уравнения (5.40) и подстановки полученных зависимостей в (5.39) получаем

$$\frac{\partial c_u}{\partial s} + \frac{c_u}{r} \cdot \sin \theta = 0, \quad (5.41)$$

$$c_u \cdot \frac{\partial c_u}{\partial n} + c_m \cdot \frac{\partial c_m}{\partial n} + \frac{c_u^2}{r} \cdot \cos \theta - \frac{c_m^2}{R_m} = 0. \quad (5.42)$$

После преобразований и интегрирования уравнения (5.41) и (5.42) принимают такой вид :

$$c_u \cdot r = const, \quad (5.43)$$

$$c_m = c_{m_0} \cdot e^{\int \frac{dn}{R_m}} = c_{m_0} \cdot e^A, \quad (5.44)$$

где c_{m_0} – скорость на втулочной поверхности канала.

Интеграл $A = \int \frac{dn}{R_m}$ можно определить, если известна зависимость $R_m = f(n)$.

Легко определяется интеграл $A_j = \int_0^{n_j} \frac{dn}{R_m} = \int_0^{n_j} k_j \cdot dn$ для линейного закона изменения

кривизны вдоль нормали (кривизна – величина обратная радиусу кривизны $k = (R)^{-1}$):

$$A_j = \frac{n_j}{R_{см}} + \frac{n_j^2}{2 \cdot b} \cdot \left(\frac{1}{R_{неп}} - \frac{1}{R_{см}} \right). \quad (5.45)$$

Влияние кривизны на структуру потока качественно такое же, как в криволинейной трубе. Вдоль периферийной поверхности сначала наступает ускоренное (конфузорное) течение, а затем – диффузорное. У втулки картина течения обратная: сначала течение диффузорное, а затем – конфузорное.

Выводы по движению газа в криволинейных каналах:

1 При отклонении потока от инерциального направления действующие по нормали к вектору скорости силы инерции приводят к появлению нормальных градиентов давления и скорости. В криволинейном канале на вогнутой поверхности давление возрастает, а скорость уменьшается. На выпуклой поверхности давление пониженное, а скорость больше среднерасходной. Движение газа со скольжением слоев в невязком ядре потока называют сдвиговым течением.

2 Изменение скоростей и давлений по нормали к потоку приводит к появлению местных диффузорных зон в начале выпуклой поверхности и во второй половине выпуклой поверхности. Это приводит к появлению отрывов потока, увеличивающих потери напора.

3 В пограничных слоях на ограничивающих поверхностях под воздействием повышенного давления на вогнутой стороне газ движется по траекториям с меньшим радиусом, чем в ядре потока. Пограничные слои на ограничивающих поверхностях становятся трехмерными. Для упрощения анализа вводится схема вторичных течений, образованных проекциями векторов скорости на сечение, перпендикулярное оси канала. Вторичное течение носит вихревой характер. Из-за трения газовых частиц друг о друга кинетическая энергия вторичного течения постепенно преобразуется в тепло. Потери трения на поверхностях с вторичными течениями больше, чем при просто продольном движении. Эти увеличенные потери выделяют в группу вторичных потерь. Возрастающие по сравнению с прямыми каналами вторичные потери и потери из-за отрывов в местных диффузорных зонах иногда выделяют в отдельную группу **потерь на поворот потока**.

4 Интенсивность зоны отрыва на выпуклой поверхности в большой степени определяет потери на поворот. Это связано с тем, что точка отрыва расположена в зоне наибольших местных скоростей в канале. Раннему отрыву способствует утолщение пограничного слоя за счет переноса низкоэнергетических частиц вторичными течениями. Второе важное обстоятельство – влияние нормальных сил инерции на поперечные турбулентные пульсации. Пограничный слой на выпуклой поверхности ламинаризируется и утолщается, что способствует более раннему отрыву.

5 Потери на поворот потока при прочих равных условиях тем больше, чем больше угол изогнутости канала и чем больше его отношение его поперечного размера к радиусу кривизны. Особо опасная местная диффузорность на выпуклой поверхности уменьшается или исключается вообще, если криволинейный канал конфузорный. Уменьшение проходного сечения криволинейного канала по длине – эффективное средство снижения потерь поворота. Диффузорность канала усиливает опасность отрыва. Диффузорные межлопаточные каналы турбокомпрессоров характеризуются небольшими углами поворота потока.

6 Эффективное средство снижения потерь поворота в сильно изогнутых каналах – установка направляющих лопаток. При этом поток поворачивает не в одном канале с большим n/R , а в системе каналов со значительно меньшими отношениями размера по нормали к радиусу кривизны.

5.5 Течение газа в межлопаточных каналах центробежных рабочих колес

Рассмотрим движение невязкого газа в межлопаточном канале круговой вращающейся решетки. Для выяснения закономерностей течения рассмотрим условие равновесия газовой частицы массой $dm = \rho \cdot b \cdot ds \cdot dn$, где b - ширина канала в направлении оси z в меридиональной плоскости: ds и dn - размеры частицы в направлении осей s и n (рис. 5.12).

На рассматриваемую частицу действуют четыре вида сил инерции:

– сила инерции, пропорциональная ускорению или замедлению потока в направлении

движения $dP_w = dm \cdot \frac{\partial w}{\partial \tau} = dm \cdot w \cdot \frac{\partial w}{\partial s}$;

– центробежная сила, пропорциональная центростремительному ускорению при

движении по криволинейной траектории $dP_R = dm \cdot \frac{w^2}{r_s}$;

– центробежная сила, пропорциональная центростремительному ускорению при

вращении с угловой скоростью ω : $dP_\omega = dm \cdot \frac{u^2}{r} = dm \cdot \omega^2 \cdot r$;

– сила инерции, пропорциональная кориолисову ускорению $dP_{кор} = dm \cdot 2 \cdot \omega \cdot w$.

Кориолисово ускорение равно векторному произведению скорости потока в относительной системе координат и угловой скорости вращения. На рисунке 5.12 показаны силы инерции для единицы массы, т.е. dP/dm .

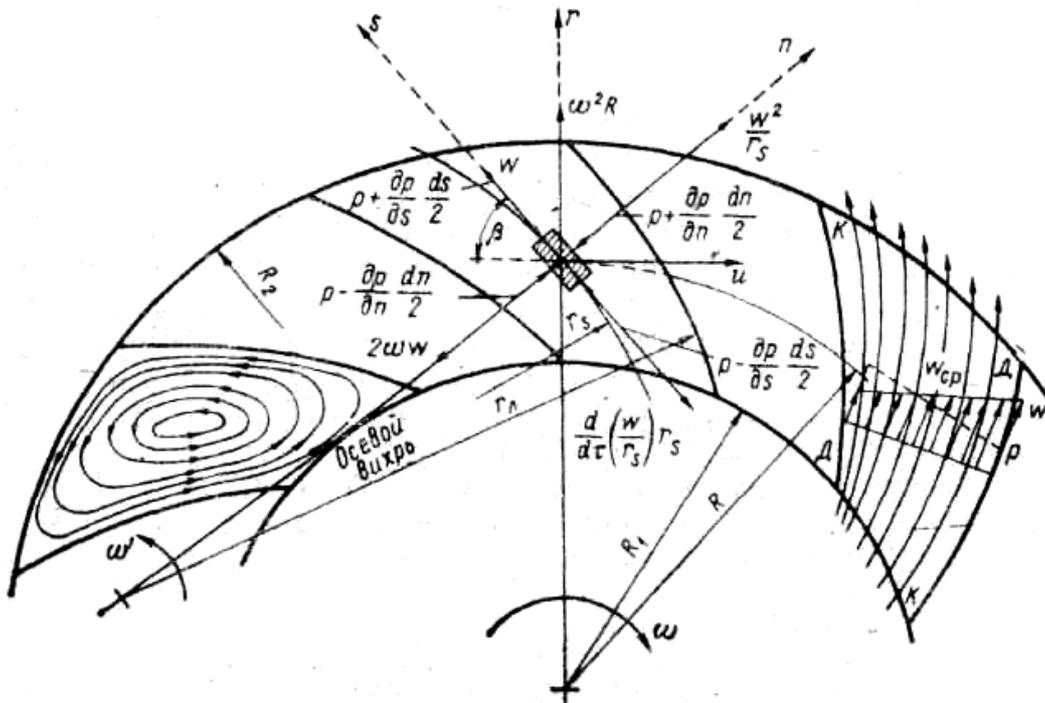


Рисунок 5.12 – Схема сил, действующих на частицу газа в межлопаточном канале [12]

На частицу действуют силы давления, которые определяются как произведение разности давлений, действующих на частицу в выбранном направлении, на площадь ее поверхности. Например, в направлении оси n $dP_o = -ds \cdot b \cdot \frac{\partial p}{\partial n} dn$. Сила давления для единицы массы $\frac{dP_o}{dm} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial n}$. Аналогично определяются силы давления в других направлениях.

При установившемся движении частица находится в равновесии, при этом сумма сил инерции, действующих на газовую частицу, уравнивается силой давления $d\vec{P}_o = d\vec{P}_R + d\vec{P}_\omega + d\vec{P}_{кор}$.

Уравнение равновесия в направлении нормали

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{w^2}{r_s} + \frac{u^2}{r} \cos \beta - 2\omega w. \quad (5.46)$$

Уравнение равновесия в направлении движения

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = \omega^2 r \sin \beta - w \frac{\partial w}{\partial s}. \quad (5.47)$$

При совместном решении уравнений равновесия (5.46) и (5.47) с учетом того, что $\cos \beta = \frac{dr}{dn}$, $\sin \beta = \frac{dr}{ds}$, получаем уравнение для градиента относительной скорости вдоль нормали:

$$\frac{\partial w}{\partial n} = 2\omega - \frac{w}{r_s}. \quad (5.48)$$

При условии, что $r_s = r_l = const$ уравнение (5.48) легко интегрируется после разделения переменных:

$$\int_{w_{cp}}^w \frac{dw}{2\omega \cdot r_l - w} = \int_0^n \frac{dn}{r_l}. \quad (5.49)$$

После преобразований получаем формулу для определения скорости вдоль нормали в межлопаточном канале:

$$w \approx w_{cp} \left(1 - \frac{n}{r_l} \right) + 2\omega n, \quad (5.50)$$

где w_{cp} – скорость на средней линии канала.

Обозначим расстояние между лопатками вдоль нормали a , тогда для задней стороны лопатки $n = a/2$, а для передней стороны $n = -a/2$.

Формулы для определения скоростей на передней и задней поверхностях лопаток имеют вид

$$w_n \approx w_{cp} \left(1 + \frac{a}{2r_n} \right) - \omega a, \quad w_z \approx w_{cp} \left(1 - \frac{a}{2r_n} \right) + \omega a. \quad (5.51)$$

Обозначим компоненты правой части формулы (5.50) $w_I = w_{cp} \left(1 - \frac{n}{2r_n} \right)$ и $w_{II} = 2\omega n$,

тогда

$$w = w_I + w_{II}. \quad (5.52)$$

Скорость w_I соответствует течению газа в межлопаточном канале при $\omega = 0$, т.е. в неподвижном канале. Скорость w_I называют скоростью транзитного потока. Величина скорости w_I зависит от величины средней скорости w_{cp} и величины кривизны r_n .

Скорость w_{II} соответствует течению газа в межлопаточном канале при $w_{cp} = 0$ ($\bar{m} = 0$), т.е. для канала, закрытого на входе и выходе. Скорость w_{II} называют вихревой скоростью. Величина скорости w_{II} зависит от величины угловой скорости ω и величины a .

Расстояние между лопатками по нормали можно определить по формуле

$$a = t \sin \beta_n - \delta_n = \frac{2\pi r}{z} \sin \beta_n - \delta_n, \quad (5.53)$$

где δ_n – толщина лопатки.

В зависимости от соотношения значений скоростей w_I и w_{II} скорость на передней стороне лопаток может быть больше или меньше нуля. Из формулы (5.51) следует, что положительные значения скорости w_n будет иметь, если

$$w_{cp} \geq \frac{\omega a}{\left(1 + \frac{a}{2r_n} \right)}. \quad (5.54)$$

Физический смысл отрицательных значений скоростей на передней стороне лопаток – это обратное течение возле этой стороны. Следует обратить внимание, что речь идет не об отрыве потока, так как рассматривается невязкое течение. Возможность образования зоны обратного течения в невязком потоке – это проявление особенности вращающейся круговой лопаточной решетки. В других каналах проточной части турбокомпрессоров такое невозможно.

Обратное течение негативно влияет на структуру потока в каналах рабочего колеса и его эффективность. При проектировании РК следует геометрические размеры выбирать с учетом уравнения (5.54).

5.6 Классификация потерь

В разделе 3 указывалось, что термин «потери» используется для краткости. Этим термином называют ту часть энергии, которая затрачивается на преодоление вязкостного трения различного рода. Механическая энергия потока, которая затрачивается на преодоление сил сопротивления движению, преобразуется в тепловую.

Таким образом, потери обусловлены таким свойством газа, как вязкость, физическая природа которого объясняется силами взаимодействия молекул газа между собой.

Диссипация энергии в каналах оценивается с помощью коэффициента потерь ζ , который определяется по формуле

$$\zeta = \frac{\Delta p}{0,5 \cdot \rho \cdot c_{cp}^2} . \quad (5.55)$$

Потери напора определяются по формуле

$$\Delta h = \zeta \cdot \frac{c_{cp}^2}{2} , \quad (5.56)$$

а потери мощности по формуле

$$N_w = \bar{m} \cdot \zeta \cdot \frac{c_{cp}^2}{2} . \quad (5.57)$$

Искусство профилирования проточной части заключается в том, чтобы минимизировать сумму неизбежных потерь трения и остальных составляющих, которые, в принципе, можно исключить.

К сожалению, такие изменения формы и размеров, которые ведут к уменьшению одних видов потерь, увеличивают другие. Примером минимизации суммарных потерь трения и отрыва является выбор оптимального угла раскрытия диффузора. Методы проектирования проточной части турбомашин решают принципиально такую же, хотя и более сложную задачу.

Классификация потерь по видам полезна, и даже необходима, для лучшего понимания сложного характера рабочего процесса турбомашин и широко используется для построения сравнительно простых методов расчета в инженерной практике. При этом следует помнить об условности любой классификации как упрощенного описания сложной реальности.

Потери при движении газа в каналах турбомашин принято классифицировать по видам:

– *потери трения*. Свойство газовых частиц прилипать к твердым поверхностям приводит к скольжению слоев газа и возникновению касательного напряжения трения. Потери трения имеют место при движении в каналах любой формы и при обтекании любых поверхностей;

– при диффузорном течении возможен отрыв потока от обтекаемых поверхностей с образованием зон, в которых направленная кинетическая энергия приобретает вихревой характер и теряется из-за трения газовых частиц друг о друга. При отрыве потока появляются *потери отрыва*, называемые также вихревыми потерями.

Отрыв потока может возникать как при течении в диффузорных каналах, так и в местных диффузорных зонах, возникающих при повороте потока в криволинейных каналах. В отличие от потерь трения потери отрыва могут иметь место не всегда, например, их не бывает в прямых трубах и прямых конфузорах;

– при повороте потока на поверхностях, ограничивающих криволинейные каналы по высоте, возникают *вторичные потери*. Вторичные течения возникают из-за того, что частицы с пониженной кинетической энергией «подсасываются» в область пониженного давления на выпуклой поверхности канала. Вторичные потери имеют вихревой характер, и их кинетическая энергия теряется из-за трения газовых частиц друг о друга – подобно тому, как это происходит в зонах отрыва потока. Возникновение вторичных течений ведет к появлению вторичных потерь;

– торможение сверхзвукового потока в прямом канале практически всегда сопровождается возникновением скачка уплотнения, в котором поток мгновенно становится дозвуковым. При этом скачкообразно меняются все параметры потока. Происходит мгновенное уменьшение полного давления, которое является мерой механической энергии газа. В скачке уплотнения возникают так называемые *волновые потери*.

Итак, потери напора при движении газа в канале или элементе проточной части турбомашин можно представить так:

$$h_w = h_{тр} + h_{отр} + h_{вт} + h_{волн} . \quad (5.58)$$

Следует отметить, что в настоящее время существует возможность расчета трехмерного пограничного слоя на ограничивающих поверхностях, что делает необязательным выделение вторичных потерь в отдельную группу. То есть вполне допустимо представить равенство (5.58) в виде $h_w = h_{тр} + h_{отр} + h_{волн}$, где потери трения учитывают трехмерный характер пограничного слоя.

Список литературы к разделу 5

1. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика / Г.Н. Абрамович. – М.: Наука, 1976. – 888 с.

2. Гидромеханика / под общей редакцией Я.И. Войткунского. – Л.: Судостроение, 1968. – 568 с.
3. Гиневский А.С. Аэродинамические характеристики плоских и осесимметричных диффузоров с предотрывным состоянием турбулентного пограничного слоя / А.С. Гиневский, Л.А. Бычкова // сб. „Тепло – и массоперенос“. – М., 1968. – т. 1
4. Ден Г.Н. Проектирование проточной части центробежных компрессоров / Г.Н. Ден. – Л.: Машиностроение, 1980. – 232 с.
5. Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям / под ред. М. О. Штейнберга. –3–е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1992. – 672 с.
6. Калінкевич М.В. Проектування осерадіальних каналів турбомашин: навчальний посібник / М.В. Калінкевич, І.В. Гавриченко. Суми: Вид-во СумДУ, 2008. – 161с.
7. Калинкевич Н.В. Методика проектирования лопаточных диффузоров центробежных компрессоров по задаваемому распределению скоростей / Н.В. Калинкевич, А.А. Обухов, В.Ф. Нефедченко // Холодильная техника и технология – 2009 – №6. – С. 16-19.
8. Ландау Л.Д. Теоретическая физика: учебное пособие: в 10 т. Том VI. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 1988. – 736 с.
9. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1973. – 847 с.
10. Повх И.Л. Техническая гидромеханика / И.Л. Повх. – Л.: Машиностроение, 1976. – 504 с.
11. Рис В.Ф. Центробежные компрессорные машины / В.Ф. Рис. – Л.: Машгиз, 1963. – 335 с.
12. Самойлович Г.С. Гидрогазодинамика: учебник для вузов / Г.С. Самойлович. – М.: Машиностроение, 1990. – 384 с.
13. Седов Л.И. Механика сплошной среды / Л.И. Седов. – М.: Наука, 1983. – Т. 1. – 528 с.
14. Селезнев К.П. Центробежные компрессоры / К.П. Селезнев, Ю.Б. Галеркин. – Л.: Машиностроение, 1982.- 271 с.
15. Теоретические основы теплотехники. Теплотехнический эксперимент: справочник / под общей редакцией В.А. Григорьева, В.М. Зорина. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 560 с.
16. Теория и расчет турбокомпрессоров / К.П. Селезнев, Ю.Б. Галеркин, С.А. Анисимов и др. – Л.: Машиностроение, 1986. – 392 с.
17. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг – М.: Наука, 1969. – 711 с.
18. Чжен П. Управление отрывом потока / перевод с английского под ред. д-ра техн. наук Е. Н. Бондарева. – М.: Мир, 1979. – 552 с.
19. Stratford B.S. The prediction of separation of the turbulent boundary layer. // J. Fluid Mech. – v. 5. – № 1, 1959.

Вопросы для самопроверки

- 1 Каналы какого типа составляют проточную часть турбокомпрессоров?
- 2 Какое течение называют течением Хагена-Пуазейля?
- 3 Напишите формулу Дарси для потерь напора.
- 4 Как определяется коэффициент потерь?
- 5 Чем отличаются течения газа на начальном и основном участках в прямой трубе?
- 6 Как определить границу между «гидравлически гладким» и «шероховатым» режимами обтекания поверхности?
- 7 Как влияет диффузность потока на его структуру?
- 8 Какие условия необходимы для образования отрыва потока?
- 9 Что называют углом раскрытия диффузора?
- 10 Как определяется угол раскрытия эквивалентного конического диффузора?
- 11 Напишите формулу для определения потерь в прямоосном диффузоре.
- 12 Какие диффузоры называют предотрывными?
- 13 В чем суть метода определения контура нулевого поверхностного трения?
- 14 Укажите особенности течения газа в криволинейных каналах.
- 15 Что называют вторичными течениями?
- 16 Укажите особенности течения газа в криволинейных осесимметричных каналах.
- 17 Запишите условия равновесия частицы газа в межлопаточном канале центробежного рабочего колеса.
- 18 При каких условиях образуется зона обратного течения в лопаточной решетке центробежного рабочего колеса?
- 19 В чем заключается специфика течения газа в межлопаточных каналах центробежных рабочих колес?
- 20 Какие виды потерь рассматриваются при течении газа в каналах?

РАЗДЕЛ 6

ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЕ ПОДОБИЕ ТУРБОКОМПРЕССОРОВ

Основные положения теории подобия. Метод подобия. Анализ размерностей. Виды подобия. Условия физического подобия. Геометрическое, кинематическое и динамическое подобие. Теоремы подобия. π - Теорема. Критерии подобия. Определение критериев из дифференциальных уравнений. Моделирование процессов. Характеристики турбокомпрессоров

Теория подобия имеет большое значение для проектирования турбокомпрессоров, а также для решения многих задач при экспериментальных исследованиях этих машин. Во всех учебниках или монографиях, посвященных турбокомпрессорам, вопросы газодинамического подобия рассматриваются при изучении тем: «Характеристики турбокомпрессоров», «Методы приближенного моделирования», «Испытания турбокомпрессоров». Изучение этих тем требует знаний основных положений и понятий теории подобия.

Для удобства выполнения самостоятельной работы студентов в данное пособие включены основные положения и понятия теории подобия, которые изучаются в рамках дисциплины «Газовая динамика».

В данном разделе изучаются основы теории подобия применительно к турбомашинам и начальные сведения о характеристиках турбокомпрессоров. Подробное рассмотрение вопросов, связанных с темой «Характеристики турбокомпрессоров», предполагается в дисциплинах: «Турбокомпрессоры», «Проектирование турбокомпрессоров», «Испытания турбокомпрессоров».

6.1 Основные положения теории подобия

Теория подобия – учение об условиях подобия различных объектов (физических явлений, процессов, аппаратов, систем), отличающихся масштабами, геометрией или физической природой.

Одно из наиболее удачных определений понятия подобия принадлежит академику Л.И. Седову: «Подобными называются такие явления (процессы), когда по характеристикам одного из них можно получить характеристики другого простым пересчетом, аналогичным переходу от одной системы единиц к другой».

Теория подобия опирается на учение о размерностях физических величин и служит основой физического моделирования.

Предметом теории подобия является установление критериев подобия различных физических явлений и изучение с помощью этих критериев свойств самих явлений.

Создание теории подобия связывают с именем Жозефа Бертрана, члена французской академии наук, который впервые установил основное свойство подобных явлений. В 1848 г. он сформулировал первую теорему подобия, теорему о существовании инвариантов подобия.

Большой вклад в развитие теории подобия внесли Ж. Фурье, Дж. Рэлей, Т. Афанасьева-Эренфест, М. Рябушинский, Р. Бэкингам, П. Бриджмен, М. В. Кирпичев, А. А. Гухман, Л. И. Седов и другие ученые.

Два объекта подобны, если в соответствующие (сходственные) моменты времени в соответствующих точках пространства значения переменных величин, характеризующих состояние одного объекта, пропорциональны значениям соответствующих величин др. объекта. Коэффициенты пропорциональности соответствующих величин называются коэффициентами подобия.

6.1.1 Анализ размерностей

Основной метод теории подобия – *анализ размерностей* физических величин, характеризующих состояние объекта исследования, и параметров, которые определяют это состояние.

Анализ размерностей – это метод установления связи между физическими величинами, существенными для изучаемого явления, основанный на рассмотрении размерностей этих величин. В основе анализа размерностей лежит требование, согласно которому уравнение, выражающее искомую связь, должно оставаться справедливым при любом изменении единиц входящих в него величин.

Это требование совпадает с требованием равенства размерностей в левой и правой частях уравнения. Формула размерности физической величины имеет вид

$$[N] = L^n M^m T^t, \quad (6.1)$$

где $[N]$ – символ размерности вторичной величины (обычно берётся в прямые скобки); L, M, T, \dots – символы величин, принятых за основные (соответственно длины, массы, времени и т.д.); n, m, t, \dots – целые или дробные, положительные или отрицательные вещественные числа.

Показатели степени в формуле (6.1), т. е. числа n, m, t, \dots , называются показателями размерности, или размерностью производной величины $[N]$. Так, формула размерности для ускорения (символ a) записывается в виде $[a] = LT^{-2}$, для силы – $[F] = LMT^{-2}$. Формула размерности записывается также и в ином виде, например, для силы $[F] = LM/T^2$.

Понятие размерности распространяется и на основные величины. Принимают, что размерность основной величины в отношении самой себя равна единице и что от других величин она не зависит; тогда формула размерности основной величины совпадает с её символом.

Если единица производной величины не изменяется при изменении какой-либо из основных единиц, то такая величина обладает нулевой размерностью по отношению к соответствующей основной. Так, ускорение обладает нулевой размерностью по отношению к массе. Величины, в размерность которых все основные величины входят в степени, равной нулю, называются безразмерными.

Выбор числа физических величин, принимаемых за основные, и самих этих величин в принципе произволен. Для механических явлений достаточно принять три независимые основные единицы измерения. В системе СИ это: длина, масса (или сила) и время.

Формула размерности соответствует условию, что отношение двух численных значений какой-нибудь производной величины не зависит от выбора масштабов основных единиц измерения.

6.2 Виды подобия

Различают геометрическое, физическое, физико-химическое и математическое подобие.

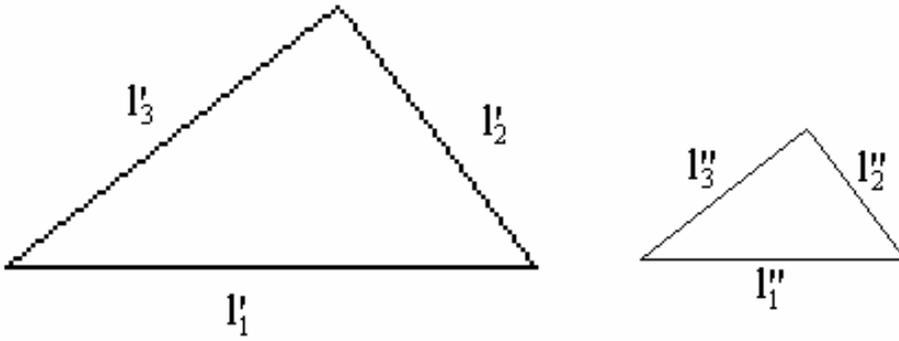
При геометрическом подобии пропорциональны геометрические характеристики соответствующих элементов объектов (например, длины, высоты или диаметры аппаратов).

При физическом подобии в пространстве и времени подобны поля соответствующих физических параметров двух объектов, например при кинематическом подобии - поля скоростей, при динамическом подобии - системы действующих сил или силовых полей (силы инерции, тяжести, вязкости, давления и др.); при механическом или гидромеханическом подобии, предполагающем наличие геометрического, кинематического и динамического подобия, - упругие системы, потоки жидкостей, газов или их смесей и др.; при подобии тепловых процессов - соответствующие поля температур и тепловых потоков; при подобии массообменных процессов - потоки веществ и поля их концентраций и др.; при подобии химических процессов - поля концентраций, температур и др.; при электродинамическом подобии - поля токов, нагрузок, мощностей, электромагнитных сил.

Для сложных физических и физико-химических процессов, включающих механические, гидромеханические, тепло - и массообменные явления, теория подобия устанавливает условия подобия.

Понятие подобия в отношении физических величин применимо только к явлениям одного рода, которые качественно одинаковы, и аналитически описываются одними уравнениями и по форме, и по содержанию. Если аналитические уравнения двух каких-либо явлений одинаковы по форме, но различны по физическому содержанию, то такие явления называют *аналогичными*.

При математическом подобии рассматриваемые объекты описываются одинаковыми уравнениями, что позволяет говорить, например, о подобии тепловых и массообменных процессов и т.п. Такая аналогия существует, например, между явлениями теплопроводности и электричества. Основной закон и в том, и в другом случае формулируется одинаково: поток (тепла q , электричества i) пропорционален градиенту (температуры – $\text{grad } t$, потенциала – $\text{grad } u$), соответственно законы Фурье и Ома $q = -\lambda \cdot \text{grad } t$, $i = -\sigma \cdot \text{grad } u$, где



λ и σ – коэффициенты пропорциональности, то есть коэффициент теплопроводности и коэффициент удельной проводимости.

6.2.1 Геометрическое подобие

Впервые с понятием подобия встречаемся в геометрии, в которой введено понятие геометрически подобных фигур.

Рисунок 6.1 – Подобные треугольники

Например, изображенные на рисунке 6.1 треугольники обладают следующим свойством: их соответствующие углы равны, а соответствующие стороны пропорциональны, то есть

$$\frac{l''_1}{l'_1} = \frac{l''_2}{l'_2} = \frac{l''_3}{l'_3} = C, \quad (6.2)$$

где C – коэффициент пропорциональности, или *константа подобия*.

Условия физического подобия. Подобие двух физических явлений означает подобие всех величин, характеризующих рассматриваемые явления, то есть любая величина φ' пропорциональна однородной с ней величине φ'' второго явления:

$$\varphi' = C_\varphi \cdot \varphi'', \quad (6.3)$$

где C_φ – коэффициент пропорциональности - называется константой подобия величины φ .

C_φ не зависит ни от координат, ни от времени.

6.2.2 Кинематическое подобие

Рассмотрим условия кинематического подобия.

По определению скорость c – это отношение пути l ко времени движения, то есть

$$c = \frac{l}{\tau}. \quad (6.4)$$

Для двух подобных потоков жидкости $c' = \frac{l'}{\tau'}$, $c'' = \frac{l''}{\tau''}$.

Разделив эти равенства друг на друга, получим

$$c''/c' = \frac{l''/l'}{\tau''/\tau'} \quad (6.5)$$

или $k_c = \frac{k_l}{k_\tau}$, $\frac{k_c \cdot k_\tau}{k_l} = 1$. Здесь k_c, k_τ, k_l – константы подобия.

Уравнение характеризует кинематическое подобие и показывает, что в подобных системах существуют особые величины, называемые инвариантами, или *критериями подобия*.

Критерии подобия являются безразмерными комплексами, составленными из величин, характеризующих явление.

6.2.3 Динамическое подобие

Рассмотрим условия *динамического подобия*. Согласно второму закону Ньютона сила F равна массе m , умноженной на ускорение a , то есть $F = m \cdot a = m \cdot c/\tau$. После преобразования получим

$$F \cdot \tau = m \cdot c = idem = Ne, \quad k_F k_\tau / k_m k_c = 1. \quad (6.6)$$

Критерии подобия принято называть именами ученых, работающих в этой области, и обозначать двумя начальными буквами их фамилии, например, Ne (Newton) – критерий Ньютона.

6.3 Теоремы подобия

Основные положения теории подобия формулируются в виде трех теорем.

Первая теорема подобия: подобные между собою явления имеют одинаковые критерии подобия.

Вторая теорема подобия: зависимость между переменными, характеризующими явление, может быть представлена в виде зависимости между критериями подобия k_1, k_2, \dots, k_n :

$$f(k_1, k_2, \dots, k_n) = 0 . \quad (6.7)$$

Эта зависимость называется критериальным уравнением. Помимо критериев подобия, в это уравнение могут входить так называемые симплексы - безразмерные отношения однородных физических величин.

Третья теорема подобия: подобны те явления, условия однородности которых подобны и критерии, составленные из условий однозначности, численно одинаковы.

Условия однозначности состоят из начальных и граничных условий задачи, или краевых условий. Критерии, полученные из этих условий, называются определяющими.

Возможна такая формулировка третьей теоремы подобия: явления подобны, если определяющие критерии инвариантны (одинаковы).

Критерии, составленные из величин, не входящих в условия однозначности, называются неопределяющими.

Когда устанавливается подобие, то неопределяющие критерии сами собой получаются также одинаковыми. Это следствие установившегося подобия. Следовательно, теория подобия позволяет, не интегрируя дифференциальных уравнений, получить из них критерии подобия, а из опытных данных установить критериальные зависимости, которые будут справедливы для всех подобных между собой процессов.

6.3.1 π -теорема

Формулировка π -теоремы: если имеется соотношение между m размерными параметрами в виде $f(q_1, q_2, \dots, q_m) = 0$, то можно найти эквивалентные соотношения между n безразмерными параметрами в виде $f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) = 0$, где $n = m - k$, причем k - наибольшее число параметров, которые нельзя объединить в какой-либо безразмерный комплекс.

Число k обычно равно числу независимых размерностей r , необходимых для образования всех размерностей параметров q .

Использование π -теоремы позволяет за счет применения безразмерных комплексов уменьшить число независимых параметров при решении реальных задач, а также обеспечить возможность сопоставлять и обобщать результаты решений.

Пусть, например, величина A является функцией пяти размерных величин ($m = 5$), т.е.

$$A = f(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon). \quad (6.8)$$

В газодинамике количество основных единиц принимается равным $k = 3$ (длина, масса (или сила) и время). Из π -теоремы следует, что зависимость (6.8) может быть преобразована в зависимость, содержащую два числа π ($n = m - k = 5 - 3 = 2$):

$$A = f_1(\pi_1, \pi_2), \quad (6.9)$$

где π_1 и π_2 – безразмерные комплексы, составленные из размерных величин.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий как общий подход к задаче, так и способ получения чисел подобия.

Задание: необходимо установить вид зависимости, позволяющий определить потери давления либо напора при турбулентном течении жидкости в круглых трубах.

Падение давления вдоль трубы, обусловленное затратами энергии на преодоление сил вязкого трения, обратно пропорционально её длине, поэтому с целью сокращения числа переменных целесообразно рассматривать не Δp , а $\Delta p / l$, т.е. потери давления на единицу длины трубы.

Из представлений о физической сущности процесса можно предположить, что возникающие потери должны зависеть: от средней скорости течения рабочей среды (c); от размера трубопровода, определяемого его диаметром (d); от физических свойств транспортируемой среды, характеризующих её плотностью (ρ) и вязкостью (μ); и считать, что потери должны быть связаны с состоянием внутренней поверхности трубы, т.е. с шероховатостью (k) ее стенок. Таким образом, зависимость (6.8) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{\Delta p}{l} = f_1(c, d, \rho, \mu, k) \quad (6.10)$$

или

$$f_2\left(c, d, \rho, \mu, k, \frac{\Delta p}{l}\right) = 0. \quad (6.11)$$

На этом и заканчивается первый и, нужно подчеркнуть, наиболее ответственный этап анализа размерностей.

В соответствии с π -теоремой количество влияющих параметров, входящих в зависимость, $m = 6$. Следовательно, число безразмерных комплексов $n = m - k = 6 - 3 = 3$, т.е. после соответствующей обработки (6.11) должна принять вид

$$f_3(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0. \quad (6.12)$$

Существует несколько способов нахождения чисел π . Мы воспользуемся методом, предложенным Рэлеем.

Основным достоинством его является то, что он представляет собой своеобразный алгоритм, приводящий к решению задачи.

Из параметров, входящих в (6.12), необходимо выбрать три любых, но так, чтобы в них входили основные единицы, т.е. метр, килограмм и секунда. Пусть ими будут c , d , ρ . Легко убедиться, что они удовлетворяют поставленному требованию.

Образуются числа π в виде степенных одночленов из выбранных параметров, умноженных на один из оставшихся в (6.11):

$$\pi_1 = c^{x_1} d^{y_1} \rho^{z_1} \frac{\Delta p}{l}, \quad (6.13)$$

$$\pi_2 = c^{x_2} d^{y_2} \rho^{z_2} \mu, \quad (6.14)$$

$$\pi_3 = c^{x_3} d^{y_3} \rho^{z_3} k. \quad (6.15)$$

Теперь задача сводится к нахождению всех показателей степеней. При этом они должны быть подобраны так, чтобы числа π были безразмерны.

Для решения этой задачи определяем прежде всего размерности всех параметров:

$$\dim c = L \cdot T^{-1}; \quad \dim d = L; \quad \dim \rho = M \cdot L^{-3}.$$

$$\text{Вязкость } [\mu] \rightarrow \text{Па} \cdot \text{с} \rightarrow \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}^2} \rightarrow \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}, \text{ т.е. } \dim \mu = ML^{-1}T^{-1}.$$

$$\text{Параметр } \left[\frac{\Delta p}{l} \right] \rightarrow \frac{\text{Па}}{\text{м}} \rightarrow \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{м}} \rightarrow \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}^2}, \text{ и } \dim \frac{\Delta p}{l} = MT^{-2}L^{-2}.$$

Для шероховатости $\dim k = L$.

Таким образом, размерности чисел π будут:

$$\dim \pi_1 = (LT^{-1})^{x_1} L^{y_1} (ML^{-3})^{z_1} MT^{-2}L^{-2},$$

$$\dim \pi_2 = L^{x_2+y_2-3z_2-1} T^{-x_2-1} M^{z_2+1},$$

$$\dim \pi_3 = L^{x_3+y_3-3z_3+1} T^{-x_3} M^{z_3}.$$

Для любой безразмерной величины показатели размерности $x = y = z = 0$. Поэтому, например, для числа π_1 можем записать

$$L^{x_1+y_1-3z_1-2} T^{-x_1-2} M^{z_1+1} = L^0 T^0 M^0.$$

Приравнявая показатели степеней, получаем три уравнения с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} x_1 + y_1 - 3z_1 - 2 &= 0, \\ -x_1 - 2 &= 0, \\ z_1 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Откуда находим: $x_1 = -2$; $z_1 = -1$; $y_1 = 1$.

Подставляя эти значения в (6.13), получаем

$$\pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho c^2} \frac{d}{l}. \quad (6.16)$$

Действуя аналогично, получаем:

$$\pi_2 = \frac{cd\rho}{\mu} = \frac{cd}{\nu} = Re, \quad (6.17)$$

$$\pi_3 = \frac{k}{d}. \quad (6.18)$$

Таким образом, зависимость (6.12) принимает вид

$$f_3\left(\frac{\Delta p}{\rho c^2} \frac{d}{l}, Re, \frac{k}{d}\right) = 0. \quad (6.19)$$

Так как $\frac{\Delta p}{\rho c^2}$ является неопределяющим числом подобия (числом Эйлера), то (6.19)

можно записать как функциональную зависимость

$$\frac{\Delta p}{\rho c^2} \frac{d}{l} = f\left(Re, \frac{k}{d}\right),$$

либо

$$\Delta p = f\left(Re, \frac{k}{d}\right) \frac{l}{d} \rho c^2. \quad (6.20)$$

Следует иметь в виду, что анализ размерностей не дает и принципиально не может дать каких-то числовых значений в получаемых с его помощью соотношениях. Поэтому он должен завершаться анализом результатов и при необходимости их корректировкой, исходя из общих физических представлений. Рассмотрим с этих позиций выражение (6.20). В правую его часть входит квадрат скорости, но эта запись не выражает ничего, кроме того, что скорость возводится в квадрат. Однако, если поделить эту величину на два, т.е. $\frac{c^2}{2}$, то, как известно из газодинамики, она приобретает важный физический смысл – удельной кинетической энергии, а $\frac{\rho c^2}{2}$ – динамическое давление, обусловленное средней скоростью. С учетом этого (6.20) целесообразно записать в виде

$$\Delta p = f\left(Re, \frac{k}{d}\right) \frac{l}{d} \rho \frac{c^2}{2}. \quad (6.21)$$

Обозначим $f\left(Re, \frac{k}{d}\right)$ буквой λ и получим формулу Дарси

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \rho \frac{c^2}{2}. \quad (6.22)$$

Для напора аналогичная зависимость имеет вид

$$\Delta h = \lambda \frac{l}{d} \frac{c^2}{2}, \quad (6.23)$$

где λ – гидравлический коэффициент трения, который, как следует из (6.21), является функцией числа Рейнольдса и относительной шероховатости (k/d). Вид этой зависимости может быть найден экспериментальным путем.

6.4 Критерии подобия

Критерий подобия – безразмерное число, составленное из размерных физических параметров, определяющих рассматриваемое физическое явление. Равенство всех одностипных критериев подобия для двух физических явлений и систем – необходимое и достаточное условие физического подобия этих систем.

Всякая новая комбинация из критериев подобия также является критерием подобия, что даёт возможность в каждом конкретном случае выбрать наиболее удобные и характерные критерии.

Если известны уравнения, описывающие рассматриваемое физическое явление, то критерии подобия для этого явления можно получить, приводя уравнения к безразмерному

виду путём введения некоторых характерных значений для каждого из определяющих физических параметров, входящих в систему уравнений. Тогда критерии подобия определяются как безразмерные коэффициенты, появляющиеся перед некоторыми из членов новой, безразмерной системы уравнений.

Заметим, что критерии подобия, полученные из дифференциальных или проинтегрированных выражений, одни и те же.

Если математическая модель процесса известна, но не может быть проинтегрирована, то числа подобия могут быть найдены методом, который был предложен известным американским математиком и гидродинамиком Г. Биркгофом, названный им инспекционным анализом. Как следует из названия, метод заключается в организованном по определенным правилам «инспектировании» дифференциальных уравнений, которое должно выявить числа подобия, позволяющие моделировать процесс.

6.4.1 Определение критериев из дифференциальных уравнений

Базой инспекционного анализа является следующее положение: если две системы описываются одинаковыми дифференциальными уравнениями и имеют одинаковые граничные условия, и если значения всех параметров в этих уравнениях и граничных уравнениях равны, то эти две системы подобны при условии существования единственности решения.

Инспекционный анализ представляет собой определенный алгоритм, включающий два этапа: на первом из них отношение дифференциальных величин заменяются отношениями самих переменных, на втором – уравнение приводится к безразмерному виду путем деления всех его членов на один из них, выбранный произвольно.

Любое дифференциальное уравнение описывает целый класс явлений, т.е. решение их многозначно. Чтобы из множества возможных решений выбрать одно, соответствующее изучаемому явлению, нужно при постановке задачи ввести дополнительные условия, так называемые условия однозначности, которые включают:

- данные о физических свойствах среды (плотность, вязкость);
- сведения о начальном состоянии системы (начальные условия);
- данные о поведении системы на её границах (граничные условия).

Рассмотрим иллюстрацию этого метода на примере уравнения движения:

$$c_x \frac{\partial c_x}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_y}{\partial y} = g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - v \left(\frac{\partial^2 c_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_y}{\partial y^2} \right). \quad (6.24)$$

Представим это уравнение через размерности, входящие в него. При этом обозначим размерности скоростей c_x и c_y через c , размерность отрезков x и y – через L , получим

$$\left[\frac{c^2}{L} \right] = \left[g - \frac{\Delta p}{\rho L} - v \frac{c^2}{L^2} \right]. \quad (6.25)$$

После преобразования

$$[1] = \left[\frac{gL}{c^2} - \frac{\Delta p}{\rho c^2} - \frac{cL}{\nu} \right]. \quad (6.26)$$

В этом уравнении есть три критерия:

$$\frac{c^2}{gL} = \frac{\text{сила инерции}}{\text{сила тяжести}} \quad \text{– число Фруда,} \quad (6.27)$$

$$\frac{\Delta p}{\rho c^2} = \frac{\text{сила давления}}{\text{сила инерции}} \quad \text{– число Эйлера,} \quad (6.28)$$

$$\frac{cL}{\nu} = \frac{\text{сила инерции}}{\text{сила вязкости}} \quad \text{– число Рейнольдса.} \quad (6.29)$$

Согласно второй теореме подобия опытные данные надо обрабатывать в виде зависимости $Eu = f(Fr, Re)$.

Еще один пример применения метода инспекционного анализа дифференциальных уравнений рассмотрим, используя уравнение Навье – Стокса. Выберем одну из проекций в декартовой системе координат, при этом безразлично какую, так как структура уравнений одинакова, что обеспечит одинаковость получаемых результатов.

В проекции на ось x имеем

$$\frac{\partial c_x}{\partial \tau} + c_x \cdot \frac{\partial c_x}{\partial x} + c_y \cdot \frac{\partial c_x}{\partial y} + c_z \cdot \frac{\partial c_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 c_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial z^2} \right). \quad (6.30)$$

Считаем, что массовая сила X – это только сила тяжести.

В такой форме записи каждый из членов уравнения (6.30) выражает силу, отнесенную к единице массы. При этом

$$F_{u1} = \frac{\partial c_x}{\partial \tau} \quad \text{и} \quad F_{u2} = c_x \cdot \frac{\partial c_x}{\partial x} + c_y \cdot \frac{\partial c_x}{\partial y} + c_z \cdot \frac{\partial c_x}{\partial z} \quad \text{– силы инерции;}$$

$$F_z = X = g \quad \text{– сила тяжести;}$$

$$F_o = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{– сила давления;}$$

$$F_{mp} = \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 c_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial z^2} \right) - \text{сила вязкого трения.}$$

Действуя по алгоритму, заменим дифференциальные соотношения отношениями величин. Имеем:

$$F_{u1} \cong \frac{c}{\tau}; \quad F_{u2} \cong \frac{c^2}{L}; \quad F_g = g; \quad F_\rho \cong \frac{\Delta p}{\rho \cdot L}; \quad F_{mp} \cong \frac{\nu \cdot c}{L^2}. \quad (6.31)$$

Приводим эти соотношения к безразмерному виду, приняв в качестве делителя один из комплексов. Он может быть выбран произвольно, пусть им будет F_{u2} , т.е. силы инерции. Получаем:

$$\frac{F_{u1}}{F_{u2}} = \frac{L}{\tau \cdot c} = Sh \quad - \text{это число подобия Струхала. (Также используют так называемый}$$

критерий гомохронности $\frac{\tau \cdot c}{L} = Ho$).

$$\frac{F_g}{F_{u2}} = \frac{g \cdot L}{c^2}, \text{ обратная величина } \frac{c^2}{g \cdot L} = Fr \quad - \text{число Фруда} - \text{отношение сил инерции к}$$

силам тяжести.

$$\frac{F_\rho}{F_{u2}} = \frac{\Delta p}{\rho \cdot c^2} = Eu \quad - \text{число Эйлера, отношение сил давления к силам инерции.}$$

$$\frac{F_{mp}}{F_{u2}} = \frac{\nu}{c \cdot L}, \text{ обратная величина } \frac{c \cdot L}{\nu} = Re \quad - \text{число Рейнольдса} - \text{отношение сил}$$

инерции к силам вязкого трения.

Таким образом, при моделировании гидромеханических явлений необходимо использовать числа подобия Струхала, Фруда, Рейнольдса и Эйлера.

Для сжимаемых сред в число определяющих чисел подобия, кроме указанных выше, входит и число Маха.

Анализируя величины, входящие в числа подобия, легко заметить, что они составлены из параметров, входящих в условия однозначности. Эти числа подобия называют определяющими. Экспериментатор, разумеется, в определенных пределах, может изменять их величину (менять скорость, геометрические размеры, вязкость). В число Эйлера входит величина Δp – перепад давления (потеря давления), которая, как правило, является искомой. Другими словами, величина числа Эйлера является следствием (результатом) процесса. Числа подобия такого рода называются неопределяющими. Сказанное можно представить в виде

$$Eu = f(Sh, Fr, Re). \quad (6.32)$$

Если изучается установившееся движение, при котором параметры в точке не изменяются с течением времени, то из рассмотрения исключается число Струхала, тогда

$$Eu = f(Re, Fr). \quad (6.33)$$

В гидродинамике принято рассматривать шесть общих сил, действующих в потоке жидкости или газа: инерции (F_u); трения, или вязкости (F_{mp}); давления (F_o); упругости (F_y); поверхностного натяжения (F_{nn}); гравитации (F_z). С использованием этих сил можно образовать 15 соотношений из двух сил: F_u/F_{nn} , F_u/F_y , F_u/F_{mp} , F_o/F_{mp} , F_u/F_z , F_o/F_u и т.д. Поскольку отдельные критерии определяются как соотношения независимых сил, одни критерии могут быть выражены через другие; при этом любая комбинация из критериев подобия также представляет собой критерий подобия рассматриваемых физических явлений.

6.4.2 Основные критерии подобия газодинамических процессов

Для критериев (чисел) подобия принята специальная система обозначений в виде двух первых букв, как правило, фамилий ученых, внесших значительный вклад в данную область знания, и соответствующих наименований. Каждый из критериев подобия имеет определенный физический смысл как величина, пропорциональная соотношению однотипных физических величин. Сводка наиболее распространенных в гидромеханических и тепловых процессах критериев (чисел) подобия и входящих в них величин представлена в таблицах.

Таблица 6.1 – Гидромеханические процессы

Число	Формула	Физический смысл
Ньютона	$Ne = Fl/mc^2$	Мера соотношения действующей на систему силы и силы инерции
Вебера	$We = c^2 l \rho / \sigma$	Мера соотношения сил инерции и поверхностного натяжения; отражает влияние последней на движение потока
Рейнольдса	$Re = cl\rho/\mu = cl/\nu$	Мера соотношения сил инерции и вязкости; отражает влияние силы трения на движение потока
Фруда	$Fr = c^2/gl$	Мера соотношения сил инерции и тяжести; отражает влияние последней на движение потока

Продолжение таблицы 6.1

Число	Формула	Физический смысл
Эйлера	$Eu = \Delta p / \rho c^2$	Мера соотношения между изменением силы гидростатического давления и силы инерции; отражает влияние перепада давления на движение потока
Галилея	$Gr = Re^2 / Fr = l^3 \rho^2 g / \mu^2$	Характеризует влияние сил тяжести и инерции при естественной конвекции
Архимеда	$Ar = Gr(\Delta \rho / \rho)$	Характеризует влияние на силу тяжести плотности потока при естественной конвекции
Гомохронности	$Ho = c\tau / l$	Характеризует одинаковость протекания процессов во времени при нестационарном движении потока
Маха	$M = c/a$	Характеризует влияние сжимаемости потока на его движение

Таблица 6.2 – Тепловые процессы

Число	Формула	Физический смысл
Нуссельта	$Nu = \alpha l / \lambda$	Мера интенсивности теплоотдачи на границе раздела фаз
Прандтля	$Pr = c\mu / \lambda = \nu / a$	Мера соотношения вязкостных и температуропроводных свойств теплоносителей; мера соотношения полей скоростей и температур в потоке
Пекле	$Pe = Re Pr = cl / a$	Мера соотношения между теплотой, переносимой конвекцией и теплопроводностью
Грасгоффа	$Gr = l^3 g \beta \Delta t / \mu^2$	Мера соотношения сил трения, инерции и подъемной (архимедовой) силы, определяемой разностью плотностей в различных точках неизотермического потока при свободной конвекции
Фурье	$Fo = a\tau / l^2$	Характеризует нестационарность переноса теплоты путем теплопроводности при изменении температуры во времени

Продолжение таблицы 6.2

Число	Формула	Физический смысл
Био	$Bi = \alpha l / \lambda$	Характеризует постоянство отношения внутреннего термического сопротивления нестационарной теплопроводности к внешнему термическому сопротивлению теплоотдаче
Стантона (Стэнтон)	$St = Nu / Re Pr$	Характеризует соотношение количества теплоты, переносимой конвекцией и движущимся потоком жидкости (газа); интенсивность диссипации энергии в потоке

Таблица 6.3 – Величины, входящие в критерии подобия

Величина	Обозначение	Единица измерения
Время	τ	c
Давление, разность давлений	$p, \Delta p$	$Па$
Динамическая вязкость	μ	$Па \cdot c$
Кинематическая вязкость	ν	$м^2 / c$
Коэффициент диффузии	D	$м^2 / c$
Коэффициент объемного расширения	β	K^{-1}
Коэффициент температуропроводности	a	$м^2 / c$
Коэффициент теплоотдачи	α	$Вт / м^2 \cdot K$
Коэффициент теплопроводности	λ	$Вт / м \cdot K$
Масса	m	$кг$
Определяющий геометрический размер	l, d	$м$
Плотность жидкости (газа)	ρ	$кг / м^3$
Поверхностное натяжение	σ	$Н / м$
Сила	F	$Н$
Скорость	c	$м / c$
Скорость звука	$a_{\zeta a}$	$м / c$
Температура, разность температур	$T, \Delta T$	K
Удельная теплоемкость (при постоянном давлении)	c_p	$Дж / кг \cdot K$

6.5 Моделирование процессов

При постановке любого эксперимента необходимо заранее знать:

- какие величины надо измерять в опыте;
- как обрабатывать результаты опыта;
- какие явления подобны изучаемому, т.е. на какие случаи можно распространять полученные зависимости. Ответ на эти вопросы дает теория подобия.

На первый отвечает первая теорема подобия: *в опытах надо измерять величины, которые содержатся в критериях подобия изучаемого явления.*

На второй вопрос отвечает вторая теорема подобия: *результаты опытов надо представлять в виде критериальных зависимостей.*

На третий вопрос – какие явления подобны – ответ дает третья теорема подобия: *подобны те явления, у которых подобны условия однозначности и равны определяющие критерии.*

6.5.1 Приближенное моделирование

Если в рассматриваемых физических явлениях или системах существует равенство не всех, а лишь некоторых независимых критериев подобия, то говорят о неполном, или частичном, подобии. Такой случай наиболее часто встречается на практике. При этом существенно, чтобы влияние на протекание рассматриваемых физических процессов критериев, равенство которых не соблюдается, было незначительным или малосущественным.

Если при моделировании необходимо обеспечить равенство нескольких критериев, возникают значительные трудности, часто непреодолимые, если только не делать модель тождественной натуре, что фактически означает переход от моделирования к натурным испытаниям. Поэтому на практике нередко прибегают к приближенному моделированию, при котором часть процессов, играющих второстепенную роль, или совсем не моделируется, или моделируется приближенно.

При моделировании гидромеханических явлений для обеспечения динамического подобия должны соблюдаться следующие условия:

$$Fr_m = Fr_n, \quad Re_m = Re_n, \quad (6.34)$$

либо

$$\frac{c_m^2}{g_m L_m} = \frac{c_n^2}{g_n L_n}, \quad \frac{c_m L_m}{v_m} = \frac{c_n L_n}{v_n}. \quad (6.35)$$

Если при проведении опытов удастся соблюсти эти требования, то подобие называется полным. Однако в реальных условиях добиться этого трудно, а иногда и просто невозможно. Поэтому обычно ограничиваются частичным подобием. Анализируя сущность явления,

экспериментатор устанавливает, какие из сил (тяжести, трения) играют определяющую роль в исследуемом процессе, и моделирует только их. В этом случае при установившемся движении зависимость (6.33) распадается на две:

$$Eu = f(Re) \text{ и } Eu = f(Fr), \quad (6.36)$$

из которых и выбирается определяющая.

Такое моделирование не позволяет найти прямым пересчётом значения тех характеристик, которые не отвечают условиям подобия, и их определение требует соответствующих дополнительных исследований. Например, при моделировании установившихся течений вязких сжимаемых газов необходимо обеспечить равенство критериев Re и M и безразмерного числа $k = c_p/c_v$ (c_p и c_v – удельные теплоёмкости газа при постоянном давлении и постоянном объёме соответственно), что в общем случае сделать невозможно.

Поэтому, как правило, обеспечивают для модели и природы лишь равенство числа M , а влияние на определяемые параметры различий в числах Re и k исследуют отдельно или теоретически, или с помощью других экспериментов.

Кинематическое подобие обеспечивается без принятия каких-либо специальных мер. Если системы динамически подобны и течение происходит в геометрически подобных каналах, то кинематическое подобие обеспечивается автоматически.

Остановимся еще на двух вопросах, имеющих принципиальный характер при рассмотрении приближённого моделирования.

На первый взгляд кажется, что геометрическое подобие природы и модели может быть легко реализовано. Это так, пока речь идет о подобии геометрических границ объектов, иными словами, о подобии «в большом». Вместе с тем стенки каналов как природы, так и модели, имеют какую-то шероховатость. Очевидно, что моделирование шероховатости практически невозможно и геометрическое подобие «в малом» недостижимо.

Второй вопрос связан с так называемым «масштабным эффектом». Суть его в том, что моделирование, основанное на классических принципах теории подобия, не обеспечивает масштабный переход. Это означает, что эффективность различного рода промышленных технологических аппаратов оказывается ниже той, которая должна была бы быть по результатам, полученным пересчетом с модельных испытаний. Более того, она ухудшается по мере увеличения размеров аппаратов. Исследования, выполненные в последние годы, показали, что в основе масштабного эффекта лежат гидродинамические явления: неравномерность распределения потоков по сечению аппарата, увеличение масштаба турбулентности и т.п., что позволяет найти способы устранения этого эффекта.

6.5.2 Понятие об автомодельности

Автомодельность – понятие теории подобия, принципиальное содержание которого сводится к так называемому вырождению чисел подобия. Формальным признаком её служит

выпадение чисел подобия как аргументов, входящих в функциональную зависимость.

Рассмотрение содержания этого понятия необходимо для грамотного проведения эксперимента.

Для простоты будем считать, что в интересующем исследователя процессе определяющими являются силы вязкого трения, т.е. зависимость (6.33) имеет вид $Eu = f(Re)$.

Широко известны и находят применение в практике газодинамических расчетов кривые Никурадзе (рис. 5.3). На рисунке представлены зависимости коэффициентов сопротивления λ для круглой трубы от числа Рейнольдса.

Как следует из рисунка, при увеличении числа Рейнольдса сверх критического значения коэффициенты сопротивления λ перестают зависеть от числа Рейнольдса. Перестает зависеть от числа Рейнольдса и число Эйлера.

Исчезновение (вырождение) зависимости сопротивления от числа Рейнольдса означает, что не надо никаких условий для подобия и все процессы такого типа автоматически подобны между собой. Этот случай и называется автомодельностью.

В общем случае под автомодельной понимают область, в которой неопределяющее число подобия перестает зависеть от определяющего (либо определяющих).

Проведение опытов в этой области существенно упрощается.

Нужно помнить, что какого-то универсального значения $Re_{кр}$ не существует, оно всегда зависит от природы изучаемого объекта, в частности, от его формы.

6.6 Характеристики турбокомпрессоров

Графические зависимости отношения давлений $\Pi = f(\bar{V})$, КПД $\eta_n = f(\bar{V})$ и мощности $N = f(\bar{V})$ от производительности называют размерными характеристиками компрессора.

Зависимость отношения давлений от производительности называют напорной характеристикой.

Газодинамические характеристики компрессора позволяют оценивать его энергетические и экономические свойства, прогнозировать значения производительности, давления газа, потребляемой мощности в процессе регулирования компрессора во время его эксплуатации.

Для примера на рисунке 6.2 приведены типовые размерные характеристики центробежного компрессора.

Размерные характеристики зависят от многих параметров: свойств газа k и R ; давления и температуры на входе в компрессор p_n , T_n ; угловой скорости ротора ω .

При изменении любого из этих параметров характеристики изменяются. Поэтому размерные характеристики определяются для стандартных давлений и температур.

При построении размерных характеристик используются разнообразные параметры компрессора, которые характеризуют его производительность, напор, мощность и КПД.

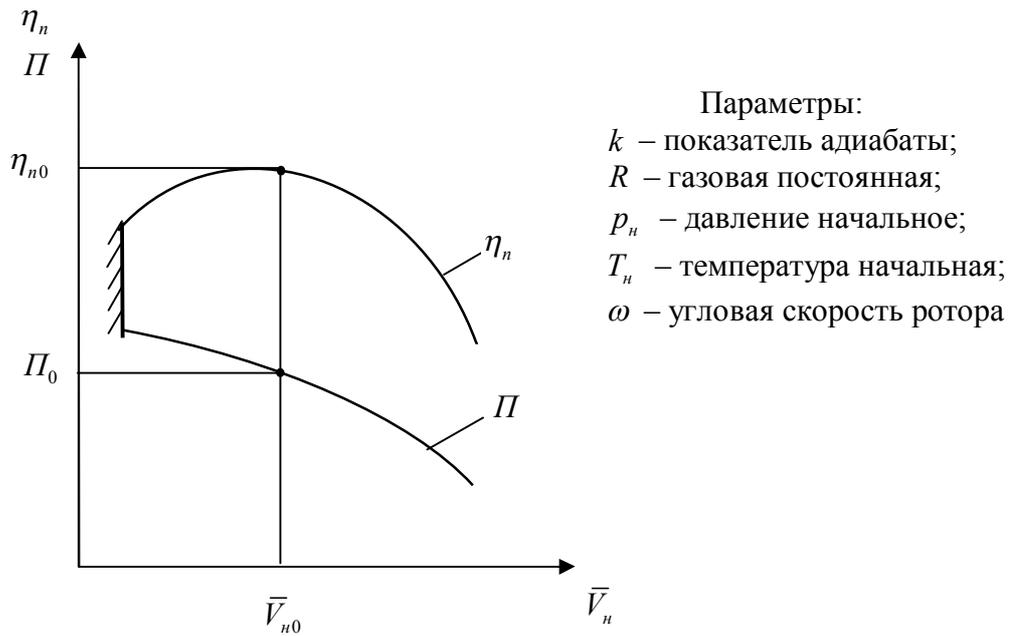


Рисунок 6.2 – Размерные характеристики центробежного компрессора

Иногда используются приведенные параметры.

В меньшей степени зависят от изменения режимных параметров безразмерные характеристики. Безразмерные характеристики показывают взаимозависимость безразмерных параметров компрессора.

На рисунке 6.3 показаны типовые безразмерные характеристики центробежного компрессора.

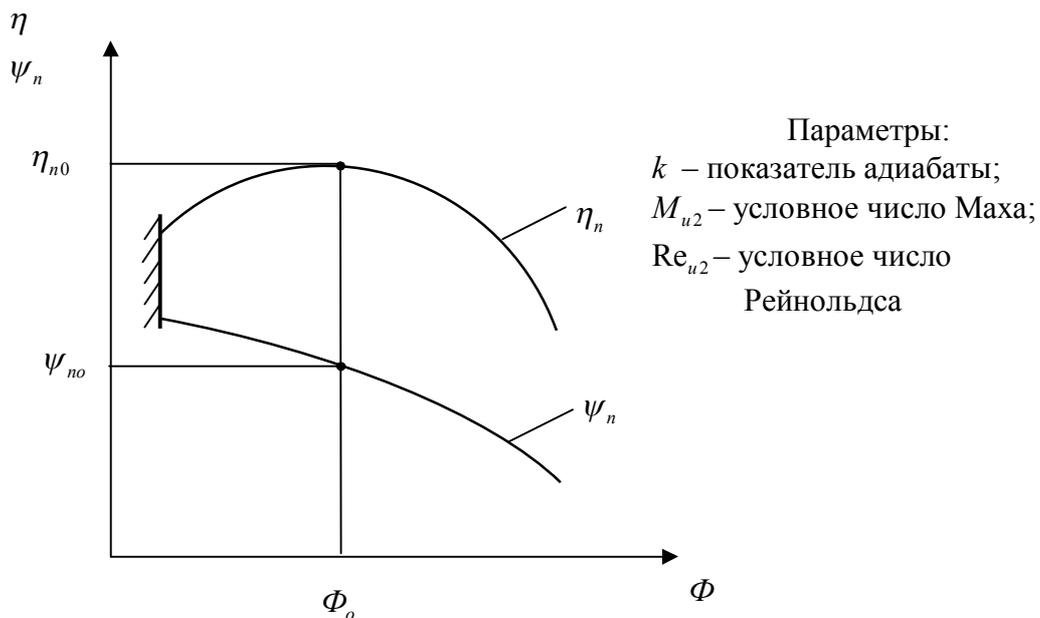


Рисунок 6.3 – Безразмерные характеристики центробежного компрессора

При построении безразмерных характеристик используются безразмерные параметры – коэффициенты расхода и коэффициенты напора.

Пересчет характеристик из размерного в безразмерный вид выполняется на основе теории газодинамического подобия.

На рисунке 6.4 показаны размерные характеристики центробежного компрессора для газоперекачивающего агрегата.

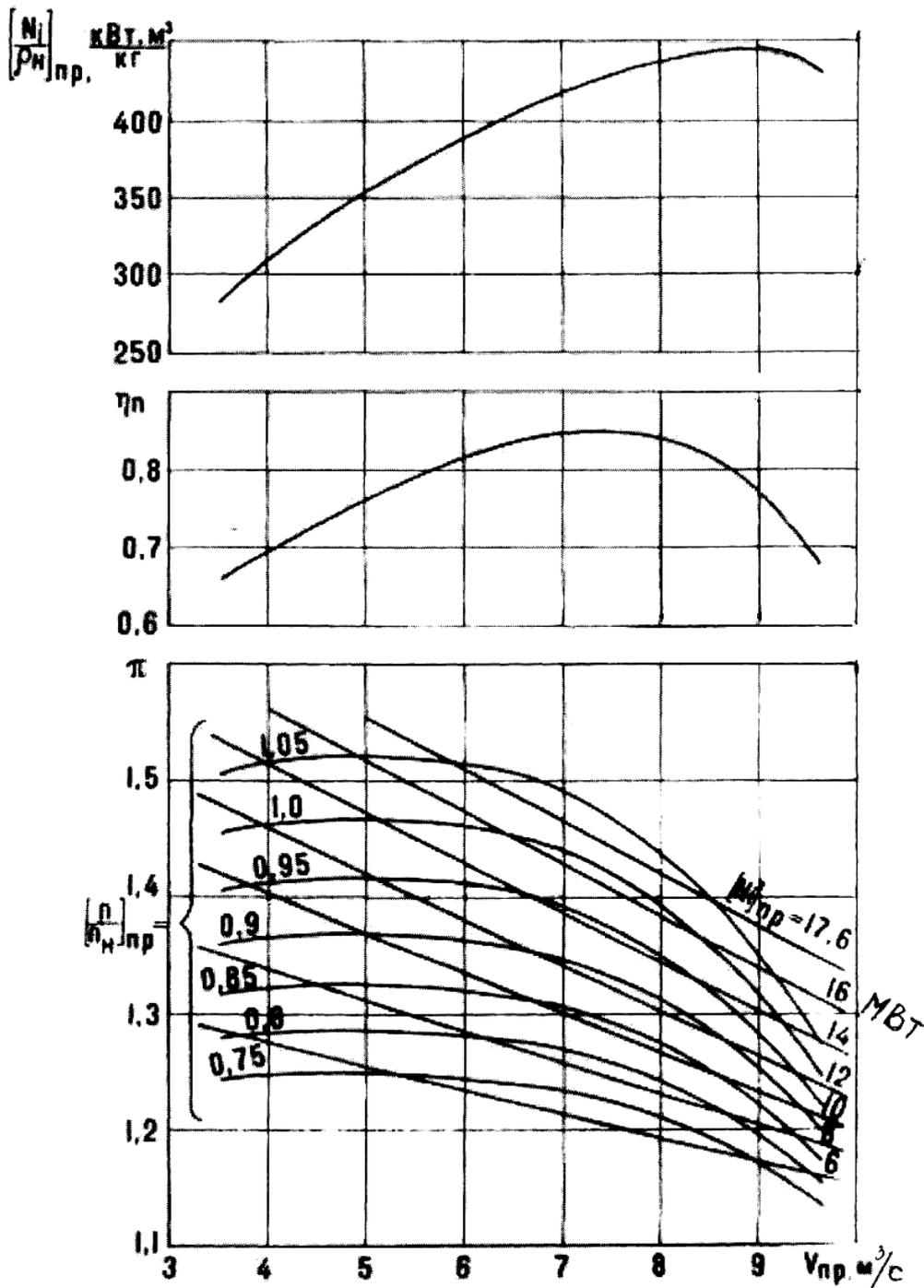


Рисунок 6.4 – Размерные характеристики центробежного компрессора для ГПА

Верхняя кривая – зависимость приведенной мощности от приведенного объемного расхода на входе в компрессор. Средняя кривая – зависимость КПД от приведенного объемного расхода на входе в компрессор. В нижней части рисунка показаны напорные характеристики для различных значений частот вращения, которые указаны в безразмерном виде: $n/n_{ном}$. При увеличении частоты вращения ротора увеличивается отношение давлений компрессора Π . Здесь же показаны линии равных мощностей.

На рисунке 6.5 показаны напорные характеристики осевого компрессора для различных значений частот вращения $n/n_{ном}$ в диапазоне 0,5–1,0. На рисунке массовая производительность компрессора задана в безразмерном виде $G/G_{расч}$. Как видно из рисунка, увеличение частоты вращения позволяет существенно увеличить степень повышения давления и производительность.

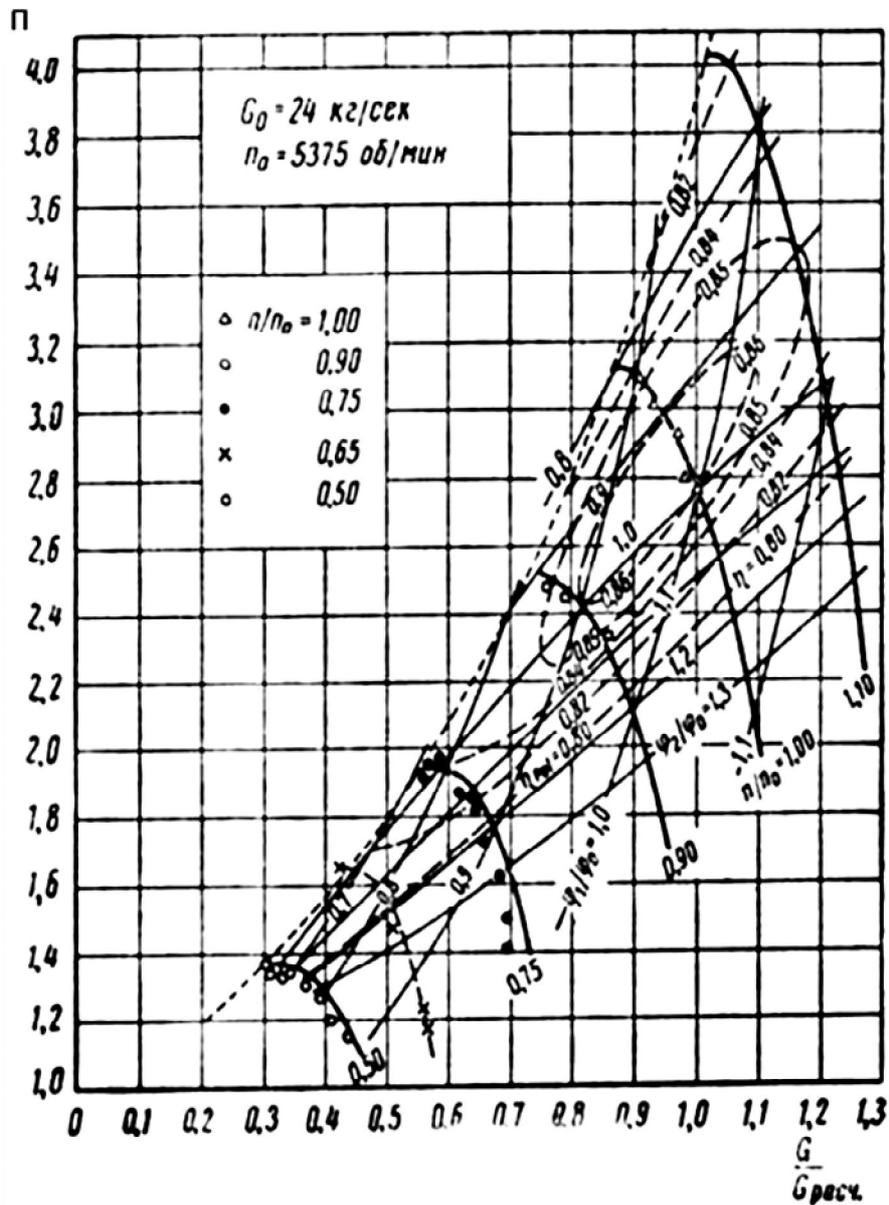


Рисунок 6.5 – Размерные характеристики осевого компрессора

Вопросы, связанные с влиянием геометрических параметров компрессоров на его характеристики, связанные с пересчетом характеристик из размерного в безразмерный, рассматриваются при изучении дисциплин «Турбокомпрессоры», «Проектирование турбокомпрессоров», «Испытания турбокомпрессоров».

6.6.1 Связь расходов, напоров и мощностей подобных турбокомпрессоров

Теория подобия позволяет получить формулы для пересчета расходов, напоров и мощностей турбокомпрессоров для подобных режимов работы. Эти зависимости могут применяться для расчета параметров геометрически подобных машин, а также для одного и того же компрессора, работающего на различных (но подобных) режимах.

Введем следующие обозначения для параметров:

- параметры с индексом «*мод*» относятся к модели;
- параметры с индексом «*нат*» относятся к натуре.

При расчете параметров одного и того же компрессора индекс «*мод*» относится к одному режиму работы, индекс «*нат*» – к другому.

Установим взаимозависимость расходов природы и модели. Объемный расход газа в турбокомпрессоре определяется по формуле $\bar{V} = c \cdot F$, где F – площадь в каком-либо сечении проточной части компрессора; c – расходная составляющая скорости в этом сечении, например, на входе в компрессор. Тогда отношение объемных расходов природы и модели будет равно

$$\frac{\bar{V}_{нат}}{\bar{V}_{мод}} = \frac{c_{нат} \cdot F_{нат}}{c_{мод} \cdot F_{мод}} . \quad (6.37)$$

Так как для подобных процессов отношение каких-либо сходственных параметров модели и природы равно отношению любых других сходственных параметров, поэтому отношение скоростей $c_{нат}/c_{мод}$ можно заменить на отношение скоростей $u_{нат}/u_{мод}$. Здесь $u = \omega \cdot r$ – окружная скорость на диаметре $d = 2 \cdot r$, ω – угловая скорость.

Отношение сходственных геометрических размеров модели и природы (коэффициент моделирования) обозначим $i = d_{нат}/d_{мод}$. Тогда $\frac{u_{нат}}{u_{мод}} = \frac{\omega_{нат}}{\omega_{мод}} \cdot i$.

Так как $\frac{F_{нат}}{F_{мод}} = i^2$, получаем

$$\frac{\bar{V}_{нат}}{\bar{V}_{мод}} = \frac{\omega_{нат}}{\omega_{мод}} \cdot i^3 . \quad (6.38)$$

Теперь получим зависимость, связывающую напоры природы и модели.

Теоретический напор турбокомпрессора определяется по формуле

$$h_T = c_{u2} \cdot u_2 - c_{u1} \cdot u_1$$

или

$$h_T = c_{u2} \cdot u_2 \left(1 - \frac{c_{u1}}{c_{u2}} \cdot \frac{u_1}{u_2} \right). \quad (6.39)$$

Отношение скоростей c_{u1}/c_{u2} заменяем на отношение скоростей u_1/u_2 .

Тогда можно записать, что отношение напоров натуры и модели будет

$$\frac{h_{T_{нат}}}{h_{T_{мод}}} = \frac{c_{u2н} \cdot u_{2н}}{c_{u2м} \cdot u_{2м}} \cdot \frac{\left[1 - \left(\frac{u_1}{u_2} \right)^2 \right]_н}{\left[1 - \left(\frac{u_1}{u_2} \right)^2 \right]_м}. \quad (6.40)$$

Для подобных процессов выражения в скобках в формуле (6.40) для натуры и модели равны, т. е их можно сократить. Отношение скоростей $c_{u2н}/c_{u2м}$ можно заменить на отношение скоростей $u_{2н}/u_{2м}$. Так как $u_{2н}/u_{2м} = (\omega_n/\omega_m) \cdot i$, получаем

$$\frac{h_{T_{нат}}}{h_{T_{мод}}} = \left(\frac{\omega_{нат}}{\omega_{мод}} \right)^2 \cdot i^2. \quad (6.41)$$

Теоретическая мощность турбокомпрессора определяется по формуле

$$N_T = \bar{m} \cdot h_T = \bar{V} \cdot \rho \cdot h_T \quad (6.42)$$

Отношение мощностей натуры и модели

$$\frac{N_{нат}}{N_{мод}} = \frac{\bar{m}_{нат} \cdot h_{T_{нат}}}{\bar{m}_{мод} \cdot h_{T_{мод}}} = \frac{\bar{V}_{нат} \cdot \rho_{нат} \cdot h_{T_{нат}}}{\bar{V}_{мод} \cdot \rho_{мод} \cdot h_{T_{мод}}}. \quad (6.43)$$

После подстановки в формулу (6.43) выражений из (6.38) и (6.41) получаем

$$\frac{N_{нат}}{N_{мод}} = \frac{\rho_{нат}}{\rho_{мод}} \left(\frac{\omega_{нат}}{\omega_{мод}} \right)^3 \cdot i^5. \quad (6.44)$$

Формулы (6.38), (6.41) и (6.43) можно использовать для определения расходов, напоров и мощностей подобных турбокомпрессоров, определения частоты вращения подобного

турбокомпрессора, параметров одного и того же компрессора при изменении частоты вращения, а также для определения коэффициента моделирования при проектировании компрессора по известным характеристикам модели.

Например, задан напор $h_{Тнат}$. Тогда

$$\omega_{нат} = \omega_{мод} \cdot \frac{D_{2мод}}{D_{2нат}} \cdot \left(\frac{h_{Тнат}}{h_{Тмод}} \right)^{0,5} . \quad (6.45)$$

Параметры компрессора при изменении частоты вращения определяются по формулам:

$$\bar{V}_{нат} = \bar{V}_{мод} \cdot \frac{\omega_{нат}}{\omega_{мод}} , \quad (6.46)$$

$$h_{Тнат} = h_{Тмод} \cdot \left(\frac{\omega_{нат}}{\omega_{мод}} \right)^2 , \quad (6.47)$$

$$N_{нат} = N_{мод} \frac{\rho_{нат}}{\rho_{мод}} \left(\frac{\omega_{нат}}{\omega_{мод}} \right)^3 . \quad (6.48)$$

С помощью формул (6.46) и (6.47) можно определить частоту вращения ротора компрессора, при которой обеспечивается требуемый расход или напор.

Необходимо помнить, что при изменении частоты вращения изменяется число Рейнольдса. Если работа компрессора происходит не в области автомодельности по числу Рейнольдса, то формулы (6.46), (6.47) и (6.48) дают приближенный результат.

Коэффициент моделирования для обеспечения требуемого расхода при проектировании компрессора для известных параметров модели $\bar{V}_{мод}$ и $\omega_{мод}$ находится по формуле

$$i = \sqrt[3]{\frac{\bar{V}_{нат} \cdot \omega_{мод}}{\bar{V}_{мод} \cdot \omega_{нат}}} . \quad (6.49)$$

Из уравнений (6.46) и (6.47) следует

$$h_{Тнат} = h_{Тмод} \cdot \left(\frac{\bar{V}_{нат}}{\bar{V}_{мод}} \right)^2 . \quad (6.50)$$

Эта зависимость называется параболой подобных режимов. Если напоры и расходы турбокомпрессора с изменением частоты вращения соответствуют зависимости (6.50), то внутренний КПД остается постоянным.

Список литературы к разделу 6

1. Апанасенко А.И. Монтаж, испытания и эксплуатация газоперекачивающих агрегатов в блочно–контейнерном исполнении / А.И. Апанасенко, Н.Г. Крившич, Н.Д. Федоренко. – Л.:Недра,1991. – 361с.
2. Баренбойм А.Б. Малорасходные фреоновые турбокомпрессоры / А.Б. Баренбойм. – М.: Машиностроение, 1974. – 224 с.
3. Галеркин Ю.Б. Методы исследования центробежных компрессорных машин / Ю.Б. Галеркин, Ф.С. Рекстин. – Л.: Машиностроение, 1969. – 304 с.
4. Галеркин Ю.Б. Совершенствование метода универсального моделирования и развитие опыта оптимального газодинамического проектирования промышленных центробежных компрессоров // Компрессорная техника и пневматика. – 2007. – №3. – С. 10–13.
5. Ден Г.Н. Проектирование проточной части центробежных компрессоров / Г.Н. Ден. – Л.: Машиностроение, 1980. – 232 с.
6. Компрессорные машины/ Страхович К.И. и др. – М.: Государственное изд-во торговой литературы, 1961. – 600 с.
7. Лившиц С.П. Аэродинамика центробежных компрессорных машин / С.П. Лившиц. – М., Л.: Машиностроение, 1966. – 340 с.
8. Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Випробування турбокомпресорів» /Укладач М.В. Калінкевич. – Суми: Вид-во СумДУ , 2008. – 44 с.
9. Механика жидкости и газа. Конспект лекций для студентов механических и энергетических специальностей / К.Ф. Иванов, С.В. Сурков. – Одесса: ОГПУ, 1995. – ч.1 – 119 с.
10. Повх И.Л. Техническая гидромеханика / И.Л. Повх. – Л.: Машиностроение, 1976. – 504 с.
11. Рис В.Ф. Центробежные компрессорные машины / В.Ф. Рис. – М.; Л.: Машгиз, 1963. – 335 с.
12. Самойлович Г.С. Газодинамика: учебн. для вузов / Г.С. Самойлович. – 2–е изд, перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1990. – 384 с.
13. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике / Л.И. Седов. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
14. . Селезнев К.П. Центробежные компрессоры / К.П. Селезнев, Ю.Б. Галеркин. – Л.: Машиностроение, 1982. – 271 с.
15. Теория и расчет турбокомпрессоров / К.П. Селезнев, Ю.Б. Галеркин, С.А. Анисимов и др. – Л.: Машиностроение, 1986. – 392 с.
16. Черкасский В.М. Насосы, вентиляторы, компрессоры / В.М. Черкасский. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 416 с.

Вопросы для самопроверки

- 1 Какие явления (процессы) называются подобными?
- 2 Что называют коэффициентом подобия?
- 3 В чем заключается сущность анализа размерностей?
- 4 Какие три независимые основные единицы измерения принимаются для механических явлений?
- 5 Как составляются формулы размерностей?
- 6 Какие различают виды подобия?
- 7 Дайте определения различным видам подобия.
- 8 В чем заключаются условия физического подобия?
- 9 В чем заключаются условия кинематического подобия?
- 10 В чем заключаются условия динамического подобия?
- 11 Дайте формулировку первой, второй и третьей теорем подобия.
- 12 Что такое условие однозначности?
- 13 Дайте формулировку π -теоремы.
- 14 Какие величины называют критериями подобия?
- 15 Что называют инспекционным анализом?
- 16 Составьте критериальное уравнение для дифференциального уравнения неразрывности.
- 17 Напишите формулы для основных критериев подобия газодинамических процессов. Какой физический смысл имеют эти критерии?
- 18 Почему прибегают к приближенному моделированию?
- 19 Какой вид имеют зависимости коэффициентов сопротивления λ для круглой трубы от числа Рейнольдса?
- 20 В чем заключается сущность автомодельности?
- 21 Что называют характеристикой турбокомпрессора?
- 22 Какая характеристика называется напорной?
- 23 Чем отличаются размерные и безразмерные характеристики турбокомпрессора?
- 24 Напишите зависимости расходов, напоров и мощностей подобных турбокомпрессоров.

РАЗДЕЛ 7

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

Определение, механизмы, закономерности. Масштабы турбулентности. Гипотеза Колмогорова. Уравнения переноса. Моделирование турбулентности. Гипотеза Буссинеска. Модель Прандтля. Алгебраические модели турбулентности. Модели турбулентности с одним и с двумя дифференциальными уравнениями. Структура турбулентного пограничного слоя. Моделирование пограничных слоев

Течения жидкостей и газов, наблюдаемые в природных условиях и технических устройствах, делятся на два сильно отличающиеся друг от друга типа: *ламинарные* – спокойные, плавные, регулярные и *турбулентные*, в которых скорость, давление, температура и другие гидродинамические величины изменяются хаотично, неупорядоченно не только во времени, но и в пространстве.

По-видимому, наиболее емкое и содержательное определение турбулентности принадлежит П. Брэдшоу (1971): «турбулентность – это трехмерное нестационарное движение, в котором вследствие растяжения вихрей создается непрерывное распределение пульсаций скорости в интервале длин волн от минимальных, определяемых вязкими силами, до максимальных, определяемых граничными условиями течения. Она является обычным состоянием движущейся жидкости, за исключением течений при малых числах Рейнольдса».

Проблема турбулентности до сих пор остается открытой проблемой гидромеханики, несмотря на то что в течение целого века привлекала внимание многих выдающихся исследователей. Столь большой срок от первых наблюдений этого явления до его теоретического осмысления связан со сложностью рассматриваемой проблемы. До сих пор не существует общего подхода к описанию турбулентного движения жидкости. За более чем 100-летнюю историю были развиты различные подходы - статистический, структурный и динамический – для описания феномена турбулентности. Результаты, полученные в каждом из них, зачастую относились к разным задачам и отвечали на вопросы, возникающие в качественно различных экспериментальных ситуациях. В периоды своего возникновения и развития эти подходы представлялись их сторонниками единственно приемлемыми, и поэтому они развивались параллельно и практически независимо. Лишь в последние 20 лет наметилась тенденция к их объединению в единую теорию турбулентности.

Численные методы решения задач газовой динамики активно развиваются. В вычислительной газодинамике существует проблема моделирования турбулентных течений. В настоящее время находят применение четыре основных направления решения этой проблемы:

– осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса (RANS – Reynolds Averaged Navier-Stokes equations), замкнутые с помощью алгебраических или дифференциальных моделей турбулентности;

– метод LES (Large Eddy Simulation), который основан на решении нестационарных уравнений Навье–Стокса с моделированием влияния вихрей подсеточного масштаба;

– метод DES (Detached Eddy Simulation), который является комбинацией двух предыдущих подходов. В зоне внешнего «гладкого» течения используется RANS, а в зоне отрыва потока с крупными вихрями – LES;

– прямое численное моделирование (DNS – Direct Numerical Simulation) – решение нестационарных уравнений Навье–Стокса без каких-либо замыкающих соотношений.

Наиболее точные результаты можно получить при минимальных допущениях в математической модели. Этому в большей мере отвечает DNS. Однако компьютерная техника еще не скоро обеспечит возможность разрешения на сетках всех вихрей до Колмогоровского масштаба включительно.

Методы LES и особенно DES могут быть реализованы на современных суперкомпьютерах, но такая техника не доступна для многих специалистов.

Поэтому наиболее широко применяются осредненные уравнения Навье–Стокса, замкнутые с помощью той или иной модели турбулентности. При этом выбор модели турбулентности может существенно повлиять на успешность численного исследования.

В данном пособии не рассматриваются вопросы, связанные с возникновением турбулентности, а также вопросы устойчивости.

7.1 Механизмы турбулентности

Существование резко различающихся ламинарных и турбулентных режимов течения было замечено еще в первой половине XIX в., но начало теории турбулентности было положено лишь в конце того же столетия в работах Осборна Рейнольдса (1883). Изучая условия перехода ламинарного течения жидкости в трубах в турбулентное, Рейнольдс установил существование общего критерия динамического подобия течений вязкой несжимаемой жидкости, названного впоследствии его именем: $Re = c \cdot L / \nu$ – число Рейнольдса, где c и L – характерные масштабы скорости и длины в рассматриваемом течении, а ν – кинематический коэффициент вязкости.

Наиболее распространенной является интерпретация числа Рейнольдса как меры относительной значимости сил инерции и сил вязкости, действующих внутри жидкости. Силы инерции, если они существенно превосходят силы вязкости, что соответствует большим числам Re , вызывают перемешивание конечных объемов жидкости, движущихся с разными скоростями. В результате осуществляется передача энергии от крупномасштабных структур (вихрей) к менее крупным, образующимся за счет потери устойчивости более крупных вихрей. Иными словами, крупномасштабные структуры играют роль аккумуляторов энергии из основного потока. Поглощая энергию основного потока, эти структуры оказываются сильно анизотропными, завихренными и существенно отличаются от течения к течению.

Основным механизмом генерации энергии турбулентности является деформация структур, представляющая собой трехмерный процесс, поэтому все развитые турбулентные течения являются трехмерными. Посредством нелинейных взаимодействий крупномасштабные структуры передают часть своей энергии менее крупным структурам и т.д., в результате реализуется так называемый каскадный механизм передачи энергии.

Впервые описание этого процесса было дано Льюисом Ричардсоном (1922). Согласно Ричардсону каскадный процесс передачи энергии в турбулентном потоке, базирующийся на представлении о существовании иерархии вихрей, завершается на самых мелкомасштабных структурах вязкой диссипацией кинетической энергии в тепло.

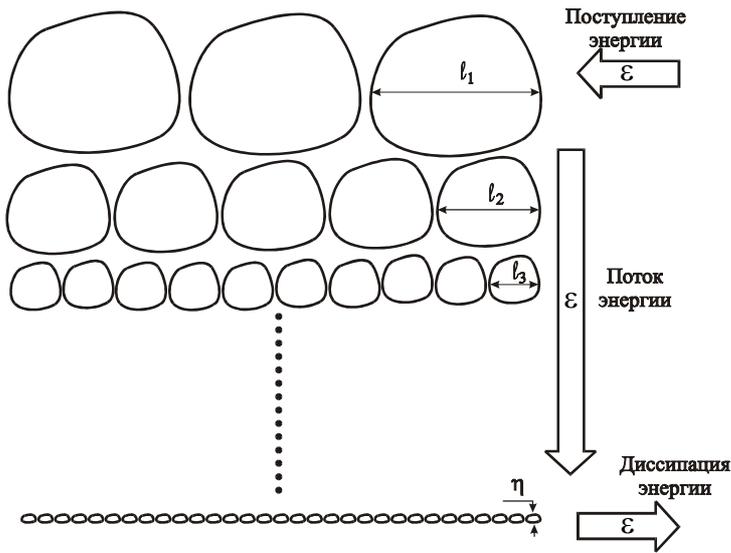


Рисунок 7.1 – Схема каскада турбулентных вихрей

Феноменологическую картину такого течения (каскад Ричардсона) удобно представить в виде, показанном на рисунке 7.1. Вихри разных масштабов изображены овалами, разнесенными на разные строки согласно своим размерам. Энергия в изображенный каскад масштабов поступает на самом крупном масштабе, спускается по каскаду вниз, до вихрей размера порядка η и рассеивается под воздействием вязкости. В рамках этого представления скорость

поступления энергии в каскад, скорость переноса энергии вниз по каскаду и скорость ее рассеивания на диссипативных масштабах одинакова (обозначим ее ε). Кроме того, такая картина течения предполагает локальность взаимодействия между вихрями: вихри масштаба l_n могут взаимодействовать только с вихрями размера l_{n+1} и l_{n-1} , т.е. предполагается, что взаимодействие вихрей, масштабы которых сильно отличаются, можно рассматривать как перенос мелких вихрей под воздействием поля скорости крупных вихрей без обмена энергией между ними.

Вследствие хаотичности процесса передачи энергии от движений данного масштаба к движению меньших масштабов анизотропность, неоднородность и нестационарность осредненного движения должны все меньше и меньше сказываться на статистическом режиме пульсаций все меньших и меньших масштабов. Поэтому можно утверждать, что влияние среднего течения практически перестает сказываться на структуре пульсаций (за исключением лишь наиболее крупномасштабных).

Однако понимание роли мелкомасштабной турбулентности в процессах турбулентного переноса пришло лишь после опубликования работы Джеффри Тэйлора (1935), в которой впервые было введено понятие об однородной и изотропной турбулентности. Основным свойством такой турбулентности является ее слабая зависимость от индивидуальных

особенностей течения (локальная изотропия). В предельном случае можно говорить об инвариантности свойств изотропной турбулентности относительно любых ортогональных преобразований (параллельных переносов, вращений и т. д.).

Наиболее важные и принципиальные результаты в изучении мелкомасштабной турбулентности были получены Андреем Николаевичем Колмогоровым (1941) – создателем целостной теории локально–изотропной турбулентности. Прежде всего, Колмогоров существенно дополнил представление о каскадном процессе передачи энергии, отметив ослабление ориентирующего влияния среднего течения при каждом переходе к более мелким структурам и, исходя из этого, сформулировал гипотезу о том, что статистический режим достаточно мелкомасштабной турбулентности, т. е. турбулентности при больших числах Рейнольдса, является универсальным и определяется лишь двумя размерными параметрами – средней скоростью диссипации энергии ε и коэффициентом вязкости ν . Из сказанного не следует, что статистический режим мелкомасштабной турбулентности совсем не зависит от осредненного течения. Последнее влияет на этот режим через величину потока энергии, передающегося от самых крупных структур через всю их иерархию, вплоть до самых малых, на которых механическая энергия превращается в тепло. Средняя скорость диссипации ε , характеризующая среднее количество энергии, переходящей в тепло в единице массы жидкости за единицу времени, определяется соотношением

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \nu \cdot \sum_{i,j} \overline{\left(\frac{\partial c'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial c'_j}{\partial x_i} \right)^2}, \quad (7.1)$$

где $c'_i = c_i - \bar{c}_i$.

Здесь c_i – мгновенное значение скорости; чертой сверху обозначено осредненное ее значение; штрихом - пульсационная скорость. Диссипацией энергии осредненного течения под влиянием молекулярной вязкости при больших числах Рейнольдса обычно пренебрегают.

7.1.1 Масштабы турбулентности

Гипотеза Колмогорова об универсальности статистического режима мелкомасштабной турбулентности и его зависимости только от диссипации ε и коэффициента вязкости ν , а также соображения размерности позволяют оценить нижнюю границу линейных, скоростных и временных масштабов структур (вихрей), участвующих в процессе диссипации энергии:

$$\eta_\kappa = \nu^3 / \varepsilon, \quad V_{\eta_\kappa} = (\nu \varepsilon)^{1/4}, \quad t_{\eta_\kappa} = (\nu / \varepsilon)^{1/2}. \quad (7.2)$$

Названный колмогоровским масштаб η_κ характеризует линейные размеры структур, на которые вязкость еще оказывает существенное влияние.

Степень многомасштабности процессов турбулентного переноса можно оценить, соотнося наибольший характерный размер течения L с колмогоровским масштабом η_k . Из соображений размерности ясно, что отношение L/η_k пропорционально числу Рейнольдса в степени $3/4$, т.е.

$$\frac{L}{\eta_k} \sim Re_L^{3/4}. \quad (7.3)$$

Для пограничного слоя наименьшим масштабом является вязкостный масштаб $l_v = \nu/w_*$, где $w_* = \left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)^{1/2}$ – динамическая скорость; τ_w – напряжение трения на стенке.

Составляя отношение толщины слоя δ к l_v и используя для оценок известные степенные зависимости толщины слоя и коэффициента трения на пластине от числа Рейнольдса $Re_x = c \cdot x/\nu$, можно показать, что

$$Re_\delta = \frac{\delta}{\nu/w_*} \sim Re_x^{0,8}. \quad (7.4)$$

Справедливость колмогоровской теории локально–изотропной турбулентности была подтверждена результатами многочисленных экспериментов.

7.1.2 Уравнения для характеристик турбулентности

Замыкание системы уравнений движения Навье–Стокса, осредненных по Рейнольдсу (3.12), выполняется путем установки связей между рейнольдсовыми напряжениями τ_{ij} и скоростями деформаций.

Уравнения переноса, используемые в моделях с одним или двумя дифференциальными уравнениями, в общем виде можно записать таким образом:

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho \cdot c_j \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = P - D + \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \left[(\mu + \Gamma_\phi) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right] + A. \quad (7.5)$$

Параметры $\Phi, P, D, \Gamma_\phi, A$ в уравнении (7.5) имеют разную форму для разных уравнений переноса – **кинетической энергии турбулентных пульсаций, скорости диссипации кинетической энергии и удельной скорости диссипации.**

Формулы для этих параметров для каждого вида уравнений приведены в таблице 7.1.

Параметр $A = 0$ для всех моделей, кроме модели Ментора SST, для которой

$$A = 2(1 - F_1) \rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}. \quad (7.6)$$

Таблица 7.1 – Параметры уравнения (7.5)

Уравнение	Φ	P	D	Γ_Φ
Кинетическая энергия	k	$\tau_{ij} \cdot \frac{\partial \bar{c}_i}{\partial x_j}$	$\rho\varepsilon$ или $\beta^* \rho k \omega$	$\frac{\mu}{\sigma_k}$
Скорость диссипации кинетической энергии	ε	$c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \tau_{ij} \frac{\partial \bar{c}_i}{\partial x_j}$	$c_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}$	$\frac{\mu}{\sigma_\varepsilon}$
Удельная скорость диссипации	ω	$\alpha \frac{\omega}{k} \tau_{ij} \frac{\partial \bar{c}_i}{\partial x_j}$	$\beta \rho \omega^2$	$\sigma_\omega \mu_t$

Значения констант, которые входят в уравнения таблицы 7.1, приведены в таблице 7.2.

7.2 Моделирование турбулентности

Модели турбулентности, используемые в инженерных приложениях, основаны на концепции вязкости и турбулентной диффузии.

Наиболее простыми моделями, определяющими турбулентную вязкость ν_t , являются алгебраические модели, в которых связь между турбулентной вязкостью и параметрами осредненного потока задается алгебраическими соотношениями.

Более сложными являются модели с одним или двумя дифференциальными уравнениями.

7.2.1 Гипотеза Буссинеска

Согласно этой гипотезе турбулентные напряжения могут быть выражены формулами того же вида, что и вязкостные напряжения. Для тензора рейнولدсовых напряжений это дает

$$-\overline{c'_i c'_j} = \nu_t \cdot \left(\frac{\partial \bar{c}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{c}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \cdot \delta_{ij}, \quad (7.7)$$

где δ_{ij} – коэффициент Кронекера.

Данное уравнение не вводит модели турбулентности, а только характеризует структуру такой модели. При этом основной задачей является задание функции турбулентной вязкости ν_t . В отличие от коэффициента молекулярной вязкости ν коэффициент ν_t определяется состоянием турбулентного течения и не связан со свойствами жидкости. Значение ν_t может значительно изменяться от точки к точке в пространстве в зависимости от характера течения.

Понятие турбулентной вязкости имеет ряд недостатков. Предположение об изотропности турбулентной вязкости неверно во многих сложных течениях, таких, как закрученные потоки, вторичные течения в квадратном канале и т.д. Иногда наряду с тензором рейнولدсовых напряжений используется тензор анизотропии:

$$a_{ij} = \frac{\overline{c'_i c'_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij}. \quad (7.8)$$

7.2.2 Алгебраические модели турбулентности

Алгебраическая модель для описания распределения v_t впервые была предложена Прандтлем в 1925 г. и известна как модель смешения. Работа Прандтля, по существу, положила начало всей современной полуэмпирической теории турбулентности, что и предопределило ее феноменальный успех в последующие годы. Одним из важнейших результатов теории Прандтля явилось установление универсального логарифмического закона для профиля скоростей в пристеночных областях течений в трубах, каналах, пограничных слоях.

Модель Прандтля записывается в виде

$$v_t = l_m^2 \cdot \left| \frac{\partial c_x}{\partial x} \right|, \quad (7.9)$$

где l_m – длина пути смешения, определяемая эмпирически.

В пограничном слое полагают, что $l_m = \kappa \cdot y$, где $\kappa \approx 0,4$ – число Кармана; y – расстояние от стенки.

Модель Кармана. Некоторую конкуренцию теории Прандтля составила теория Т. Кармана, в рамках которой локальные свойства потока определялись первой и второй производными от осредненной скорости по поперечной координате. В этом случае из соображений размерности следует формула

$$\tau_t = \rho \cdot \kappa^2 \cdot \left(\frac{d\bar{c}}{dy} \right)^4 \left/ \left(\frac{d^2\bar{c}}{dy^2} \right)^2 \right. . \quad (7.10)$$

Отсутствие в формуле Кармана (7.10) пути перемешивания делает ее в некоторых случаях предпочтительной по сравнению с формулой Прандтля (7.9).

Существенным недостатком формулы (7.10) является невозможность ее применения к расчету течений, в которых профили скоростей имеют точку перегиба ($d^2\bar{c}/dy^2 = 0$), в частности, струйных течений.

Популярными алгебраическими моделями являются: двухслойные модели Себеси – Смита, Болдуина – Ломакса, модель с половинным уравнением Джонсона – Кинга и т.д. Оценка применимости алгебраических моделей турбулентности детально обсуждена в работе Уилкокса [19].

К достоинствам алгебраических моделей можно отнести: скорость вычислений, простоту калибровки и модификаций с учетом специфики рассматриваемых течений.

Однако очевидна и узкая специализация этих моделей, поскольку они опираются на эмпирическую информацию о структуре исследуемых течений; кроме этого, алгебраические модели предполагают локальное равновесие моделируемой турбулентности. Это означает, что в каждой точке пространства наблюдается баланс генерации и диссипации турбулентной энергии, на который не влияют ни перенос из соседних точек, ни предыдущее развитие процесса.

Таким образом, алгебраические модели неприменимы в случаях с доминирующим влиянием конвективного и диффузионного переноса турбулентности или когда доминирующую роль играет предыстория процесса. Кроме того, большие трудности для сложных типов течений представляет задание распределений длины смешения.

7.2.3 Модели турбулентности с одним дифференциальным уравнением

По аналогии с кинетической теорией газов можно ожидать, что турбулентная вязкость с достаточной точностью представляется в виде

$$v_t = c'_t \cdot l, \quad (7.11)$$

где c'_t – характерная пульсационная составляющая скорости; l – характерный линейный масштаб турбулентности. Проблема состоит в оценке и определении c'_t и l .

Чтобы преодолеть ограниченность гипотезы пути смешения и алгебраических моделей вообще, были разработаны модели турбулентности, позволяющие учитывать влияние нелокальных эффектов (эффектов переноса) путем решения дифференциального уравнения для c'_t или l .

С физической точки зрения для величины c'_t наиболее подходящим оказывается масштаб \sqrt{k} , где k – кинетическая энергия турбулентных пульсаций. Если такой масштаб использовать для определения турбулентной вязкости в уравнении (7.8), то получается выражение Колмогорова – Прандтля:

$$v_t = C_\mu^* \cdot \sqrt{k} \cdot L, \quad (7.12)$$

где C_μ^* – эмпирическая функция местного турбулентного числа Рейнольдса.

Модели с одним дифференциальным уравнением обладают большей универсальностью к описанию турбулентных течений с учетом сжимаемости, переходных явлений, кривизны и отрыва потока, однако объектами их применения, как правило, являются простые конфигурации потоков. Как и в случае алгебраических моделей, в моделях с одним дифференциальным уравнением сильна привязка к калибровочным типам течений. Снять указанные ограничения можно, например, при определении масштаба турбулентности введением независимой переменной, т.е. решением дополнительного уравнения переноса.

7.2.4 Модели турбулентности с двумя дифференциальными уравнениями

Более универсальными моделями в инженерных расчетах турбулентных потоков являются модели с двумя дифференциальными уравнениями.

Большое распространение получили двухпараметрические модели, в которых вместо уравнения для масштаба турбулентности используется уравнение для скорости диссипации энергии турбулентности ε . Семейство этих моделей получило наименование $k-\varepsilon$ моделей турбулентности. Базисную роль для многочисленного семейства $k-\varepsilon$ моделей имеет следующее уравнение:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + c_j \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \nu_t \left(\frac{\partial c_k}{\partial x_j} + \frac{\partial c_j}{\partial x_k} \right) - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}. \quad (7.13)$$

Уравнение (7.13) может быть использовано для описания развитых турбулентных течений, т.е. течений, на которых не сказываются вязкостные, пристеночные эффекты. Неудовлетворительная эффективность $k-\varepsilon$ моделей при расчете пристенных течений привела к использованию так называемых пристеночных функций, которые позволяют снести граничные условия с поверхности в точки, расположенные вне области влияния вязкости (как правило, в область логарифмического профиля скоростей).

Сущность введения пристеночных функций применительно к $k-\varepsilon$ модели сводится к заданию скорости, кинетической энергии турбулентности и скорости диссипации в некоторой точке a , расположенной в области логарифмического профиля скоростей:

$$\frac{c_a}{w_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(E \frac{y_a w_*}{\nu} \right); \quad k_a = C_\mu^{0.5} \cdot w_*^2; \quad \varepsilon_a = k_a^{1.5} \left(C_\mu^{0.25} \cdot \kappa \cdot y_a \right). \quad (7.14)$$

Здесь $C_\mu = 0,09$; $\kappa = 0,4$; $E = 7,7$; y_a – расстояние от поверхности до точки a ;
 $w_* = \sqrt{\tau_w / \rho}$.

Средством, позволившим существенно улучшить описание пристенных течений в рамках рассматриваемого класса моделей турбулентности, явилось использование вместо уравнения для скорости диссипации ε уравнения для параметра $\omega = \varepsilon / C_\mu \cdot k$. Этот параметр, иногда называемый «псевдозавихренностью», имеет размерность частоты (1/с) и характеризует величину скорости диссипации, приходящуюся на единицу кинетической энергии турбулентности.

Первая такая модель была предложена Колмогоровым (1942). Эта модель содержит уравнение переноса кинетической энергии турбулентности k и удельной скорости диссипации энергии ω . Разработка $k-\omega$ модели Уилкокса стала крупным успехом в моделировании пристенных течений при больших продольных перепадах давления.

Одной из наиболее представительных современных дифференциальных моделей, упоминавшихся выше, является так называемая двухзональная $k-\omega$ модель Ментера. Высокая эффективность этой, по существу, гибридной модели связана с использованием во внутренней (пристеночной) области $k-\omega$ модели, изначально ориентированной на разрешение мелкомасштабной турбулентности, а во внешней – $k-\varepsilon$ модели, предназначенной для описания крупномасштабных когерентных структур.

В таблице 2 приведены значения констант, которые входят в уравнения таблицы 1, для моделей турбулентности с двумя дифференциальными уравнениями: $k-\varepsilon$, $k-\omega$, $k-\omega(SST)$. (SST - shear stress transport).

Таблица 7.2 – Значения констант моделей с двумя дифференциальными уравнениями

Модель $k-\varepsilon$	$c_{\varepsilon 1}$	$c_{\varepsilon 2}$	σ_k	σ_ε	c_μ
	1,44	1,92	1	1,3	0,09
Модель $k-\omega$	β^*	β	α	σ_k	σ_ω
	0,09	0,075	5/9	0,5	0,5
Модель $k-\omega(SST)$	β_1^*	β_1	α_1	σ_{k1}	$\sigma_{\omega 1}$
	0,09	0,075	$\beta_1/\beta_1^* - \sigma_{\omega 1} k^2 / \sqrt{\beta_1^*}$	0,85	0,5
	β_2^*	β_2	α_2	σ_{k2}	$\sigma_{\omega 2}$
	0,09	0,0828	$\beta_2/\beta_2^* - \sigma_{\omega 2} k^2 / \sqrt{\beta_2^*}$	1	0,856

Так как модели с двумя дифференциальными уравнениями базируются на предположении Буссинеска, им присущи такие же недостатки.

Одним из способов преодолеть эти недостатки является введение нелинейных членов в уравнение Буссинеска. Обычно в нелинейных моделях используют тензор анизотропии рейнольдсовых напряжений вместо обычного тензора рейнольдсовых напряжений. Кроме этого, в нелинейных моделях используются тензор деформации скоростей

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \bar{c}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{c}_j}{\partial x_i} \right) \text{ и тензор завихренности } \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \bar{c}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{c}_j}{\partial x_i} \right).$$

Нелинейные модели, хотя и позволяют устранить ряд недостатков, присущих предположению Буссинеска, обладают сами таким существенным недостатком, как большое количество модельных констант.

Избежать привязки к константам можно путем использования алгебраических моделей рейнольдсовых напряжений.

7.3 Структура турбулентного пограничного слоя

Современные представления о структуре турбулентного пограничного слоя (ТПС) основываются на анализе опытных данных. В ТПС выделяется по меньшей мере пять подобластей: вязкий подслой, переходная или буферная область, область логарифмического профиля скорости, область закона следа и область перемежаемости. Первые три принято объединять в одну внутреннюю область или область закона стенки. Внутренняя область пограничного слоя на плоской пластине занимает примерно 15-20% от толщины всего слоя. Согласно измерениям в ней генерируется до 80% энергии турбулентности, причем первые 5% толщины дают более половины вклада в полное производство турбулентной энергии. Область закона следа и область перемежаемости обычно объединяют во внешнюю область ТПС, которая занимает порядка 80% от толщины всего слоя.

Внешняя область ТПС с характерной для нее крупномасштабной турбулентностью обладает «долгой памятью» по Клаузеру. Полное затухание возмущений в этой области происходит на расстоянии, во много раз превышающем линейный масштаб турбулентности. Следовательно, свойства течения во внешней области могут зависеть в большей степени от предыстории потока.

Различные области ТПС отличаются друг от друга разномасштабностью вихревых (когерентных) структур.

Цепочка вращающихся в противоположных направлениях продольных вихрей плотно покрывает гладкую стенку. Эти вихри подвержены колебаниям вблизи стенки и, в свою очередь, порождают низкоскоростные поперечные к потоку жгуты. В эволюции жгутов можно выделить следующие фазы: формирования, подъема, колебания и разрушения. Последовательность последних трех фаз принято называть всплеском. Выше низкоскоростных продольных вихрей, но все еще достаточно близко к стенке находится слой, постоянно разрушаемый всплесками. По некоторым данным, всплески дают порядка 70% рейнольдсовых напряжений. Характерным элементом внутренней области являются также мелкомасштабные поперечные вихри большой энергии. Эти вихри частично заполняют буферную область и полностью участок логарифмического профиля скорости. Основными элементами внешней области ТПС являются крупномасштабные поперечные вихревые структуры с характерными размерами порядка толщины слоя и «типичные» вихри с большой энергией в области перемежаемости. Очевидно, что даже схематизированное представление о структуре ТПС является достаточно сложной и не до конца изученной картиной взаимодействия структурных элементов.

На рисунке 7.2 показан профиль скорости в ТПС для течения вдоль плоской пластины без градиента давления. На рисунке использованы координаты закона стенки $\varphi = c/w_*$ и

$\eta = y \cdot w_* / \nu$. Величина η выражает безразмерное расстояние от стенки.

Профили скоростей во внутренней области пограничного слоя, построенные в переменных φ , η (так называемый «закон стенки»), оказываются универсальными, то есть не чувствительными к изменению внешних условий, например, к изменению продольного перепада давления, степени турбулентности внешнего потока, числа Рейнольдса и др.

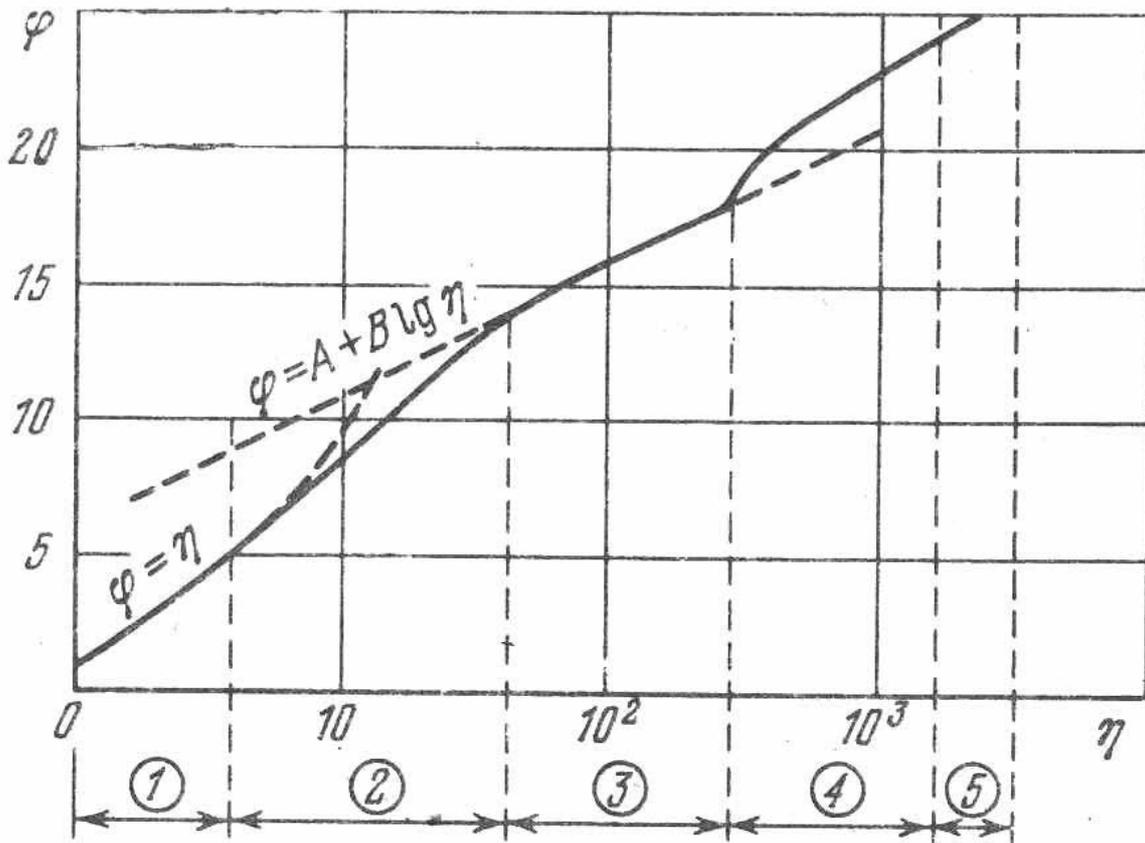


Рисунок 7.2 - Структура турбулентного пограничного слоя [20]

Иными словами, масштабы w_* и ν/w_* являются универсальными масштабами внутренней области. Что касается протяженности области действия закона стенки, то она существенно зависит от всех перечисленных выше факторов.

7.3.1 Моделирование пограничных слоев

В данном подразделе кратко рассматриваются некоторые модели, успешно применяемые для расчета турбулентных пограничных слоев. В подразделе 7.2 было указано, что высокую эффективность при расчете пристенных течений имеет двухзональная $k-\omega$ модель Ментера. В то же время успешно применяются при расчете турбулентных пограничных слоев алгебраические двухслойные модели Себеси-Смита, Болдуина–Ломакса.

Формулы Буссинеска и Прандтля, дополненные так называемым демпфирующим множителем D_{VD} , предложенным Ван Дристом:

$$D_{VD} = (1 - \exp(-\eta/A))^2, \quad A = 26, \quad (7.15)$$

составляют содержание одной из наиболее популярных до настоящего времени алгебраических моделей турбулентности для внутренней области пограничного слоя (демпфирующий множитель D_{VD} учитывает влияния твердой стенки на процессы турбулентного переноса в ее непосредственной окрестности). В рамках этой модели полное касательное напряжение τ связано с осредненным полем скорости соотношением

$$\tau = \tau_l + \tau_t = \rho \cdot (v + v_t) \cdot \frac{\partial c}{\partial y} = \rho \cdot \left(v + (ky)^2 \cdot D_{VD} \cdot \frac{\partial c}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial c}{\partial y}, \quad (7.16)$$

где $v + v_t = v_{эф}$ – эффективная вязкость.

Для определения турбулентной вязкости во внешней области с характерной для нее крупномасштабной турбулентностью **Клаузером** была предложена формула

$$v_t = k \cdot C \cdot \delta^*, \quad (7.17)$$

где $\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{c}{C} \right) dy$ – толщина вытеснения пограничного слоя, которая характеризует степень оттеснения линий тока во внешнем потоке вследствие торможения среды в окрестности стенки. Для эмпирической постоянной k на основе опытов было найдено значение $k = 0.018$.

Модель Себеси – Смита – двухслойная модель с v_t , заданными различными выражениями на каждом слое. Вихревая вязкость определяется как

$$v_t = \begin{cases} v_{ti}, & y \leq y_m, \\ v_{t0}, & y > y_m, \end{cases} \quad (7.18)$$

где y_m – наименьшая величина y , для которой $v_{ti} = v_{t0}$.

Модернизированная модель Себеси – Смита получена путем введения в формулу Клаузера для турбулентной вязкости во внешней области дополнительных эмпирических функций, учитывающих влияние градиента давления, вдува, сжимаемости и низких чисел Рейнольдса. Формулы для уточненной модели Себеси – Смита:

$$v_{ii} = (k \cdot y)^2 D |\partial \bar{c} / \partial y|, \quad D = [1 - \exp(-yw_*/Av)]^2, \\ A = A_0 \left(\frac{\rho}{\rho_w} \right) \left[\frac{\mu}{\mu_e} \left(\frac{\rho_e}{\rho_w} \right)^2 \frac{p^+}{B_*} \left(1 - \exp \left(C_1 \frac{\mu_w}{\mu} B_* \right) \right) + \exp \left(C_1 \frac{\mu_w}{\mu} B_* \right) \right]^{-1/2}, \quad (7.19)$$

где $B_* = \frac{c_w}{w_*}$; $p^+ = \frac{v_e C_e}{w_*^3} \frac{dC_e}{dx}$.

$$v_{t0} = \alpha \delta^* C_e F_{Kleb} (1 + R_0) / (1 + R), \\ F_{Kleb} = \left(1 + 5,5 (y/\delta)^6 \right)^{-1}, \quad R = R_0 \left[1 - \exp \left(-0,243 \sqrt{z_1} - 0,298 z_1 \right) \right], \quad (7.20) \\ z_1 = Re^{**} / 425 - 1.$$

Константы в формулах: $\kappa = 0,41$; $\alpha = 0,0168$; $A_0 = 26$; $R_0 = 0,55$; $C_1 = 11,8$.

Модель Болдуина – Ломакса – двухслойная, используется в расчетах, где такие характеристики ТПС, как δ , δ^* , C_e , определяются с трудом. Такая ситуация возникает при численном моделировании отрывных течений. Вязкости во внутреннем и внешнем слоях определяется по формулам:

– внутренний слой

$$v_{ii} = l_m^2 |\omega|, \\ l_m = \kappa y \left[1 - e^{-\eta/A_0^+} \right],$$

– внешний слой

$$v_{t0} = \alpha \delta^* C_{cp} F_{wake} F_{Kleb} (y; y_{max}) / C_{Kleb}, \\ F_{wake} = \min \left[y_{max} F_{max}; C_{wk} y_{max} C_{dif}^2 / F_{max} \right], \quad (7.21) \\ F_{max} = \frac{l}{\kappa} \left[\max(l_m |\omega|) \right],$$

где y_{max} – является величиной y , при которой $l_m |\omega|$ принимает максимальное значение.

Коэффициенты замыкания:

$$\kappa = 0,40; \quad \alpha = 0,0168; \quad A_0^+ = 26; \quad C_{cp} = 1,6; \quad C_{Kleb} = 0,3; \quad C_{wk} = 1.$$

Функция F_{Kleb} является функцией перемежаемости Клебана; ω – вектор завихренности для трехмерных течений.

Учет влияния кривизны стенки в алгебраической модели турбулентности выполнен в модели Грабарука – Лапина – Стрельца.

Существует большое количество моделей ТПС, каждое из которых разработано для узкого диапазона параметров течения. Даже краткое рассмотрение всех существующих моделей в рамках данного пособия не представляется возможным. Поэтому ограничимся приведенными данными, а для более подробного знакомства с используемыми при расчетах

ТПС моделями рекомендуем специальную литературу, в частности, приведенную в конце данного раздела.

Список литературы к разделу 7

1. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика / Г.Н. Абрамович. – М.: Наука, 1976. – 888 с.
2. Белов И.А. Моделирование турбулентных течений: учебное пособие / И.А. Белов, С.А. Исаев, Балт. гос. техн. ун-т. СПб., 2001. -108 с.
3. Гарбарук А.В. Простая алгебраическая модель турбулентности для расчета турбулентного пограничного слоя с положительным перепадом давления / А.В. Гарбарук, Ю.В. Лапин, М.Х. Стрелец // Научно-технические ведомости. – 1999. – №1. – С. 82–86.
4. Гидромеханика / под общей ред. Я.И. Войткунского. – Л.: Судостроение, 1968. – 568 с.
5. Гиневский А.С. Теория турбулентных струй и следов / А.С. Гиневский. – М.: Машиностроение, 1969. – 400 с.
6. Лапин Ю.В. Статистическая теория турбулентности / Ю.В. Лапин // Научно-технические ведомости. – 2004. – №2. – С. 10–16.
7. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1973. – 847 с.
8. Монин А. С. Статистическая гидромеханика / А. С. Монин, А. М. Яглом. – М.: 1965 – ч.1, 1967 – ч.2.
9. Повх И.Л. Техническая гидромеханика / И.Л. Повх. – Л.: Машиностроение, 1976. – 504 с.
10. Трехмерные турбулентные пограничные слои / Под ред. Х. Фернхольца, Е. Краузе. – М.: Мир, 1985. – 384 с.
11. Турбулентность / под ред. П. Бредшоу. – М.: Мир, 1980. – 343с.
12. Федяевский К.К. Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости / К.К. Федяевский, А.С. Гиневский, А.В. Колесников. – Л.: Судостроение, 1973. – 256 с.
13. Хинце И. О. Турбулентность.: пер. с англ., – М., 1963.
14. Шерстюк А.Н. Турбулентный пограничный слой / А.Н. Шерстюк. – М.: Энергия, 1974. – 272 с.
15. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М.: Наука, 1969. – 711 с.
16. Юн А.А. Расчет и моделирование турбулентных течений с теплообменом, смешением, химическими реакциями и двухфазных течений в программном комплексе Fastest-3D: учебное пособие / А.А. Юн, Б.А. Крылов, – М.: Изд-во МАИ, 2007. – 116 с.
17. Smith A.M.O., Cebeci T. Numerical Solution of the Turbulent Boundary – Layer Equatio., Douglas Aircraft Division Report DAC 33735, 1967.
18. Baldwin B.S., Lomax H. Thin – Layer Approximation and algebraic Model for Separated Turbulent Flows”. AIAA Paper 78-257, Huntsville, AL , 1978.
19. Johnson D.A., King L.S. A Mathematically Simple Turbulence Closure Model for Attached and Separated Turbulent Boundary Layers // AIAA Journal. – Vol. 23, – No. 11. – P. 1684-1692.

20. Wilcox D.C. Turbulence Modeling for CFD. California, – 1994.
21. Clauser F.H. Turbulent boundary layers in adverse pressure gradients // Journal Aeron. Sci. – 1954. – V. 21, – P. 91-108. – русский пер. в сб. «Проблемы турбулентности», ОНТИ. – 1936.
22. Van Driest E.R. On Turbulent Flow Near a Wall // Journal Aero. Sci. – 1956. – V. 23. – N. 11.

Вопросы для самопроверки

- 1 Дайте определение турбулентности.
- 2 Укажите, что понимается под каскадным механизмом генерации энергии турбулентности?
- 3 Укажите, в чем сущность гипотезы Колмогорова?
- 4 Укажите масштабы турбулентности.
- 5 Напишите общий вид уравнений переноса.
- 6 Какова структура турбулентного пограничного слоя?
- 7 Какие подобласти выделяются в турбулентном пограничном слое?
- 8 Что означает термин «закон стенки»?
- 9 Какую часть пограничного слоя занимает внутренняя область?
- 10 Назовите основные направления моделирования турбулентных течений.
- 11 Укажите, в чем сущность метода LES?
- 12 Укажите, в чем сущность метода DES?
- 13 Укажите, в чем сущность прямого численного моделирования (DNS)?
- 14 Какие модели турбулентности называют алгебраическими?
- 15 Назовите содержание гипотезы Буссинеска.
- 16 В чем сущность модели Прандтля?
- 17 В чем сущность модели Кармана?
- 18 Укажите достоинства и недостатки $k - \varepsilon$ модели турбулентности.
- 19 Укажите достоинства и недостатки $k - \omega$ модели турбулентности.
- 20 Укажите достоинства и недостатки модели турбулентности Ментера.
- 21 Укажите достоинства и недостатки модели Себеси-Смита.
- 22 Укажите достоинства и недостатки модели Болдуина–Ломакса.
- 23 Укажите достоинства и недостатки модели Грабарука-Лапина-Стрельца.

ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК

1. Галеркин Ю.Б. Совершенствование метода универсального моделирования и развитие опыта оптимального газодинамического проектирования промышленных центробежных компрессоров / Ю.Б. Галеркин // Компрессорная техника и пневматика. – 2007. – №3. – С. 10-13.
2. Сафин А.Х. Основы современной классификации и терминологии компрессорного оборудования / А.Х. Сафин // Компрессорная техника и пневматика. – 2008. – № 3, 4, 6, 7, 8.
3. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика / Г.Н. Абрамович. – М.: Наука, 1976. – 888 с.
4. Теоретические основы теплотехники. Теплотехнический эксперимент: справочник / под общей редакцией В.А. Григорьева, В.М. Зорина. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 560 с.
5. Теплотехнические расчеты процессов транспорта и регазификации природных газов / В.А. Загорученко, Р.Н. Бикчентай, А.А. Вассерман и др. Справочное пособие. – М.: Недра, 1980. – 320 с..
6. Рид Р. Свойства газов и жидкостей /Р. Рид, Дж. Праусниц, Т. Шервуд. – Л.: Химия, 1982. – 582с.
7. Калінкевич М.В. Варіантний розрахунок відцентрового компресора: навчальний посібник / М.В. Калінкевич. – Суми: Вид-во СумДУ, 2008. – 55 с.
8. Шульц Д. Политропический анализ центробежного компрессора / Д. Шульц // Энергетические машины и установки. – 1962. – № 1. – С. 87– 100.
9. Галеркин Ю.Б. Методы расчета, обработки экспериментальных данных и проектирования центробежных компрессоров промышленного назначения: учебное пособие / Ю.Б. Галеркин, Л. Я. Стрижак – Санкт-Петербургский государственный политехнический университет. - 2003. – 93 с.
10. Галеркин Ю.Б. Методы исследования центробежных компрессорных машин / Ю.Б. Галеркин, Ф.С. Рекстин. – Л.: Машиностроение, 1969. – 304 с.
11. Селезнев К.П. Центробежные компрессоры / К.П. Селезнев, Ю.Б. Галеркин. – Л.: Машиностроение, 1982. – 271 с.
12. Теория и расчет турбокомпрессоров / К.П. Селезнев, Ю.Б. Галеркин, С.А. Анисимов и др. – Л.: Машиностроение, 1986. – 392 с.
13. Степанов Г.Ю. Гидродинамика решеток турбомашин / Г.Ю. Степанов. – М.: Физматгиз, 1962. – 512 с.
14. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1973. – 847 с.
15. Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям / под ред. М. О. Штейнберга. –3–е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1992. – 672 с.
16. Stratford B.S. The prediction of separation of the turbulent boundary layer// J. Fluid Mech. – v.5. – № 1, 1959.
17. Чжен П. Управление отрывом потока / перевод с английского под ред. д-ра техн. наук Е. Н. Бондарева. – М.: Мир, 1979. – 552 с.
18. Гиневский А.С. Аэродинамические характеристики плоских и осесимметричных

диффузоров с предотрывным состоянием турбулентного пограничного слоя / А.С Гиневский, Л.А. Бычкова //сб. „Тепло- и массоперенос".– т. 1. – М.: 1968.

19. Wilcox D.C. Turbulence Modeling for CFD. California, – 1994.

20. Лапин Ю.В. Статистическая теория турбулентности / Ю.В. Лапин // Научно-технические ведомости. – 2004. – №2. – С. 10–16.

Приложение А
(справочное)

Краткие биографические сведения об ученых

Бернулли Даниил
(1700 – 1782)



Даниил Бернулли родился 29 января 1700 года в Гронингене (Голландия), где его отец, Иоганн Бернулли, преподавал математику в университете. В 1705 г. семья переехала в город Базель (Швейцария). После окончания гимназии в 1713 г. Даниила отправили во Францию совершенствовать знание французского языка. После возвращения на родину в 1716 г. он получил звание магистра философии. Получив сначала медицинское образование, Даниил Бернулли в 1725 году принял приглашение Петербургской академии наук и занял должность профессора кафедры физиологии. Найдя в этой сфере множество нерешенных задач из теоретической физики и, в частности, динамики движения жидкости (крови) в сосудах, возвратился к

математическому описанию физических процессов и в 1730 году возглавил кафедру чистой математики Петербургской академии. В 1733 году возвратился на родину в Базель, где возглавил кафедру анатомии и ботаники местного университета, но больше занимался экспериментальной физикой. В 1750 году он возглавил кафедру физики, которую и возглавлял до последних дней своей жизни.

Даниил Бернулли был очень добрым человеком. Он жертвовал университету, в котором преподавал, крупные суммы денег, построил дешевую гостиницу для путешествующих студентов, помогал нуждающимся.

Научный авторитет Даниила Бернулли был очень высок. Свидетельством этого было избрание его членом многих иностранных академий наук (помимо Петербургской) – Берлинской (1747), Парижской (1748), Лондонского королевского общества (1750). До последних дней жизни он занимался научной деятельностью. 17 марта 1782 года слуга нашел его в кресле заснувшим навсегда.

Вклад Даниила Бернулли в науку трудно переоценить. Вместе с М.В. Ломоносовым он стоял у истоков кинетической теории газов. В его трудах можно найти предвосхищение законов Гей–Люссака, Клапейрона и Шарля. Даниил Бернулли был первым, кто высказал суждение о том, что давление газа обусловлено тепловым движением молекул. В гидродинамике Даниил Бернулли дал уравнение установившегося движения идеальной несжимаемой жидкости. Оно выражает собой закон сохранения энергии. Уравнение Бернулли позволяет понять многие явления гидромеханики и аэромеханики. Оно используется при расчете различных трубопроводов, насосов и расходомеров, исследовании

процессов фильтрации и т.п. Вместе с некоторыми другими соотношениями уравнение Бернулли, записанное для среды с переменной плотностью, составляет основу газовой динамики. Д. Бернулли совместно с Л. Эйлером принадлежит главная заслуга в разработке механики жидких тел. Более пятидесяти лет (с 1727 по 1778 г.) Даниил Бернулли занимался изучением колебаний. В своих первых работах он исследовал малые колебания грузов, подвешенных на гибкой нити, а также подвешенного тяжелого однородного каната. В последующих работах он изучал колебания струн и стержней, ввел понятие простого гармонического колебания и обосновал положение о том, что общее колебание системы получается от сложения простых гармонических колебаний. Даниила Бернулли вместе с Д'Аламбером, Л. Эйлером и Лагранжем можно считать основателем математической физики.

Значительный вклад внес Даниил Бернулли и в математику. Он успешно занимался теорией рядов, различными специальными функциями, теорией вероятностей.

ВАН-ДЕР-ВААЛЬС

(1837 – 1923)



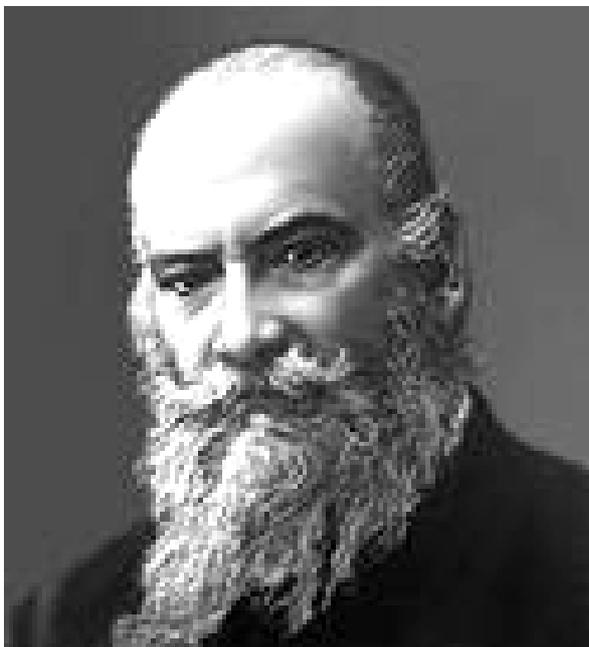
Нидерландский ученый, родился в Лейдене. С 1862 по 1865 г. он посещал Лейденский университет как вольнослушатель. В 1864 г. получил удостоверение учителя средней школы по математике и физике. В 1873 г. получил степень доктора. Его докторская диссертация, посвященная непрерывности газообразного и жидкого состояний вещества, получила горячее одобрение со стороны Джеймса Максвелла. Через четыре года после получения докторской степени он стал первым профессором физики в Амстердамском университете, где и оставался вплоть до выхода в отставку в 1908 г.

В 1880 г. он сделал свое наиболее важное открытие - закон соответствующих состояний. Согласно этому закону, если поведение некоторого газа и соответствующей жидкости известно при всех температурах и давлениях, то состояние любого другого газа или жидкости можно вычислить для любой температуры и давления при условии, что известно их состояние при критической температуре. Этот закон позволяет приблизительно определить условия, необходимые для сжижения газов.

Ван-дер-Ваальс в 1910 г. получил Нобелевскую премию по физике «за работу над уравнением состояния газов и жидкостей». Он был членом Нидерландской королевской академии наук и искусств, был выбран иностранным членом Французской академии наук, Берлинской королевской академии наук, Московского императорского общества натуралистов, Британского химического общества и американской Национальной академии наук.

ЖУКОВСКИЙ

(1847 - 1921)



Жуковский Николай Егорович – русский ученый в области механики, основоположник аэромеханики. В 1868 г. закончил Московский университет. С 1872 года преподавал в Московском техническом училище (ныне МВТУ), с 1886 г. одновременно профессор Московского университета. В 1894 году был избран членом-корреспондентом Петербургской академии наук. С 1918 года руководил ЦАГИ. Под руководством Жуковского была создана одна из первых в мире аэродинамических труб (1902), основан первый в Европе аэродинамический институт (1904), организована аэродинамическая лаборатория в Московском техническом

училище (1910). Жуковский своими работами по аэродинамике заложил теоретические основы крылатых летательных аппаратов. Ему принадлежит фундаментальная работа по динамике полета «О парении птиц» (1891), в которой исследован механизм парения с набором высоты и вычислены возможные эволюции траектории при полете, в том числе «мертвая петля» (петля Нестерова). В 1906 г. изложил принцип образования подъемной силы крыла самолета и сформулировал теорему, которая разрешает определить ее численное значение. В цикле работ (1910 – 1912) Жуковский развил математический аппарат для решения задач обтекания крыла и метод построения теоретических «профилей Жуковского». В 1912 – 1918 г. Жуковский установил законы распределения скоростей для лопасти винта, которые стали теоретическим основанием для их проектирования, создал основы аэродинамического расчета самолета.

Жуковский – автор 194 оригинальных исследований в области астрономии, математики, механики твердого тела, гидродинамики, гидравлики и др. Именем Жуковского назван кратер на Луне.

КЛАПЕЙРОН

(1799 – 1864)



Бенуа Поль Эмиль КЛАПЕЙРОН родился 26 января 1799 года в Париже. Окончил Политехническую школу (1818). Работал в Институте инженеров путей сообщения в Петербурге (1820–1830). По возвращении во Францию стал профессором Школы мостов и дорог в Париже.

Работы Клапейрона посвящены тепловым процессам. В 1834 г. он ввел в термодинамику графический метод, представив в геометрической форме рассуждения Карно. В том же году вывел уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона), объединяющее закон Бойля – Мариотта, закон Гей-Люссака и закон Авогадро. Это было наиболее простое соотношение, применимое с определенной степенью точности к реальным газам при низких давлениях и высоких температурах (в 1874 г. оно было обобщено Д.И. Менделеевым и теперь известно как уравнение Менделеева – Клапейрона).

Получил уравнение, связывающее между собой температуру кипения (или плавления) веществ и давление (уравнение Клапейрона – Клаузиуса; последний обосновал это уравнение в 1851 г.).

Умер Клапейрон в Париже 28 января 1864 года.

МАХ

(1838 – 1916)



Эрнст Мах – австрийский физик и философ-идеалист.

Его научные исследования касаются, главным образом, акустики и оптики – «О стробоскопическом определении высоты тона» (1873), «Об отражении и преломлении звука» (1873), «О скоростях распространения взрывных волн» (1877) и др., «О цвете двойных звезд на основании принципа Доплера» (1861), «О полном отражении и аномальной дисперсии» и т.д.

Окончил Венский университет. Приват-доцент в Венском университете (с 1861 г.), профессор физики в Граце (с 1864 г.), профессор физики и ректор

немецкого университета в Праге (с 1867 г.), профессор философии Венского университета (1895 – 1901). Маху принадлежит ряд важных физических исследований. Первые работы Маха посвящены изучению процессов слуха и зрения (объяснение механизма действия вестибулярного аппарата, открытие оптического явления – так называемых колец, или полос, Маха). С 1881 года Мах изучал аэродинамические процессы, которые сопровождают сверхзвуковой полет тел (например, артиллерийских снарядов). Он открыл и исследовал специфический волновой процесс, который со временем получил название ударной волны. В этой области именем Маха названный ряд величин и понятий: **число Маха**, **конус Маха**, **угол Маха**, **линия Маха** и прочие. Предложил принцип, соответственно которому наличие у тела инертной массы является следствием гравитационного взаимодействия его со всем веществом во Вселенной (**принцип Маха**). Был неприятелем атомной теории.

НЬЮТОН

(1642 – 1727)



Исаак Ньютон английский ученый, которого многие считают величайшим ученым всех времен и народов. Родился в семье мелкопоместных дворян на окраинах г. Вулсторпа (графство Линкольншир, Англия). С двухлетнего возраста Исаак рос под опекой его бабушки.

Некоторое время юный Исаак учился сельскому хозяйству в ремесленном училище. Как это часто случается с большими людьми, о его чудачествах в ту раннюю пору его жизни до сих пор существует масса легенд. Так, в частности, рассказывают, будто бы один раз его отправили на выпас сторожить скот, который спокойно разбрелся, пока мальчик сидел под деревом и восторженно читал книгу, которая его заинтересовала.

Так это или нет, но стремление подростка к знаниям в скором времени заметили - и отправили в гимназию Грантема, после окончания которой юноша поступил в Кембриджский университет.

Ньютон быстро овладел учебной программой и перешел к изучению работ ведущих ученых того времени, в частности, последователей французского философа Рене Декарта, который придерживался механистических взглядов на Вселенную. Весной 1665 года он получил ученую степень бакалавра. В том же году в Англии из-за эпидемии бубонной чумы Кембриджский университет был закрыт. Ньютон почти на два года возвратился в Вулсторп, успев захватить с собой всего несколько книг и свой необыкновенный интеллект в придачу.

Когда через два года Кембриджский университет снова открылся, Ньютон уже разработал дифференциальное исчисление - отдельный раздел математики, изложил основы современной теории цвета, вывел закон всемирного тяготения и решил несколько математических задач, которые до него никто решить не смог. Как говорил сам Ньютон: «В

те дни я был в расцвете своих изобретательских сил, и с того времени Математика и Философия уже ни разу меня не захватывали так сильно, как тогда».

В скором времени по возвращении в Кембридж Ньютон был избран в ученый совет Тринити - колледжа, его статуя до сих пор украшает университетскую церковь. Он прочитал курс лекций по теории цвета, в которых показывал, что разность цветов объясняется основными характеристиками световой волны (или, как теперь говорят, длиной волны) и что свет имеет корпускулярную природу. Он также сконструировал зеркальный телескоп, и это изобретение привлекло к нему внимание Королевского общества. Многолетние исследования света и цветов были опубликованы в 1704 году в его фундаментальной работе «Оптика» (*Optics*).

Отстаивание Ньютоном «неправильной» теории света (в то время властвовали волновые представления) привело к конфликту с Робертом Гуком, главой Королевского общества. В ответ Ньютон высказал гипотезу, которая соединила корпускулярные и волновые представления о свете. Гук предъявил обвинение Ньютону в плагиате и выступил с претензиями на приоритет в этом открытии. Конфликт длился до самой смерти Гука в 1702 году и так удручал Ньютона, что он на шесть лет отказался от участия в интеллектуальной жизни. Хотя некоторые психологи того времени объясняют это нервным расстройством, который обострился после смерти его матери.

В 1679 году Ньютон возвратился к работе, исследуя траектории движения планет и их спутников. В результате этих исследований, которые также сопровождались спорами с Гуком о приоритете, были сформулированы закон всемирного тяготения и законы механики Ньютона. Свои исследования Ньютон обобщил в книге «Математические начала натуральной философии», которая была представлена Королевскому обществу в 1686 году и опубликована годом позже. Эта работа положила начало тогдашней научной революции и принесла Ньютону всемирное признание.

РЕЙНОЛЬДС (1842 – 1912)



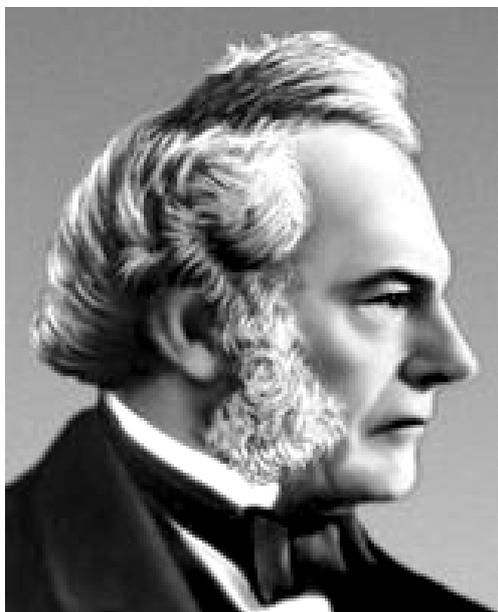
Осборн Рейнольдс – ирландский инженер-физик. Родился в Белфасте в семье потомственного священника англиканской церкви. После недлинного практического обучения инженерному делу в строительной фирме поступил в Кембридж, после окончания которого, несмотря на относительную молодость, сразу же получил должность профессора кафедры гражданского инженерного дела Оуенс - колледжа (современный Манчестерский университет), на которой трудился на протяжении 37 лет. Рейнольдс занимался научно-техническими разработками в области гидродинамики и гидравлики, стал основоположником теорий смазки и турбулентности, принципиально усовершенствовал конструкцию центробежных насосов.

Осборн Рейнольдс был, в определенном значении, последним приверженцем старых добрых традиций классической механики Ньютона. В конце жизни он даже разработал тщательно продуманную механическую модель светящегося эфира, соответственно которой эфир представляет собой систему мелких шарообразных частичек, которые свободно перекатываются одна относительно одной подобно дробинок в мешке. До конца своих дней он считал, что «прогрессу механики нет конца...», и то, что современники считают ее границей и тупиком..., со временем окажется лишь новым поворотом на пути ее развития».

Важнейшим открытием его жизни было **число Рейнольдса**.

СТОКС

(1819 – 1903)



Стокс Джордж Рафаэль – английский физик, член Лондонского королевского общества (1851), в 1854–1885 годах его секретарь, в 1885–1890 годах – президент. Закончив в 1841 году Кембриджский университет, Стокс начал там и преподавать, и уже в 1849 г. возглавил кафедру, которую в свое время занимал И. Ньютон. Член парламента от университета (1887–1892). В 1889 году получил за научные работы титул баронета.

Многие исследования Стокса связаны с изучением волновых процессов в разных средах. В 1842–1851 гг. им изучалось стационарное движение несжимаемой жидкости с учетом трения и движение твердого шара в вязкой жидкости; эти работы Стокса имеют фундаментальное значение в гидродинамике

(**Уравнение Навье – Стокса, закон Стокса**). В 1852 г. он описал явление флуоресценции, установил зависимость ее спектра от спектра падающего света (**правило Стокса**). Другие работы Стокса из оптики охватывают вопросы спектрального анализа, дифракции, поляризации световых волн, двойного лучепреломления, отражения света разными поверхностями, теории оптических инструментов.

Известны также работы Стокса по акустике, по изучению теплопроводности в кристаллах, гравитации и т.д. В математике Стоксу принадлежат работы по векторному анализу (**формула Стокса**), теории рядов и определенных интегралов и др. Именем Стокса названная единица кинематической вязкости. Был членом многих иностранных академий, в том числе Военно-медицинской академии в Петербурге.

Эйлер Леонард
(1707 – 1783)



Великий математик, механик и физик. Родился 4 апреля 1707 г. в Базеле. Учился в Базельском университете (1720–1724 г.), где его учителем был известный математик Иоганн Бернулли. Уже в 1722 г., в возрасте 16 лет, получил степень магистра искусств. В 1727 г. переехал в Санкт-Петербург, получив место адъюнкт–профессора в недавно основанной Академии наук и художеств. В 1730 г. стал профессором физики, в 1733 – профессором математики. За 14 лет своего первого пребывания в Петербурге Эйлер опубликовал более 50 работ. В 1741–1766 г. он работал в Берлинской академии наук под особым покровительством Фридриха II, и за эти 25 лет написал огромное множество сочинений, охватывающих по существу все разделы

чистой и прикладной математики. В 1766 г. по приглашению Екатерины II Эйлер возвратился в Россию. Вскоре после прибытия в Санкт-Петербург он полностью потерял зрение из-за катаракты, но благодаря великолепной памяти и способностям проводить вычисления в уме до конца жизни занимался научными исследованиями: за это время им было опубликовано около 400 работ, общее же их число превышает 850. Умер Эйлер в Санкт–Петербурге 17 сентября 1783 г.

Научные интересы Эйлера относились ко всем основным областям естествознания, к которым можно было применить математические методы. В 1727–1741 г. подготовил к печати 80 и опубликовал 50 трудов по вариационному исчислению, интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений, степенным рядам, специальным функциям, дифференциальной геометрии, теории чисел, гидродинамике, небесной механике, теории теплоты, оптике и по некоторым прикладным вопросам. Одновременно с А.К. Клеро дал (1739 г.) условия интегрируемости линейных дифференциальных форм от двух и трех переменных. В 1736 г. вышел в свет его трактат по механике, в котором он впервые изложил динамику точки с помощью математического анализа и ввел понятие силы инерции.

Берлинский период жизни Эйлера был особенно продуктивным. Свои труды он печатал в Берлине и Петербурге. Опубликовал серию работ по астрономии. Его теоретические изыскания послужили основанием для составления таблиц движения Луны. Заложил основы математической физики, механики твердого тела, выполнил основополагающие работы по механике машин. Разобрал случай инерционного движения тяжелого твердого тела, закрепленного в центре тяжести (гироскоп Эйлера – Пуансо). В 1744 г. был опубликован его труд “Метод нахождения кривых линий...” – первая книга по вариационному исчислению, в которой, кроме того, содержалось первое систематическое изложение теории упругих кривых и результаты по сопротивлению материалов. Эйлер является одним из

основоположников гидродинамики и гидравлики как отдельных наук. Написал “Введение в исчисление бесконечно малых” (1748 г.), “Дифференциальное исчисление” (1755 г.) и “Интегральное исчисление” (т. 1-3, 1768–1770 годы). Ввел двойные интегралы.

Все эти книги служили основными руководствами для математиков. В 1749 г. Петербургская АН опубликовала написанную по ее заказу монографию Эйлера “Морская наука”, в которой он заложил основы теории гидравлических реактивных турбин и предложил проект такой турбины. Занимался также вопросами баллистики: перевел с английского языка труд Б. Робинса “Новые начала артиллерии” и снабдил его своими “Добавлениями”, в которых развил новую теорию полета снаряда.

Иностранный почетный член Петербургской АН (с 1742 по 1766 г.), член Парижской АН, Берлинской АН, Лондонского королевского общества и многих других академий наук и научных обществ.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А	Д
Автомодельность 179	Давление 51
Анализ	- критическое 56
- инспекционный 172	- приведенное 56
- размерностей 163	- пульсации 80
Аппарат	- торможения 82
- входной направляющий 20	Двигатель
- обратный направляющий 22	- внутреннего сгорания 35
- промежуточный направляющий 20	- газотурбинный 34
- рабочий 20	- турбореактивный 34
Б	Демпфирующий множитель
Бриджмена таблицы 56	Е. ван Дриста 200
В	Диффузор
Вентилятор 16, 39	- безлопаточный 22
Вихрь	- лопаточный 22
- пелена 106	- канальный 22
- разгонный 114	- конический 140
- остановочный 114	- предотвратный 142
Вязкость 46, 80	З
Г	Задача газодинамики 95
Газ	- прямая 95
- идеальный 52	- обратная 95
- реальный 55	Закон
Газодинамическая функция 85	- Ньютона 46
- давления 86	- соответственных состояний 56
- плотности 86	- стенки 199
- расхода 87	К
- температуры 86	Канал
Гипотеза	- прямоосный 131
- Буссинеска 194	- криволинейный 131
- Колмогорова 192	- осесимметричный 131
Годограф скорости 102	- с нулевым поверхностным трением 146
Густота решетки 94	Качество профиля 127
	Комплексный потенциал 96

Компрессор 15, 16
 - вихревой 16, 18, 23, 42
 - динамического действия 15, 17, 18
 - объемного действия 17, 18
 - осевой 16, 18, 19, 20, 36
 - радиальный 15, 18
 - центробежный 15, 18, 21, 37
 - многовальный 37, 38
 - модульный 42
 Компрессорная машина 16
 Компрессорный аппарат 17
 Коэффициент
 - ацентричности 62
 - вязкости динамический 46
 - кинематический 46
 - изобарный расширения 55
 - изохорный давления 55
 - моделирования 186
 - подъемной силы 126
 - полезного действия 26
 - сжимаемости 50
 - изотермический 50, 55
 - номограмма 57
 - скоростной 85
 - сопротивления 109, 127
 - трения 136
 Критерий подобия 171
 - газодинамических процессов 175
 - неопределяющий 174
 - определяющий 174
 - тепловых процессов 176
 - Архимеда 176
 - Био 177
 - Вебера 175
 - Галилея 176
 - гомохронности 176
 - Грасгоффа 176
 - Маха 176
 - Нуссельта 176
 - Ньютона 175
 - Пекле 176
 - Прандтля 176

- Рейнольдса 175
 - Стантона 177
 - Фруда 175
 - Фурье 176
 - Эйлера 176

М

Масса молярная 56
 Метод
 - Кея 56
 - Ли-Кеслера 62
 - Релея 168
 - Стрэтфорда 143
 - годографа скорости 102
 - дискретных вихрей 106
 - интегральных уравнений 99
 - конформного отображения 100
 - сеток 97
 - LES - 190
 - DES - 190
 - DNS - 190
 Моделирование процессов 178
 - приближенное 178
 Модель
 - идеального газа 52
 - потока
 - двухмерного 81
 - квазитрехмерного 81
 - одномерного 81
 - сплошной среды 51
 Мощность 25
 - внутренняя 25
 - вспомогательная 26
 - политропная 26
 - двигателя 26
 - механическая 25

Н

Напор 26, 77, 78
 - динамический 78

- политропный 26, 78
- полный 26, 78
- потери 78
- теоретический 77

Напряжения

- касательные 46
- турбулентные 75

Натура 184

Никурадзе графики 136

О

Обтекание

- дужки 112
- пластинки 108
- профиля
 - безударное 47, 116, 118
 - невязкое 96, 112, 115
 - ударное 48, 118
- шара 49

Объем удельный 51

Осреднение параметров потока 82

Отношение давлений 25

Отрыв потока 139

П

Парабола подобных режимов 186

Параметры газовой смеси 56

- приведенные 56
- псевдокритические 56

Плотность 25, 51

- критическая 56
- торможения 85

Пограничный слой

- ламинарный 47
- турбулентный 48
- структура 199

Подобие

- геометрическое 165
- динамическое 166

- кинематическое 166
- математическое 164
- физическое 164
- физико-химическое 164

Подъемная сила 111

Показатель

- адиабаты 53
 - условный 69
- политропы 54

Постоянная Больцмана 52

Постулат Жуковского-Чаплыгина 111

Потенциал скорости 96

Потери

- вторичные 159
- классификация 158
- мощности 158
- напора 158
- отрыва 159
- расширения 141
- трения 141, 159

Производительность 25

- массовая 25
- объемная 25

Профиль 47, 48

Процесс

- изоэнтропийный 67
- политропный 53
- теплота 54
- удельная работа 54

Р

Рабочее колесо 21

- осерадиальное 91
- полуоткрытого типа 91

Радиус лопатки 95

Решетка профилей 92

- кольцевая 93
- круговая 94

- плоская 92

Ричардсона каскад 191

С

- Сжимаемость 50
- Скорость
 - динамическая 193
 - диссипации кинетической энергии 193
 - звука 50
 - комплексная 96
 - критическая 83, 86
 - осредненная 75
 - пульсационная 75
 - среднерасходная 132
- Сопротивление
 - давления 117
 - трения 108
- Степень повышения давления 25

Т

- Температура 52
 - критическая 56
 - приведенная 56
 - торможения 82
- Текучесть 46
- Теорема
 - Жуковского 122, 125
 - подобия 166
 - первая 166
 - вторая 167
 - третья 167
 - π -теорема 167
- Теория
 - подобия 162
 - решеток 95
- Теплоемкость 53, 73
 - изобарная 53, 73
 - поправка изотермическая 57, 65
 - изохорная 59
 - политропного процесса 54
- Течение газа
 - визуализация 47, 48, 49

- вторичное 150
- вязкостное 80
- градиентное 139
- ламинарное 47
- начальный участок 134
- нестационарное 79
- потенциальное 96
- пространственное 81
- турбулентное 48
- Хагена – Пуазейля 132
- Тождество термодинамическое 55
- Турбокомпрессор 15, 18
 - однороторный 15
 - многороторный 15
 - однокорпусный 15
 - многокорпусный 15
- Турбодетандер 41
- Турбонаддув 36
- Турбулентность 189
 - масштабы 192
 - моделирование 194
 - модель
 - алгебраическая 195
 - с одним дифференциальным уравнением 196
 - с двумя дифференциальными уравнениями 197
 - Болдуина-Ломакса 202
 - Грабарука-Лапина-Стрельца 202
 - Кармана 195
 - Менгера 198
 - Прандтля 195
 - Себеси-Смита 201
 - $k-\varepsilon$ 197
 - $k-\omega$ 198

У

- Угол
 - атаки 48
 - раскрытия 95

- эквивалентный 95, 140
- Удельная работа сжатия 54
- Уравнение
 - Бенедикта-Вебба-Рубина 62
 - Бернулли 78
 - Ван-дер-Ваальса 59
 - Гюгонио 138
 - Загорученко 61
 - Лапласа 96
 - Майера 53
 - Максвелла 55
 - Навье-Стокса 74
 - Рейнольдса 75, 190
 - Эйлера 76
 - импульса 73
 - момента импульса 75
 - неразрывности 73
 - переноса 193
 - кинетической энергии
 - турбулентных пульсаций 193
 - удельной скорости диссипации 193
 - состояния
 - Менделеева-Клапейрона 53
 - в вириальной форме 61
 - в дифференциальной форме 55
 - политропного процесса 53
 - термодинамики 66
 - дифференциальное 66
 - энергии 77
 - для потока газа 77
- Уравновешенность 43
- Ускорение кориолисово 155
- Условия подобия 165, 166

Ф

- Формула
 - Блазиуса 137
 - Дарси 134, 171
 - Клаузера 201
 - размерности 163

- Сазерленда 46
- Хагена-Пуазейля 132
- Функция
 - перемежаемости Клебанова 202
 - сжимаемости 59, 60
 - тока 96

Х

- Характеристика
 - безразмерная 27, 181
 - газодинамическая 27, 180
 - мощностная 27
 - напорная 27
 - размерная 27, 181
 - турбокомпрессора 27, 180
- Хорда 92

Ц

- Циркуляция скорости 111, 123

Ч

- Число
 - Кнудсена 51
 - Маха 50, 86
 - Рейнольдса 47
 - Россби 150
- Чистота газа 43

Ш

- Шаг решетки 94
- Шероховатость относительная 136

Э

- Энтальпия 53, 55, 67
- Энтропия 55
 - поправка 65
- Эксплуатационные затраты 44

Навчальне видання

Калінкевич Микола Васильович,
Гусак Олександр Григорович

ТЕОРІЯ ТУРБОКОМПРЕСОРІВ

Навчальний посібник
(Російською мовою)

Художнє оформлення обкладинки М.В. Калінкевича
Редактор Т.Г. Чернишова
Комп'ютерне верстання М.В. Калінкевича

Формат 60x84/8. Ум. друк. арк. 26,04. Обл. – вид. арк. 17,10. Тираж 50 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007