

**ЧАСТИНА 1**  
**МЕТОДОЛОГІЧНІ ПРОБЛЕМИ СУЧАСНОЇ ЕКОНОМІКИ**

**Розділ 1**

**Економіка природокористування і  
еколого-економічні проблеми**

УДК 502.335:658.152.5

*В.Н. Долгих*

**Математическая модель для определения экологического  
и экономического ущерба при точечном кратковременном  
выбросе загрязняющих веществ в атмосферу**

*Предложена математическая модель, описывающая процессы распространения загрязнений в атмосфере при точечном кратковременном выбросе, процессы повреждения объектов, попавших в зону загрязнения, позволяющая оценить величину ущерба от загрязнения окружающей среды.*

*Ключевые слова: математическая модель, загрязнение окружающей среды, кратковременный выброс, процесс повреждения объектов, функция повреждения, экономический ущерб.*

Кратковременные выбросы в атмосферу загрязняющих веществ большой мощности возникают при взрывах боеприпасов, емкостей с горючими материалами, запусках ракет и т.д. Особую опасность представляют техногенные чрезвычайные ситуации на объектах хранения и транспортировки сжиженных газов, в результате которых происходит образование облаков взрывоопасных или токсических газов.

В рассмотренных выше случаях за короткий промежуток времени в атмосферу поступает большое количество газообразных и твердых загрязняющих веществ, которые затем мигрируют вместе с потоками воздуха, вступают между собой в реакции, образуя опасные химические соединения, осаждаются на подстилающую поверхность, загрязняя растительность, почву, воду. Следует отметить, что даже при отсутствии ветра атмосферная диффузия приводит к быстрому распространению загрязняющих веществ вблизи источника.

---

*Долгих Владимир Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики и информатики ГВУЗ «Украинская академия банковского дела Национального банка Украины», г. Сумы.*

© В.Н. Долгих, 2011

Загрязняющие и токсические вещества воздействуют на живые организмы, растительность, попавшие в зону загрязнений, вызывая их повреждение, зависящее как от состава и концентрации загрязняющих веществ, так и от продолжительности их воздействия.

Математическое моделирование процессов распространения загрязняющих веществ в атмосфере и их воздействие на объекты природы позволит описать динамику чрезвычайных ситуаций, получить прогнозные оценки величин экологического и экономического ущербов для выработки управленческих решений по их ликвидации. Кроме того, применение моделирования при планировании размещения взрывоопасных объектов среди экологически значимых зон позволит минимизировать величину ущерба в случае аварии.

Актуальность таких исследований в настоящее время возрастает в связи с ростом угрозы проведения террористических актов на объектах техносферы и, в частности, на объектах хранения и транспортировки сжиженных горючих и токсических газов.

В книге [1] излагаются результаты многочисленных исследований по разработке методов краткосрочного прогнозирования загрязнения воздуха с учетом возможности регулирования выбросов при неблагоприятных метеоусловиях. Выделено два направления исследований по изучению закономерностей распространения примесей от источника загрязнений. Первое состоит в описании распространения примесей на основе решения уравнений турбулентной диффузии. Второе направление связано с эмпирико-статистическим анализом. Первое направление является более универсальным, поскольку позволяет исследовать распространение примесей от источника при различных характеристиках среды.

Вопросам математического моделирования процессов распространения загрязняющих веществ в атмосфере и воде посвящена монография [2]. Особое внимание уделено вопросам математического моделирования оптимального размещения промышленных предприятий среди экологически важных зон.

В работе [3] предложена математическая модель формирования, подъема и распространения облака продуктов сгорания при наземных стендовых испытаниях ракетных двигателей. Модель основана на численном решении трехмерных уравнений гидротермодинамики.

В работе [4] с помощью двумерной модели распространения тяжелых газов над орографически неоднородной поверхностью проведено численное моделирование процесса распространения облака тяжелых углеводородов при аварии на продуктопроводе 03.06.1989 г. под Уфой. В этой же работе приведена двумерная математическая модель лесных пожаров. Обе модели построены методом осреднения по высоте исходных трехмерных уравнений газовой динамики. Системы уравнений решались разностным методом.

В работе [5] предложена математическая модель для оценки экономического ущерба от загрязнения окружающей среды стационарными точечными источниками. Применим аналогичный подход для решения нестационарной задачи об оценке ущерба, вызванного внезапным точечным выбросом загрязнений в атмосферу.

Пусть в точке  $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$  в момент времени  $t_0 = 0$  произведен выброс загрязняющей примеси массой  $Q$ . Требуется разработать математическую модель, описывающую процессы распространения загрязнений в атмосфере, процессы

повреждения объектов, попавших в зону загрязнения и на этой основе оценить величину ущерба от загрязнения окружающей среды.

Разобьем процесс решения на 3 этапа:

- 1) определение уровня загрязнения объектов в зависимости от мощности выброса и метеоусловий;
- 2) определение уровня поврежденности объектов, попавших в зону загрязнения, в зависимости от интенсивности и длительности воздействия;
- 3) определение стоимости восстановления объектов в зависимости от уровня их поврежденности.

### 1. Определение уровня загрязнения объектов

Поскольку аналитическое решение трехмерных нестационарных уравнений газовой динамики получить невозможно, воспользуемся двумерной моделью [2], полученной в результате интегрирования по координате  $z$  в пределах от 0 до  $h$  трехмерного уравнения диффузии с переносом:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial(uc)}{\partial x} + \frac{\partial(vc)}{\partial y} + (\sigma + \bar{\sigma})c - \mu\Delta c = Q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)\delta(t). \quad (1)$$

Начальное условие:

$$c = 0 \text{ при } t = 0, \quad (2)$$

граничное условие:

$$c \rightarrow 0 \text{ при } |\vec{r}| \rightarrow \infty. \quad (3)$$

В соотношениях (1)–(3):

$c(\vec{r}, t)$  – концентрация (поверхностная плотность) аэрозоли в точке  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$  в момент времени  $t$ ;

$u, v$  – составляющие скорости ветра вдоль осей  $x, y$  соответственно;

$\sigma$  – величина, характеризующая скорость распада аэрозоли;

$\bar{\sigma} = (w_g + \alpha v) / h$ ;

$w_g$  – абсолютная величина скорости опускания частиц примеси под действием силы тяжести;

$\alpha$  – константа, характеризующая взаимодействие примеси с подстилающей поверхностью;

$h$  – высота слоя атмосферы, в котором распространяется загрязнение;

$\mu, \nu$  – коэффициенты горизонтальной и вертикальной диффузии;

$\delta(\xi)$  – дельта-функция.

Решение задачи (1)–(3) для  $t > 0$  имеет вид [2]:

$$c(x, y, t) = \frac{Q}{4\pi\mu t} \exp\left\{-\left[(\sigma + \bar{\sigma})t + \frac{(x - x_0 - ut)^2 + (y - y_0 - vt)^2}{4\mu t}\right]\right\}. \quad (4)$$

Из формулы (4) следует, что концентрация аэрозоли быстро убывает с ростом  $t$ .

При отсутствии ветра ( $u = v = 0$ ) в произвольный момент времени  $t > 0$  максимальная концентрация аэрозоли достигается в точке выброса ( $x = x_0, y = y_0$ ):

$$c(x_0, y_0, t) = \frac{Q}{4\pi\mu t} \exp\{-(\sigma + \bar{\sigma})t\}. \quad (5)$$

При наличии ветра точка максимума перемещается в направлении вектора скорости и имеет координаты  $x = x_0 + ut$ ,  $y = y_0 + vt$ .

В произвольный фиксированный момент времени  $t > 0$  линиями уровня функции (4) являются окружности с центром в точке  $x = x_0 + ut$ ,  $y = y_0 + vt$ .

Для легкой сохраняющейся примеси  $w_g = \sigma = 0$ .

Особенности распространения тяжелых примесей определяются скоростью осаждения частиц аэрозоля, зависящей от их плотности и размера.

Величина скорости опускания сферических частиц примеси радиуса  $r_n$  и плотностью  $\rho$  под действием силы тяжести может быть рассчитана по формуле Стокса [1]:

$$w_g = 1,3 \cdot 10^{-2} \rho \cdot r_n^2. \quad (6)$$

В формуле (6) скорость определяется в см/с, плотность  $\rho$  и радиус  $r_n$  соответственно в г/см<sup>3</sup> и мкм. Из (6) следует, что при  $r_n$ , равных 10, 50 и 100 мкм, значения скорости опускания частиц плотностью  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup> соответственно равны 1,3, 32,5 и 130 см/с.

Общее количество примеси, выпавшей на подстилающую поверхность в точке  $\vec{r}$  за промежутки времени  $[0, t]$ , вычисляется по формуле [2]:

$$J(\vec{r}, t) = \frac{w_g + \alpha v}{h} \int_0^t c(\vec{r}, \tau) d\tau. \quad (6)$$

## 2. Определение уровня поврежденности объектов.

Загрязнение окружающей среды приводит к повреждению биологических и небологических объектов. Рассмотрим объект, находящийся в точке  $\vec{r}$ , который в течение промежутка времени  $0 \leq \tau \leq t$  находился под воздействием загрязнений интенсивностью  $\varphi(\vec{r}, t) = c(\vec{r}, t) / c_0(\vec{r})$ , где  $c_0(\vec{r})$  – концентрация, соответствующая мгновенной гибели объекта. В работе [6] предложено описывать уровень поврежденности объекта при помощи скалярной функции поврежденности  $0 \leq \Pi(\vec{r}, t) \leq 1$ . При отсутствии повреждений  $\Pi = 0$ , при  $\Pi = 1$  объект гибнет (разрушается).

Величина поврежденности объекта  $\Pi(\vec{r}, t)$  в момент времени  $t$  зависит не только от интенсивности воздействия в момент  $t$ , но и от всей истории воздействия на промежутке  $0 \leq \tau \leq t$ . Для определения величины  $\Pi(\vec{r}, t)$  можно использовать, например, линейные относительно  $\varphi(\vec{r}, t)$  функционалы вида

$$\Pi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}, t) + \int_0^t H(t, \tau) \varphi(\vec{r}, \tau) d\tau. \quad (7)$$

Функция  $H(t, \tau)$  называется ядром наследственности и характеризует скорость “забывания” в момент времени  $t$  о воздействии, совершенном в момент  $\tau$ . Если

свойства объекта со временем не изменяются (объект не “старееет”), то ядро  $H(t, \tau)$  зависит лишь от разности  $t - \tau$  :

$$\Pi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}, t) + \int_0^t H(t - \tau) \varphi(\vec{r}, \tau) d\tau. \quad (8)$$

Первое слагаемое в формулах (7), (8) характеризует “мгновенную” поврежденность в момент времени  $t$  от воздействия в этот же момент. Второе слагаемое учитывает поврежденность, накопленную за промежуток времени  $0 \leq \tau < t$ .

В работе [7] предлагается для определения поврежденности растений использовать в качестве ядра убывающую экспоненциальную функцию

$$H(t - \tau) = ce^{-a(t-\tau)}, \quad (9)$$

где  $c, a$  – постоянные параметры, определяемые экспериментально.

В этом случае выражение для поврежденности примет вид

$$\Pi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}, t) + c \int_0^t e^{-a(t-\tau)} \varphi(\vec{r}, \tau) d\tau. \quad (10)$$

Выражение (10) позволяет учесть характерные черты поведения, присущие биологическим объектам природы, способным полностью или частично восстанавливаться после прекращения вредного воздействия.

В отличие от биологических объектов небиологические объекты способны лишь накапливать повреждения, вызываемые отдельными импульсами загрязнения, вне зависимости от того, в какой момент времени и в каком порядке они действуют.

Для описания поврежденности таких объектов можно использовать формулу (7) с ядром, зависящим лишь от одного аргумента:  $H(t, \tau) \equiv H(\tau)$ , т.е. формулу

$$\Pi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}, t) + \int_0^t H(\tau) \varphi(\vec{r}, \tau) d\tau. \quad (11)$$

Функции поврежденности для некоторых видов нагруженных элементов конструкций, находящихся в агрессивной среде, предложены в работе [8].

Следует отметить, что если в некоторый момент времени поврежденность объекта достигнет 1, то объект гибнет (разрушается) и для этого объекта в последующие моменты времени следует полагать  $\Pi(\vec{r}, t) = 1$ .

В случае точечного кратковременного выброса загрязнений мощностью  $Q$  относительная интенсивность загрязнений примет вид

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{c(x, y, t)}{c_0(x, y)} = \frac{Q}{4\pi\mu t c_0(x, y)} \exp\left\{-\left[(\sigma + \bar{\sigma})t + \frac{(x - x_0 - ut)^2 + (y - y_0 - vt)^2}{4\mu t}\right]\right\}. \quad (11)$$

Подставляя эту функцию в выражения (7), (8), (10) или (11), получаем зависимость поврежденности объекта от времени, мощности выброса, направления и скорости ветра, коэффициентов диффузии и т.д. Интегралы в правых частях упомянутых выражений можно вычислить численно.

### 3. Определение величины ущерба от загрязнений

Обозначим  $\rho_j(\vec{r})$  – поверхностную плотность расположения объектов  $j$ -го типа в точке  $\vec{r}$ , тогда  $\rho_j(\vec{r})dS$  – количество таких объектов на площади  $dS$ .

Пусть  $R_j(\Pi)$  – стоимость восстановления одного объекта  $j$ -го типа с уровнем повреждения  $\Pi$ . Суммарная стоимость восстановления объектов, находящихся на площади  $S$  в момент времени  $t$ , определяется по формуле

$$R_S(t) = \sum_j R_j(t) = \sum_j \iint_S R_j[\Pi(\vec{r}, t)] dS. \quad (12)$$

В частном случае, когда стоимость восстановления объекта пропорциональна его уровню повреждения:

$$R_j[\Pi(\vec{r}, t)] = R_{0j}(\vec{r})\Pi_j(\vec{r}, t), \quad (13)$$

где  $R_{0j}(\vec{r})$  – стоимость неповрежденного объекта  $j$ -го типа, формула (12) примет вид

$$R_S(t) = \sum_j \iint_S R_{0j}(\vec{r})\Pi_j(\vec{r}, t) dS. \quad (14)$$

Если на площади  $S$  равномерно распределены однотипные объекты (плотность расположения объектов постоянна  $\rho(\vec{r}) = \rho_0 = const$ ), то

$$R_S(t) = R_0\rho_0 \iint_S \Pi(\vec{r}, t) dS. \quad (15)$$

Для практических расчётов в формулах (12)–(15) удобно заменить интегралы соответствующими суммами. Разобьём территорию площадью  $S$  на  $n$  малых площадок таким образом, чтобы в пределах  $i$ -й площадки можно было считать повреждённость объектов постоянной. Пусть  $\Delta S_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) – площадь, а  $\vec{r}_i$  – радиус-вектор  $i$ -й площадки;  $m_{ji}$  – количество объектов  $j$ -го типа на  $i$ -й площадке с уровнем повреждения  $\Pi_{ji}$ .

Заменяя в формуле (12) двойной интеграл суммой, получаем суммарную стоимость восстановления объектов в момент времени  $t$ :

$$R_S(t) = \sum_j R_j(t) \approx \sum_j \sum_{i=1}^n R_{ji}(t) m_{ji}, \quad (16)$$

где  $R_{ji}(t)$  – стоимость восстановления одного объекта  $j$ -го типа с уровнем повреждения  $\Pi_{ji}$ .

Формулы (12)–(16) позволяют оценить экономические затраты на экологическое восстановление окружающей среды в зонах с различной степенью повреждения.

Рассмотрим пример. Пусть в момент времени  $t=0$  в точке с координатами  $x_0 = 1, y_0 = 3$  (км) произошел выброс загрязнений ( $SO_2$ ) в количестве  $Q/c_0 = 0,01$ .

На рис. 1-3 для моментів времени  $t = 10, 30, 120$  минут приведены линии уровней поврежденности ели, рассчитанной по формуле (8) с экспоненциальным ядром (9) и параметрами  $a = 3,3 \cdot 10^{-6} c^{-1}$ ,  $c = 5,5087 c^{-1}$ . Составляющие скорости ветра:  $u = 4$  м/с,  $v = 0$ . Коэффициенты горизонтальной и вертикальной диффузии  $\mu = 0,001$  км<sup>2</sup>/с,  $\nu = 1,5 \cdot 10^{-11}$  км<sup>2</sup>/с, характеристика распада аэрозоля  $\sigma = 1 \cdot 10^{-5}$ . Размеры области 8×6 км.

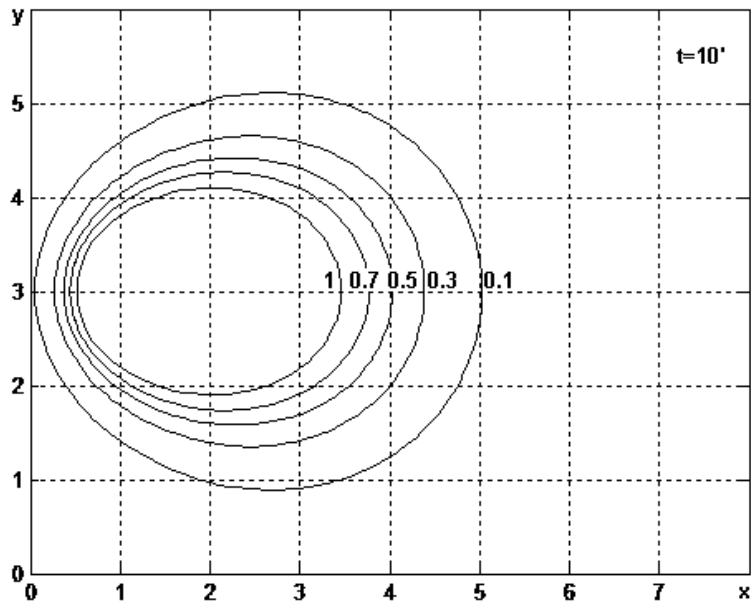


Рис. 1. Линии уровней функции поврежденности для  $t = 10$  мин

На рис. 1-3 внутренний контур, соответствующий величине поврежденности  $\Pi = 1$ , ограничивает область погибших растений. С течением времени эта область вначале увеличивается, достигая максимальных размеров, а затем остается постоянной по величине. Области с поврежденностью  $\Pi < 1$  достигают максимальных размеров, а затем, вследствие самовосстановления растений после прекращения вредного воздействия, постепенно стягиваются к контуру с поврежденностью  $\Pi = 1$ .

На рис. 4 приведены зависимости от времени относительного ущерба  $R_s^*(t) = R_s(t)/(R_0 \rho_0)$ , рассчитанные по формуле (15), для изображенной на рис. 1-3 области размером 8×6 км при различной скорости  $u$  западного ветра ( $v = 0$ ). В случае отсутствия ветра ( $u = 0$ ) предполагалось, что источник загрязнения находится в центре области ( $x_0 = 4, y_0 = 3$  км).

В таблице 1 приведены значения максимального относительного ущерба  $\max R_s^*(t)$  и времени достижения этого максимума  $t_{\max}$  для рассмотренной выше области при

*В.Н. Долгих.* Математическая модель для определения экологического и экономического ущерба при точечном кратковременном выбросе загрязняющих веществ в атмосферу

различных скоростях западного ветра. Для всех случаев источник загрязнения находился в точке с координатами  $x_0 = 1, y_0 = 3$ .

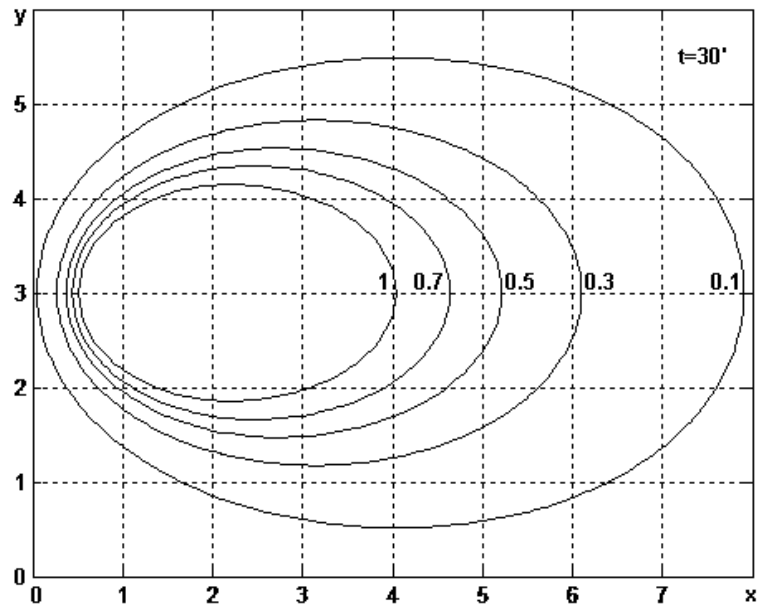


Рис. 2. Линии уровней функции поврежденности для  $t = 30$  мин

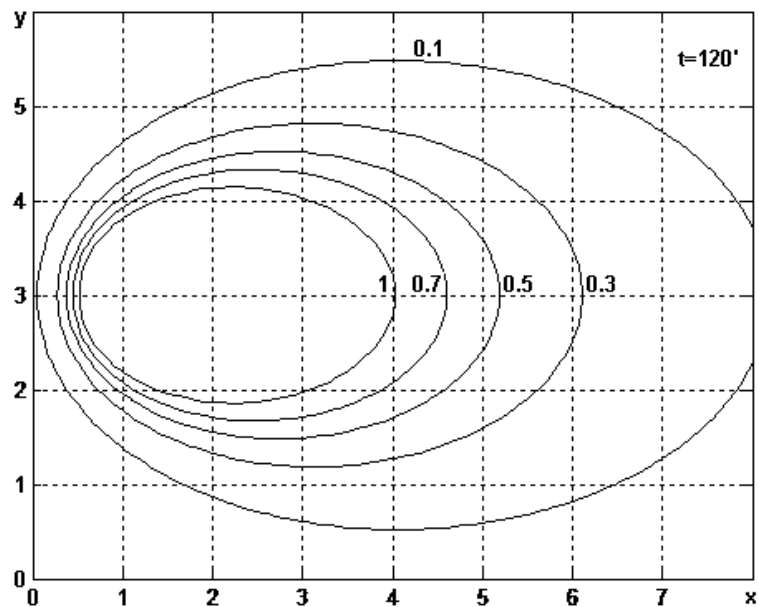


Рис. 3. Линии уровней функции поврежденности для  $t = 120$  мин



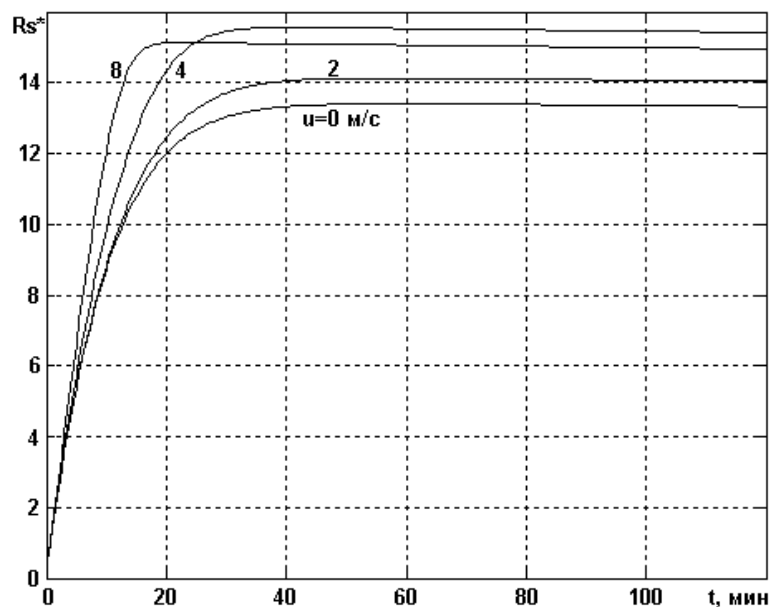


Рис. 4. Залежність відносного ушкодження  $R_s^*(t) = R_s(t)/(R_0\rho_0)$  від часу  $t$  та швидкості вітру  $u$

Таблиця 1 – Залежність максимального відносного ушкодження в розрахунковій області від швидкості вітру  $u$

$u$ , м/с	0	2	4	8	10
$\max R_s^*(t)$	10,65	14,12	15,56	15,13	14,32
$t_{\max}$ , мин	58,5	55,5	41	22,5	18

**Выводы.** В работе предложена математическая модель, позволяющая оценить уровень загрязнения объектов, вызванного кратковременным точечным выбросом загрязняющих веществ в атмосферу, а также уровень поврежденности загрязненных объектов и величину затрат на их восстановление.

Предложенная модель обладает следующими достоинствами:

- требует меньших затрат по сравнению с определением стоимости восстановления объектов в различных зонах посредством измерения (оценки экспертами) уровня их поврежденности;
- позволяет описать размещение зон с различной стоимостью восстановления объектов;
- позволяет быстро и экономично оценивать стоимость восстановления в различных зонах, на больших пространствах и прогнозировать ее при известном прогнозе о массе выброса загрязняющих веществ и атмосферных условиях;
- позволяет планировать природоохранные мероприятия.

Модель может быть использована при расчётах экономического ущерба от загрязнения объектов, вызванного кратковременным точечным выбросом загрязняющих веществ в атмосферу.

1. Берлянд М. Е. Прогноз и регулирование загрязнения атмосферы / М. Е. Берлянд. – Л. : Гидрометеоздат, 1985. – 272 с.
2. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды / Г. И. Марчук. – М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 320 с.
3. Воздействие на окружающую среду кратковременных выбросов большой мощности : учеб. пособие / В. М. Сулонов, Н. Г. Максимович, В. Н. Иванов, В. А. Шкляев. – Пермь : Пермский ун-т, 2005. – 126 с.
4. Кулешов А. А. Математическое моделирование в задачах промышленной безопасности и экологии / А. А. Кулешов // Информационные технологии и вычислительные системы. – 2003. – № 4. – С. 56–70.
5. Долгих В. Н. Применение методов математического моделирования для оценки экономического ущерба от загрязнения окружающей среды / В. Н. Долгих, Я. В. Долгих // Вісник Української академії банківської справи. – 2000. – № 1(8). – С. 92–94.
6. Долгих В. Н. Применение некоторых идей механики разрушения в экологии / В. Н. Долгих, Я. В. Долгих // Вісник Сумського державного університету. – 1995. – № 4. – С. 121–124.
7. Долгих Я. В. Оценка экологических амортизационных отчислений в зависимости от уровня повреждённости природных объектов / Я. В. Долгих // Вісник Української академії банківської справи. – 1998. – № 4. – С. 72–75.
8. Долгих В. Н. Мера повреждённости нагруженных элементов конструкций, находящихся в агрессивной среде / В. Н. Долгих, Я. В. Долгих // Вісник Сумського державного університету. Серія Технічні науки. – 2003. – № 3(49). – С. 179–183.

*Получено 28.02.2011 г.*

**В.М. Долгих**

**Математична модель для визначення екологічного та економічного збитку при точковому короткочасному викиді забруднюючих речовин в атмосферу**

*Пропонується математична модель, що описує процеси поширення забруднень в атмосфері при точковому короткочасному викиді, процеси пошкодження об'єктів, що потрапили у зону забруднення, дозволяє оцінити величину збитку від забруднення навколишнього середовища.*

*Ключові слова: математична модель, забруднення навколишнього середовища, короткочасний викид, процес пошкодження об'єктів, функція пошкодження, економічний збиток.*

**V.M. Dolgikh**

**Mathematical model for estimation of the ecological and economic damages in consequence of short-time eruption of pollutions into atmosphere**

*Considered a mathematical model, describing processes of the spreading the pollution in atmosphere from short-time source, processes of the damaging of objects in zone of the contamination, allowing to evaluate the damage in consequence of environmental pollutions.*

*Keywords: mathematical model, environmental pollutions, short-time eruption, processes of the damaging, ecological and economic damages.*