условие (6), мы не только уменьшаем число независимых неизвестных параметров в уравнениях, снижая тем самым и роль экспериментальных ошибок, но прежде всего изменяем функциональную зависимость от параметров ρ, ρ_1 и ρ_2 в инвариантных соотношениях, сужая ее в пространстве этих параметров. А это и приводит к другим результатам.

Определение параметров компенсатора ρ, ρ_1 и ρ_2 с учетом соотношения (6) позволило существенно улучшить результаты, связанные с практической реализацией однозонной методики эллипсометрических измерений.

Изложенный подход к оптической юстировке компенсатора позволяет также *более корректно подойти к вопросу устранения влияния* оптической активности компенсатора путем переопределения юстировочных параметров оптических элементов эллипсометра [4,5].

SUMMARY

The paper discusses the alignment of the ellipsometer compensator, arising from the nondiagonal structure of the compensator Jones matrix.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Семененко А. И., Бобро В. В. О метрологическом обеспечении эллипсометрии (общий подход) // Автометрия, 1997.- № 1.- С.43-49.
2. Семененко А.И., Миронов Ф.С. О проявлении оптической активности кристаллического компенсатора в эллипсометрии // УФЖ, 1982.- Т.27.- № 3.- С.338-344.
3. Ржанов А.В., Свиташев К.К., Семененко А.И. и др. Основы эллипсометрии.- Новосибирск: Наука, 1979.- С.422.
4. Пахомов А.Г., Константинова А.Ф. Метод юстировки эллипсометра, устраняющий влияние оптической активности компенсатора // ЖТФ, 1981.- Т.51.- Вып.2.- С.442.
5. Свиташев К.К., Хасанов Т. Учет оптической активности компенсатора при юстировке эллипсометра // Оптика и спектроскопия, 1986.- Т.61.- № 2.- 399с.

Поступила в редколлегию 9 июня 1999 г.

УДК 623.437

ОПТИМАЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ЗА ФУНКЦІОНАЛАМИ НА ОПТИМАЛЬНИХ ТРАЄКТОРІЯХ

Г.П.Коваленко, доц.; І.О.Шуда, асп.

Традиційний підхід оптимального проектування динамічних систем не використовує функцій керування, які повинні задовольняти певний критерій. Тобто для побудови функціонала якості використовують будь-які фазові траєкторії, які задовольняють граничні умови. В роботі пропонується певне узагальнення алгоритму, коли спочатку знаходять оптимальні траєкторії, на основі яких будують функціонал якості, мінімізуючи який і знаходять оптимальні значення параметрів.

Розглядається динамічна система зі сталими параметрами:

$$\dot{\bar{y}} = A\bar{y} + Bu; \quad A = \left\| a_{ij} \right\|, \quad i, j = 1, n, \tag{1}$$

де елементи матриці a_{ij} описують властивості системи і виражаються через її початкові або первісні параметри. Частина останніх або всі вони визначаються лише після проходження системою оптимальної траєкторії під дією скалярної функції керування u, яка мінімізує інтеграл

$$I = \int_0^{t_f} u^2(t)dt \quad . \qquad (2)$$

Отже, матриця A і матриця-стовпчик B вважаються такими, що задовольняють умову керованості системи

$$Rank\left[B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B\right] = n ,$$

а також умову скалярної керованості [1]: кожному власному значенню матриці A відповідає один елементарний дільник. Задається вектор початкових умов $\bar{y}(0) = \bar{y}_0$ і множина досягнення $Д$: гіперплощина або область в ній, куди попадають фазові координати при $t = t_f$, де t_f може бути як заданим, так і шуканим. В найпростішому випадку область $Д$ можна записати так: $\sum \sigma_i y_i(t_f) = C$, де σ_i - константи.

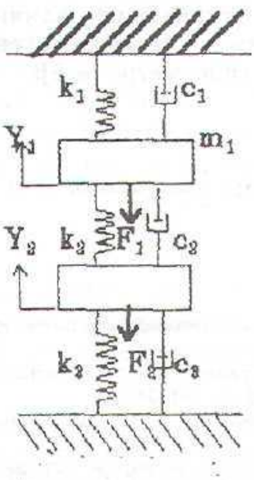

Рисунок 1

Оскільки матриця A має функціональні елементи, а для інтегрування системи диференціальних рівнянь потрібні власні значення матриці A, які знаходяться, як правило, чисельними методами навіть у випадку числових елементів, то використання чисельних методів передбачається з самого початку і в великих обсягах. У зв'язку з цим стає необхідним розглядання питань, пов'язаних з пошуками аналітичних методів, *можливостей підвищення їх ефективності, класифікації задач за рівнем* їх алгоритмічної складності, декомпозиції складних задач на більш прості і т. д. Саме поняття ефективно розв'язуваної задачі не має загального визначення і сумнівно, що останнє взагалі існує. Для окреслених задач оптимального проектування можна вважати задачу ефективно розв'язуваною, якщо вдається знайти фазові координати системи як явні функції невідомих параметрів проектування. А останнє стає можливим при даному функціоналі (2), коли характеристичний многочлен матриці A є звідним в полі раціональних функцій його коефіцієнтів, а точніше, коли він зводиться до добутку лінійних, квадратних і біквадратних многочленів. Цьому сприяє дефект заповнення матриці, тобто кількість нульових елементів матриці і наявність симетрій або лінійних співвідношень у множині ненульових елементів. Для задач невеликої розмірності пошук таких співвідношень не становить проблеми. Нехай стало відомо, що характеристичний многочлен матриці A системи стає звідним у згаданому вище розумінні, коли на m параметрів проектування накласти $p<m$ лінійних співвідношень. Тоді в ролі параметрів проектування доцільно взяти решту m-p параметрів з урахуванням знайдених співвідношень. Теоретичним підгрунтям цього принципу є теорема А.Кренера про декомпозицію аналітичних систем [2].

Нижче наводиться приклад такої системи і відповідних співвідношень. На рис.1 показана механічна система з двома ступенями свободи, яка містить 8 структурних параметрів: три жорсткості k_i, три коефіцієнти розсіювання енергії c_i, дві маси m_i і три зовнішні параметри, а саме: дві амплітуди Q_i прикладених сил і частоту ω .

Легко показати, що система рівнянь руху має вигляд

$$\dot{\vec{z}} = A_1\vec{z} + B_1 \exp(i\omega t).$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k_1+k_2}{m_1} & -\dfrac{c_1+c_2}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} & \dfrac{k_1}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_2}{m_2} & \dfrac{c_2}{m_2} & -\dfrac{k_2+k_3}{m_2} & -\dfrac{c_2+c_3}{m_2} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ Q_1 \\ 0 \\ Q_2 \end{pmatrix}.$$

Як видно, матриця системи має дефект заповнення, що дорівнює 6, але так сталося за рахунок переходу від рівнянь другого до рівнянь першого порядку. Далі прийнято, що між параметрами існують такі співвідношення:

$$m_1 = q^2 m_2; \qquad c_1 + c_2 = q^2(c_2 + c_3); \qquad k_1 + k_2 = q^2(k_2 + k_3).$$

Тоді модифікована матриця має вигляд

$$A_1' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -b & -a & \beta/q^2 & \alpha/q^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta & \alpha & -b & -a \end{pmatrix}.$$

Одержано систему, яка описується п'ятьма параметрами, що залишає достатньо простору для пошуку оптимальних значень параметрів. В той же час сам пошук переважно можна виконати аналітичними способами.

Далі реалізується викладений підхід на прикладі системи (1) з такими матрицями:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2b & -a & b & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ b & a & -2b & -a \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Початкові умови: $\vec{y}(0) = (d_1, 0, d_2, 0)$. При $t = t_f$ повинно виконуватись співвідношення $y_1(t_f) + y_3(t_f) = C$.

Оптимальні значення параметрів знаходять шляхом мінімізації функціонала $S(a, b, t_f)$: $S(a, b, t_f) = y_2(t_f) - y_4(t_f)$.

Застосування техніки варіаційних задач на умовний екстремум приводить до спряженої системи рівнянь і функції керування u:

$$\dot{\vec{\lambda}} = -A^T\vec{\lambda}, \quad \lambda_1 = \lambda_3 = \nu, \quad \lambda_2 = \lambda_4 = 0, \quad t = t_f,$$
$$u = -\frac{1}{2}(\alpha\lambda_2 + \beta\lambda_4). \tag{4}$$

Інтегрування спряженої системи (4) легше виконати в нових змінних:
$\lambda_1 + \lambda_2 = z_1, \qquad \lambda_2 + \lambda_4 = z_2, \qquad \lambda_1 - \lambda_3 = z_3, \qquad \lambda_2 - \lambda_4 = z_4.$

Тоді спряжена система розпадається на дві системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \ddot{z}_2 + bz_2 = 0, \\ z_1 = \dot{z}_2; \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{z}_4 - 2a\dot{z}_4 + 3bz_4 = 0, \\ \dot{z}_3 = 3bz_4. \end{cases}$$

Їх загальні інтеграли мають вигляд:

$$z_1 = \sqrt{b}(C_1 \sin\sqrt{b}t - C_2 \cos\sqrt{b}t), \qquad z_2 = C_1 \cos\sqrt{b}t + C_2 \sin\sqrt{b}t,$$

$$z_3 = 3be^{at}\left\{\left(C_3 a - C_4 R\right)\cos Rt + \left(C_3 R + C_4 a\right)\sin Rt\right\}, \qquad R = \sqrt{3b - a^2},$$

$$z_4 = e^{at}\left[C_3 \cos Rt + C_4 \sin Rt\right].$$

Граничні умови, записані в нових змінних:

$$z_1(t_f) = (\lambda_1 + \lambda_3)\Big|_{t_f} = 2\nu, \qquad z_2(t_f) = (\lambda_2 + \lambda_4)\Big|_{t_f} = 0,$$

$$z_3(t_f) = (\lambda_1 - \lambda_3)\Big|_{t_f} = 0, \qquad z_4(t_f) = (\lambda_2 - \lambda_4)\Big|_{t_f} = 0,$$

приводять до таких значень констант:

$$C_1 = \frac{2\nu}{\sqrt{b}}\sin\sqrt{b}t_f, \qquad C_2 = -\frac{2\nu}{\sqrt{b}}\cos\sqrt{b}t_f, \qquad C_3 = C_4 = 0,$$

що дає для функції керування

$$u = -\frac{\alpha\lambda_2 + \beta\lambda_4}{2} = \frac{\nu(\alpha + \beta)}{2\sqrt{b}}\sin\sqrt{b}(t - t_f).$$

Інтегрування вихідної системи (1) з матрицями (3) здійснюється в нових змінних η_i:

$$\begin{matrix} y_1 + y_3 = \eta_1, & y_1 - y_3 = \eta_3, \\ y_2 + y_4 = \eta_2, & y_2 - y_4 = \eta_4, \end{matrix}$$ для яких одержано:

$$\eta_1 = (d_1 + d_3)\cos\sqrt{b}t + \nu(\alpha + \beta)b^{-1}\cos\sqrt{b}t_f \cdot \sin\sqrt{b}t -$$

$$- \nu t(\alpha + \beta)b^{-\frac{1}{2}}\cos\sqrt{b}(t - t_f),$$

$$\eta_2 = \sqrt{b}\left[-(d_1 + d_3)\sin\sqrt{b}t + \nu(\alpha + \beta)b^{-1}\cdot\cos\sqrt{b}t_f\cos\sqrt{b}t\right] -$$

$$- \nu(\alpha + \beta)b^{-\frac{1}{2}}\left[\cos\sqrt{b}(t - t_f) - t\sqrt{b}\sin\sqrt{b}(t - t_f)\right],$$

$$\eta_3 = e^{-at}R^{-1}(d_1 - d_3)(a\sin Rt - R\cos Rt),$$

$$\eta_4 = -3e^{-at}R^{-1}b(d_1 - d_3)\sin Rt.$$

Множник ν знаходять з рівняння $y_1(t_f) + y_3(t_f) = \eta_1(t_f) = C$, що дає

$$\nu = \frac{\left[C - (d_1 + d_3)\cos\sqrt{b}t_f\right]b}{(\alpha + \beta)\left[\sin(2\sqrt{b}t_f) - 2\sqrt{b}t_f\right]}.$$

Мінімізуючи функціонал $S(a, b) = \eta_4(a, b) = y_2(t_f) - y_4(t_f)$, знаходимо

$S_{,a} = S_{,b} = 0$, з яких випливає: $a = \dfrac{2}{t_f}$, $\quad b = \dfrac{4}{3t_f^2}$.

Як бачимо, при таких значеннях a і b корінь знаменника у виразі V не перетворюється в нуль, всі фазові координати мають сенс, зокрема

$$\eta_4(t_f) = -\frac{4e^{-2}(d_1 - d_3)}{t_f} \quad \left(\frac{M}{C}\right).$$

Після елементарних перетворень для функції керування знайдено остаточний вираз

$$u = \frac{\left[C - (d_1 + d_3)\cos\theta\right]\sin\left[\theta\left(\dfrac{t}{t_f} - 1\right)\right]}{\sqrt{3}t_f(\sin 2\theta - 2\theta)}, \qquad \theta = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Вона обертається в нуль при досягненні мети, тобто при $t = t_f$, її модуль обернено пропорційний часу t_f, що цілком логічно: чим менший час керування, тим більше зусиль слід прикласти для досягнення мети.

SUMMARY

Authors have united the design optimization algorithm of dynamic systems with constant parameters together with optimized control without limitations on control functions algorithm.

At first the optimized trajectories as functions of the design parameters are calculated. The functional, minimization of which gives determinating parameters of the design, is formed on optimized trajectories. For creatining the trajectories in analytical form, the principle of virtual dependence of optional parameters i.e. they are influenced by connections, which come the characteristic equation of system matrix to the form of product of quadrat and biquadrat polynomials, is suggested. Available base for such an assumption is presented with the help of the theory of analytical systems decomposition.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ли Э.Б.,Маркус Л. Основы теории оптимального управления.-М.: Наука, 1972. -576с.
2. Krener A. A decomposition theory for differentiable systems.-SIAMJ, Control Optim., 15, 1977.- P.813-829.

Надійшла до редколегії 2 грудня 1998 р.

УДК 511.215

АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМОВ ПОЛУЧЕНИЯ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

З.И.Маслова, доц.; В.А.Цыбульник, студ.; С.В.Кохан, студ.

Случайно выбранные числа оказываются полезными для самых различных целей: в имитационном моделировании, задачах оптимизации, испытания эффективности различных алгоритмов для вычислительных машин, в теории и стратегии игр. Поэтому в математике и программировании актуальной является задача получения случайных последовательностей.

Раньше учёные, нуждавшиеся в случайных числах, раскладывали карты, бросали кости, вытаскивали шары из урны, составляли специальные таблицы, содержащие случайные цифры, взятые, например, из переписи населения, конструировали специальные машины,